SS 2009
M. Röckner

Übungen zu Analysis II

Blatt 1

Aufgabe 1. *a) Zeige: Ein System von Teilmengen $\mathcal{A}$ einer Grundmenge Ω ist genau dann eine Algebra, wenn $\Omega \in \mathcal{A}$, $A^c \in \mathcal{A}$, falls $A \in \mathcal{A}$, und $A \cup B \in \mathcal{A}$, falls $A, B \in \mathcal{A}$.* *(2 Punkte)*

b) Seien $\mathcal{A}_i$ σ-Algebren auf Ω_i, $i = 1, 2$, und $T : \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung. Zeige, dass $\{T^{-1}(B) | B \in \mathcal{A}_2\}$ und $\{B \subset \Omega_2 | T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ σ-Algebren auf Ω_1 bzw. Ω_2 sind. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2. *Sei $\mathcal{E}$ ein System von Teilmengen einer Grundmenge Ω. Zeige, dass es einen kleinsten Ring $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ auf Ω gibt, der $\mathcal{E}$ enthält.* *(3 Punkte)*

Aufgabe 3. *Sei Ω eine unendliche Menge.*

a) Sei Ω abzählbar und sei durch

$$\mathcal{A}_1 := \{A \subset \Omega | A \textit{ oder } A^c \textit{ ist endlich } \}$$

eine Algebra auf Ω definiert. Zeige, dass die durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } A \textit{ endlich} \\ +\infty & \textit{falls } A^c \textit{ endlich} \end{cases}$$

definierte Funktion $\mu : \mathcal{A}_1 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein additives, aber kein σ-additives Maß ist. *(2 Punkte)*

b) Sei Ω überabzählbar und sei durch

$$\mathcal{A}_2 := \{A \subset \Omega | A \textit{ oder } A^c \textit{ ist abzählbar } \}$$

eine Algebra auf Ω definiert. Zeige, dass die durch

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \textit{falls } A \textit{ abzählbar} \\ 1 & \textit{falls } A^c \textit{ abzählbar} \end{cases}$$

definierte Funktion $\mu : \mathcal{A}_2 \to \overline{\mathbb{R}}_+$ ein Maß ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4. *Sei $\mathcal{R}$ ein Ring und μ ein additives Maß auf $\mathcal{R}$. Zeige für $A, B, A_1, \ldots, A_N$ aus $\mathcal{R}$:*

a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,

b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ falls $A \subset B$,

c) $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$ falls $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$,

d) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n)$,

e) Ist $(A_n)_{n \geq 1}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \geq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

(Je 1 Punkt)