

Einschub: Der Satz von Dini, die Approximationssätze

von Stone und Weierstraß

(reicht: Hausdorffscher topologischer Raum  $\nabla$ )

Es sei  $E$  ein metrischer Raum und  $\mathcal{C}(E)$  der Raum aller stetigen beschränkten reellen Funktionen auf  $E$  versehen mit der Supremumsnorm. Eine Teilmenge  $\mathcal{G}$  von  $\mathcal{C}(E)$  heißt aufsteigend (absteigend) filtrierend, wenn es für alle  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$  ein  $g \in \mathcal{G}$  gibt mit  $g_1 \leq g$  und  $g_2 \leq g$  ( $g \leq g_1$  und  $g \leq g_2$ ). Durch vollständige Induktion ergibt sich sofort, daß für jede aufsteigend filtrierende Teilmenge  $\mathcal{G}$  von  $\mathcal{C}(E)$  und endlich viele  $g_1, \dots, g_m \in \mathcal{G}$  eine Funktion  $g \in \mathcal{G}$  existiert mit  $g_j \leq g$  für alle  $1 \leq j \leq m$ . Entsprechend für absteigend filtrierende Teilmengen.

E.1. Satz: Es sei  $E$  kompakt,  $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}(E)$  und  $f \in \mathcal{C}(E)$ .

Ist  $\mathcal{G}$  aufsteigend filtrierend und  $\sup \mathcal{G} > f$ , so existiert ein  $g \in \mathcal{G}$  mit  $g > f$ .

Ist  $\mathcal{G}$  absteigend filtrierend und  $\inf \mathcal{G} < f$ , so existiert ein  $g \in \mathcal{G}$  mit  $g < f$ .

Bem. reicht:  $\mathcal{G}$  besteht aus unterhalbstetigen Funktionen,  $f$  oberhalbstetig im 1. Fall bzw. " " " oberhalbstetigen " "  $f$  unterhalbstetig im 2. Fall

Beweis. Es sei  $\mathcal{G}$  aufsteigend filtrierend und  $\sup \mathcal{G} > f$ . Für alle  $x \in E$  existiert dann ein  $g_x \in \mathcal{G}$  mit  $g_x(x) > f(x)$ .

$U_x := \{y \in E: g_x(y) > f(y)\}$  ist eine offene Menge, die  $x$  enthält. Die  $U_x$ ,  $x \in E$ , bilden also eine offene Überdeckung von  $E$ .

Da  $E$  kompakt ist, existieren endlich viele  $x_1, \dots, x_n \in E$  mit  $E = \bigcup_{j=1}^n U_{x_j}$ . Da  $\mathcal{G}$  aufsteigend filtrierend ist, gibt es ein  $g \in \mathcal{G}$

mit  $g \geq g_{x_j}$  für alle  $1 \leq j \leq n$ . Es sei nun  $y$  ein beliebiger

Punkt aus  $E$ . Dann gibt es ein  $1 \leq j \leq n$  mit  $y \in U_{x_j}$ . Es ist

dann also  $g(y) \geq g_{x_j}(y) > f(y)$ . Also ist  $g > f$ .

Die zweite Aussage ergibt sich, indem man alle Funktionen durch ihr Negatives ersetzt.  $\square$

E.2. Korollar (Satz von Dini): Es sei  $E$  kompakt und  $(f_n)$  eine Folge in  $\mathcal{C}(E)$ , die monoton (also isoton oder antiton) gegen eine Funktion  $f \in \mathcal{C}(E)$  konvergiert. Dann konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$ .

