

Mitschrift der Vorlesung

MASS- UND INTEGRATIONSTHEORIE

Prof. Dr. M. Röckner

Universität Bielefeld

Gelesen im Wintersemester 2001/02
als Teil der Analysis 3

Satz: Sven Wiesinger
Ausdruck vom 18. Dezember 2009

Grundlage dieses Texts sind das handschriftliche (uns Studierenden als Kopie verteilte), englischsprachige Vorlesungsskript und meine Notizen aus der Vorlesung, sowie die Übungen zur Vorlesung und die im Literaturverzeichnis angegebenen Quellen.

Dieser Text wurde gesetzt in $\text{\LaTeX} 2_{\epsilon}$ unter Verwendung der KOMA-Script Buchklasse und der folgenden Pakete: fontenc, babel, amssymb, amsmath (AMS-LaTeX), amsthm, graphicx, xy (XY-Pic), bbm, enumerate und mathpazo.

Satz: Sven Wiesinger, <Mail: swiesing@mathematik.uni-bielefeld.de>.

Dieser Text enthält Fehler. Ehrliche Finder sind herzlich aufgefordert, meine Emailadresse als Fundbüro zu missbrauchen. Danke.

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung	1
Rückblick: Das Riemann-Integral	1
Einschränkungen des Riemann-Integrals	1
Voraussetzungen, Notation	2
2 Mengensysteme, Maße und äußere Maße	5
Mengensysteme	5
Dynkin-Systeme	7
Maße	8
Äußere Maße	15
3 μ^*-messbare Mengen und der Erweiterungssatz von Caratheodory	19
Die σ -Algebra μ^* -messbarer Mengen	19
Der Erweiterungssatz	21
4 Messbare Mengen, Bildmaße und elt. Eigenschaften des Lebesgue-Maßes	25
Messbare Mengen und Bildmaße	25
Elementare Eigenschaften des Lebesgue-Maßes	26
5 Messbare Funktionen und Elementarfunktionen	31
Messbare Funktionen	31
Elementarfunktionen	35
6 Integration mit einem Maß	37
Idee	38
Umsetzung – Elementarfunktionen	39
Erweiterung auf nichtnegative messbare Funktionen	42
7 Integrierbarkeit und der Begriff des „fast überall“	47
Integrierbarkeit	47
Der Begriff des „ μ -fast überall“	50
Die Cantor-Menge	53
8 Riemann- und Lebesgue-Integral	57
Vergleich der Integrationsbegriffe	57
9 \mathcal{L}^p- und L^p-Räume	63
\mathcal{L}^p -Räume	63

Inhaltsverzeichnis

Die Vollständigkeit von $\mathcal{L}^p(\mu)$	68
L^p -Räume	71
10 Formen der Konvergenz	73
Konvergenz im Maß μ	73
Zusammenhang der Konvergenzbegriffe	74
Übersicht	77
11 Produkträume, Produktmaße und der Satz von Fubini	79
Produkte von σ -Algebren	79
Maße auf Produkt- σ -Algebren	80
Der Satz von Fubini	88
12 Der Transformationssatz	93
13 Nachträge	101
Der Satz von Radon–Nikodym	101
Gleichgradige Integrierbarkeit und der verallgemeinerte Konvergenzsatz von Lebesgue	101

1 Einführung

Rückblick: Das Riemann-Integral

Definition 1.1. Sei f eine beschränkte, reellwertige Funktion über einem endlichen Intervall $[a, b]$, und D eine Partition $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, von $[a, b]$. Dann setze

$$S_D := \sum_{i=1}^n M_i \cdot (\xi_i - \xi_{i-1}) \quad (\text{„Obersumme“}),$$

wo $M_i := \sup\{f(t) \mid t \in [\xi_{i-1}, \xi_i]\}$, $1 \leq i \leq n$, und

$$s_D := \sum_{i=1}^n m_i \cdot (\xi_i - \xi_{i-1}) \quad (\text{„Untersumme“}),$$

wo $m_i := \inf\{f(t) \mid t \in [\xi_{i-1}, \xi_i]\}$, $1 \leq i \leq n$.

f heißt *Riemann-integrierbar*, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ eine Partition D existiert, so dass gilt:

$$S_D - s_D < \varepsilon.$$

In diesem Fall heißt

$$\inf S_D = \sup s_D =: R \int_a^b f dx$$

das *Riemann-Integral* von f , wobei das Infimum und das Supremum jeweils über die Menge aller Partitionen D des Intervalls $[a, b]$ genommen werden.

Einschränkungen des Riemann-Integrals

Beispiel 1.2. Betrachte die Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

(also, f ist konstant = 1, bis auf abzählbar viele Punkte). Dieses f ist offensichtlich nicht Riemann-integrierbar, da die Menge der Unstetigkeitsstellen zu groß ist (f ist in keinem Punkt in $[0, 1]$ stetig!). Gleichzeitig kann

f approximiert werden durch eine monoton fallende Folge von Riemann-integrierbaren Funktionen. Sei etwa $Q = \{q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von Q , und sei $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \in \{q_k \mid k \leq n\}, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in [0, 1]$, genauer $f_n \downarrow f$, und jedes f_n ist Riemann-integrierbar mit $\int_0^1 f_n dx = 1$. f dagegen, der Limes der f_n , ist – wie oben gesagt – nicht Riemann-integrierbar. Dies erscheint un-natürlich, möchte man doch eigentlich Vollständigkeit erwarten. Um diese zu erhalten, benötigt man eine neue, bessere Form des Integralbegriffs, das *Lebesgue-Integral*.

Im Laufe dieser Vorlesung werden wir abstrakte Maße auf abstrakten Maßräumen und die korrespondierenden Integrale studieren, um die zugrundeliegenden Konzepte verstehen zu lernen. Gleichzeitig werden wir das Lebesgue-Maß auf den reellen Zahlen und das dazugehörige Lebesgue-Integral studieren. Dies ist unser Standardbeispiel (“Basic Example”), das im Rest dieses Textes mit B.ex. gekennzeichnet wird.

B.ex.

Voraussetzungen, Notation

Es seien \mathbb{N} die natürlichen Zahlen, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, \mathbb{Q} die rationalen und \mathbb{R} die reellen Zahlen. Es seien $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ die „kompaktifizierten“ reellen Zahlen. Dabei sei $\pm\infty$ die „Zahl“, die größer (bzw. kleiner) ist als jedes andere Element von \mathbb{R} (unter Annahme der üblichen Anordnung auf \mathbb{R}). Wir „rechnen“ mit $\pm\infty$ in der üblichen Weise, also

$$\forall a \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\} : a + (+\infty) = +\infty, \text{ und } +\infty + (-\infty) \text{ ist nicht definiert,}$$

aber wir setzen

$$0 \cdot (+\infty) = 0 \cdot (-\infty) = (+\infty) \cdot 0 = (-\infty) \cdot 0 = 0.$$

Wir setzen $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, und $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{x \in \overline{\mathbb{R}} \mid x \geq 0\}$.

Mengenoperationen \cap, \cup, \setminus gelten wie üblich. Wenn eine Menge Ω fixiert ist, definieren wir für jede Teilmenge $A \subset \Omega$ das Komplement als $A^C := \Omega \setminus A$.

Für eine beliebige Menge Ω wird eine Abbildung $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Funktion genannt. Wenn $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ gilt, heißt f eine *reellwertige* Funktion.

Eine Menge Ω heißt *abzählbar*, wenn es eine bijektive Abbildung

$$i : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$$

gibt. Jede endliche Menge ist abzählbar.

Für eine Menge Ω bezeichnet $\mathcal{P}(\Omega)$ die Menge aller Untermengen von Ω . $\mathcal{P}(\Omega)$ heißt auch *Potenzmenge* von Ω .

□ kennzeichnet das Ende eines Beweises.

2 Mengensysteme, Maße und äußere Maße

Mengensysteme

Definition 2.1. Ein System \mathcal{R} von Untermengen einer Menge Ω heißt *Ring* (über Ω), wenn gilt:

- (i) $\emptyset \in \mathcal{R}$
- (ii) Aus $A, B \in \mathcal{R}$ folgt $A \setminus B \in \mathcal{R}$.
- (iii) Aus $A, B \in \mathcal{R}$ folgt $A \cup B \in \mathcal{R}$.

Wenn außerdem gilt:

- (iv) $\Omega \in \mathcal{R}$,

dann heißt \mathcal{R} eine *Algebra*.

Beachte: Wenn \mathcal{R} ein Ring ist, dann gilt für $A, B \in \mathcal{R}$, dass auch der Schnitt in \mathcal{R} liegt: $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{R}$.

Definition 2.2. Ein Ring \mathcal{R} , bzw. eine Algebra \mathcal{A} , über einer Menge Ω heißt *σ -Ring*, bzw. *σ -Algebra*, wenn er unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist. Das heißt, anstelle von (iii) hat \mathcal{R} , bzw. \mathcal{A} , die stärkere Eigenschaft, dass

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}, \quad \text{wenn } A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N},$$

bzw.

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}, \quad \text{wenn } A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung 2.3. (i) Ein System \mathcal{A} von Untermengen einer Menge Ω ist genau dann eine σ -Algebra über Ω , wenn gilt: □

$$(a) \Omega \in \mathcal{A}, \quad (b) A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}, \quad (c) A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

(dies ist ein äußerst praktisches Kriterium, um zu überprüfen, ob ein gegebenes Mengensystem eine σ -Algebra ist).¹

¹Die Markierung □ steht an Stellen, deren Aussagen nicht in der Vorlesung bewiesen, sondern im Rahmen von Übungsaufgaben gezeigt werden sollten. Im Zweifelsfall sei hier auf die Literatur verwiesen.

(ii) Die folgenden Implikationsketten gelten trivialerweise:

$$\sigma\text{-Algebra} \Rightarrow \sigma\text{-Ring} \Rightarrow \text{Ring},$$

und

$$\sigma\text{-Algebra} \Rightarrow \text{Algebra} \Rightarrow \text{Ring}.$$

(iii) Wenn \mathcal{A} eine σ -Algebra ist, dann gilt für alle $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c \right)^c \in \mathcal{A}$$

Ü (iv) Für jedes System \mathcal{E} von Untermengen einer Menge Ω existiert ein kleinster Ring $\mathcal{R}(\mathcal{E})$, bzw. eine kleinste Algebra $\mathcal{A}(\mathcal{E})$, ein kleinster σ -Ring $\mathcal{S}(\mathcal{E})$, eine kleinste σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, der, bzw. die, \mathcal{E} enthält. $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ heißt dann der von \mathcal{E} erzeugte Ring, und $\sigma(\mathcal{E})$ die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra; \mathcal{E} heißt der Erzeuger von $\mathcal{R}(\mathcal{E})$ bzw. $\sigma(\mathcal{E})$ (analog für $\mathcal{S}(\mathcal{E})$ und $\mathcal{A}(\mathcal{E})$).

Beispiel 2.4. (i) Sei $\Omega = \mathbb{N}$, und \mathcal{R} das System aller endlichen Untermengen von \mathbb{N} . Dann ist \mathcal{R} ein Ring, aber keine Algebra.

B.ex. (ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$, und \mathcal{R} das System aller endlichen Vereinigungen (d -dimensionaler) Intervalle der Form $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}^d$. Dann ist \mathcal{R} ein Ring. Zur Notation: $a = (a_1, \dots, a_d)$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$, $[a, b[:= [a_1, b_1[\times \dots \times [a_d, b_d[\subset \mathbb{R}^d$.

(iii) Das System $\mathcal{P}(\Omega)$ aller Untermengen einer Menge Ω ist eine σ -Algebra.

(iv) Siehe Definition 2.6.

B.ex. **Definition 2.5.** Sei \mathcal{R} der Ring aller rechtshalboffenen Intervalle in $\Omega = \mathbb{R}^d$ (vgl. (ii) im vorhergehenden Beispiel). Dann heißt $\sigma(\mathcal{R})$ die *Borel- σ -Algebra* über \mathbb{R}^d .

Definition 2.6. Sei \mathcal{A} eine σ -Algebra über einer Menge Ω , und $\Omega' \subset \Omega$. Dann ist das System

$$\mathcal{A} \cap \Omega' := \{A \cap \Omega' \mid A \in \mathcal{A}\}$$

eine σ -Algebra über Ω' , die sogenannte *Spur- σ -Algebra* von \mathcal{A} auf Ω' . Spur-Ringe, Spur-Algebren und Spur- σ -Ringe werden analog definiert.

Dynkin-Systeme

Dynkin-Systeme sind eine enorm hilfreiche Konstruktion. Sie werden unter anderem benötigt für die wichtigen Sätze über monotone Klassen.

Definition 2.7. Ein System \mathcal{D} von Untermengen einer Menge Ω heißt *Dynkin-System* über Ω , wenn gilt:

- (i) $\Omega \in \mathcal{D}$.
- (ii) Aus $D \in \mathcal{D}$ folgt $D^C \in \mathcal{D}$.
- (iii) Aus $D_n \in \mathcal{D}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $D_i \cap D_j = \emptyset$ für $i \neq j$ folgt $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}$.

Bemerkung 2.8. (i) Sei Ω eine Menge, und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein System von Untermengen von Ω . Dann existiert ein kleinstes Dynkin-System $\mathcal{D}(\mathcal{E})$, das \mathcal{E} enthält.

(ii) Wenn \mathcal{D} ein Dynkin-System über Ω ist mit $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subset B$, dann gilt:

$$B \setminus A = B \cap A^C = \underbrace{(B^C \cup A)}_{\in \mathcal{D}} \in \mathcal{D}.$$

Satz 2.9. Ein Dynkin-System \mathcal{D} über einer Menge Ω ist eine σ -Algebra über Ω genau dann, wenn für alle $A, B \in \mathcal{D}$ gilt, dass $A \cap B$ in \mathcal{D} liegt.

Ein gegenüber endlichen Durchschnitten abgeschlossenes Dynkin-System ist eine σ -Algebra.

Beweis. Die eine Richtung („jede σ -Algebra ist schnittfestes Dynkin-System“) ist offensichtlich trivial.

Sei \mathcal{D} ein Dynkin-System, so dass mit $A, B \in \mathcal{D}$ auch $A \cap B \in \mathcal{D}$ gilt. Sei $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{D} . Dann ist zu zeigen: $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$.

Für endliche Vereinigungen ist dies trivial: Aus $A, B \in \mathcal{D}$ folgt:

$$A \cup B = \underbrace{(A \setminus (A \cap B))}_{\in \mathcal{D} \text{ nach 2.8(ii) und Voraus.}} \dot{\cup} B \in \mathcal{D} \quad \text{nach 2.7(iii).}$$

Für den allgemeinen Fall setze $D'_0 := \emptyset$ und $D'_n := D_1 \cup \dots \cup D_n$. Dann gilt, wie eben gezeigt: $D'_n \in \mathcal{D}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Aber damit gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{D'_n \setminus D'_{n-1}}_{\in \mathcal{D} \text{ nach 2.8(ii)}} \in \mathcal{D} \quad \text{nach 2.7(iii).}$$

□

Satz 2.10. Sei Ω eine Menge, und $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ ein System von Untermengen von Ω , so dass aus $A, B \in \mathcal{E}$ folgt: $A \cap B \in \mathcal{E}$. Dann gilt: $\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E})$

Das kleinste Dynkin-System $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ über einem paarweise schnittfesten Mengensystem \mathcal{E} ist automatisch auch die kleinste σ -Algebra über \mathcal{E} .

Beweis. Da jede σ -Algebra automatisch auch ein Dynkin-System ist, gilt $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.

Behauptung: $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ ist eine σ -Algebra. Angenommen, diese Behauptung ist wahr, dann gilt offensichtlich $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{E})$, und der Satz ist bewiesen. Nach Satz 2.9 ist die Behauptung bewiesen, wenn das Dynkin-System selbst paarweise schnittfest ist, wenn also für $A, B \in \mathcal{D}$ gilt: $A \cap B \in \mathcal{D}$.

Betrachte daher für $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ das Mengensystem

$$\mathcal{D}_D := \{A \subset \Omega \mid A \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})\}.$$

\mathcal{D}_D ist ein Dynkin-System.² Da \mathcal{E} als paarweise schnittfest vorausgesetzt wird, gilt für $E \in \mathcal{E}$ immer $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_E$, also $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_E$. Das heißt, für jedes $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E}), E \in \mathcal{E}$, gilt $E \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Daraus folgt für jedes $D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$ die Inklusion $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_D$, und damit $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_D$.

Dies bedeutet aber gerade für alle $A, D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$, dass $A \cap D$ in $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ liegt. \square

Maße

Der Begriff „Maß“ wird uns als Basis für eine neue, allgemeinere Definition des Integrals einer Funktion dienen.

Zunächst interessieren wir uns für das „Messen“ bestimmter Mengen, etwa der Elemente eines Ringes. In unserem zentralen Beispiel B.ex. ist das Messen nichts anderes als die „Bestimmung der Länge“ einer Menge (bzw. für höhere Dimensionen „Bestimmung der Fläche / des Volumens / ...“). Allgemein definiert man:

Definition 2.11. Sei \mathcal{R} ein Ring über einer Menge Ω . Ein *endlich additives Maß* (auch *Inhalt*) auf \mathcal{R} ist eine Funktion $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu \geq 0$.

(iii) Für paarweise disunkte $A_n \in \mathcal{R}, 1 \leq n \leq N$, gilt

$$\mu\left(\dot{\bigcup}_{n=1}^N A_n\right) = \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \quad (\text{„endliche Additivität“}).$$

²Die Bedingungen (i) und (iii) sind leicht überprüft – interessanter ist (ii): Sei $A \in \mathcal{D}_D$, also $A \cap D \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$. Dann gilt:

$$A^c \cap D = (A \cup D^c)^c = \underbrace{((A \cap D) \dot{\cup} D^c)^c}_{\in \mathcal{D}(\mathcal{E})} \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \Rightarrow A^c \in \mathcal{D}_D.$$

μ heißt σ -additives Maß, oder einfach Maß, wenn es anstelle von (iii)' die folgende, stärkere Bedingung erfüllt:

- (iii) Für paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$, mit $\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$, gilt

$$\mu\left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\text{„}\sigma\text{-Additivität“}).$$

Beispiel 2.12. (i) Sei $\Omega = \mathbb{N}, \mathcal{R} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und $\mu(A) := \#A$ für $A \in \mathcal{R}$ (wo $\# :=$ „Anzahl der Elemente“, und $\#A = +\infty$ für nicht endliche A).

- (ii) Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ und \mathcal{R} die Klasse aller endlichen Vereinigungen von Intervallen der Form $[a, b[, a, b \in \mathbb{R}^d, a \leq b$. Dann gibt es ein eindeutiges, endlich additives Maß m auf \mathcal{R} (das tatsächlich sogar ein Maß ist), so dass

B.ex.

$$m([a, b[) = \prod_{i=1}^d (b_i - a_i)$$

für jedes Intervall $[a, b[\subset \mathbb{R}^d$ mit $a \leq b, a = (a_1, \dots, a_d), b = (b_1, \dots, b_d)$, gilt.

Der Beweis folgt auf Seite 12. Dieses Maß heißt das *Lebesgue-Maß* auf \mathbb{R}^d .

- (iii) Sei \mathcal{R} ein beliebiger Ring über einer Menge Ω . Wähle $\omega_0 \in \Omega$ fest und definiere $\varepsilon_{\omega_0} : \mathcal{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ durch

$$\varepsilon_{\omega_0}(A) := \begin{cases} 1 & \text{für } \omega_0 \in A, \\ 0 & \text{für } \omega_0 \in A^c. \end{cases}$$

Dann ist ε_{ω_0} ein Maß. Es heißt *Dirac-Maß* (mit Masse) in ω_0 .

