Übungen zu Analysis III

Aufgabe 1. *Sei* $f : (0, \frac{2\pi}{9}) \times (-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{18}) \to \mathbb{R}^3$ *durch*

$$f(\phi, \psi) = (\cos(\phi) \cdot \cos(\psi), \sin(\phi) \cdot \cos(\psi), \sin(\psi))$$

für alle $\phi \in (0, \frac{2\pi}{9})$ *und alle* $\psi \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{18})$ *gegeben. Berechnen Sie* $\mathrm{Vol}_2(\mathrm{im}(f))$.

Aufgabe 2. *Seien* $a, b \in (0, \infty)$ *und sei*

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{z}{b}\right)^2 = 1 \right\}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{Vol}_2(M)$.

Aufgabe 3. *Sei* $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *durch*

$$f(x_1, \dots, x_4) = \big(x_1 x_3 - x_2^2, x_2 x_4 - x_3^2, x_1 x_4 - x_2 x_3\big)$$

für alle $x = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$ *gegeben. Zeigen Sie, dass* $f^{-1}(0) \setminus \{0\}$ *eine* 2*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^4$ *ist.*

Aufgabe 4. *Seien* $k, n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^n$ *und sei* C *eine* $n \times n$*-Matrix mit* $C^T C = I$. *Sei zudem* $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine* k*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^4$, $A \subset M$ *eine integrierbare Teilmenge von* M *und sei* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *durch*

$$F(x) = a + C \cdot x$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ *gegeben. Zeigen Sie, dass* $F(A)$ *eine integrierbare Teilmenge der* k*-dimensionalen Untermannigfaltigkeit* $F(M) \subset \mathbb{R}^n$ *ist und dass* $\mathrm{Vol}_k(F(A)) = \mathrm{Vol}_k(A)$ *gilt.*