Bem. reicht:  $(f_n)$  isoton,  $f_n$  unterhalbstetig  $\forall n$ ,  $f$  oberhalbstetig  
bzw.  $(f_n)$  antiton,  $f_n$  oberhalbstetig  $\forall n$ ,  $f$  unterhalbstetig

Beweis. Konvergiert etwa  $(f_n)$  isoton gegen  $f$ , so ist für jedes  $\epsilon > 0$

$$\sup f_n > f - \epsilon.$$

Nach E.1 existiert also ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  mit

$$f_{n_0} > f - \epsilon,$$

und wir erhalten für alle  $n \geq n_0$

$$f - \epsilon < f_{n_0} \leq f_n \leq f,$$

also

$$|f - f_n| < \epsilon. \quad \square$$

E.3. Satz: Es sei  $E$  kompakt und enthalte wenigstens zwei Punkte. Für jede Teilmenge  $\mathcal{M}$  von  $\mathcal{C}(E)$  sind dann die folgenden beiden Aussagen äquivalent:

I.  $\mathcal{M}$  liegt dicht in  $\mathcal{C}(E)$  bezüglich gleichmäßiger Konvergenz.

II. a. Für alle  $f \in \mathcal{C}(E)$  ist  $\{g \in \mathcal{M} : g < f\}$  aufsteigend und  $\{g \in \mathcal{M} : g > f\}$  absteigend filtrierend.

b. Für alle  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  ist

$\{(g(x), g(y)) : g \in \mathcal{M}\}$  eine dichte Teilmenge von  $\mathbb{R}^2$ .

Beweis. Es gelte zunächst (II). Es sei  $f \in \mathcal{C}(E)$  und  $\epsilon > 0$ . Zu finden ist  $g \in \mathcal{M}$  mit  $|g-f| < \epsilon$ . Für beliebiges  $x \in E$  betrachten wir zunächst die Familie

$$\mathcal{G}_x := \{g \in \mathcal{M} : g(x) < f(x) + \epsilon\}.$$

Zeige:

a)  $\mathcal{G}_x$  ist aufsteigend filtrierend,

b)  $\sup \mathcal{G}_x > f - \epsilon$ . (Insbesondere:  $\mathcal{G}_x \neq \emptyset$ !)

Zunächst zu (a). Seien  $g_1, g_2 \in \mathcal{G}_x$ . Setzen wir  $h_0 = \sup(g_1, g_2)$ , so ist  $h_0 \in \mathcal{C}(E)$  und  $h_0(x) < f(x) + \epsilon$ . Es sei  $h := h_0 + (f(x) + \epsilon - h_0(x))$ . Dann ist  $h \in \mathcal{C}(E)$  und  $g_1 < h$ ,  $g_2 < h$ . Nach Eigenschaft (IIa) existiert daher ein  $g \in \mathcal{M}$  mit  $h_0 \leq g < h$ . Insbesondere ist  $g(x) < h(x) = f(x) + \epsilon$ . Also ist  $g \in \mathcal{G}_x$ .

Nun zu (b). Es sei  $y \in E$ ,  $y \neq x$ . Nach Eigenschaft (IIb) gibt es ein  $g_y \in \mathcal{M}$  mit  $|g_y(x) - f(x)| < \epsilon$  und  $|g_y(y) - f(y)| < \epsilon$ . Dieses  $g_y$  liegt offenbar in  $\mathcal{G}_x$ , und es ist  $g_y(y) > f(y) - \epsilon$ ,  ~~$g_y(x) > f(x) - \epsilon$~~ . Also ist  $\sup \mathcal{G}_x > f - \epsilon$ .

Nach Satz E.1 existiert daher ein  $g \in \mathcal{G}_x$  mit  $g > f - \epsilon$ .

Betrachten wir nun die Menge

$$\mathcal{G} := \{g \in \mathcal{M} : g > f - \epsilon\},$$

so gibt es also zu jedem  $x \in E$  ein  $g \in \mathcal{G}$  mit  $g(x) < f(x) + \epsilon$ , d.h. es ist  $\inf \mathcal{G} < f + \epsilon$ . Da  $\mathcal{G}$  nach Eigenschaft (IIa) absteigend filtrierend ist, gibt es also nach Satz E.1 ein  $g \in \mathcal{G}$  mit  $g < f + \epsilon$ . Für dieses  $g$  ist dann

$$f - \epsilon < g < f + \epsilon,$$

also  $|g-f| < \epsilon$ .