Bemerkung 2.13. Sei μ ein endlich additives Maß auf einem Ring \mathcal{R} über einer Menge Ω . Seien $A, B, A_1, \dots, A_N \in \mathcal{R}$. Dann gilt:

Eigenschaften endlich additiver Maße

Ü

- (i) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (ii) Für $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (iii) Für $A \subset B$ und $\mu(A) < \infty$ gilt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
- (iv) Es gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \quad (\text{„Subadditivität“}).$$

2 Mengensysteme, Maße und äußere Maße

(v) Für paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\text{„}\sigma\text{-Superadditivität“}).$$

Notation: Seien A_1, A_2, \dots Mengen. $A_n \uparrow A$ bedeutet, dass $A_n \subset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Analog bedeutet $A_n \downarrow A$, dass $A_n \supset A_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Charakterisierung der σ -Additivität

Satz 2.14. Sei μ ein endlich additives Maß auf einem Ring \mathcal{R} über einer Menge Ω . Betrachte die folgenden Eigenschaften von μ :

(i) μ ist σ -additiv.

(ii) Seien $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A) \quad (\text{„Stetigkeit von unten“}).$$

(iii) Seien $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A) \quad (\text{„Stetigkeit von oben“}).$$

(iv) Seien $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_n \downarrow \emptyset$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0 \quad (\text{„Stetigkeit von oben in } \emptyset\text{“}).$$

Dann gilt:

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv).$$

Wenn außerdem $\mu(A) < +\infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$ gilt, dann folgt sogar:

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv).$$

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Seien $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$, und $A_0 := \emptyset$. Dann definiert $B_n := A_n \setminus A_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise verschiedene

Mengen in \mathcal{R} mit $A_N = \dot{\bigcup}_{n \leq N} B_n$ und $A = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \mu(A) &\stackrel{(i)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(B_n) \stackrel{\text{endl. Additivität}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\dot{\bigcup}_{n \leq N} B_n\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(A_N). \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (i): Seien $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, so dass $A := \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$ in \mathcal{R} liegt. Definiere $B_N := \dot{\bigcup}_{n \leq N} A_n$, $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt $B_N \in \mathcal{R}$, und $B_N \uparrow A$. Also

$$\begin{aligned} \mu(A) &\stackrel{(ii)}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(B_N) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\dot{\bigcup}_{n \leq N} A_n\right) \stackrel{\text{endl. Additivität}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (iii): Seien $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$ gilt, und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann liegen $(A_1 \setminus A_n)$ und $(A_1 \setminus A)$ in \mathcal{R} , und es gilt $(A_1 \setminus A_n) \uparrow (A_1 \setminus A)$. Wegen $\mu(A) \leq \mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ können wir 2.13(iii) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \mu(A_1) - \mu(A) &\stackrel{2.13(iii)}{=} \mu(A_1 \setminus A) \stackrel{(ii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \\ &\stackrel{2.13(iii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (iv): Klar, durch Wahl von $A = \emptyset$ in (iii).

(iv) \Rightarrow (iii): Seien $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$ gilt, und $\mu(A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt $(A_n \setminus A) \in \mathcal{R}$, $\mu(A_n \setminus A) \leq \mu(A_n) < +\infty$, und $(A_n \setminus A) \downarrow \emptyset$. Wiederum unter Anwendung von 2.13(iii) (mit der gleichen Rechtfertigung wie oben) folgt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(iv)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n \setminus A) \stackrel{2.13(iii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A_n) - \mu(A)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) - \mu(A). \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil des Satzes vollständig bewiesen. Für den zweiten Teil wissen wir nach Voraussetzung, dass für alle $A \in \mathcal{R}$ $\mu(A) < +\infty$ gilt. Die folgenden Zeilen beweisen die Behauptung.

(iv) \Rightarrow (ii): Seien $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$. Dann folgt $(A \setminus A_n) \in \mathcal{R}$, $\mu(A \setminus A_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und $(A \setminus A_n) \downarrow \emptyset$. Also erhalten wir (dürfen wir 2.13(iii) anwenden? Wir dürfen!):

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{(iv)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A \setminus A_n) \stackrel{2.13(iii)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(A) - \mu(A_n)) \\ &= \mu(A) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

□

□ **Bemerkung.** Die Voraussetzung, dass μ endlich ist, ist tatsächlich notwendig für den letzten Teil des Beweises.

Maße sind subadditiv. **Korollar 2.15.** Sei μ ein Maß auf einem Ring \mathcal{R} . Dann gilt für beliebige $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, sofern ihre Vereinigung $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in \mathcal{R} liegt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\text{„}\sigma\text{-Subadditivität“}).$$

Beweis. Nach 2.13(iv) wissen wir, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^N A_n\right) \leq \sum_{n=1}^N \mu(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Lässt man nun auf der rechten Seite $N \rightarrow \infty$ laufen, so folgt die Behauptung mit 2.14, Beweisabschnitt „(i) \Rightarrow (ii)“. □

Beweis von 2.12(ii). (Notationsänderung: Schreibe D statt d für die Dimension des reellen Vektorraumes.)

Fakt: Jedes F in \mathcal{R} (also: F ist endliche Vereinigung von Intervallen der Form $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}^D$) kann dargestellt werden als

$$F = [a_1, b_1[\dot{\cup} [a_2, b_2[\dot{\cup} \dots \dot{\cup} [a_n, b_n[,$$

wo $[a_i, b_i[\cap [a_j, b_j[= \emptyset$ gilt für $i \neq j$ (ein Beweis hierfür findet sich z.B. in [Bau78, Lemma 4.1]).

Eindeutigkeit: Sei μ ein beliebiges, endlich additives Maß auf \mathcal{R} mit $\mu([a, b[) = \prod_{d=1}^D (b_d - a_d)$ für alle $a = (a_1, \dots, a_D)$, $b = (b_1, \dots, b_D) \in \mathbb{R}^D$, $a \leq b$, und sei $F \in \mathcal{R}$ wie oben paarweise disjunkt zerlegt in $F = [a_1, b_1[\dot{\cup} \dots \dot{\cup} [a_n, b_n[$, dann gilt wegen endlicher Additivität:

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \mu([a_1, b_1[) + \dots + \mu([a_n, b_n[) \\ &= \prod_{d=1}^D (b_{1,d} - a_{1,d}) + \dots + \prod_{d=1}^D (b_{n,d} - a_{n,d}), \end{aligned}$$

wo $a_j = (a_{j,1}, \dots, a_{j,D})$, $b_j = (b_{j,1}, \dots, b_{j,D}) \in \mathbb{R}^D$ für $1 \leq j \leq n$. Also ist μ offensichtlich eindeutig bestimmt durch die angegebenen Eigenschaften.

Existenz: Sei für irgendein $F \in \mathcal{R}$ mit $F = [a_1, b_1[\dot{\cup} \dots \dot{\cup} [a_n, b_n[$ eine Abbildung m nach \mathbb{R} definiert durch

$$m(F) := \prod_{d=1}^D (b_{1,d} - a_{1,d}) + \dots + \prod_{d=1}^D (b_{n,d} - a_{n,d}).$$

Zunächst müssen wir zeigen, dass dies eine wohldefinierte Abbildung auf \mathcal{R} ist, dass also $m(F)$ für verschiedene Darstellungen desselben $F \in \mathcal{R}$ denselben Wert liefert. Sei etwa

$$F = I_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} I_n = J_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} J_N,$$

wo I_i , $1 \leq i \leq n$, paarweise disjunkte Intervalle der Form $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}^D$, $a \leq b$, sind (gleiches gelte für J_k , $1 \leq k \leq N$). Dann gilt zunächst, dass alle Schnitte $I_i \cap J_k$ ebenfalls von der Form $[a, b[$, mit $a, b \in \mathbb{R}^D$, $a \leq b$, sind. Außerdem sind sie paarweise disjunkt, so dass nach Definition der Abbildung m gilt:³

$$m(I_i) = \sum_{k=1}^N m(I_i \cap J_k).$$

Analog gilt, wieder nach Definition von m :

$$m(J_k) = \sum_{i=1}^n m(I_i \cap J_k).$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} m(I_1) + \dots + m(I_n) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^N m(I_i \cap J_k) = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^n m(I_i \cap J_k) \\ &= m(J_1) + \dots + m(J_N), \end{aligned}$$

also ist m zumindest schon einmal wohldefiniert.⁴

Offensichtlich ist $m(\emptyset) = m([a, a]) = a - a = 0$, und für jedes $F \in \mathcal{R}$ gilt $m(F) \geq 0$. Endlich additiv ist m sogar schon per Definition – es bleibt also nur noch zu zeigen, dass m σ -additiv ist.

Hierzu wählen wir eine Folge von Mengen $F_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $F_n \downarrow \emptyset$. Nach 2.14 genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n) = 0$$

³Wir wissen an dieser Stelle noch nicht, ob m tatsächlich ein Maß ist – daher dürfen wir hier nicht mit endlicher Additivität argumentieren, sondern müssen mit den Eigenschaften der soeben definierten Funktion m auskommen.

⁴Eine ausführliche Version dieses Arguments mit Beweis per Induktion findet sich in [Bau78, Satz 4.3].

gilt (die Voraussetzung $m(F) < +\infty$, $F \in \mathcal{R}$, ist per Definition erfüllt). Wir werden das mit einem Kompaktheitsargument tun.

Angenommen, es gelte

$$\underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} m(F_n)}_{= \inf_{n \in \mathbb{N}} m(F_n)} =: \delta > 0. \quad (2.1)$$

Offensichtlich ist es möglich, für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $G_n \in \mathcal{R}$ zu finden mit $\overline{G_n} \subset F_n$ (hier bezeichne $\overline{G_n}$ den Abschluss von G_n bezüglich der Euklidischen Norm auf \mathbb{R}^D) und

$$m(F_n) - \frac{\delta}{2^n} \leq m(G_n). \quad (2.2)$$

Setze $H_n := G_1 \cap \dots \cap G_n$. Dann gilt $\overline{H_n} \downarrow$, $\overline{H_n} \subset \overline{G_n} \subset F_n$, und alle $\overline{H_n}$ sind als abgeschlossene, beschränkte Mengen in \mathbb{R}^D kompakt. Wenn wir zeigen können, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $H_n \neq \emptyset$ gilt, folgt eben aufgrund der Kompaktheit

□

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{H_n} \neq \emptyset.$$

Damit haben wir aber $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ – was im Widerspruch zur Definition von F_n steht. Die Annahme (2.1) muss also falsch sein.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $H_n \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dies folgt aus der allgemeineren Aussage

$$m(H_n) \geq m(F_n) - \delta \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left[\geq \delta - \delta \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \frac{\delta}{2^n} > 0 \right].$$

Diese sei nun abschließend per Induktion über n bewiesen.

$n = 1$: (erinnere: $H_1 = G_1$)

$$m(F_1) \stackrel{(2.2)}{\leq} m(G_1) + \frac{\delta}{2} = m(H_1) + \delta \cdot \left(1 - \frac{1}{2^1}\right).$$

$n \rightarrow n + 1$: Nach 2.13(i) gilt

$$m(H_n \cup G_{n+1}) + m(H_{n+1}) = m(H_n) + m(G_{n+1}),$$

und damit

$$\begin{aligned}
 m(H_{n+1}) &= \{m(H_n)\} + [m(G_{n+1})] - m(\underbrace{H_n \cup G_{n+1}}_{\substack{\subset F_n \cup F_{n+1} \\ = F_n}}) \\
 &\geq \left\{ m(F_n) - \delta \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \right\} + \left[m(F_{n+1}) - \frac{\delta}{2^{n+1}} \right] \\
 &\quad \text{(nach Induktions-} \qquad \qquad \qquad \text{(mit (2.2))} \\
 &\quad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \text{voraussetzung)} \\
 &\quad - m(F_n) \\
 &\quad \text{(mit 2.13(ii))} \\
 &= m(F_{n+1}) - \delta \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).
 \end{aligned}$$

□

Definition 2.16. Ein Maß μ auf einem Ring \mathcal{R} über einer Menge Ω heißt σ -endlich, wenn es Mengen $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gibt mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ und $\mu(A_n) < +\infty$ für jedes n .

Beispiel 2.17. Das Lebesgue-Maß m ist σ -endlich.

B.ex.

Äußere Maße

Definition 2.18. Sei Ω eine Menge. Eine Funktion $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt ein äußeres Maß auf Ω , wenn gilt:

- (i) $\mu^*(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mu^*(Q) \geq 0$ für alle $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$.
- (iii) Für alle $Q_1, Q_2 \in \mathcal{P}(\Omega)$ mit $Q_1 \subset Q_2$ gilt $\mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$.
- (iv) Für beliebige $Q_n \in \mathcal{P}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) \quad (\text{„}\sigma\text{-Subadditivität“}).$$

Lemma 2.19. Sei \mathcal{R} ein Ring über einer Menge Ω , und $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es disjunkte Mengen $B_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $B_n \subset A_n$ für alle n gilt, und außerdem $\bigcup_{n=1}^N A_n = \bigcup_{n=1}^N B_n$, $N \in \mathbb{N}$, und damit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Jede Vereinigung von Mengen in einem Ring kann durch eine kompatible disjunkte Vereinigung ersetzt werden.

Beweis. Definiere B_n durch

$$B_1 := A_1, \quad B_n := A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k.$$

Dann haben die Mengen $B_n, n \in \mathbb{N}$, die gewünschten Eigenschaften. \square

Das zu einem Maß μ assoziierte äußere Maß μ^* ist „kleinstes Maß einer Überdeckung durch Ring-Elemente“.

Theorem 2.20. Sei μ ein Maß auf einem Ring \mathcal{R} über einer Menge Ω . Definiere $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ durch

$$\mu^*(Q) := \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}, Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\} \quad (2.3)$$

für alle $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$ (wo, wie üblich, $\inf(\emptyset) := +\infty$). Dann ist μ^* ein äußeres Maß auf Ω , so dass gilt:

$$\forall A \in \mathcal{R} : \mu^*(A) = \mu(A).$$

μ^* wird das zu μ assoziierte äußere Maß genannt.

(Nach 2.19 können wir voraussetzen, dass die A_n in der Definition (2.3) paarweise disjunkt sind.)

Beweis. Zunächst ist zu prüfen, ob μ^* tatsächlich ein äußeres Maß ist. Die Eigenschaften 2.18(i) (setze $A_n = \emptyset \forall n$) und 2.18(ii) sind klar.

Zu 2.18(iii): Seien $Q_1, Q_2 \subset \Omega$ mit $Q_1 \subset Q_2$. Seien weiterhin $A_n \in \mathcal{R}, n \in \mathbb{N}$, so dass $Q_2 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dann gilt auch $Q_1 \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Aber daraus folgt $\mu^*(Q_1) \leq \mu^*(Q_2)$.

Zu 2.18(iv): Seien $Q_n \subset \Omega, n \in \mathbb{N}$. Den Fall „ $\exists n \in \mathbb{N} : \mu^*(Q_n) = +\infty$ “ können wir ausschließen – die Aussage 2.18(iv) gilt in diesem Fall trivialerweise wegen 2.18(iii). Sei also $\mu^*(Q_n) < +\infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wähle ein $\varepsilon > 0$. Es existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Klasse von Mengen $\{A_{n,m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{R} , so dass $Q_n \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} A_{n,m}$, und gleichzeitig

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_{n,m}) \leq \mu^*(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \quad (2.4)$$

Betrachte die Doppelfolge $(A_{n,m})_{n,m \in \mathbb{N}}$. Es gelten

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \subset \bigcup_{n,m=1}^{\infty} A_{n,m} \quad \text{und} \quad A_{n,m} \in \mathcal{R} \quad \forall n, m,$$

also

$$\begin{aligned} \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right) &\leq \sum_{n,m=1}^{\infty} \mu(A_{n,m}) \stackrel{(2.4)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(Q_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(Q_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Und da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt die Behauptung.

Es bleibt zu zeigen, dass aus $A \in \mathcal{R}$ folgt: $\mu^*(A) = \mu(A)$. Sei also $A \in \mathcal{R}$. Setze $A_1 := A$ und $A_n := \emptyset$ für $n \geq 2$. Wir erhalten dann

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A_1) = \mu(A).$$

Seien außerdem $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Dann folgt

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A)\right) \stackrel{(2.15)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) \stackrel{2.13(ii)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Mithin gilt $\mu(A) = \mu^*(A)$. □

Beispiel 2.21. Sei \mathcal{R} der Ring aller endlichen Vereinigungen rechtshalboffener Intervalle der Form $[a, b[$, $a, b \in \mathbb{R}^d$, und sei m das Lebesgue-Maß auf \mathcal{R} . Dann heißt m^* , definiert wie in 2.20, das *äußere Lebesgue-Maß* auf \mathbb{R}^d .

B.ex.

3 μ^* -messbare Mengen und der Erweiterungssatz von Caratheodory

Die σ -Algebra μ^* -messbarer Mengen

Definition 3.1. Sei μ^* ein äußeres Maß auf einer Menge Ω . Eine Menge $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ heißt μ^* -messbar, wenn gilt:

$$\forall Q \in \mathcal{P}(\Omega) : \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^C). \quad (3.1)$$

(Klar: Da μ^* per Definition σ -subadditiv ist, gilt „ \leq “ in (3.1) automatisch; zeigen muss man im Zweifelsfall nur „ \geq “.)

Das System aller μ^* -messbaren Mengen wird mit \mathcal{A}_{μ^*} bezeichnet.

Theorem 3.2. Sei μ^* ein äußeres Maß auf Ω . Dann ist das System \mathcal{A}_{μ^*} aller μ^* -messbaren Mengen eine σ -Algebra und $\mu^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$, also die Restriktion von μ^* auf \mathcal{A}_{μ^*} , ist ein Maß auf \mathcal{A}_{μ^*} .

\mathcal{A}_{μ^*} ist eine σ -Algebra, und $\mu^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ein Maß.

Beweis. Offensichtlich gilt $\Omega \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, und mit $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ gilt nach Definition auch $A^C \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

Seien also $A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, $n \in \mathbb{N}$. Es bleibt zu zeigen: $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Sei $Q \in \mathcal{P}(\Omega)$. Dann gilt nach 3.1:

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_1^C),$$

also bei erneuter Anwendung von 3.1 auf den zweiten Summanden (mit $(Q \cap A_1^C)$ statt Q , und A_2 statt A_1):

$$= \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_1^C \cap A_2) + \mu^*(Q \cap A_1^C \cap A_2^C),$$

... und nochmal das Gleiche in grün:

$$= \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_1^C \cap A_2) + \mu^*(Q \cap A_1^C \cap A_2^C \cap A_3) + \mu^*(Q \cap A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C),$$

und durch induktive Fortsetzung (nach Zusammenfassung der mittleren Summanden):

$$= \mu^*(Q \cap A_1) + \sum_{n=2}^N \mu^* \left(Q \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} A_k^C \cap A_n \right) + \mu^* \left(Q \cap \bigcap_{n=1}^N A_n^C \right),$$

3 μ^* -messbare Mengen und der Erweiterungssatz von Caratheodory

also wegen der Isotonieeigenschaft des äußeren Maßes (vgl. Teil (iii) der Definition):

$$\begin{aligned} &\geq \mu^*(Q \cap A_1) + \sum_{n=2}^N \mu^* \left(Q \cap A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)^c \right) \\ &\quad + \mu^* \left(Q \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \right). \end{aligned}$$

Für $N \rightarrow \infty$ erhält man:

$$\begin{aligned} \mu^*(Q) &\geq \mu^*(Q \cap A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu^* \left(Q \cap A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)^c \right) \\ &\quad + \mu^* \left(Q \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \right), \end{aligned}$$

was bei zweimaliger Berücksichtigung der σ -Subadditivität von μ^* ergibt:

$$\begin{aligned} &\geq \mu^* \left(Q \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) + \mu^* \left(Q \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right)^c \right) \\ &\geq \mu^*(Q). \end{aligned}$$

Durch diese Art „Sandwich-Argument“ erhalten wir, dass sämtliche Ungleichungen in der Ungleichungskette in Wirklichkeit Gleichungen sind. Und deswegen besagen die beiden letzten Zeilen insbesondere, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ in \mathcal{A}_{μ^*} liegt. \mathcal{A}_{μ^*} ist also tatsächlich eine σ -Algebra.

