SS 2009
M. Röckner

Übungen zu Analysis II

Blatt 9

Aufgabe 1 (2 Punkte)**.** *Es sei* $g(x) := \arctan\sqrt{x^2-1}$ *für* $x \in \mathbb{R}$ *mit* $x^2 > 1$. *Mit der Schreibweise* $y = g(x)$ *gilt dann offenbar*

$$(\tan y)^2 + 1 - x^2 = 0.$$

Benutze diese Gleichheit, um die Ableitung von g *zu berechnen.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *In welchen Punkten des* $\mathbb{R}^3$ *ist das Gleichungssystem*

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 0 \\ y^2 - z^2 &= 0 \end{aligned}$$

nach (x, y) *auflösbar? Zeige insbesondere, dass das System bei* $(1, 1, 1)$ *lokal nach* (x, y) *auflösbar ist und bestimme die Ableitung der implizit definierten Abbildung.*

Aufgabe 3* (8 Punkte)**.** Seien $U_1 \subset \mathbb{R}^k$, $U_2 \subset \mathbb{R}^m$ offen und es erfülle $F : U_1 \times U_2 \to \mathbb{R}^m$, die Voraussetzungen aus dem Satz über implizite Funktionen (Satz 8.3), d.h. F ist stetig differenzierbar und $(a, b) \in U_1 \times U_2$ mit

i) $F(a, b) = 0$,

ii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)$ invertierbar.

Es soll die Existenz und Eindeutigkeit der impliziten Funktion g mit Hilfe des Banach'schen Fixpunktsatzes bewiesen werden. Hierzu zeige:

a) Ohne Einschränkung reicht es den Fall $(a, b) = (0, 0)$ zu betrachten.

b) Sei $D := \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0)$. Dann ist die Abbildung

$$G(x, y) := y - D^{-1}F(x, y)$$

in U stetig differenzierbar und es gilt

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow G(x, y) = y.$$

c) Es gibt Nullumgebungen $W_1 \subset R^k$, $W_2 \subset \mathbb{R}^m$ mit $W_1 \times W_2 \subset U$, so dass

$$\left\| \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) \right\| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für } x \in W_1,\ y \in W_2.$$

(Hinweis: Zeige zunächst $\frac{\partial G}{\partial y}(0, 0) = 0$.)

d) Die Abbildung G ist eine Kontraktion auf $\bar{V}_2 := \{y \in \mathbb{R}^m | \, \|y\| \leq r\}$, wobei $r > 0$ klein genug ist, so dass $\bar{V}_2 \subset W_2$ gilt. Genauer: Es existiert eine Nullumgebung $V_1 \subset W_1$, so dass

$$\|G(x,y) - G(x,y')\| \leq \frac{1}{2} \|y - y'\| \quad \text{für } x \in V_1,\ y,\, y' \in \bar{V}_2,$$

(Hinweis: Mittelwertsatz) und für jedes $x \in V_1$ gilt

$$\|G(x,y)\| \leq r \quad \text{für } x \in V_1,\ y \in \bar{V}_2.$$

(Hinweis: Zeige $\|G(x,0)\| \leq \frac{r}{2}$ für $x \in V_1$).

e) Folgere aus dem Banach'schen Fixpunktsatz die Existenz und Eindeutigkeit einer Abbildung $g : V_1 \to V_2$ mit $F(x, g(x)) = 0$.