Es gelte nun umgekehrt (I). Es sei  $f \in \mathcal{C}(E)$  und  $g_1, g_2 \in \mathcal{M}$  mit  $\sup(g_1, g_2) < f$ . Dann gibt es <sup>(da  $E$  komp.)</sup> ein  $\epsilon > 0$  mit

$$\sup(g_1, g_2) < f - 2\epsilon$$

und ein  $g \in \mathcal{M}$  mit

$$|g - (f - \epsilon)| < \epsilon.$$

Es ist dann

$$\sup (g_1, g_2) < f - 2\epsilon < g < f.$$

Also ist  $\{g \in \mathcal{M} : g < f\}$  aufsteigend filtrierend. Entsprechend sieht man, daß  $\{g \in \mathcal{M} : g > f\}$  absteigend filtrierend ist.

Sind  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , so gibt es stets ein  $f \in \mathcal{C}(E)$  mit  $f(x) = \alpha$ ,  $f(y) = \beta$ , z.B.  $f: z \mapsto \frac{1}{d(x,y)} (\alpha d(z,y) + \beta d(z,x))$ .

Wählen wir dazu ein  $g \in \mathcal{M}$  mit  $|g-f| < \epsilon$ , so ist

$$\|(g(x), g(y)) - (\alpha, \beta)\| < 2\epsilon.$$

□

④ E.4. Definition: Es sei  $\mathcal{M}$  eine Menge von reellen Funktionen

auf  $E$ .  $\mathcal{M}$  heißt punktetrennend ( $\mathcal{M}$  trennt die Punkte von  $E$ ), wenn zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in E$  ein  $g \in \mathcal{M}$  mit  $g(x) \neq g(y)$  existiert.

$\mathcal{M}$  heißt verschränkt punktetrennend, wenn zu je zwei verschiedenen Punkten  $x, y \in E$  zwei Funktionen  $g, h \in \mathcal{M}$  existieren mit

$$g(x) h(y) \neq g(y) h(x).$$

Bemerkung: Es sei  $\mathcal{M}$  eine Menge reeller Funktionen auf  $E$ . Ist  $\mathcal{M}$  verschränkt punktetrennend, so ist  $\mathcal{M}$  punktetrennend. Ist umgekehrt  $\mathcal{M}$  punktetrennend und  $1 \in \mathcal{M}$ , so ist  $\mathcal{M}$  verschränkt punktetrennend.

Es sei  $\mathcal{M}$  ein linearer Teilraum von  $\mathcal{C}(E)$ . Dann sind die folgenden drei Aussagen äquivalent:

- Für alle  $g \in \mathcal{M}$  ist  $|g| \in \mathcal{M}$ .
- Für alle  $g_1, g_2 \in \mathcal{M}$  ist  $\sup (g_1, g_2) \in \mathcal{M}$ .
- Für alle  $g_1, g_2 \in \mathcal{M}$  ist  $\inf (g_1, g_2) \in \mathcal{M}$ .

Das folgt sofort aus den Gleichungen

$$\sup (g_1, g_2) = \frac{1}{2} (g_1 + g_2 + |g_2 - g_1|),$$

$$\inf (g_1, g_2) = - \sup (-g_1, -g_2),$$

$$|g| = - \inf (g, 0) - \inf (-g, 0).$$

⊙ E.5. Korollar (Approximationssatz von M.H.Stone): Es sei  $E$

kompakt und  $\mathcal{M}$  ein linearer Teilraum von  $\mathcal{C}(E)$ ,

der mit jeder Funktion  $g$  auch deren Betrag  $|g|$  enthält. Dann sind äquivalent:

I.  $\mathcal{M}$  liegt dicht in  $\mathcal{C}(E)$  bezüglich gleichmäßiger Konvergenz.

II.  $\mathcal{M}$  ist verschränkt punkt-trennend. Falls  $E$  einpunktig ist, ist  $\mathcal{M} \neq \{0\}$ .

Beweis. Die Aussage ist trivial, falls  $E$  höchstens einen Punkt enthält. Es besitze  $E$  also mindestens zwei Punkte.