Wenn wir außerdem fordern, dass die A_n , $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt sind, und in der ersten Zeile der vorangehenden Ungleichungskette Q durch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ersetzen (was zulässig ist, da diese Vereinigung natürlich in $\mathcal{P}(\Omega)$ enthalten ist), erhalten wir:

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) \geq \mu^*(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu^* \left(\underbrace{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \cap A_n \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right)^c}_{=: A^*} \right),$$

wo die Hilfsmenge A^* wegen der geforderten paarweisen Punktfremdheit der A_n , $n \in \mathbb{N}$, identisch ist mit A_n , also:

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) \\ &\geq \mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right), \end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung wieder mit der σ -Subadditivität von μ^* begründet wird.

Mit dieser letzten Ungleichungskette, die in Wirklichkeit wieder eine Gleichungskette ist, wissen wir, dass μ^* auf \mathcal{A}_{μ^*} wie gefordert σ -additiv ist, also ein Maß auf \mathcal{A}_{μ^*} . Die anderen Eigenschaften, $\mu^*(\emptyset) = 0$ und $\mu^*(A) \geq 0 \forall A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, werden schon per Definition des äußeren Maßes erfüllt. \square

Mit diesem Theorem wissen wir also: Gegeben eine Menge Ω und ein äußeres Maß μ^* auf ihrer Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$, dann ist das System \mathcal{A}_{μ^*} der μ^* -messbaren Mengen in $\mathcal{P}(\Omega)$ eine σ -Algebra, und die Restriktion von μ^* auf diese σ -Algebra ist wirklich ein Maß:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{\mu^*} & \subset & \mathcal{P}(\Omega) \\ \mu^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{\mu^*}} & \leftarrow \text{~~~~~} & \mu^* \\ \text{Ma\ss} & & \text{\u00e4u\sseres} \\ & & \text{Ma\ss} \end{array}$$

Der Erweiterungssatz

Theorem 3.3 (Caratheodory). *Sei μ ein Ma\ss auf einem Ring \mathcal{R} \u00fcber einer Menge Ω , und μ^* das assoziierte \u00e4u\ssere Ma\ss auf Ω . Dann gilt:*

Sei \mathcal{R} ein Ring mit Ma\ss μ . Dann liegt $\sigma(\mathcal{R})$ in \mathcal{A}_{μ^} , und die Ma\ss e sind kompatibel.*

- (i) $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$.
- (ii) $\bar{\mu} := \mu^* \upharpoonright_{\sigma(\mathcal{R})}$ ist ein Ma\ss auf $\sigma(\mathcal{R})$, welches μ erweitert.

Wenn μ au\sserdem σ -endlich ist, dann ist $\bar{\mu} := \mu^ \upharpoonright_{\sigma(\mathcal{R})}$ das einzige Ma\ss auf $\sigma(\mathcal{R})$, das μ erweitert.*

F\u00fcr σ -endliche μ ist dieses kompatible Ma\ss eindeutig.

Beweis. Wir zeigen zun\u00e4chst $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$ (damit folgt automatisch $\sigma(\mathcal{R}) \subset \mathcal{A}_{\mu^*}$, also Teil (i)).

Sei $A \in \mathcal{R}$ und $Q \subset \Omega$. Wir m\u00fcssen zeigen:

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^C).$$

Wir w\u00e4hlen dazu $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $Q \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, und erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \cap A^C)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A^C), \end{aligned}$$

und nach Definition des assoziierten äußeren Maßes:

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n \cap A^C),$$

was nach Anwendung der σ -Subadditivität ...

$$\geq \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A\right) + \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cap A^C\right)$$

... und der Isotonie des äußeren Maßes ergibt:

$$\geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^C).$$

Indem wir auf der linken Seite der Ungleichungskette das Infimum über alle Kollektionen von Mengen $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nehmen, die Q überdecken, erhalten wir

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \cap A^C).$$

Damit ist (i) bewiesen, da die σ -Algebra \mathcal{A}_{μ^*} mit \mathcal{R} auch die erzeugte σ -Algebra $\sigma(\mathcal{R})$ enthält.

Nach 3.2 ist $\mu^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ ein Maß auf \mathcal{A}_{μ^*} . Folglich ist nach dem oben gezeigten $\mu^* \upharpoonright_{\sigma(\mathcal{R})}$ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$. Wie wir schon bei der Entwicklung des assoziierten äußeren Maßes in 2.20 gezeigt haben, gilt $\mu^* \upharpoonright_{\mathcal{R}} = \mu$.

Es bleibt noch, die Eindeutigkeit im Fall eines σ -endlichen Maßes μ zu zeigen. Sei also μ ein σ -endliches Maß auf \mathcal{R} , und sei ν irgendein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit der Eigenschaft $\nu \upharpoonright_{\mathcal{R}} = \mu$. Definiere $\bar{\mu} := \mu^* \upharpoonright_{\sigma(\mathcal{R})}$, und wähle irgend ein $B \in \sigma(\mathcal{R})$.

$\bar{\mu}(B) \geq \nu(B)$: Seien $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n (\in \sigma(\mathcal{R}))$ gilt. ν soll ein Maß sein, ist also σ -subadditiv. Somit ist

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \geq \nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \nu(B).$$

Indem wir wieder auf der linken Seite das Infimum über alle solche Mengenkollektionen $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ wählen, erhalten wir wie gewünscht:

$$\bar{\mu}(B) = \mu^*(B) \geq \nu(B).$$

$\bar{\mu}(B) \leq \nu(B)$: Sei $\bar{\mu}(B) < \infty$. Nach dem Lemma 2.19 existieren dann paarweise disjunkte Mengen $A_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $B \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n =: A \in \sigma(\mathcal{R})$ gilt, und:

$$\bar{\mu}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(B) + 1 = \bar{\mu}(B) + 1.$$

Folglich gilt $\bar{\mu}(A) < \infty$, und

$$\nu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\mu}(A_n) = \bar{\mu}(A).$$

Wegen $\bar{\mu}(B) \geq \nu(B)$ (s.o.) gilt:

$$\nu(A \setminus B) \leq \bar{\mu}(A \setminus B) \leq \bar{\mu}(A) \leq \infty,$$

und daher folgt:

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \nu(A) - \nu(A \setminus B) = \bar{\mu}(A) - \nu(A \setminus B) \\ &\geq \bar{\mu}(A) - \bar{\mu}(A \setminus B) = \bar{\mu}(B). \end{aligned}$$

Für alle $B \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $\bar{\mu}(B) < \infty$ gilt also $\bar{\mu}(B) \leq \nu(B)$.

Wenn $B \in \sigma(\mathcal{R})$ beliebig gewählt wird, gilt, da μ ein σ -endliches Maß auf \mathcal{R} ist, dass es $E_n \in \mathcal{R}$, $n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass $E_n \uparrow \Omega$ gilt und gleichzeitig $\mu(E_n) < \infty$ für alle n . Also gilt auch $\bar{\mu}(B \cap E_n) \leq \mu(E_n) < \infty$, und deswegen $\bar{\mu}(B \cap E_n) \leq \nu(B \cap E_n)$ für beliebige $n \in \mathbb{N}$ (vgl. oben). Nach der Charakterisierung σ -additiver Maße in 2.14 gilt daher für die Maße $\bar{\mu}$ und ν auf $\sigma(\mathcal{R})$:

$$\bar{\mu}(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}(B \cap E_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(B \cap E_n) = \nu(B).$$

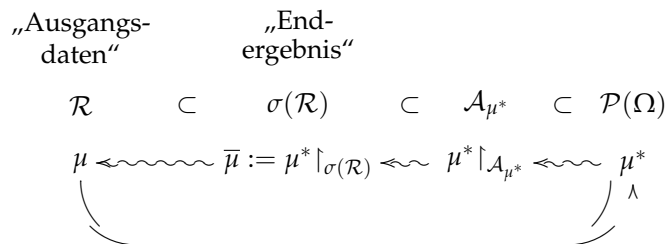
□

Bemerkung. Wenn μ auf \mathcal{R} nicht σ -endlich ist, dann ist $\bar{\mu}$ im Allgemeinen nicht eindeutig.

Betrachte zum Beispiel den Ring $\mathcal{R} = \{\emptyset\}$ über einer beliebigen Menge Ω . Dann ist $\sigma(\mathcal{R}) = \{\Omega, \emptyset\}$, und $\mu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ wird definiert durch $\mu(\emptyset) = 0$. Nach der Definition assoziierter äußerer Maße ($\inf \emptyset := +\infty$!) folgt $\bar{\mu}(\Omega) = +\infty$.

Aber $\nu : \sigma(\mathcal{R}) \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $\nu(\emptyset) = 0$ und $\nu(\Omega) = 1$ ist ebenfalls ein Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\nu = \mu$ auf \mathcal{R} .

Wir können jetzt das Bild auf Seite 21 vervollständigen:



Der Satz von Caratheodory zeigt, dass das natürlichste Mengensystem, auf dem Maße definiert werden sollten, die σ -Algebra ist. Wir werden daher von hier ab nur noch auf σ -Algebren arbeiten, und definieren:

3 μ^* -messbare Mengen und der Erweiterungssatz von Caratheodory

Definition 3.4. Sei Ω eine Menge, und \mathcal{A} eine σ -Algebra über Ω . Dann wird (Ω, \mathcal{A}) ein *messbarer Raum* genannt.

Ist außerdem noch ein Maß μ auf \mathcal{A} gegeben, so heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein *Maßraum*.

Zur Notation: Wenn in der Situation des Satzes von Caratheodory μ ein σ -endliches Maß ist, schreiben wir der Einfachheit halber μ anstelle von $\bar{\mu}$ ($:= \mu^* \upharpoonright_{\sigma(\mathcal{R})}$).

B.ex.

Insbesondere schreiben wir in der Situation des Lebesgue-Maßes m anstelle von \bar{m} , und sogar m anstelle von $m^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{m^*}}$.

4 Messbare Mengen, Bildmaße und elementare Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Messbare Mengen und Bildmaße

Definition 4.1. Seien (Ω, \mathcal{A}) und (Ω', \mathcal{A}') messbare Räume, und $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine Abbildung. T heißt \mathcal{A}/\mathcal{A}' -messbar, wenn $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ gilt (also $T^{-1}(A') \in \mathcal{A}$ für alle $A' \in \mathcal{A}'$).

Bemerkung 4.2. (i) Man betrachte zum Vergleich die Definition bzw. Charakterisierung der Stetigkeit durch die Offenheit von Urbildern offener Mengen!

Ü

(ii) Seien \mathcal{A}_i beliebige σ -Algebren über Ω_i , $i = 1, 2$, und $T : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine Abbildung. Dann sind $\{T^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{A}_2\}$ und $\{B \subset \Omega_2 \mid T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ wieder σ -Algebren auf Ω_1 bzw. Ω_2 .

Ü

Die „Urbild- σ -Algebra“

Weiter gilt: $\{T^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{A}_2\}$ ist die kleinste σ -Algebra \mathcal{A} auf Ω_1 , für die T eine $\mathcal{A}/\mathcal{A}_2$ -messbare Abbildung ist. $\{B \subset \Omega_2 \mid T^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1\}$ ist die größte σ -Algebra \mathcal{A}' auf Ω_2 , für die T eine $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}'$ -messbare Abbildung ist.

Satz 4.3. Seien (Ω, \mathcal{A}) und (Ω', \mathcal{A}') messbare Räume, und $\mathcal{E}' \subset \mathcal{P}(\Omega')$, so dass $\mathcal{A}' = \sigma(\mathcal{E}')$. Dann ist eine Abbildung $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ genau dann \mathcal{A}/\mathcal{A}' -messbar, wenn gilt:

Messbarkeit der Abbildung \Leftrightarrow
Zurückziehen des
Erzeugendensystems funktioniert

$$T^{-1}(E') \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } E' \in \mathcal{E}'. \quad (4.1)$$

Beweis. Sei $\mathcal{A}'' := \{A' \subset \Omega' \mid T^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$. Dann ist \mathcal{A}'' eine σ -Algebra, und T ist per Definition genau dann \mathcal{A}/\mathcal{A}' -messbar, wenn $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ gilt. Aber $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}''$ ist äquivalent zu $\mathcal{E}' \subset \mathcal{A}''$ – und dies wiederum ist äquivalent zu (4.1). \square

Der Trick, den wir hier mit der Definition von \mathcal{A}'' anwenden, wird uns noch häufiger begegnen: Wir wollen für ein System von Dingen eine Eigenschaft nachweisen. Dazu bilden wir das System der „guten“ Dinge (hier: \mathcal{A}'') und zeigen: Dies führt uns zum gesuchten System.

Beispiel 4.4. (i) Wenn $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ konstant ist, d.h. es gibt ein $\omega'_0 \in \Omega'$, so dass $T(\Omega) = \omega'_0$ gilt, dann ist T eine \mathcal{A}/\mathcal{A}' -messbare Abbildung für jedes Paar von σ -Algebren \mathcal{A} auf Ω und \mathcal{A}' auf Ω' .

(ii) Seien c und d natürliche Zahlen. Wenn $T : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^d$ stetig ist, dann ist T eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}^c)/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbare Abbildung, wo $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ die Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R}^d bezeichnet.

Ü

B.ex.

4 Messbare Mengen, Bildmaße und elt. Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Die Verknüpfung messbarer Abbildungen ist messbar.

Satz 4.5. Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2, 3$, messbare Räume. Sei $T_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ eine $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_2$ -messbare Abbildung, und $T_2 : \Omega_2 \rightarrow \Omega_3$ eine $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_3$ -messbare Abbildung. Dann ist die Abbildung $T_2 \circ T_1 : \Omega_1 \rightarrow \Omega_3$ immer $\mathcal{A}_1/\mathcal{A}_3$ -messbar.

Beweis. Sei $A_3 \in \mathcal{A}_3$. Dann gilt:

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A_3) = T_1^{-1}(\underbrace{T_2^{-1}(A_3)}_{\in \mathcal{A}_2}) \in \mathcal{A}_1.$$

□

In diesem Kapitel, darauf sei hiermit ausdrücklich hingewiesen, ist bis hierher *kein* Maß oder äußeres Maß aufgetaucht. Bisher hat die hier eingeführte Definition der Messbarkeit von Abbildungen *nichts* zu tun mit den Aussagen zur μ^* -Messbarkeit von Mengen, die wir in den vorhergehenden Kapiteln gemacht haben.

Das Bildmaß $T(\mu) = \mu \circ T^{-1}$: Ein Maß mit Rückzug

Satz 4.6. Seien (Ω, \mathcal{A}) , (Ω', \mathcal{A}') messbare Räume, und $T : \Omega \rightarrow \Omega'$ eine \mathcal{A}/\mathcal{A}' -messbare Abbildung. Wenn μ ein Maß auf \mathcal{A} ist, dann ist $T(\mu) : \mathcal{A}' \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, definiert durch

$$T(\mu)(A') := \mu(T^{-1}(A')) \quad \text{für alle } A' \in \mathcal{A}',$$

ein Maß auf \mathcal{A}' , genannt das Bildmaß von μ unter T .

Anstelle von $T(\mu)$ findet man in der Literatur auch die Notationen $\mu \circ T^{-1}$ und μ_T . Jede der drei Notationen ist in der Aussage identisch.

Beweis. Mit $T(\mu)(\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$ und $T(\mu)(A') \geq 0$ für beliebige A' in \mathcal{A}' sind schon zwei der zu zeigenden drei Eigenschaften eines Maßes bewiesen.

Seien $A'_n \in \mathcal{A}'$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} T(\mu)\left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A'_n\right) &= \mu\left[T^{-1}\left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A'_n\right)\right] = \mu\left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} T^{-1}(A'_n)\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(T^{-1}(A'_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} T(\mu)(A'_n). \end{aligned}$$

□

Elementare Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

B.ex.

Erinnere: Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$, und \mathcal{R} der Ring der endlichen Vereinigungen rechts-halboffener Intervalle der Form $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}^d$, $a \leq b$. Der Buchstabe m notiere die Anweisung „bestimme das Volumen von Elementen aus \mathcal{R} “,

die wir als Lebesgue-Maß bezeichnet haben. Sei außerdem $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\mathcal{R})$ die Borel- σ -Algebra über dem Raum \mathbb{R}^d .

Auf diese Daten wenden wir nun unser „Caratheodory-Programm“ an:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{R} & \subset & \sigma(\mathcal{R}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) & \subset & \mathcal{A}_{m^*} & \subset & \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \\ & & \overset{m \leftarrow \bar{m} := m^* \upharpoonright_{\sigma(\mathcal{R})} \leftarrow m^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{m^*}} \leftarrow m^*}{\underbrace{\hspace{10em}}} & & & & \end{array}$$

Es ist also wieder m ein Maß auf \mathcal{R} , m^* ist das assoziierte äußere Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, und $m^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{m^*}}$ ist die Einschränkung des letzteren auf \mathcal{A}_{m^*} , die kleinste σ -Algebra, die $\sigma(\mathcal{R})$ und alle m -Nullmengen enthält. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist die von \mathcal{R} erzeugte σ -Algebra über \mathbb{R}^d , und \bar{m} ist das einzige Maß auf dieser σ -Algebra, welches m erweitert.

In der Literatur trägt \bar{m} , also die Einschränkung von m^* auf $\sigma(\mathcal{R})$, häufig den Namen „Borel-Lebesgue-Maß“, wogegen $m^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{m^*}}$ als Maß auf \mathcal{A}_{m^*} den Namen „Lebesgue-Maß“ trägt.

Wir haben das Maß m auf \mathcal{R} von Anfang an *Lebesgue-Maß* genannt. Das obige Diagramm rechtfertigt das: offensichtlich handelt es sich in jedem Fall um eine Einschränkung des assoziierten äußeren Maßes m^* . Der einzige Unterschied zwischen den verschiedenen im Diagramm auftretenden Abbildungen liegt in ihrem Definitionsbereich, nicht aber in ihrer „Aktion“. Wir nehmen das zum Anlass, von hier ab das gleiche Symbol und den gleichen Namen für alle drei Abbildungen zu verwenden. Wir setzen also

$$m = \bar{m} = m^* \upharpoonright_{\mathcal{A}_{m^*}} = \text{Lebesgue-Maß},$$

und geben, wenn das notwendig sein sollte, jeweils an, auf welchem Definitionsbereich (\mathcal{R} , $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ oder \mathcal{A}_{m^*}) wir gerade arbeiten. Das Symbol m^* nutzen wir nur, wenn wir ausdrücklich von dem assoziierten äußeren Maß auf $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ sprechen.

