

Übungen zu Analysis II

Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte). Sei $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Sei

$$l_1 := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} : x_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}$$

die Menge der absolut summierbaren Folgen in \mathbb{K} . Wie üblich sei

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} + (y_n)_{n \in \mathbb{N}} := (x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

und

$$a(x_n)_{n \in \mathbb{N}} := (ax_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

für alle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_1$ und alle $a \in \mathbb{K}$. Zeige:

a) l_1 ist, versehen mit der oben definierten Addition und Multiplikation, ein Vektorraum über \mathbb{K} .

b) Durch

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\infty} := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|,$$

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

für alle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_1$ werden Normen auf l_1 definiert.

c) Es gilt

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_{\infty} \leq \|(x_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_1$$

für alle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_1$. Die duale Ungleichung gilt nicht, denn es gibt Folgen $(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}\|_{\infty} = 0,$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}\|_1 = \infty,$$

d) Sei $0 \leq a \leq \infty$ und $p = 1$ oder $p = \infty$. Es gibt Folgen $(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$, $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_n^{(k)}| = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, aber

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(x_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}\|_p = a.$$

Aufgabe 2. a) Seien $a, b, c \geq 0$ und $a \leq b + c$. Zeige, dass

$$\frac{a}{1+a} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$$

gilt. (1 Punkt)

b) Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass durch

$$d(x, y) := \frac{\|x - y\|}{1 + \|x - y\|}$$

eine Metrik auf \mathbb{R}^n definiert wird. (1 Punkt)

c) Es gilt $0 \leq d(x, y) < 1$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$. (1 Punkt)

d) Die Metrik wird nicht von einer Norm induziert, d.h. es gibt keine Norm $\|\cdot\|_d$ auf \mathbb{R}^n mit $d(x, y) = \|x - y\|_d$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$. (2 Punkte)

Aufgabe 3. a) Für Teilmengen A und B eines normierten Raumes $(E, \|\cdot\|)$ definieren wir $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Sind A und B offen, so auch $A + B$. (2 Punkte)

b) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist für jedes $r \in \mathbb{R}_+$ und jedes $z \in X$ die Menge $K_r(z) := \{x \in X \mid d(x, z) \leq r\}$ abgeschlossen in X . (2 Punkte)

c) Zeige, dass eine Teilmenge Y eines metrischen Raumes genau dann offen ist, wenn $Y \cap \partial Y = \emptyset$, und dass Y genau dann abgeschlossen ist, wenn $\partial Y \subset Y$. (2 Punkte)

Aufgabe 4 (4 Punkte). Sei X ein metrischer Raum, und $Y \subset X$. Beweise:

a) Sei $x \in Y$. Dann gilt:

$$x \in \overset{\circ}{Y} \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subset Y.$$

b) $\overset{\circ}{Y}$ ist die Vereinigung aller in Y enthaltenen offenen Mengen.