Es sei zunächst  $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{C}(E)$  und  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$ . Nach Satz E.3(IIb) existieren dann Funktionen  $g, h \in \mathcal{M}$  mit  $0 < g(x) < 1$ ,  $1 < g(y) < 2$ ,  $1 < h(x) < 2$ ,  $0 < h(y) < 1$ . Also ist

$$g(x) h(y) < 1 < g(y) h(x).$$

$\mathcal{M}$  ist also verschränkt punkt-trennend. 5/5/97

Es sei jetzt umgekehrt  $\mathcal{M}$  verschränkt punkt-trennend. Es seien  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$  und  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Es gibt Funktionen  $g, h \in \mathcal{M}$  mit

$$g(x) h(y) \neq g(y) h(x).$$

Es sei  $a := g(x) h(y) - g(y) h(x)$  und

$$f := \frac{1}{a} (\alpha(h(y) g - g(y) h) + \beta(g(x) h - h(x) g)) \in \mathcal{M},$$

Dann ist

$$f(x) = \alpha, f(y) = \beta.$$

da  $\mathcal{M}$   
linear!

Also ist  $\{(f(x), f(y)) : f \in \mathcal{M}\} = \mathbb{R}^2$  und damit Eigenschaft (IIb) von Satz E.3 gegeben. Nach der Vorbemerkung ergibt sich Eigenschaft (IIa) sofort aus der Voraussetzung, daß  $\mathcal{M}$  mit jeder Funktion auch deren Betrag enthält. Nach Satz E.3 ist daher  $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{C}(E)$ . □

① E.6. Korollar: Es sei  $E$  kompakt und  $\mathcal{M}$  ein punkt-trennender linearer Teilraum von  $\mathcal{C}(E)$ , der die Konstanten und mit jeder Funktion auch deren Betrag enthält. Dann ist  $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{C}(E)$ .

Wir wollen jetzt die Bedingung, daß  $\mathcal{M}$  mit jeder Funktion auch deren Betrag enthält, durch eine andere ersetzen. Dazu die folgende

E.7. Definition:  $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}(E)$  heißt eine Algebra stetiger reeller beschränkter Funktionen auf  $E$ , wenn  $\mathcal{A}$  ein linearer Teilraum von  $\mathcal{C}(E)$  ist, der mit je zwei Funktionen  $g, h \in \mathcal{A}$  auch deren Produkt  $g \cdot h$  enthält.

Insbesondere ist  $\mathcal{C}(E)$  selbst eine solche Algebra. Statt von einer Algebra stetiger reeller Funktionen auf  $E$  spricht man daher auch von einer Unteralgebra  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{C}(E)$ .

Beispiel. Die Menge aller reellen Polynome auf einer Teilmenge  $E$  der Zahlengeraden ist eine Algebra stetiger reeller Funktionen.

① E.8. Lemma: Es existiert eine Folge  $(p_n)$  reeller Polynome mit  $p_n(0) = 0$ , die auf dem Intervall  $[-1, +1]$  gleichmäßig gegen  $x \rightarrow |x|$  konvergiert.

Beweis. Wir definieren die Folge  $(p_n)$  rekursiv durch

$$p_0 := 0,$$
$$p_{n+1} := p_n + \frac{1}{2} (x^2 - p_n^2) \quad (n \in \mathbb{N})$$

und erhalten die Identitäten

$$|x| - p_{n+1}(x) = |x| - p_n(x) - \frac{1}{2} (|x|^2 - p_n^2(x))$$
$$= (|x| - p_n(x)) \left(1 - \frac{1}{2} (|x| + p_n(x))\right)$$

und

$$|x| + p_{n+1}(x) = |x| + p_n(x) + \frac{1}{2} (|x|^2 - p_n^2(x))$$
$$= (|x| + p_n(x)) \left(1 + \frac{1}{2} (|x| - p_n(x))\right).$$