Es ist Ergebnis einer Übung, dass der Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A}_{m^*}, m)$ gerade die Vervollständigung des Maßraumes $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$ ist. □

Wir betrachten nun die Definitionsbereiche $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, \mathcal{A}_{m^*} und $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Theorem 4.7.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{A}_{m^*} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d).$$

Beweis. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \neq \mathcal{A}_{m^*}$: Für den Beweis werden die Cantor-Funktion und die Cantor-Menge benötigt. Beide werden wir später im Laufe der Vorlesung studieren. Wir werden den Beweis dann nachholen.

$\mathcal{A}_{m^*} \neq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$: Betrachte die folgende Relation „ \sim “ auf \mathbb{R}^d :

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}^d.$$

Man kann leicht überprüfen, dass „ \sim “ eine Äquivalenzrelation auf \mathbb{R}^d ist. Die Äquivalenzklassen sind von der Form $y + \mathbb{Q}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$. Nach dem Auswahlaxiom können wir aus jeder dieser Äquivalenzklassen ein bestimmtes Element b wählen. Wir können sogar beschließen, dass jedes solche b in $[0, 1]^d$ liegen soll. Sei $B \subset [0, 1]^d$ die Menge aller solcher b (nicht eindeutig!). Jedes beliebige $x \in \mathbb{R}^d$ gehört dann zu irgendeiner Äquivalenzklasse. Es gibt also für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ genau ein $b \in B$, so dass $x \in b + \mathbb{Q}^d$ gilt. Das heißt, wir können ein $q \in \mathbb{Q}^d$ bestimmen mit $x = b + q$, oder allgemeiner $x \in B + q$. Offensichtlich gilt also

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (B + q).$$

Seien nun $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}^d$ zwei verschiedene rationale Zahlen. Dann muss $(B + q_1) \cap (B + q_2) = \emptyset$ gelten, denn andernfalls würde folgen:

$$\begin{aligned} \exists b_1, b_2 \in B : b_1 + q_1 &= b_2 + q_2 \\ \Rightarrow b_1 - b_2 &= q_2 - q_1 \in \mathbb{Q}^d \\ \Rightarrow b_1 &\sim b_2 \\ \Rightarrow b_1 &= b_2 \\ \Rightarrow q_1 &= q_2. \end{aligned}$$

Also gilt sogar

$$\mathbb{R}^d = \dot{\bigcup}_{q \in \mathbb{Q}^d} (B + q).$$

□

Gleichzeitig ist $B \subset [0, 1]^d$, und somit gilt $B \notin \mathcal{A}_{m^*}$ (vgl. Übungen. Im Buch von Elstrodt findet man diese Aussage als „Satz von Vitali“, vgl. [Els99, III §3, Satz 3.1]).

□

□

Ebenfalls als Ergebnis einer Übung erhalten wir folgendes:

Das Lebesgue-Maß ist translationsinvariant und verhält sich bei Drehstreckungen erwartungsgemäß

Theorem 4.8. Sei $a \in \mathbb{R}^d$, $r \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Dann sind die Abbildungen $T_a : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ und $H_r : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, definiert durch

$$T_a(x) := x + a, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad H_r(x) := r \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

beide sowohl $\mathcal{A}_{m^*} / \mathcal{A}_{m^*}$ -messbar als auch $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) / \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbar.

Weiterhin haben die Bildmaße dieser beiden Abbildungen die Eigenschaften, dass $T_a(m) = m$ sowohl auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ als auch auf \mathcal{A}_{m^*} gilt (man sagt, m ist translations-invariant), und dass genauso $H_r(m) = \frac{1}{|r|^d} m$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ und auf \mathcal{A}_{m^*} gilt.

Aufgrund von Zeitmangel halten wir die folgende Aussage ebenfalls nur fest, ohne sie zu beweisen. Der Beweis ist aber nicht zu schwer. Vergleiche etwa [Bau78, §8].

Theorem 4.9. *m ist das einzige translations-invariante Maß auf \mathcal{A}_m^* und auf $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, das die Eigenschaft $m([0, 1]^d) = 1$ erfüllt.*

Das Lebesgue-Maß ist das einzige sinnvolle translationsinvariante Maß auf \mathbb{R}^d

(Als „sinnvoll“ ist hier die Eigenschaft bezeichnet, dem rechtshalboffenen Einheitsintervall in jeder Dimension d das Maß 1 zuzuordnen.)

4 Messbare Mengen, Bildmaße und elt. Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

5 Messbare Funktionen und Elementarfunktionen

In diesem Teil der Vorlesung fixieren wir einen messbaren Raum (Ω, \mathcal{A}) und betrachten messbare Funktionen $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Messbare Funktionen

Definition 5.1. Sei $\overline{\mathcal{B}}$ das System aller Untermengen B von $\overline{\mathbb{R}}$ (also $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$), so dass $B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}$ gilt (erinnere: \mathcal{B} war die Borel- σ -Algebra auf \mathbb{R}).

Äquivalent: B sei von der Form B_0 , $B_0 \cup \{+\infty\}$, $B_0 \cup \{-\infty\}$ oder $B_0 \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, wo $B_0 \in \mathcal{B}$.

Die σ -Algebra $\overline{\mathcal{B}}$ heißt die *Borel- σ -Algebra auf $\overline{\mathbb{R}}$* .

Definition 5.2. Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. f heißt *\mathcal{A} -messbar*, wenn f $\mathcal{A}/\overline{\mathcal{B}}$ -messbar ist.

Wir betrachten also in diesem Abschnitt folgende Situation:

$$f : \begin{array}{c} \Omega \\ \mathcal{A} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \overline{\mathbb{R}} \\ \overline{\mathcal{B}} \end{array}$$

Definition 5.3. Sei A eine Menge in Ω . Dann definieren wir die *Indikatorfunktion* $\mathbb{I}_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\mathbb{I}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \in A^C. \end{cases}$$

Beispiel 5.4. (i) Sei $A \subset \Omega$. Offensichtlich gilt $A \in \mathcal{A}$ genau dann, wenn \mathbb{I}_A die Eigenschaft hat, \mathcal{A} -messbar zu sein. Deswegen nennt man auch die Mengen in \mathcal{A} *\mathcal{A} -messbar*.

Wenn \mathcal{A} gerade die σ -Algebra aller μ^* -messbaren Mengen für ein gegebenes äußeres Maß μ^* auf Ω ist, also $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{\mu^*}$, dann fällt der neue Begriff der *\mathcal{A}_{μ^*} -Messbarkeit* zusammen mit dem alten Begriff der *μ^* -Messbarkeit*.

(ii) Sei $\Omega := \mathbb{R}^d$, und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Sei $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. In Anlehnung an die Darstellung oben betrachten wir hier also den Fall

B.ex.

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^d \\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \overline{\mathbb{R}} \\ \overline{\mathcal{B}}. \end{array}$$

Wenn f eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbare Funktion ist, dann heißt f *Borel-messbar*. Dementsprechend heißt $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ (also eine $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -messbare Menge) ebenfalls *Borel-messbar*, oder eine *Borel-Menge*.

- B.ex. (iii) Sei wieder $\Omega := \mathbb{R}^d$, und $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Sei diesmal $\mathcal{A} := \mathcal{A}_{m^*}$ (hier ist m^* das äußere Lebesgue-Maß). Die Situation ist also

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \rightarrow & \overline{\mathbb{R}} \\ \mathcal{A}_{m^*} & & \overline{\mathcal{B}}. \end{array}$$

Wenn f eine \mathcal{A}_{m^*} -messbare Funktion ist, dann nennt man f *Lebesgue-messbar*. Analog heißt dann $A \in \mathcal{A}_{m^*}$ ebenfalls *Lebesgue-messbar*, oder eine *Lebesgue-Menge*.

Definition 5.5. Für $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ sei

$$\{\alpha \leq f \leq \beta\} := f^{-1}([\alpha, \beta]) = \{\omega \in \Omega \mid \alpha \leq f(\omega) \leq \beta\}.$$

Analog für $\{\alpha \leq f < \beta\}$, $\{\alpha < f < \beta\}$ usw. Insbesondere sei

$$\{\alpha \leq f\} := \{\alpha \leq f \leq +\infty\},$$

wobei wieder $\{\alpha < f\}$, $\{f < \beta\}$ usw. analog definiert werden.

Charakterisierung von „Messbarkeit einer Funktion“

Satz 5.6. Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) f ist \mathcal{A} -messbar.
- (ii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{f \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$.
- (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{f > \alpha\} \in \mathcal{A}$.
- (iv) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{f \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$.
- (v) $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \{f < \alpha\} \in \mathcal{A}$.

Die Äquivalenz bleibt sogar bestehen, wenn man in (ii)-(v) „ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ “ ersetzt durch „ $\forall \alpha \in D$ “, wo D eine dichte Untermenge von \mathbb{R} ist.

Ü *Beweis.* Siehe: Die Übungen zur Vorlesung, oder die Literatur. □

Die Charakterisierung des Begriffes „Messbarkeit von Funktionen“ wie im obigen Satz dient in vielen Büchern zur *Definition* dieses Begriffes. Wir haben hiermit also gezeigt, dass unsere Definition zu der dort gegebenen äquivalent ist.

Satz 5.7. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zwei \mathcal{A} -messbare Funktionen. Dann gilt:

$$\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}.$$

Beweis. Nach der Notations-Definition 5.5 gilt:

$$\begin{aligned} \omega \in \{f < g\} &: \Leftrightarrow f(\omega) < g(\omega) \\ &\Leftrightarrow \exists q(=q(\omega)) \in \mathbb{Q} : f(\omega) < q < g(\omega) \\ &\Leftrightarrow \exists q(=q(\omega)) \in \mathbb{Q} : \omega \in \{f < q\} \cap \{q < g\}. \end{aligned}$$

Und das heißt:

$$\{f < g\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{f < q\} \cap \{q < g\} \in \mathcal{A}.$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \{f \leq g\} &= \{f > g\}^C \quad (\in \mathcal{A}), \\ \{f = g\} &= \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\} \quad (\in \mathcal{A}), \\ \{f \neq g\} &= \{f = g\}^C \quad (\in \mathcal{A}). \end{aligned}$$

□

Satz 5.8. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zwei \mathcal{A} -messbare Funktionen.

- (i) Wenn $\{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\} = \emptyset = \{f = -\infty\} \cap \{g = +\infty\}$ gilt, dann ist $f + g$ (definiert und) \mathcal{A} -messbar.
- (ii) $f \cdot g$ ist \mathcal{A} -messbar. Speziell ist $\gamma \cdot g$ für alle $\gamma \in \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion.

Die Summe zweier \mathcal{A} -messbarer Funktionen ist wieder \mathcal{A} -messbar, wenn sie sinnvoll definierbar ist; das Produkt sogar immer.

Beweis. (i): Seien $\beta \in \mathbb{R}, \gamma \in]0, \infty[$. Dann ist $\beta \pm \gamma g$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion, da wir für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ wissen:

$$\{\beta \pm \gamma g \geq \alpha\} = \left\{ g \begin{array}{l} \geq \\ (\leq) \end{array} + \frac{\alpha - \beta}{\gamma} \right\} \in \mathcal{A}.$$

Also gilt, wiederum für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und unter Verwendung des vorhergehenden Satzes:

$$\{f \pm g \geq \alpha\} = \{f \geq \alpha \mp g\} \in \mathcal{A}.$$

Es gilt also, dass $f \pm g$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion ist (wobei, „streng formal“, $f - g := f + (-g)$ gerechnet wird). Der erste Teil ist somit bewiesen.

- (ii): $f = g$: Da $\{f^2 \geq \alpha\} = \Omega$ für alle $\alpha < 0$ gilt, und $\{f^2 \geq \alpha\} = \{f \geq \sqrt{\alpha}\} \cup \{f \leq -\sqrt{\alpha}\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}_+$, ist die Behauptung für diesen Fall bewiesen: f^2 ist \mathcal{A} -messbar.

$f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: Wegen der *Polarisierungsidentität*

$$f \cdot g = \frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2$$

folgt mit (i) und dem bereits bewiesenen Fall $f = g$, dass $f \cdot g$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion ist.

$f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$: Sei $\Omega_0 := \{f \cdot g = +\infty\} \cup \{f \cdot g = -\infty\} \cup \{f \cdot g = 0\}$. Dann ist Ω_0 nach dem vorhergehenden Satz in \mathcal{A} enthalten: Schließlich ist auch eine konstante Funktion eine Funktion aus eigenem Recht. Wir halten fest, dass die Einschränkungen $f|_{\Omega_0^c}$ und $g|_{\Omega_0^c}$ reellwertig und $(\Omega_0^c \cap \mathcal{A})$ -messbar sind (Stichwort: Spur- σ -Algebra). Für reellwertige Funktionen haben wir aber die Behauptung oben schon gezeigt, es gilt also, dass $f|_{\Omega_0^c} \cdot g|_{\Omega_0^c}$ wieder $(\Omega_0^c \cap \mathcal{A})$ -messbar ist. Der Beweis, dass $f \cdot g$ tatsächlich \mathcal{A} -messbar ist, ist nun einfach – schließlich kann $f \cdot g$ auf Ω_0 nur drei mögliche Werte annehmen.

(Die letzte Aussage wird zur Übung gegeben.)

□

□

Satz 5.9. Seien $f_n, n \in \mathbb{N}$, \mathcal{A} -messbare Funktionen auf Ω . Dann gilt:

(i) $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ sind ebenfalls \mathcal{A} -messbar.

(ii) Wenn für alle $\omega \in \Omega$ der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega)$ in \mathbb{R} existiert, dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ebenfalls \mathcal{A} -messbar.

Beweis. (i): Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{\sup_n f_n \leq \alpha\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{f_n \leq \alpha\}}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A},$$

also sind $\sup_n f_n$ und $\inf_n f_n = -\sup_n(-f_n)$ beide \mathcal{A} -messbar. Damit gilt dies aber auch für

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n = \inf_n \sup_{m \geq n} f_m \quad \text{und} \quad \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n = \sup_n \inf_{m \geq n} f_m.$$

(ii): Angenommen, der Grenzwert existiert. Dann gilt für jedes $\omega \in \Omega$:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega).$$

Also ist der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ ebenfalls \mathcal{A} -messbar.

□

Korollar 5.10. Seien $f, f_1, \dots, f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ \mathcal{A} -messbare Funktionen. Dann sind auch $\sup(f_1, \dots, f_n)$ und $\inf(f_1, \dots, f_n)$ beide \mathcal{A} -messbare Funktionen. Insbesondere sind auch die folgenden Funktionen messbar:

$$\begin{aligned} |f| &= \sup(f, -f) \\ f^+ &:= \sup(f, 0) \quad (\geq 0) \\ f^- &:= -\inf(f, 0) \quad (\geq 0) \end{aligned}$$

Bemerkung 5.11. Offensichtlich kann man eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ durch $f = f^+ - f^-$ in Positiv- und Negativteil (beides positive, \mathcal{A} -messbare Funktionen!) zerlegen. Wir notieren außerdem: $|f| = f^+ + f^-$.

Elementarfunktionen

Definition 5.12. Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ heißt \mathcal{A} -messbare Elementarfunktion (oder nur Elementarfunktion, wenn \mathcal{A} fixiert ist), wenn u eine \mathcal{A} -messbare Funktion ist und nur endliche viele Werte in \mathbb{R}_+ annimmt.

Beide „Endlichkeitsaspekte“ der Elementarfunktionen sind wichtig: Der Funktionswert einer Elementarfunktion ist immer endlich, und die Bildmenge einer Elementarfunktion ist ebenfalls immer endlich.

Bemerkung 5.13. (i) Seien u, v Elementarfunktionen, und $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Dann sind αu , $u + v$, $u \cdot v$, $\sup(u, v)$ und $\inf(u, v)$ ebenfalls Elementarfunktionen.

(ii) Sei u eine Elementarfunktion, und $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Liste ihrer Werte in \mathbb{R}_+ . Setze dann $A_i := u^{-1}(\{\alpha_i\}) \in \mathcal{A}$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$. Diese Mengen A_i sind eine paarweise disjunkte Zerlegung von Ω ; es gilt also:

$$\dot{\bigcup}_{i=1, \dots, n} A_i = \Omega.$$

Man nennt

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$$

einen Repräsentanten der Elementarfunktion u . Dieser ist nicht(!) eindeutig. Später werden wir einen Repräsentanten von u normal nennen, wenn die A_i eine paarweise disjunkte Zerlegung von Ω bilden.

(iii) Zur Notation: Wir schreiben $f_n \uparrow f$, wenn $f, f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen sind, so dass für alle $\omega \in \Omega$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$.

5 Messbare Funktionen und Elementarfunktionen

Der folgende Satz bildet, neben dem Satz von Caratheodory, eine ganz wesentliche Grundlage für die Maß- und Integrationstheorie:

Jede nichtnegative messbare Funktion ist Limes von Elementarfunktionen.

Satz 5.14. Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ eine Funktion. f ist genau dann \mathcal{A} -messbar, wenn es (\mathcal{A} -messbare) Elementarfunktionen $u_n, n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass $u_n \uparrow f$ gilt.

Beweis. Wenn es solche (\mathcal{A} -messbaren) Elementarfunktionen $u_n, n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass $u_n \uparrow f$ gilt, also auch $f = \sup_n u_n$, dann ist f eine \mathcal{A} -messbare Funktion nach 5.9.

Sei umgekehrt f eine \mathcal{A} -messbare Funktion. Definiere dann für $n \in \mathbb{N}$

$$u_n := \begin{cases} \frac{i}{2^n} & \text{auf } \left\{ \frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n} \right\}, \quad \text{für } i = 0, 1, \dots, n \cdot 2^n - 1, \\ n & \text{auf } \{f \geq n\}. \end{cases}$$

Anders ausgedrückt: Seien für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$A_{\frac{i}{2^n}} := \left\{ \frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n} \right\}, \quad \text{für } 0 \leq i \leq n \cdot 2^n - 1, \\ A_n := \{f \geq n\},$$

dann ist u_n definiert durch

$$u_n := \sum_{i=0}^{n \cdot 2^n} \frac{i}{2^n} \cdot \mathbb{I}_{A_{\frac{i}{2^n}}}.$$

Da jede dieser Mengen $A_{\frac{i}{2^n}}$ in \mathcal{A} liegt, ist u_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine (\mathcal{A} -messbare) Elementarfunktion. Klar: Die Mengen $A_{\frac{i}{2^n}}, 0 \leq i \leq n \cdot 2^n$, sind paarweise disjunkt, und ihre Vereinigung ist Ω .

Wir müssen nun noch zeigen, dass die u_n eine isotone Folge bilden. Das ist aber klar: Auf der Menge $A_{\frac{i}{2^n}} = \left\{ \frac{i}{2^n} \leq f < \frac{i+1}{2^n} \right\}$ kann die Funktion u_{n+1} (also quasi „die nächste“) für jedes $i \in \{0, \dots, n \cdot 2^n - 1\}$ nur die Werte $\frac{2i}{2^{n+1}}$ und $\frac{2i+1}{2^{n+1}}$ annehmen. Für $A_n = \{f \geq n\}$ kann u_{n+1} nur Werte $\geq n$ annehmen. Also gilt $u_n \uparrow$.

