WS 09/10
M. Röckner
Blatt 9

# Übungen zu Analysis III

**Aufgabe 1.** *Seien* $n, m \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *und sei* $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine* $k$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^n$. *Zeigen Sie, dass dann*

$$\Big\{(m_1, \ldots, m_n, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+m} \,\Big|\, (m_1, \ldots, m_n) \in M\Big\}$$

*eine* $k$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^{n+m}$ *ist. Insbesondere ist* $S_1 \times \{0\}$ *eine* 1*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$.

**Aufgabe 2.** *Seien* $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *offen und sei* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass der Graph von* $f$ *eine* $n$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^{n+m}$ *ist.*

**Aufgabe 3.** *Seien* $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *und sei* $M \subset \mathbb{R}^n$ *eine* $k$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^n$. *Seien zudem* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offen mit* $M \subset U$ *und sei* $\Phi : U \to V$ *ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass* $\Phi(M)$ *eine* $k$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^n$ *ist und dass insbesondere* $M + a = \{m + a \in \mathbb{R}^n \,|\, m \in M\}$ *für jedes* $a \in \mathbb{R}^n$ *eine* $k$*-dimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^n$ *ist.*

**Aufgabe 4.** *Sei* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *durch*

$$f(x, y, z) = \big(x^2 + xy - y - z, 2x^2 + 3xy - 2y - 3z\big)$$

*für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *gegeben. Zeigen Sie, dass* $f^{-1}(0)$ *eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$ *ist.*