Durch vollständige Induktion ergibt sich daraus

$$-|x| \leq p_n(x) \leq |x|$$

für alle  $x \in [-1, +1]$  und  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Hieraus erhält man dann nach Definition  $p_n \leq p_{n+1}$  für alle  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Also existiert für alle  $x \in [-1, +1]$  der Limes

$$q(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x).$$

Grenzübergang in der Rekursionsformel liefert für alle  $x \in [-1, +1]$

$$q(x) = q(x) + \frac{1}{2} (|x|^2 - q^2(x)),$$

also

$$q(x) = |x|,$$

da  $0 = p_0(x) \leq p_n(x) \leq q(x)$  gilt. Der Satz von Dini liefert dann die Behauptung.  $\square$

- © E.9. Korollar: Es sei  $\mathcal{A}$  eine Unteralgebra von  $\mathcal{C}(E)$ . Dann ist  $\overline{\mathcal{A}}$  eine Unteralgebra von  $\mathcal{C}(E)$ , die mit jeder Funktion auch deren Betrag enthält.

Beweis. Wie bei jedem normierten Raum ist der Abschluß  $\overline{\mathcal{A}}$  des linearen Teilraumes  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{C}(E)$  ein linearer Teilraum von  $\mathcal{C}(E)$ .

Es seien  $f, g \in \bar{\mathcal{A}}$  und  $\epsilon > 0$ . Dann existieren  $f_1, g_1 \in \mathcal{A}$  mit  $\|f - f_1\|_\infty < \epsilon$ ,  $\|g - g_1\|_\infty < \epsilon$ . Es ist dann

$$\begin{aligned} \|fg - f_1g_1\|_\infty &= \|f(g - g_1) + g_1(f - f_1)\|_\infty \\ &\leq \|f\|_\infty \|g - g_1\|_\infty + \|g_1\|_\infty \|f - f_1\|_\infty \\ &\leq (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty + \epsilon) \epsilon. \end{aligned}$$

Daraus folgt  $fg \in \bar{\mathcal{A}}$ .

Es sei jetzt  $f \in \bar{\mathcal{A}}$ ,  $\|f\|_\infty \leq 1$  und  $\epsilon > 0$ . Es existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit

$$|p_n(x) - |x|| < \epsilon$$

für alle  $x \in [-1, +1]$ . Da für alle  $z \in E$  gilt  $f(z) \in [-1, +1]$ , erhalten wir also

$$|p_n \circ f - |f|| < \epsilon.$$

Wegen  $p_n(0) = 0$  ist dabei  $p_n \circ f \in \bar{\mathcal{A}}$  ( $\bar{\mathcal{A}}$  Algebra). Also ist  $|f| \in \bar{\mathcal{A}}$ . Daher enthält  $\bar{\mathcal{A}}$  mit jeder Funktion auch deren Betrag.  $\square$

① E.10. Satz (Satz von Stone - Weierstraß): Es sei  $E$  kompakt und  $\mathcal{A}$  eine Unteralgebra von  $\mathcal{C}(E)$ . Dann sind äquivalent:

- I.  $\mathcal{A}$  liegt dicht in  $\mathcal{C}(E)$  bezüglich gleichmäßiger Konvergenz.
- II.  $\mathcal{A}$  ist verschränkt punktetrennend. Falls  $E$  einpunktig ist, ist  $\mathcal{A} \neq \{0\}$ .
- II'.  $\mathcal{A}$  ist punktetrennend und enthält für jeden Punkt aus  $E$  eine Funktion, die in diesem Punkt nicht Null ist.