Zur Konvergenz der u_n : Sei $\omega \in \Omega$, so dass $f(\omega) = +\infty$, dann ist $u_n(\omega) = n$, also folgt in diesem Fall $u_n(\omega) \uparrow f(\omega)$. Sei $\omega \in \Omega$, so dass $f(\omega) < +\infty$, dann gilt nach Definition für jedes $n > f(\omega)$:

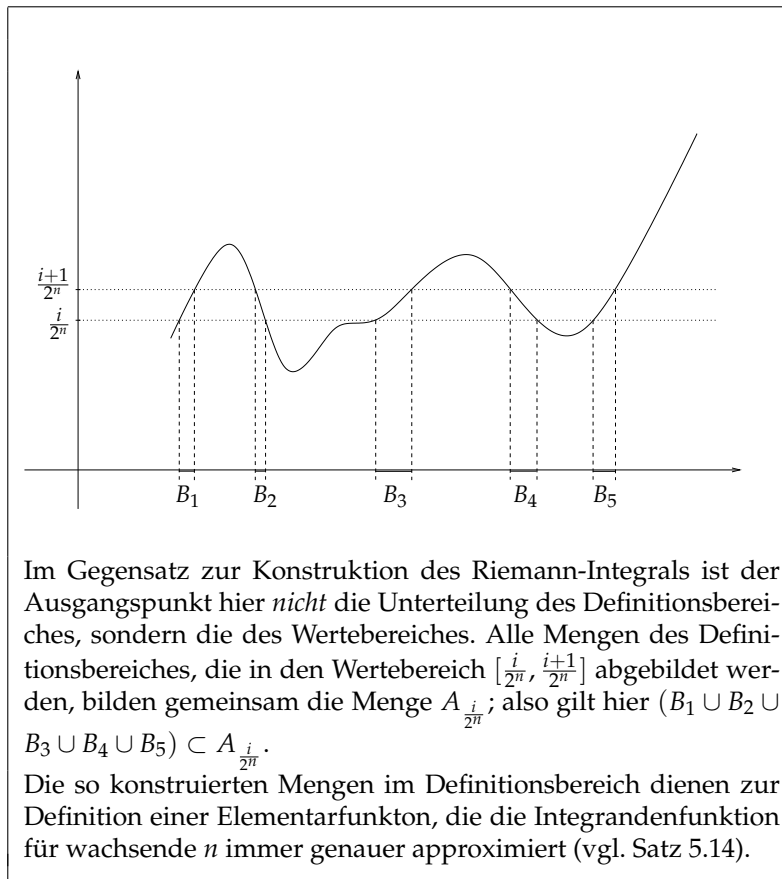
$$u_n(\omega) \leq f(\omega) < u_n(\omega) + \frac{1}{2^n},$$

also wiederum $u_n(\omega) \uparrow f(\omega)$. □

Bemerkung 5.15. Wenn $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ eine \mathcal{A} -messbare, beschränkte Funktion ist, dann konvergiert die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wie sie im obigen Beweis definiert ist, sogar gleichmäßig auf ganz Ω gegen f .

6 Integration von Elementarfunktionen und nichtnegativen, messbaren Funktionen mit einem Maß

In diesem Kapitel sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Wir wollen für \mathcal{A} -messbare Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ ein Integral mit dem Maß μ definieren.



Idee

Wir entwickeln zunächst ein Gerüst für die Konstruktion des Integrals. Dieses dreistufige Gerüst wird uns später in vielen Beweisen in ähnlicher Form wieder begegnen: Wir betrachten (1) charakteristische, (2) elementare und (3) nichtnegative messbare Funktionen.

(1) Charakteristische Funktionen

Schritt 1: Sei f eine charakteristische Funktion, also $f = \mathbb{I}_A$, $A \in \mathcal{A}$. Wir definieren dann

$$\int f \, d\mu := \mu(A).$$

(2) Elementarfunktionen

Schritt 2: Sei f eine Linearkombination charakteristischer Funktionen, also $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$, $A_i \in \mathcal{A}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $1 \leq i \leq n$. Wir definieren in diesem Fall

$$\int f \, d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \mathbb{I}_{A_i} \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i). \quad (6.1)$$

Das heißt, wir erweitern „ \int “ aufbauend auf Schritt 1 per Linearität (was wir für sinnvoll halten, schließlich soll „ \int “ ein lineares Funktional sein).

Diese Definition bringt aber ein Problem mit sich: Wir müssen zeigen, dass $\int f \, d\mu$ durch (6.1) wohldefiniert ist, dass also das Ergebnis nicht vom gewählten Repräsentanten $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$ abhängt. Der einfachste Ansatz zur Lösung dieses Problems ist, nur *normale Repräsentanten* zu betrachten. So nennen wir eine Darstellung von f , in der die Mengen A_i eine paarweise disjunkte Überdeckung von Ω bilden. Wir definieren dann $\int f \, d\mu$ wie in (6.1) mit der Einschränkung, dass wir nur normale Repräsentanten verwenden. Anschließend beweisen wir, dass (6.1) von der Auswahl des normalen Repräsentanten unabhängig ist. Dann beweisen wir, dass $f \mapsto \int f \, d\mu$ linear ist, und dass

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

tatsächlich sogar für *jeden* (nicht notwendig normalen) Repräsentanten von f gilt.

Merke: Eine Funktion u ist eine *Elementarfunktion* (im Sinne des vorhergehenden Kapitels) genau dann, wenn sie als endliche Linearkombination von charakteristischen Funktionen mit positiven reellen Koeffizienten geschrieben werden kann. Vgl. die Bemerkung zum „Repräsentanten einer Elementarfunktion“ im vorhergehenden Kapitel.

Schritt 3: Sei f eine beliebige nicht-negative, \mathcal{A} -messbare Funktion. Dann wissen wir nach 5.14, dass es Elementarfunktionen $u_n, n \in \mathbb{N}$, gibt, so dass $u_n \uparrow f$ gilt. Speziell können wir festhalten:

(3) Nichtnegative messbare Funktionen

$$f = \sup \{ u \mid u \text{ ist Elementarfunktion, } u \leq f \}.$$

Wir definieren also

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int u \, d\mu \mid u \text{ ist Elementarfunktion, } u \leq f \right\}. \quad (6.2)$$

Wir werden wieder zeigen können, dass $f \mapsto \int f \, d\mu$ ein lineares Funktional ist – auch wenn (6.2) zunächst nicht besonders linear aussieht...

Umsetzung – Elementarfunktionen

Bemerkung 6.1. Sei u eine (\mathcal{A} -messbare) Elementarfunktion. Seien β_1, \dots, β_k nicht notwendig verschiedene, positive reelle Zahlen und $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{A} \setminus \{\emptyset\}$ paarweise disjunkt, so dass gilt:

$$\Omega = \dot{\bigcup}_{i \leq k} B_i$$

und

$$u = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbb{I}_{B_i}. \quad (6.3)$$

Dann heißt (6.3) ein normaler Repräsentant von u . Nach 5.13(ii) wissen wir schon, dass es zu u immer einen normalen Repräsentanten gibt. Seien nämlich $u(\Omega) = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, paarweise verschieden, und $A_i := u^{-1}(\{\alpha_i\})$, dann ist

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$$

offensichtlich ein normaler Repräsentant. Aber es gibt tatsächlich viele normale Repräsentanten – seien etwa $C_j \in \mathcal{A}$, $1 \leq j \leq N$, paarweise verschieden, so dass

Normale Repräsentanten sind nicht eindeutig bestimmt.

$\Omega = \dot{\bigcup}_{j \leq N} C_j$ gilt. Dann ist

$$\mathbb{I}_{A_i} = \sum_{j=1}^N \mathbb{I}_{A_i \cap C_j},$$

und daher haben wir mit

$$u = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N \alpha_i \mathbb{I}_{A_i \cap C_j}$$

einen weiteren normalen Repräsentanten für u .

Definition 6.2. Sei u eine Elementarfunktion, und $u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$ ein normaler Repräsentant von u . Dann definieren wir

$$\int u \, d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

als *Integral von u (mit Maß μ)*.

Beweis, dass $\int u \, d\mu$ wohldefiniert ist. Sei $u = \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbb{I}_{B_j}$ ein weiterer normaler Repräsentant von u , also

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i} = u = \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbb{I}_{B_j}.$$

Sei i_0, j_0 ein Paar von Indizes, so dass $A_{i_0} \cap B_{j_0}$ nichtleer ist. Dann gilt für jedes $\omega \in A_{i_0} \cap B_{j_0}$:

$$\alpha_{i_0} = \alpha_{i_0} \mathbb{I}_{A_{i_0}}(\omega),$$

also wegen der Punktfremdheit der A_i

$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(\omega) = u(\omega) = \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbb{I}_{B_j}(\omega),$$

was (diesmal wegen der Punktfremdheit der B_j) identisch ist mit

$$= \beta_{j_0} \mathbb{I}_{B_{j_0}}(\omega) = \beta_{j_0}.$$

Da Ω als disjunkte Vereinigung der $A_i, i = 1, \dots, n$, ebenso darstellbar ist wie als disjunkte Vereinigung der $B_j, j = 1, \dots, k$, folgt weiterhin:

$$\mu(A_i) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{j \leq k} (A_i \cap B_j)\right) = \sum_{j=1}^k \mu(A_i \cap B_j),$$

und analog

$$\mu(B_j) = \mu\left(\dot{\bigcup}_{i \leq n} (A_i \cap B_j)\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i \cap B_j).$$

Also folgt schließlich:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{j=1}^k \beta_j \mu(B_j) \end{aligned}$$

(Anmerkung zur zweiten Gleichung: Wenn $\mu(A_i \cap B_j) = 0$ gilt, so ist dies klar. Im anderen Fall folgt $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, und somit $\alpha_i = \beta_j$).

Damit ist gezeigt, dass $\int u \, d\mu$ von der Wahl des normalen Repräsentanten unabhängig, also wohldefiniert ist. \square

Bemerkung 6.3. Zur Schreibweise: Im Fall des Lebesgue-Maßes μ wird in der Literatur das „ $d\mu$ “ häufig einfach weggelassen.

Für $u = u(\omega)$ wird der Term $\int u \, d\mu$ von Wahrscheinlichkeitstheoretikern häufig als $\int u(\omega) \, \mu(d\omega)$ notiert, wogegen derselbe Term in der Notation von Analytikern so aussieht: $\int u(\omega) \, d\mu(\omega)$. Letztendlich bedeutet dies alles das gleiche.

Wir betrachten jetzt weitere Eigenschaften der Abbildung $u \mapsto \int u \, d\mu$:

Satz 6.4. Seien u, v zwei (\mathcal{A} -messbare) Elementarfunktionen. Dann gilt:

„ \int “ ist positiv homogen (später: „ \int “ ist sogar linear)

$$\int \mathbb{I}_A \, d\mu = \mu(A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{A} \quad (6.4)$$

$$\int \alpha \cdot u \, d\mu = \alpha \int u \, d\mu \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (6.5)$$

$$\int (u + v) \, d\mu = \int u \, d\mu + \int v \, d\mu \quad (6.6)$$

$$u \leq v \Rightarrow \int u \, d\mu \leq \int v \, d\mu \quad (6.7)$$

Man sagt auch zusammenfassend, das Funktional \int sei positiv homogen (nicht „linear“!).

Beweis. Die Beweise von (6.4) und (6.5) sind offensichtlich, und werden zur Übung gegeben. \square

Zum Beweis von (6.6) und (6.7) seien

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i} \quad \text{und} \quad v = \sum_{j=1}^k \beta_j \mathbb{I}_{B_j}$$

normale Repräsentanten. Da sowohl die A_i als auch die B_j je eine disjunkte Überdeckung von Ω bilden, sind dann auch

$$u = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \mathbb{I}_{A_i \cap B_j} \quad \text{und} \quad v = \sum_{i,j} \beta_{i,j} \mathbb{I}_{A_i \cap B_j}$$

normale Repräsentanten, wo $\alpha_{i,j} := \alpha_i$ für $A_i \cap B_j \neq \emptyset$ und analog $\beta_{i,j} := \beta_j$ für $A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Nun kennen wir aber auch einen normalen Repräsentanten von $u + v$, nämlich

$$u + v = \sum_{i,j} (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) \mathbb{I}_{A_i \cap B_j}.$$

Also kennen wir auch das Integral von $u + v$:

$$\int u + v \, d\mu = \sum_{i,j} (\alpha_{i,j} + \beta_{i,j}) \mu(A_i \cap B_j).$$

Gleichzeitig gilt aber

$$\int u \, d\mu + \int v \, d\mu = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i,j} \beta_{i,j} \mu(A_i \cap B_j),$$

und damit ist (6.6) bewiesen.

Sei nun $u \leq v$. Dann gilt mit (6.6):

$$\int v \, d\mu = \int u \, d\mu + \int v - u \, d\mu \geq \int u \, d\mu.$$

Also ist auch (6.7) bewiesen.

(Alternativ könnte man zum Beweis von (6.7) auch argumentieren, dass aus $u \leq v$ automatisch $\alpha_{i,j} \leq \beta_{i,j}$ folgt.) \square

Erweiterung auf nichtnegative messbare Funktionen

Das Integral ist Supremum von „Elementar-Integralen“

Definition 6.5. Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion. Wir definieren das Integral von f mit dem Maß μ durch

$$\int f \, d\mu := \sup \left\{ \int u \, d\mu \mid u \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbare Elementarfunktion, } u \leq f \right\}.$$

Für alle $A \in \mathcal{A}$ definieren wir außerdem

$$\int_A f \, d\mu := \int \mathbb{I}_A f \, d\mu.$$

Wir wollen nun dieselben Eigenschaften, wie wir sie in 6.4 für das Integral von Elementarfunktionen gezeigt haben (Stichwort: „Positive Homogenität“), auch für das neue Integral von messbaren Funktionen beweisen. Dabei bereitet uns die Aussage (6.6) besondere Schwierigkeiten. Wir beginnen mit der folgenden Aussage:

kann man „ \int “ und „ \sup “
vertauschen

Satz 6.6. Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion. Sei $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ irgendeine Folge \mathcal{A} -messbarer Elementarfunktionen, so dass $u_n \uparrow f$ gilt (die Existenz einer solchen Folge für jede messbare Funktion haben wir in 5.14 gezeigt). Dann gilt:

$$\int f \, d\mu \stackrel{!}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \left(\stackrel{6.4(6.7)}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n \, d\mu \right).$$

Beweis. „ \geq “: Nach Definition muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten:

$$\int u_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu,$$

also auch

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \leq \int f \, d\mu.$$

„ \leq “: Sei u eine beliebige \mathcal{A} -messbare Elementarfunktion mit $u \leq f$. Nach der Definition von „ $\int f \, d\mu$ “ reicht es, zu zeigen:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \geq \int u \, d\mu.$$

Es reicht sogar zu zeigen, dass für jedes $\alpha < 1$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \geq \alpha \int u \, d\mu$$

gilt, denn dann können wir einfach α gegen 1 gehen lassen. Sei also

$$u = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{I}_{A_j}$$

ein normaler Repräsentant von u , und $\alpha < 1$. Setze

$$B_n := \{u_n \geq \alpha u\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

so dass also $B_n \uparrow \Omega$ für $n \rightarrow \infty$ gilt. Die B_n liegen alle in \mathcal{A} , und u_n dominiert die Elementarfunktion $\alpha u \mathbb{I}_{B_n}$. Also folgt nach dem vorhergehenden Satz

$$\int u_n \, d\mu \geq \alpha \int u \mathbb{I}_{B_n} \, d\mu,$$

also auch

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu \geq \alpha \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u \mathbb{I}_{B_n} \, d\mu \stackrel{?}{=} \alpha \int u \, d\mu.$$

Mit der letzten Gleichung hätten wir unsere Aussage bewiesen. Betrachte zu ihrem Beweis nochmals die Elementarfunktionen $u\mathbb{I}_{B_n}$. Es gilt

$$\int u\mathbb{I}_{B_n} d\mu = \int \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m \alpha_j \mathbb{I}_{A_j \cap B_n}\right)}_{\text{„normal“}} d\mu = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_n). \quad (6.8)$$

Wegen $u_n \uparrow \sup u_n = f \geq u$ folgt, dass man für jedes $\omega \in \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$ finden kann, so dass $u_n(\omega) \geq u(\omega)$ gilt. Damit gilt aber, dass man für jedes $\omega \in \Omega$ ein $n \in \mathbb{N}$ finden kann, so dass ω in B_n enthalten ist, also $B_n \uparrow \Omega$, und somit $A_j \cap B_n \uparrow A_j$. Nach der Charakterisierung σ -additiver Maße im zweiten Kapitel („ σ -additiv \Leftrightarrow stetig von unten“) folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) = \int u d\mu.$$

Die Gleichung (6.8) impliziert

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int u\mathbb{I}_{B_n} d\mu = \int u d\mu.$$

□

Wie so oft, stehen die eigentlich interessanten Dinge nun im Korollar:

Für nichtnegative, messbare f ist „ \int “ positiv homogen

Korollar 6.7. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ zwei \mathcal{A} -messbare Funktionen. Dann gilt:

$$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad (6.9)$$

$$\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu \quad (6.10)$$

$$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu \quad (6.11)$$

Beweis. Die einzige nicht offensichtliche Aussage ist (6.10). Seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen u_n, v_n Elementarfunktionen, so dass $u_n \uparrow f, v_n \uparrow g$ gilt. Dann sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $u_n + v_n$ ebenfalls Elementarfunktionen, und es gilt $u_n + v_n \uparrow f + g$. Also folgt mit dem obigen Satz:

$$\begin{aligned} \int f + g d\mu &\stackrel{6.6}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n + v_n d\mu \\ &\stackrel{6.4}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_n d\mu + \lim_{n \rightarrow \infty} \int v_n d\mu \\ &\stackrel{6.6}{=} \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

□

Es folgt der wichtige Satz von Beppo Levi über monotone Konvergenz:

Theorem 6.8 (Levi). Seien für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ \mathcal{A} -messbar, und es gelte $f_n \uparrow$. Dann folgt:

Für nichtnegative f_n mit $f_n \uparrow$ vertauscht „ \int “ mit „ \sup “

$$\int \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Setze $f := \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Dann ist f eine nichtnegative \mathcal{A} -messbare Funktion, und mit dem Corollar von oben folgt

$$\int f \, d\mu \geq \int f_n \, d\mu \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

also auch

$$\int f \, d\mu \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu.$$

Wir müssen also noch „ \leq “ zeigen. Hierzu wollen wir eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen definieren, so dass $v_n \uparrow f$, und $v_n \leq f_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann folgt nach dem Satz 6.6

$$\int f \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int v_n \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int f_n \, d\mu,$$

und wir sind fertig.