Beweis. Die Äquivalenz von (I) und (II) ergibt sich nach Korollar E.9 sofort aus dem Approximationssatz von Stone, da  $\mathcal{A}$  genau dann die Eigenschaft (II) besitzt, wenn  $\bar{\mathcal{A}}$  diese

Eigenschaft hat. Offensichtlich folgt (II') aus (II). Es gelte also umgekehrt (II') und es seien  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$ . Es existiert ein  $g \in \mathcal{A}$  mit  $g(x) \neq g(y)$ . Da außerdem ein  $g_1 \in \mathcal{A}$  mit  $g_1(x) \neq 0$  existiert, von dem wir nötfalls ein kleines Vielfaches zu  $g$  addieren, dürfen wir dabei  $g(x) \neq 0$  annehmen. Dann ist

$$h_1 := g(y)g - g^2 \in \mathcal{A}$$

mit  $h_1(x) \neq 0$ ,  $h_1(y) = 0$ . Wählen wir ein  $h_2 \in \mathcal{A}$  mit  $h_2(y) \neq 0$ , so erhalten wir damit die verschränkte Punktentrennung:

$$h_1(x)h_2(y) \neq 0 = h_1(y)h_2(x).$$

Aus (II') folgt daher (II). □

- ① E.11. Korollar (Satz von Weierstraß): Jede stetige reelle Funktion  $f$  auf einem kompakten Intervall  $I$  der Zahlengeraden kann gleichmäßig durch reelle Polynome approximiert werden.

Beweis. Die Polynome auf  $I$  bilden eine Unteralgebra  $\mathcal{P}$  von  $\mathcal{C}(I)$ , die verschränkt punktstetig trennend ist, da sie die Konstanten enthält und die Funktion  $x \rightarrow x$  die Punkte trennt. □

Abschließend geben wir noch eine komplexe Version des Satzes von Stone - Weierstraß. Dabei bezeichnet  $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$  den Raum aller stetigen beschränkten komplexen Funktionen auf  $E$ .

- ② E.12. Satz: Es sei  $E$  kompakt und  $\mathcal{A}$  eine Unteralgebra von  $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$ , die mit jeder Funktion  $f$  auch deren Konjugierte  $\bar{f}$  enthält. Dann sind äquivalent:

I.  $\mathcal{A}$  liegt dicht in  $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$  bezüglich gleichmäßiger Konvergenz.

II.  $\mathcal{A}$  ist verschränkt punkt-trennend. Falls  $E$  einpunktig ist, ist  $\mathcal{A} \neq \{0\}$ .

II'.  $\mathcal{A}$  ist punkt-trennend und enthält für jeden Punkt aus  $E$  eine Funktion, die in diesem Punkt nicht Null ist.

Beweis. Daß aus (I) die Aussage (II) folgt, ist trivial wie im reellen Fall. Ebenso die Äquivalenz von (II) und (II').

Es gelte also (II'). Es sei

$$\mathcal{A}_1 = \{g \in \mathcal{A} : g(E) \subset \mathbb{R}\}.$$

Mit reeller Multiplikation ist dann  $\mathcal{A}_1$  Unter-algebra von  $\mathcal{C}(E)$ .

Für jedes  $g \in \mathcal{A}$  ist

$$\operatorname{Re} g = \frac{1}{2} (g + \bar{g}) \in \mathcal{A}_1,$$

$$\operatorname{Im} g = \frac{1}{2i} (g - \bar{g}) \in \mathcal{A}_1.$$

Sind  $x, y \in E$  mit  $x \neq y$ , so existiert ein  $g \in \mathcal{A}$  mit  $g(x) \neq g(y)$ .

Dabei ist  $\operatorname{Re} g(x) \neq \operatorname{Re} g(y)$  oder  $\operatorname{Im} g(x) \neq \operatorname{Im} g(y)$ . Ent-

sprechend existiert zu jedem  $x \in E$  ein  $\tilde{g} \in \mathcal{A}_1$  mit  $\tilde{g}(x) \neq 0$ .

Nach Satz E.10 ist daher  $\mathcal{A}_1$  dichte Unter-algebra von  $\mathcal{C}(E)$ . Wegen

$\mathcal{A}_1 + i \mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}$  folgt daraus, daß  $\mathcal{A}$  eine dichte Unter-algebra von  $\mathcal{C}(E, \mathbb{C})$  ist.  $\square$