Das technische Prinzip, das wir hier anwenden wollen, trägt den Namen „Diagonalargument“:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ können wir eine Folge $(u_{n,m})_{m \in \mathbb{N}}$ von Elementarfunktionen finden, so dass $u_{n,m} \uparrow_m f_n$. Nun definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Elementarfunktion v_n durch

$$v_n := \sup \left(\begin{array}{c} u_{1,n+1} \\ \vee \\ u_{1,n} \\ \wedge \\ f_1 \end{array} , \dots , \begin{array}{c} u_{n,n+1} \\ \vee \\ u_{n,n} \\ \wedge \\ f_n \end{array} \right).$$

Dann gilt $v_n \uparrow$ und $v_n \leq f_n$, also $\sup_n v_n \leq \sup_n f_n = f$. Gleichzeitig ist $\sup_n v_n \geq u_{n_0,m} \, \forall m$ für jedes feste $n_0 \in \mathbb{N}$, und also für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ $\sup_n v_n \geq f_{n_0}$, was $\sup_n v_n \geq f$ impliziert. \square

Mit dem berühmten „Lemma von Fatou“ finden wir hier schon wieder eine wesentliche Aussage in einem Korollar wieder:

Korollar 6.9 (Fatou). Sei $f_n : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, $n \in \mathbb{N}$, eine Klasse \mathcal{A} -messbarer Funktionen. Dann folgt

Für nichtnegative f_n vertauscht „lim inf“ mit „ \int “

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Beweis. Wir haben im Satz 5.9 festgestellt, dass inf, sup und (soweit existent) lim von Klassen \mathcal{A} -messbarer Funktionen wieder \mathcal{A} -messbar sind. Also sind in unserem Fall $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ ($= \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} f_m$) und

$$g_n := \inf_{m \geq n} f_m, \quad n \in \mathbb{N},$$

beide \mathcal{A} -messbar. Offensichtlich gilt $g_n \uparrow$, also können wir mit Levi folgern:

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu = \int \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} f_m \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int g_n \, d\mu. \quad (6.12)$$

Aber da $g_n \leq f_m$ für alle $n \leq m$ gilt, folgt, eben für alle $n \leq m$,

$$\int g_n \, d\mu \leq \int f_m \, d\mu,$$

und somit auch

$$\int g_n \, d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int f_m \, d\mu. \quad (6.13)$$

(6.12) und (6.13) implizieren nun

$$\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \, d\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \geq n} \int f_m \, d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

□

7 Integrierbarkeit und der Begriff des „fast überall“

Für dieses Kapitel fixieren wir wieder einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Uns interessiert die Frage, welche Funktionen wir mit dem neu definierten Integral überhaupt integrieren können, und wann die Integrale zweier Funktionen identisch sind.

Integrierbarkeit

Definition 7.1. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt (μ) -integrierbar, wenn sie nicht nur \mathcal{A} -messbar ist, sondern zusätzlich die Bedingung

$$\int f^+ d\mu < +\infty \quad \text{und} \quad \int f^- d\mu < +\infty$$

(oder, äquivalent: $\int |f| d\mu < +\infty$) erfüllt.

Ist f eine (μ) -integrierbare Funktion, und $A \in \mathcal{A}$, dann setzen wir

$$\int_A f d\mu := \int \mathbb{I}_A f d\mu.$$

Bemerkung 7.2. (i) Notation:

$$\int f d\mu = \int f(\omega) d\mu(\omega) = \int f(\omega) \mu(d\omega).$$

(ii) Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nichtnegativ und \mathcal{A} -messbar. Dann ist f genau dann (μ) -integrierbar, wenn $\int f d\mu < \infty$ gilt.

(iii) Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion. Dann heißt f quasi- (μ) -integrierbar, wenn $\int f^+ d\mu < +\infty$ oder $\int f^- d\mu < +\infty$, und in diesem Fall setzen wir

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \quad (\in \overline{\mathbb{R}}).$$

(Dieser Begriff der Integrierbarkeit wird in einer Übung benötigt.)

(iv) Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn sowohl f^+ als auch f^- integrierbar sind (bzw. genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist).

7 Integrierbarkeit und der Begriff des „fast überall“

Charakterisierung der $(\mu-)$
Integrierbarkeit

Satz 7.3. Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen zueinander äquivalent:

- (i) f ist $(\mu-)$ integrierbar.
- (ii) Es gibt $(\mu-)$ integrierbare Funktionen $u, v : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so dass $\{u = +\infty\} \cap \{v = +\infty\} = \emptyset$ gilt, und $f = u - v$.
- (iii) Es gibt eine $(\mu-)$ integrierbare Funktion $g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, so dass $|f| \leq g$ gilt.

Es folgt dann:

$$\int f \, d\mu = \int u \, d\mu - \int v \, d\mu$$

Beweis. (i) \Rightarrow (ii): Wähle $u := f^+, v := f^-$.

(ii) \Rightarrow (iii): Wähle $g := u + v$ und verwende die Aussagen über die positive Homogenität (vgl. Kor. 6.7) und die Endlichkeit des Integrals für nichtnegative, $(\mu-)$ integrierbare Funktionen (vgl. Teil (ii) der Bemerkung oben).

(iii) \Rightarrow (i): Wegen der Isotonie des $(\mu-)$ Integrals (vgl. Kor. 6.7) gilt $\int |f| \, d\mu \leq \int g \, d\mu$. Mit den Aussagen (ii) und (iv) der obigen Bemerkung folgt (i).
Es bleibt die abschließende Aussage. Offensichtlich gilt $f^+ + v = f^- + u$, und somit – wieder per positiver Homogenität –

$$\int f^+ \, d\mu + \int v \, d\mu = \int f^- \, d\mu + \int u \, d\mu,$$

also

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu = \int u \, d\mu - \int v \, d\mu.$$

□

„ \int “ ist ein lineares Funktional auf
den integrierbaren Funktionen

Satz 7.4. Seien f und g integrierbare Funktionen. Dann gilt:

- (i) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: αf ist integrierbar, und $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$.
- (ii) Wenn $f + g$ wohldefiniert ist (also $\{f = +\infty\} \cap \{g = -\infty\} = \emptyset = \{f = -\infty\} \cap \{g = +\infty\}$), dann ist $f + g$ integrierbar, und es gilt

$$\int f + g \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu.$$

(Die Forderung nach Wohldefiniertheit von $f + g$ werden wir später, mit Hilfe des Begriffs der Integrierbarkeit μ -fast überall, fallen lassen können. Vgl. 7.14.)

(iii)

„ \int “ ist isoton

$$f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

(iv)

„Eine Art Dreiecksungleichung“

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

(v) $\sup(f, g)$ und $\inf(f, g)$ sind integrierbar.

Beweis. (i): Für $\alpha \geq 0$ haben wir $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ und $(\alpha f)^- = \alpha f^-$, und wir wissen, dass die rechte Seite jeweils integrierbar ist. Genauso für $\alpha < 0$: $(\alpha f)^+ = |\alpha|f^-$ bzw. $(\alpha f)^- = |\alpha|f^+$. Nach 6.7 und 7.2(iv) ist αf also integrierbar, und es gilt

$$\int \alpha f \, d\mu = \int (\alpha f)^+ \, d\mu - \int (\alpha f)^- \, d\mu = \alpha \left(\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \right).$$

(ii): Betrachte $f + g = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-)$. Diese Differenz von Funktionen ist integrierbar nach Satz 7.3, Teile (i) und (ii), und Kor. 6.7. Weiterhin erhalten wir

$$\int f \, d\mu + \int g \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu + \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu,$$

also nach 6.7

$$= \int (f^+ + g^+) \, d\mu - \int (f^- + g^-) \, d\mu,$$

und mit 7.2(iii) folgt:

$$= \int (f + g) \, d\mu.$$

(iii): Zum Beweis der Isotonie von „ \int “ auf integrierbaren Funktionen nutzen wir die positive Homogenität von „ \int “ auf nichtnegativen messbaren Funktionen (vgl. 6.7):

$$\begin{aligned} f \leq g &\Rightarrow f^+ \leq g^+, f^- \geq g^- \\ &\Rightarrow \int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \\ &\stackrel{6.7}{\leq} \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu = \int g \, d\mu. \end{aligned}$$

(iv): $\pm f \leq |f|$ impliziert mit (i) und (iii):

$$\pm \int f \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu \Rightarrow \left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu.$$

(v): Aus

$$|\inf(f, g)|, |\sup(f, g)| \leq |f| + |g|$$

folgt mit (ii) und den Teilen (iii) und (i) von Satz 7.3, dass $\sup(f, g)$ und $\inf(f, g)$ integrierbar sind. □

Bemerkung 7.5. Notiere $\mathcal{L}_r^1(\mu)$ für die Menge aller reellwertigen (daher das „ r “), μ -integrierbaren Funktionen auf Ω . Dann sagt der letzte Satz, dass $\mathcal{L}_r^1(\mu)$ ein $(\mathbb{R}-)$ Vektorraum, und $f \mapsto \int f \, d\mu$ ein positives (oder: isotones) lineares Funktional auf $\mathcal{L}_r^1(\mu)$ ist.

Beispiel 7.6. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, so dass $\mu(\Omega) < +\infty$ gilt. Dann ist nach 7.3, (i) und (iii), jede beschränkte \mathcal{A} -messbare Funktion automatisch μ -integrierbar.

Der Begriff des „ μ -fast überall“

Definition 7.7. Eine Menge $N \in \mathcal{A}$ mit $\mu(N) = 0$ heißt (μ -) Nullmenge.

Offensichtlich gilt für ein System $N_n, n \in \mathbb{N}$, von Nullmengen, dass auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ eine Nullmenge ist: Schließlich gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = 0.$$

Genauso gilt für jede Untermenge $N_0 \in \mathcal{A}$ einer (μ -) Nullmenge N wieder $\mu(N_0) = 0$.

Definition 7.8. Sei P irgendeine Eigenschaft von Punkten in Ω . Wir sagen, es haben μ -fast alle (kurz: μ -f.a.) Punkte in Ω die Eigenschaft P – oder, P gilt μ -fast überall (kurz: μ -f.ü.) –, wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass alle $\omega \in N^C$ die Eigenschaft P haben.

Wichtig: Die Menge $N_P := \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ hat die Eigenschaft } P \text{ nicht}\}$ ist nicht notwendigerweise eine μ -Nullmenge, da sie nicht in \mathcal{A} liegen muss. Wir wissen nur, dass N_P in einer μ -Nullmenge enthalten ist.

□ Man kann aber zeigen, dass N_P in der vervollständigten σ -Algebra \mathcal{A}_0 zum Maß μ liegt.

Beispiel 7.9. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ Funktionen, so dass gilt:

$$f = g \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Das heißt: Es gibt eine Nullmenge N in \mathcal{A} , so dass $\{f \neq g\} \subset N$ ist. Analog bedeutet

$$|f(\omega)| < \infty \quad \text{für } \mu\text{-f.a. } \omega \in \Omega,$$

dass es eine μ -Nullmenge N in \mathcal{A} gibt, so dass $\{|f| = +\infty\} \subset N$ gilt.

Satz 7.10. Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion.

(i) Für $f \geq 0$ gilt:

$$f = 0 \quad \mu\text{-f.ü.} \quad \Leftrightarrow \quad \int f \, d\mu = 0.$$

(ii) Wenn f (μ -) integrierbar ist, dann folgt $|f| < +\infty$ μ -f.ü.

Beweis. (i): „ \Rightarrow “: Setze $N := \{f \neq 0\} = \{f > 0\} \in \mathcal{A}$. Wir müssen nun zeigen:

$$\mu(N) = 0 \quad \Rightarrow \quad \int f \, d\mu = 0.$$

Sei also $\mu(N) = 0$. Setze $u_n := n\mathbb{I}_N$, $n \in \mathbb{N}$, dann ist jedes u_n eine Elementarfunktion, und die Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist aufsteigend. Also folgt

$$\int \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, d\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} n \cdot \mu(N) = 0.$$

Gleichzeitig gilt $f \leq \sup_n u_n$ ($= +\infty$ auf N), und damit

$$0 \leq \int f \, d\mu \leq \int \sup_n u_n \, d\mu = 0.$$

„ \Leftarrow “: Sei $\int f \, d\mu = 0$. Setze $A_n := \{f \geq \frac{1}{n}\}$, $n \in \mathbb{N}$, also gilt $A_n \uparrow \{f > 0\}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= \int \mathbb{I}_{A_n} \, d\mu = \int \mathbb{I}_{\{nf \geq 1\}} \cdot 1 \, d\mu \\ &\leq \int \mathbb{I}_{\{nf \geq 1\}} \cdot nf \, d\mu \leq n \int f \, d\mu \\ &= 0, \end{aligned}$$

und deshalb $\mu(\{f > 0\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = 0$.

(ii): Wir wissen: $\{|f| = +\infty\} \in \mathcal{A}$. Dann folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} +\infty &> \int |f| \, d\mu \geq \int \mathbb{I}_{\{|f|=+\infty\}} \cdot |f| \, d\mu \\ &\geq \int \mathbb{I}_{\{|f|=+\infty\}} \cdot n \, d\mu = n \cdot \mu(\{|f| = +\infty\}). \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhält man daher $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$. □

Satz 7.11. Seien $f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ zwei \mathcal{A} -messbare Funktionen.

(i) Angenommen, wir wissen entweder, dass $f, g \geq 0$ gilt, oder dass f und g beide μ -integrierbar sind. Dann gilt die Implikation:

$$f \leq g \text{ } \mu\text{-f.ü.} \quad \Rightarrow \quad \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu.$$

(ii) Wenn g (μ -) integrierbar ist, und $|f| \leq g$ μ -f.ü., dann ist f (μ -) integrierbar.

(iii) Sei g (μ -) integrierbar, und $f = g$ μ -f.ü., dann ist f ebenfalls (μ -) integrierbar, und $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$.

□ **Ü** Beweis. Vergleiche die Übungen zur Vorlesung. □

Bemerkung 7.12. Sei N eine μ -Nullmenge, und $f' : N^c \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine $N^c \cap \mathcal{A}$ -messbare Funktion. Dann heißt f' eine μ -f.ü. (auf Ω) definierte, \mathcal{A} -messbare Funktion. Die Restriktion einer \mathcal{A} -messbaren Funktion $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ auf N^c ist eine solche Funktion.

Umgekehrt kann jede μ -f.ü. definierte, \mathcal{A} -messbare Funktion f' zu einer \mathcal{A} -messbaren Funktion f auf Ω erweitert werden. Dazu gibt es verschiedene Vorgehensweisen, etwa:

$$f(\omega) := \begin{cases} f'(\omega) & \text{für } \omega \in N^c \\ 0 & \text{für } \omega \in N. \end{cases}$$

□ **Ü** (Vgl. hierzu auch die Übungen zur Vorlesung.) Da zwei beliebige solche Erweiterungen μ -f.ü. identisch sind, wissen wir nach Teil (iii) des vorhergehenden Satzes, dass diese entweder alle integrierbar sind, oder keine davon. Sind sie integrierbar, so haben sie alle das gleiche Integral. Dies rechtfertigt die folgende Definition:

Definition 7.13. Sei f' eine μ -f.ü. (auf Ω) definierte, \mathcal{A} -messbare Funktion. f' heißt μ -integrierbar (auf Ω), wenn f' zu einer μ -integrierbaren Funktion f auf Ω erweitert werden kann. In diesem Fall definieren wir das μ -Integral von f' (auf Ω) durch

$$\int f' \, d\mu := \int f \, d\mu.$$

Bemerkung 7.14. Seien f, g zwei μ -integrierbare Funktionen auf Ω . Dann ist nach Satz 7.10(ii) $N := \{|f| = +\infty\} \cup \{|g| = +\infty\}$ eine μ -Nullmenge. Die Summe $f + g$ ist wohldefiniert außerhalb dieser Nullmenge N , also ist sie eine μ -f.ü. auf Ω definierte Funktion, und somit nach unserem neuen Integrierbarkeitsbegriff μ -integrierbar, mit

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Wir können also die Forderung nach Wohldefiniertheit von $f + g$ in 7.4(ii) ersatzlos fallen lassen.

Die Cantor-Menge

Betrachte die Situation des B.ex., also $\Omega = \mathbb{R}$, $\mu = m$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ oder deren Vervollständigung \mathcal{A}_{m^*} . Welches sind hier m -Nullmengen? In den Übungen haben wir gesehen, dass jede abzählbare Untermenge von \mathbb{R} eine m -Nullmenge ist. Die Cantor-Menge ist ein Beispiel für eine überabzählbare m -Nullmenge. Ü

Definition 7.15. Betrachte $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. Iteriere wie folgt:

1. Schritt:

$$P_1 := [0, 1] \setminus]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$$

2. Schritt:

$$P_2 := P_1 \setminus \left(]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}[\cup]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}[\right)$$

⋮

n . Schritt: Erhalte

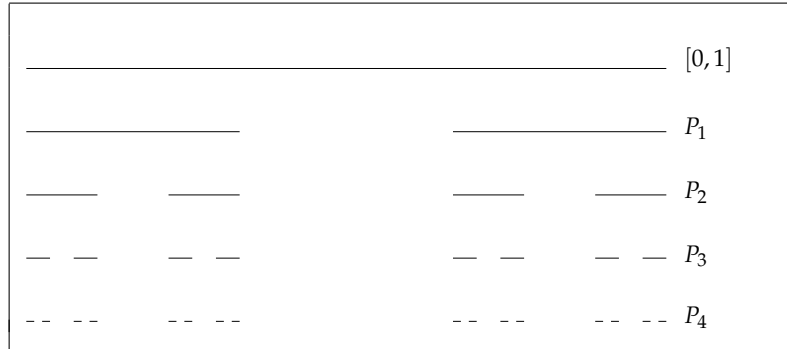
$$P_n = J_{n,1} \dot{\cup} J_{n,2} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} J_{n,2^n},$$

wo die $J_{i,n}$, $i = 1, \dots, 2^n$, paarweise disjunkte und abgeschlossene Intervalle der Länge $\frac{1}{3^n}$ sind.

Die Borelmenge

$$P := \bigcap_{n=1}^{\infty} P_n$$

heißt *Cantor-Menge* oder *Cantorsche Wischmenge*.



Bemerkung 7.16. Jeder Punkt $x \in [0, 1]$ wird eindeutig repräsentiert durch eine nicht-abbrechende Folge („Entwicklung zur Basis 3“):

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n}, \quad x_n \in \{0, 1, 2\}.$$

Es gilt (dies ist leicht zu überprüfen):

$$P \supset P_0 := \left\{ x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{3^n} \mid x_n \in \{0, 2\} \right\}.$$

Wenn wir nun die „binäre Entwicklung“ $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x'_n}{2^n}$, $x_n \in \{0, 1\}$, eines Punktes $x \in [0, 1]$ betrachten, erkennen wir leicht, dass die Abbildung $f_c : [0, 1] \rightarrow P_0$, definiert durch

$$[0, 1] \ni x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x'_n}{3^n}, \quad \text{mit} \quad \begin{cases} x'_n = 0 & \text{für } x_n = 0 \\ x'_n = 2 & \text{für } x_n = 1 \end{cases}$$

(die sogenannte Cantor-Funktion), eine Bijektion von $[0, 1]$ nach P_0 ist. Also ist P_0 , und damit auch P , nicht abzählbar. Aber wegen

$$m(P) \leq m(P_n) = \frac{2^n}{3^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ist P eine m -Nullmenge.

Beweis der Aussage $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{A}_{m^}$ im Theorem 4.7.* Wir müssen zeigen: $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \neq \mathcal{A}_{m^*}$. Dazu betrachten wir zunächst den Fall $d = 1$. Wir können zeigen, dass die Cantor-Funktion f_c Lebesgue-messbar ist, oder genauer, $(\mathcal{A}_{m^*} \cap [0, 1])/\overline{\mathcal{B}}$ -messbar. Sei nun $A \subset [0, 1]$, $A \notin \mathcal{A}_{m^*}$ (vgl. den zweiten Teil von 4.7: $\mathcal{A}_{m^*} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$). Dann ist natürlich $f_c(A) \subset P$.

Da $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{m^*}, m)$ vollständig ist, und $m(P) = 0$, folgt $f_c(A) \in \mathcal{A}_{m^*}$. Angenommen, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und \mathcal{A}_{m^*} seien identisch. Dann wäre $f_c(A)$ ein Element der

Borel- σ -Algebra über \mathbb{R} , und damit

$$A = f_c^{-1}(\underbrace{f_c(A)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R})}) \in \mathcal{A}_{m^*} \cap [0, 1] \subset \mathcal{A}_{m^*}$$

(bei der ersten Gleichung geht ein, dass f_c eine Bijektion ist). Widerspruch!

Der Fall $d \geq 2$ wird zur Übung gegeben.

□ ü

8 Riemann- und Lebesgue-Integral

Vergleich der Integrationsbegriffe

Wir betrachten in diesem Kapitel die Situation unseres zentralen Beispiels. Der betrachtete Maßraum ist also $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$ und $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{m^*}, m)$, wo m das Lebesgue-Maß bezeichnet. Wir setzen $\mathcal{B} := \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

B.ex.

Definition 8.1. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion, und $A \in \mathcal{B}$. Wenn $(\mathbb{I}_A \cdot)$ f gleichzeitig \mathcal{B} -messbar und m -integrierbar ist, dann heißt f *Borel-Lebesgue-integrierbar (über A)*.

Sei $A \in \mathcal{A}_{m^*}$. Wenn $(\mathbb{I}_A \cdot)$ f gleichzeitig \mathcal{A}_{m^*} -messbar und m -integrierbar ist, dann heißt f *Lebesgue-integrierbar (über A)*.

Theorem 8.2. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, und $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ (also insbesondere $b < \infty$). Wenn f Riemann-integrierbar über $[a, b]$ ist, dann ist f auch Lebesgue-integrierbar über $[a, b]$, und es gilt

Ist eine reelle Funktion Riemann-int'bar über $[a, b]$, so gilt $\int_{[a,b]} = \mathbb{R} \int_a^b$

$$\mathbb{R} \int_a^b f \, dx = \int_{[a,b]} f \, dm.$$

Beweis. Sei f Riemann-integrierbar über $[a, b]$. Dann existiert ein $M \in \mathbb{R}$, so dass $|f| < M$ über $[a, b]$ gilt, also $M + f \geq 0$. Wir können daher o.B.d.A. davon ausgehen, dass f nichtnegativ ist.

Wir erinnern uns kurz an einige Definitionen aus dem ersten Kapitel. Sei D_n eine Partition $a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_k = b$ des Intervalls $[a, b]$. Dann sind die Obersumme S_{D_n} und die Untersumme s_{D_n} von f über $[a, b]$ definiert durch

$$S_{D_n} = \sum_{i=1}^k \underbrace{\sup\{f(x) \mid x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]\}}_{=: M_i} \cdot (\xi_i - \xi_{i-1}),$$

$$s_{D_n} = \sum_{i=1}^k \underbrace{\inf\{f(x) \mid x \in [\xi_{i-1}, \xi_i]\}}_{=: m_i} \cdot (\xi_i - \xi_{i-1}).$$

Sei $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Partitionen von $[a, b]$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|S_{D_n} - s_{D_n}| < \frac{1}{n}.$$

Nun definieren wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion u_n durch

$$u_n(x) := \begin{cases} M_i & \text{für } x \in]\xi_{i-1}, \xi_i[\\ \frac{1}{2}(M_i + M_{i+1}) & \text{für } x \in \{\xi_i \mid 1 \leq i \leq k-1\} \\ M_1 & \text{für } x = \xi_0 \\ M_k & \text{für } x = \xi_k \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus [a, b]. \end{cases}$$

u - „upper“
 l - „lower“

Analog definieren wir l_n , indem wir in der Definition von u_n den Wert M_i durch m_i ersetzen. l_n und u_n sind dann \mathcal{B} -messbare Elementarfunktionen mit $l_n \leq \mathbb{I}_{[a,b]} \cdot f \leq u_n$. Offensichtlich gilt

$$S_{D_n} = \int_{[a,b]} u_n \, dm, \quad s_{D_n} = \int_{[a,b]} l_n \, dm.$$

Definiere

$$u := \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n, \quad l := \sup_{n \in \mathbb{N}} l_n.$$

Diese Funktionen sind wiederum \mathcal{B} -messbar, und es gilt weiterhin $l \leq \mathbb{I}_{[a,b]} \cdot f \leq u$.

Eigentlich wollen wir aber zeigen, dass m -f.ü. gilt: $l = u$. Dazu betrachten wir

$$\{u - l > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{u - l > \frac{1}{k}\}. \quad (8.1)$$

Fixiere zunächst ein $k \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\{u - l > \frac{1}{k}\} \subset \{u_n - l_n > \frac{1}{k}\},$$

also auch

$$\begin{aligned} m(\{u - l > \frac{1}{k}\}) &\leq m(\{u_n - l_n > \frac{1}{k}\}) \\ &= \int_{[a,b]} \mathbb{I}_{\{u_n - l_n > \frac{1}{k}\}} \cdot 1 \, dm \\ &\leq k \cdot \int_{[a,b]} \mathbb{I}_{\{u_n - l_n > \frac{1}{k}\}} (u_n - l_n) \, dm \\ &\leq k \cdot \int_{[a,b]} (u_n - l_n) \, dm \\ &= k \cdot (S_{D_n} - s_{D_n}) \\ &\leq \frac{k}{n}. \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty$ folgt also $m(\{u - l > \frac{1}{k}\}) = 0$, und mit (8.1)

$$m(\{u - l > 0\}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(\{u - l > \frac{1}{k}\}) = 0.$$

Also wissen wir, dass $l \leq \mathbb{I}_{[a,b]} \cdot f \leq u$ gilt, und gleichzeitig m -f.ü. $l = \mathbb{I}_{[a,b]} \cdot f = u$. Da $(\mathbb{R}, \mathcal{A}_{m^*}, m)$ vollständig ist, folgt nach einer Übung, dass $\mathbb{I}_{[a,b]} \cdot f$ Lebesgue-messbar ist und somit für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

□

$$\int l_n dm \leq \int l dm = \int_{[a,b]} f dm = \int u dm \leq \int u_n dm.$$

Da f Riemann-integrierbar ist, folgt die Behauptung schließlich aus

$$\int l_n dm \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R \int_a^b f dx$$

und

$$\int u_n dm \xrightarrow{n \rightarrow \infty} R \int_a^b f dx.$$

□

Dieses Theorem rechtfertigt für das Lebesgue-Integral die folgende Notation:

$$\int_{[a,b]} f dm =: \int_a^b f dx \quad \left(= R \int_a^b f dx, \text{ wenn } f \text{ Riemann-integrierbar ist.} \right)$$

Im allgemeinen Fall ist die Notation „ $\int_a^b d\mu$ “ nur dann zulässig, wenn $\mu(\{\text{Punkt}\}) = 0$ gilt, also

$$\int_{[a,b]} = \int_{]a,b]} = \int_{[a,b[} = \int_{]a,b[}.$$

Bemerkung 8.3. Die Umkehrung dieses Theorems ist falsch. Die Funktion $f := \mathbb{I}_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$ ist Lebesgue-integrierbar, aber nicht Riemann-integrierbar. (Die nicht-Riemann-Integrierbarkeit wird vom folgenden Theorem impliziert, da die Menge der Unstetigkeitsstellen unserer Funktion f schon identisch ist mit $[0, 1]$.)

Das folgende Theorem zeigt, dass die Klasse der Riemann-integrierbaren Funktionen tatsächlich eher klein ist.

Theorem 8.4. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt über $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Dann ist die Funktion f genau dann Riemann-integrierbar über $[a, b]$, wenn sie dort m -f.ü. stetig ist.

Beweis. O.B.d.A. sei wieder $f \geq 0$.

„ \Rightarrow “: Sei f Riemann-integrierbar über $[a, b]$. Wir nutzen dieselbe Notation wie im letzten Beweis. Sei $x \in [a, b]$ so gewählt, dass x für keine der Partitionen D_n , $n \in \mathbb{N}$, Partitionspunkt ist. Sei außerdem $x \in \{y \in [a, b] \mid f \text{ ist in } y \text{ nicht stetig}\} =: A_{n.s.}$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und eine Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $[a, b]$, so dass $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ ist und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|f(x) - f(x_k)| > \varepsilon.$$

Aber dann folgt $u_n(x) \geq l_n(x) + \varepsilon$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, also im Limes $u(x) \geq l(x) + \varepsilon$ und damit $x \in \{u > l\}$. Wir haben also

$$A_{n.s.} \subset \underbrace{\{u > l\}}_{=: A_{n.s.}^{(1)}} \cup \underbrace{\{\text{Partitionspunkte von } D_n, n \in \mathbb{N}\}}_{=: A_{n.s.}^{(2)}}$$

wo $A_{n.s.}^{(1)}$ nach dem vorhergehenden Beweis eine m -Nullmenge, und $A_{n.s.}^{(2)}$ als abzählbare Menge ebenfalls eine m -Nullmenge ist. Also ist f eine m -f.ü. stetige Funktion.

„ \Leftarrow “: Sei f stetig m -f.ü. Wähle eine Folge $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Partitionen von $[a, b]$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Partitionspunkte von D_n eine Untermenge der Partitionspunkte von D_{n+1} sind, und gleichzeitig so, dass die Länge des längsten Intervalls von D_n für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Seien u_n, l_n , $n \in \mathbb{N}$, wieder die korrespondierenden Elementarfunktionen, wie im letzten Beweis, dann gilt $u_n \downarrow$, $l_n \uparrow$. Wir wollen folgendes zeigen:

$$\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} S_{D_n} =\right) \sup_{n \in \mathbb{N}} \int l_n \, dm = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, dm (= \inf_{n \in \mathbb{N}} S_{D_n}).$$

Sei wieder $l := \sup_{n \in \mathbb{N}} l_n$, $u := \inf_{n \in \mathbb{N}} u_n$. Sei $x \in [a, b]$ eine Stetigkeitsstelle von f , und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass gilt:

$$\sup\{f(y) \mid y \in]x - \delta, x + \delta[\} - \inf\{f(y) \mid y \in]x - \delta, x + \delta[\} < \varepsilon.$$

Für ein hinreichend großes n gibt es eine Partition D_n mit einem Intervall, das x enthält und selbst in $]x - \delta, x + \delta[$ enthalten ist. Dann folgt:

$$u_n(x) - l_n(x) < \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist also $u(x) = l(x)$ in jeder Stetigkeitsstelle von f . Nach Voraussetzung gilt m -f.ü. $u = l$, und deswegen

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int l_n \, dm = \int l \, dm = \int u \, dm = \inf_{n \in \mathbb{N}} \int u_n \, dm,$$

wo die erste Gleichung nach dem Satz von B. Levy gilt, die zweite nach einem früheren Satz über Integrale m -f.ü. identischer Funktionen, und die letzte nach einer Variante des Satzes von B. Levy, die Inhalt einer Übungsaufgabe war. □

Ü

□

Wir erinnern uns kurz an eine Definition aus der Analysis 1:

Definition 8.5. Sei f Riemann-integrierbar über $[a, b]$ für jedes Paar reeller Zahlen a, b mit $a \leq b$. Wenn

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} R \int_a^b f \, dx =: R \int_{-\infty}^{+\infty} f \, dx$$

in \mathbb{R} existiert, heißt f *Riemann-integrierbar über $]-\infty, +\infty[$* oder *uneigentlich Riemann-integrierbar*.

Theorem 8.6. Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ über jedem Intervall $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, Riemann-integrierbar. Dann ist f genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn $|f|$ über $]-\infty, +\infty[$ Riemann-integrierbar ist. In diesem Fall ist auch f Riemann-integrierbar über $]-\infty, +\infty[$, und es gilt

$$R \int_{-\infty}^{+\infty} f \, dx = \int f \, dm.$$

Beweis. Sei $f \geq 0$. Wir wissen schon, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$R \int_{-n}^n f \, dx = \int_{[-n, n]} f \, dm.$$

Also ist f offensichtlich genau dann Riemann-integrierbar über $]-\infty, +\infty[$, wenn gilt:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{[-n, n]} f \, dm < +\infty.$$

Nach B. Levy ist aber gerade

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{[-n, n]} f \, dm = \int f \, dm$$

(die aufsteigende Funktionenfolge ist hier $f \cdot \mathbb{1}_{[-n, n]}$).

Der erste Teil ist damit bewiesen. Außerdem wissen wir nun, dass in diesem Fall für $f \geq 0$ gilt:

$$R \int_{-\infty}^{+\infty} f \, dx = \int f \, dm. \tag{8.2}$$

8 Riemann- und Lebesgue-Integral

Für Lebesgue-integrierbare Funktionen f wissen wir schon lange, dass auch f^+ und f^- integrierbar sind, also auch Riemann-integrierbar auf $] -\infty, +\infty[$ nach dem ersten Teil des Beweises. Also folgt:

$$\underbrace{\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} R \int_a^b f^+ dx}_{\in \mathbb{R}} - \underbrace{\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} R \int_a^b f^- dx}_{\in \mathbb{R}} = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} R \int_a^b f dx$$

ist reell, und somit ist f Riemann-integrierbar über $] -\infty, +\infty[$, und die linke Seite der Gleichung ist nach (8.2) identisch mit $\int f dm$. \square

Bemerkung 8.7. Wie so oft, gilt die Umkehrung des Theorems im Allgemeinen nicht: „ f ist Riemann-integrierbar über $] -\infty, +\infty[$ “ impliziert nicht die Lebesgue-Integrierbarkeit von f über $] -\infty, +\infty[$. Dies ist Inhalt einer Übung. \square

9 \mathcal{L}^p - und L^p -Räume

Wir fixieren in diesem Kapitel wieder einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Definition 9.1. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ heißt (μ) -wesentlich beschränkt, wenn es eine Konstante $c \geq 0$ gibt, so dass μ -f.ü. gilt: $c \geq |f|$.

\mathcal{L}^p -Räume

Sei $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} -messbare Funktion, dann ist auch $|f|^p$, $p \geq 1$, eine \mathcal{A} -messbare Funktion, da für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\{|f|^p \geq \alpha\} = \begin{cases} \{|f| \geq \alpha^{\frac{1}{p}}\} & \text{für } \alpha > 0 \\ \Omega & \text{für } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Definition 9.2. Wir definieren für $p \geq 1$:

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar, und } \int |f|^p d\mu < +\infty \right\}.$$

Für $p = \infty$ definieren wir:

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \{ f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar und wesentlich beschränkt} \}.$$

Satz 9.3. Sei $1 \leq p \leq +\infty$. Dann ist $\mathcal{L}^p(\mu)$ ein reeller Vektorraum.

$\mathcal{L}^p(\mu)$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum

Beweis. Für $p = \infty$ ist die Behauptung klar.

Für $1 \leq p < \infty$ ist zunächst offensichtlich, dass mit $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ auch αf für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ enthalten ist. Seien nun $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann gilt

$$|f + g|^p \leq 2^p (|f|^p + |g|^p),$$

denn für jedes $\omega \in \Omega$ ist

$$\begin{aligned} |f(\omega) + g(\omega)|^p &\leq (|f(\omega)| + |g(\omega)|)^p \leq [2 \cdot \sup(|f(\omega)|, |g(\omega)|)]^p \\ &= 2^p \cdot \sup(|f(\omega)|^p, |g(\omega)|^p) \\ &\leq 2^p (|f(\omega)|^p + |g(\omega)|^p). \end{aligned}$$

Und damit wissen wir:

$$\int |f + g|^p d\mu \leq 2^p \left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right) < +\infty.$$

□

$\mathcal{L}^p(\mu)$, $p < \infty$, ist gegen \inf , \sup abgeschlossen

Bemerkung 9.4. Sei $1 \leq p < +\infty$, und $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Wegen

$$|\sup(f, g)|^p, |\inf(f, g)|^p \leq (|f| + |g|)^p,$$

folgt

$$\sup(f, g), \inf(f, g) \in \mathcal{L}^p(\mu).$$

Wir erinnern uns an eine Definition aus der Analysis 1:

Definition 9.5. Eine Funktion $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, heißt *konkav*, wenn für alle $x, y \in]a, b[$ und $\lambda \in]0, 1[$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

oder (äquivalent), wenn für alle x_1, \dots, x_l aus $]a, b[$ und alle $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ aus $]0, 1[$ mit $\sum_{i=1}^l \lambda_i = 1$ gilt:

$$f\left(\sum_{i=1}^l \lambda_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^l \lambda_i f(x_i).$$

□ Die Äquivalenz kann man leicht per Induktion zeigen.

Eine wichtige Charakterisierung der Konkavität einer Funktion ist noch die folgende: Sei f zweimal differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ ist konkav auf }]a, b[\Leftrightarrow f'' \leq 0 \text{ auf }]a, b[.$$

Seien $n_k \in]1, \infty[$ mit $\sum_k 1/n_k = 1$.
Dann $\|\prod_k f_k\|_1 \leq \prod_k \|f_k\|_{n_k}$ für \mathcal{A} -messbare f_k

Theorem 9.6 (Verallgemeinerte Hölder-Ungleichung). f_1, \dots, f_l seien \mathcal{A} -messbare Funktionen auf Ω , und $n_1, \dots, n_l \in]1, \infty[$, so dass $\sum_{k=1}^l \frac{1}{n_k} = 1$ gilt. Dann folgt:

$$\int |f_1 \cdots f_l| d\mu \leq \left(\int |f_1|^{n_1} d\mu\right)^{\frac{1}{n_1}} \cdots \left(\int |f_l|^{n_l} d\mu\right)^{\frac{1}{n_l}}. \quad (9.1)$$

Insbesondere gilt also (im Fall $l = 2$) für zwei beliebige, \mathcal{A} -messbare Funktionen f, g auf Ω und $p, q \in]1, \infty[$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ die Ungleichung:

Sei $p \in]1, \infty[$, $q = \frac{p}{p-1}$. Dann $\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$

$$\int |f \cdot g| d\mu \leq \left(\int |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Diese Ungleichung heißt *Hölder-Ungleichung*, und für $p = q = 2$ heißt sie *Cauchy-Schwartz-Ungleichung*.

Beweis von Theorem 9.6. Seien $a_1, \dots, a_l \in]0, \infty[$, dann ist

$$\ln(a_1^{\frac{1}{n_1}} \cdots a_l^{\frac{1}{n_l}}) = \sum_{k=1}^l \frac{1}{n_k} \cdot \ln a_k \leq \ln\left(\sum_{k=1}^l \frac{1}{n_k} \cdot a_k\right),$$

da $x \mapsto \ln x$ auf den positiven reellen Zahlen konkav ist. Durch Anwendung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$a_1^{\frac{1}{n_1}} \cdots a_l^{\frac{1}{n_l}} \leq \sum_{k=1}^l \frac{1}{n_k} \cdot a_k. \tag{9.2}$$

(Hinweis: Wenn $n_1 = n_2 = \cdots = n_l$ gilt, dann ist dies gerade der Vergleich zwischen geometrischem und arithmetischem Mittel.)

Angenommen, es ist $(\int |f_k|^{n_k} d\mu)^{1/n_k} = 0$ für mindestens ein $k = 1, \dots, l$. Dann ist nach Satz 7.10 auch μ -f.ü. $|f_k| = 0$, und automatisch auch μ -f.ü. $|f_1 \cdots f_l| = 0$. Dann haben die beiden Seiten von (9.1) den Wert 0, und wir sind fertig.

Wir gehen also o.B.d.A. davon aus, dass $(\int |f_k|^{n_k} d\mu)^{1/n_k} \neq 0$ für jedes $k = 1, \dots, l$ gilt. Wir erhalten dann mit (9.2) und

$$a_k := \frac{|f_k|^{n_k}}{\int |f_k|^{n_k} d\mu}$$

die Ungleichung

$$\left(\frac{|f_1|^{n_1}}{\int |f_1|^{n_1} d\mu} \right)^{\frac{1}{n_1}} \cdots \left(\frac{|f_l|^{n_l}}{\int |f_l|^{n_l} d\mu} \right)^{\frac{1}{n_l}} \leq \sum_{k=1}^l \frac{1}{n_k} \frac{|f_k|^{n_k}}{\int |f_k|^{n_k} d\mu}.$$

Integration mit Maß μ liefert dann

$$\int \frac{|f_1|}{(\int |f_1|^{n_1} d\mu)^{\frac{1}{n_1}}} \cdots \frac{|f_l|}{(\int |f_l|^{n_l} d\mu)^{\frac{1}{n_l}}} d\mu \leq 1,$$

und damit ist die Behauptung bewiesen. □

Theorem 9.7 (Minkowski-Ungleichung). Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, und $1 \leq p < +\infty$. Dann gilt:

Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $p < \infty$. Dann $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int |g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis. Der Fall $p = 1$ ist klar – wir betrachten also den Fall $p > 1$. Nach der Dreiecksungleichung ist $|f + g| \leq |f| + |g|$, und damit folgt

$$\left(\int |f + g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int (|f| + |g|)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Wir dürfen also o.B.d.A. annehmen dass f, g nichtnegativ sind. Nun gilt

$$\int (f + g)^p d\mu = \int f \cdot (f + g)^{p-1} d\mu + \int g \cdot (f + g)^{p-1} d\mu,$$

also mit der Hölder-Ungleichung

$$\begin{aligned} &\leq \left(\int f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\quad + \left(\int g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int (f+g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \end{aligned}$$

wo $q := \frac{p}{p-1}$, also $q \in]1, \infty[$, so dass $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und weiter

$$\begin{aligned} &= \left[\left(\int f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int g^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\ &\quad \cdot \left(\int (f+g)^p d\mu \right)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Für $\int (f+g)^p d\mu \neq 0$ erhalten wir die Behauptung per Division der Ungleichung durch $(\int (f+g)^p d\mu)^{1-\frac{1}{p}}$. Für $\int (f+g)^p d\mu = 0$ ist die Behauptung trivial. \square

Sei $p \in [1, \infty]$. Definiere für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ die Funktion $\|\cdot\| : \mathcal{L}^p(\mu) \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch

$$\|f\|_p := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } p < \infty,$$

und

$$\|f\|_\infty := \inf\{c \geq 0 \mid |f| \leq c \mu\text{-f.ü.}\}.$$

Für $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, kennen wir dann folgende Eigenschaften:

- (i) $\|f\|_p \geq 0$
- (ii) $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$
- (iii) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$,

\square wobei die letzte Eigenschaft für $p = \infty$ im Rahmen einer Übung bewiesen wurde.

Zusammenfassend sagt man, $\|\cdot\|_p$ sei eine *Seminorm* auf $\mathcal{L}^p(\mu)$. Im Allgemeinen ist dies keine Norm, da wir statt $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ nur wissen:

$$\|f\|_p = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Bemerkung 9.8. Mit der Dreiecksungleichung für $\|\cdot\|_p$ gilt $\|f\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g\|_p$, und damit $\|f\|_p - \|g\|_p \leq \|f - g\|_p$. Mit dem gleichen Argument erhält man $\|g\|_p - \|f\|_p \leq \|f - g\|_p$, also

Für $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $p \leq \infty$, ist $f \mapsto \|f\|_p$ stetig

$$\left| \|f\|_p - \|g\|_p \right| \leq \|f - g\|_p.$$

Also ist $f \mapsto \|f\|_p$, $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, stetig auf $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$.

Für $p = 1$ erhalten wir außerdem, dass für $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt:

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ist $f \mapsto \int f d\mu$ stetig

$$\left| \int f d\mu - \int g d\mu \right| = \left| \int (f - g) d\mu \right| \leq \int |f - g| d\mu = \|f - g\|_1.$$

Die Abbildung $f \mapsto \int f d\mu$, $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, ist also stetig auf $(\mathcal{L}^1(\mu), \|\cdot\|_1)$.

Theorem 9.9 (Lebesgue's Theorem von der dominierten Konvergenz). Sei $p \in [1, +\infty[$ und $g, f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, so dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Wird f_n in $\mathcal{L}^p(\mu)$ dominiert, und konvergiert $f_n \rightarrow f$ μ -f.ü., so gilt die Konvergenz auch in $\mathcal{L}^p(\mu)$.

$$|f_n| \leq g \quad \mu\text{-f.ü.} \tag{9.3}$$

Wenn f eine \mathcal{A} -messbare Funktion ist mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad \text{für } \mu\text{-f.a. } \omega \in \Omega,$$

dann ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0. \tag{9.4}$$

Definition 9.10. In der Situation von (9.4) sagt man, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen f in $\mathcal{L}^p(\mu)$.

Beweis von Lebesgue's Theorem. Da μ -f.ü. $|f|^p = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_n|^p \leq g^p$ gilt, folgt nach einem früheren Satz über die Integrierbarkeit dominierter Funktionen (vgl. 7.11(ii)), dass $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\mu)$ gilt, und damit $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Es bleibt zu zeigen, dass $(f - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ gegen 0 konvergiert, oder (äquivalent) dass $g_n := |f - f_n|^p$, $n \in \mathbb{N}$, in $\mathcal{L}^1(\mu)$ gegen 0 konvergiert.

Offensichtlich gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq g_n \leq (|f| + |f_n|)^p \leq \underbrace{(|f| + |g|)^p}_{=: h' \in \mathcal{L}^1(\mu)} \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Setze

$$h := \begin{cases} h' & \text{auf } \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{g_n \leq h'\} \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt μ -f.ü. $h = h'$, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ und alle $\omega \in \Omega$ gilt $0 \leq g_n \leq h$. Da die μ -Integrale von μ -f.ü. identischen Funktionen gleich sind (vgl. 7.11(iii)), und da μ -f.ü. $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = 0$ gilt, bekommen wir

$$\begin{aligned} \int h \, d\mu &\stackrel{7.11 \text{ (iii)}}{=} \int \lim_{n \rightarrow \infty} (h - g_n) \, d\mu \\ &\stackrel{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (h - g_n) \, d\mu \\ &= \int h \, d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu. \end{aligned}$$

Also ist

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \leq 0,$$

und daraus folgt, da $\int g_n \, d\mu \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (und somit auch $\limsup_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu \geq 0$):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|_1 = 0.$$

□

Ü **Bemerkung 9.11.** Es ist Gegenstand einer Übungsaufgabe, dass die Voraussetzung (9.3) für die Konvergenzaussage notwendig ist.

Die Vollständigkeit von $\mathcal{L}^p(\mu)$

Erinnere: Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$, $p \in [1, +\infty]$, heißt *Cauchy-Folge*, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon \quad \forall m, n \geq n(\varepsilon).$$

Wenn es ein $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ gibt mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$, dann ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ offensichtlich eine Cauchy-Folge.

Das folgende Theorem besagt, dass auch die Umkehrung gilt also dass $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ *vollständig* ist.

Theorem 9.12 (Riesz-Fischer). Sei $p \in [1, +\infty[$, und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(\mathcal{L}^p(\mu), \|\cdot\|_p)$. Dann gibt es ein $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0,$$

und eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Sei $p < \infty$. Jede Cauchyfolge in $\mathcal{L}^p(\mu)$ konvergiert in $\mathcal{L}^p(\mu)$ und hat eine μ -f.ü. konvergente Teilfolge

Beweis. Da die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist, können wir eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ konstruieren, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}.$$

Setze

$$g := \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (\|g\|_p)^p &= \left(\int \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\text{Levi}}{=} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int \left(\sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right)^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\stackrel{\text{Minkowski}}{\leq} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1. \end{aligned}$$

Also ist $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$, und damit auch $g < +\infty$ μ -f.ü. (vgl. 7.10(ii)), also

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|(\omega) < \infty \quad \text{für } \mu\text{-f.a. } \omega \in \Omega,$$

und daher konvergiert

$$f_{n_{N+1}} - f_{n_1} = \sum_{k=1}^N (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}), \quad N \in \mathbb{N},$$

für μ -f.a. $\omega \in \Omega$ mit $N \rightarrow \infty$ gegen $\sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})(\omega)$. Sei

$$f(\omega) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})(\omega) + f_{n_1}(\omega) & \text{für alle } \omega \in \Omega, \text{ für die diese} \\ & \text{Summe existiert} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann ist f eine \mathcal{A} -messbare Funktion (vgl. die Übungen) mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f$ μ -f.ü. Für jedes $N \in \mathbb{N}$ wissen wir, dass μ -f.ü. gilt: □

$$|f_{n_{N+1}}| \leq \sum_{k=1}^N |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| + |f_{n_1}| \leq g + |f_{n_1}| \in \mathcal{L}^p(\mu),$$

also mit Lebesgue's Theorem von der dominierten Konvergenz automatisch $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0$. Nun ist aber $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ per Voraussetzung eine Cauchy-Folge, und daher folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0.$$

□

Konvergenz in $\mathcal{L}^p(\mu)$ impliziert
Teilfolgenkonvergenz μ -f.ü.

Bemerkung 9.13. (i) Seien $f, f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $p \in [1, \infty[$, mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Dann folgt nach Riesz-Fischer, dass es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f$ μ -f.ü.

(ii) Die Konvergenz μ -f.ü. gilt tatsächlich nur für eine Teilfolge, nicht für die ganze Folge (f_n) . Dies ist Gegenstand einer Übungsaufgabe.

Ü

Das folgende Theorem gibt eine Version des Theorems von Riesz-Fischer für $p = +\infty$.

Jede Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$
konvergiert in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ und μ -f.ü.

Theorem 9.14. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$. Dann gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0.$$

Insbesondere gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Beweis. Seien für $n, m \in \mathbb{N}$

$$A_{n,m} := \{|f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\},$$

$$E := \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} A_{n,m} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|f_n| = \infty\}.$$

Ü

Dann ist nach einer Übung $\mu(E) = 0$. Für jedes $\omega \in E^C$ ist $(f_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R} . Wir nennen den Grenzwert $f(\omega)$. Für alle $\omega \in E$ setzen wir $f(\omega) := 0$. Dann ist f eine \mathcal{A} -messbare Funktion (vgl. Übungen).

Ü

Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für beliebige $m, n \geq N$ (und alle $\omega \in E^C$) gilt:

$$\left(|f_n(\omega) - f_m(\omega)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon.\right)$$

Für $n \rightarrow \infty$ erhalten wir also für alle $m \geq N$ und alle $\omega \in E^C$

$$|f(\omega) - f_m(\omega)| \leq \varepsilon,$$

anders gesagt:

$$|f - f_m| \leq \varepsilon \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Damit ist für alle $m \geq N$ gezeigt, dass die Differenz $f - f_m$ in $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ liegt. Und da $\mathcal{L}^\infty(\mu)$ ein Vektorraum ist, folgt $f \in \mathcal{L}^\infty(\mu)$ automatisch.

Außerdem folgt für alle $m \geq N$

$$\|f - f_m\|_\infty \leq \varepsilon.$$

□

L^p -Räume

Definiere

$$\mathcal{N} := \{f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \mid f \text{ ist } \mathcal{A}\text{-messbar, } f = 0 \text{ } \mu\text{-f.ü.}\}.$$

Dann ist

$$\mathcal{N} = \{f \in \mathcal{L}^p(\mu) \mid \|f\|_p = 0\} \quad \forall p \in [1, +\infty],$$

und \mathcal{N} ist für jedes $p \in [1, +\infty]$ ein linearer Unterraum von $\mathcal{L}^p(\mu)$. Wir definieren nun den Quotientenraum

$$L^p(\mu) := \mathcal{L}^p(\mu) / \mathcal{N}.$$

Das heißt, wir identifizieren Elemente aus $\mathcal{L}^p(\mu)$, die μ -f.ü. identisch sind. Dieser Quotientenraum ist wieder ein reeller Vektorraum.

Wir wissen, dass μ -f.ü. identische Funktionen das gleiche Integral haben (vgl. 7.11(iii)). Wenn also $\tilde{f} \in L^p(\mu)$ eine Klasse von Funktionen im Quotientenraum ist, mit $f, g \in \tilde{f}$ (also $f = g$ μ -f.ü.), dann gilt

$$\|g\|_p = \|f\|_p \quad \forall p \in [1, \infty]. \tag{9.5}$$

Wir können also für jedes $p \in [1, \infty]$ eine Abbildung $\|\cdot\|_p$ definieren durch

$$\|\tilde{f}\|_p := \|f\|_p \quad \text{für ein } f \text{ in } \tilde{f}.$$

Die Gleichung (9.5) besagt, dass diese Abbildung von der Auswahl des Repräsentanten aus \tilde{f} unabhängig, also wohldefiniert ist.

Der Grund, weswegen wir $L^p(\mu)$ überhaupt betrachten, ist, dass wir nun für $\tilde{f} \in L^p(\mu)$ folgendes wissen:

(i) $\|\tilde{f}\|_p = 0 \iff \tilde{f} = 0.$

Folgende, ältere Aussagen gelten weiterhin:

(ii) $\|\alpha \tilde{f}\|_p = |\alpha| \cdot \|\tilde{f}\|_p \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

(iii) $\|\tilde{f} + \tilde{g}\|_p \leq \|\tilde{f}\|_p + \|\tilde{g}\|_p \quad \text{für } \tilde{g} \in L^p(\mu).$

(iv) $\|\tilde{f}\|_p \geq 0.$

Das heißt aber, dass $\|\cdot\|$ nicht nur eine Seminorm auf $L^p(\mu)$ ist, sondern sogar eine Norm. Nach 9.12 und 9.14 ist $(L^p, \|\cdot\|_p)$ ein vollständiger, normierter Vektorraum. Also ist $L^p(\mu)$ ein Banach-Raum.

$\|\cdot\|_p$ ist auf $L^p(\mu)$ eine Norm.
 $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ ist vollständig

9 \mathcal{L}^p - und L^p -Räume

$L^p(\mu)$ ist ein Banach-Raum. $L^2(\mu)$
ist ein Hilbert-Raum

Für $p = 2$ ist $L^p(\mu)$ sogar ein *Hilbert-Raum*. Denn die Abbildung

$$(\tilde{f}, \tilde{g}) \mapsto \langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle := \int fg \, d\mu, \quad \tilde{f}, \tilde{g} \in L^2(\mu),$$

wo f, g beliebig aus der Menge der Repräsentanten für \tilde{f}, \tilde{g} stammen, ist wohldefiniert, und man kann einfach zeigen, dass es sich bei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um ein inneres Produkt auf $L^2(\mu)$ handelt, mit

$$\sqrt{\langle \tilde{f}, \tilde{f} \rangle} = \|\tilde{f}\|_2.$$

10 Formen der Konvergenz

Fixiere einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Konvergenz im Maß μ

Definition 10.1. $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, seien \mathcal{A} -messbare Funktionen auf Ω , und jedes f_n sei μ -f.ü. endlich. Wir sagen, die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert im Maß μ , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{|f - f_n| \stackrel{(\geq)}{>} \varepsilon\}) = 0.$$

Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt eine *Cauchy-Folge im Maß μ* , wenn für jedes $\varepsilon > 0$ gilt:

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \mu(\{|f_n - f_m| > \varepsilon\}) = 0$$

(also, für jedes $\delta > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n, m \geq N$ gilt: $\mu(\{|f_n - f_m| < \varepsilon\}) < \delta$).

Bemerkung 10.2. (i) Wenn $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im Maß μ gilt, dann ist $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Maß μ .

(ii) Wenn $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im Maß μ gilt, dann folgt $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$.

Limites im Maß μ sind μ -f.ü. endlich

(iii) $f, g, f_n, n \in \mathbb{N}$, seien \mathcal{A} -messbare Funktionen, so dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im Maß μ sowohl gegen f als auch gegen g konvergiert. Dann folgt $f = g$ μ -f.ü.

Beweis. (i): Klar.

(ii): Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mu(\{|f| = +\infty\}) \leq \mu(\{|f - f_n| + |f_n| = +\infty\}),$$

also, da nach Voraussetzung alle f_n μ -f.ü. endlich sind,

$$\begin{aligned} &= \mu(\{|f - f_n| = +\infty\}) \\ &\leq \mu(\{|f - f_n| \geq 1\}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(iii): Sei $N \in \mathbb{N}$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \{|f - g| > \frac{1}{N}\} &\subset \{|f - f_n| + |f_n - g| > \frac{1}{N}\} \\ &\subset \{|f - f_n| > \frac{1}{2N}\} \cup \{|f_n - g| > \frac{1}{2N}\}. \end{aligned}$$

Aber da für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\mu(\{|f - f_n| > \frac{1}{2N}\}) + \mu(\{|f_n - g| > \frac{1}{2N}\}) \right] = 0$$

gilt, folgt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\mu(\{|f - g| > \frac{1}{N}\}) = 0,$$

und damit wegen Stetigkeit von unten des Maßes μ

$$\mu(\{|f - g| > 0\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\{|f - g| > \frac{1}{N}\}) = 0.$$

□

Zusammenhang mit „Konvergenz in $\mathcal{L}^p(\mu)$ “ und „Konvergenz μ -f.ü.“

Lemma 10.3 (Tschebyschew-Markov-Ungleichung). Sei f eine \mathcal{A} -messbare Funktion auf Ω , und p, α in $]0, +\infty[$. Dann gilt

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \left[\leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{\{|f| \geq \alpha\}} |f|^p d\mu \right] \leq \frac{1}{\alpha^p} \int |f|^p d\mu.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \mu(\{|f| \geq \alpha\}) &= \int_{\{|f|^p / \alpha^p \geq 1\}} 1 d\mu \\ &\leq \int_{\{|f| \geq \alpha\}} \frac{|f|^p}{\alpha^p} d\mu \leq \frac{1}{\alpha^p} \int |f|^p d\mu. \end{aligned}$$

□

\mathcal{L}^p -Konvergenz impliziert Konvergenz im Maß μ (für $p < \infty$)

Satz 10.4. Seien $p \in [1, +\infty[$ und $f, f_n \in \mathcal{L}^p(\mu)$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ gilt. Dann folgt die Konvergenz $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im Maß μ .

Beweis. Die Aussage folgt aus der Tschebyschew-Markov-Ungleichung: Sei $\varepsilon > 0$, dann folgt mit 10.3:

$$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon^p} \int |f_n - f|^p d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

Zusammenhang der Konvergenzbegriffe

Satz 10.5. Es sei $\mu(\Omega) < +\infty$, und $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, seien \mathcal{A} -messbare Funktionen auf Ω mit den Eigenschaften

Konvergenz μ -f.ü. impliziert Konvergenz im Maß μ , wenn alle Fkt. μ -f.ü. endlich sind und $\mu(\Omega) < \infty$

$$(i) \mu(\{|f_n| = \infty\}) = \mu(\{|f| = \infty\}) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \quad \mu\text{-f.ü.}$$

Dann konvergiert f_n gegen f im Maß μ .

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $f_n(\omega) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(\omega)$ für μ -f.a. $\omega \in \Omega$ gilt, folgt

$$\mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0. \tag{10.1}$$

Sei $N \in \mathbb{N}$, dann ist für jedes $m \geq N$

$$\mu(\{|f_m - f| \geq \varepsilon\}) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right),$$

also für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \mu(\{|f_m - f| \geq \varepsilon\}) \leq \mu\left(\bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung fällt für wachsende N . Und somit erhalten wir, da μ als Maß stetig von oben ist (hierfür brauchen wir die Endlichkeit von $\mu(\Omega)$!)

$$\begin{aligned} \limsup_{m \rightarrow \infty} \mu(\{|f_m - f| \geq \varepsilon\}) &\leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mu\left(\bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) \\ &= \mu\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} \{|f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) \\ &\stackrel{(10.1)}{=} 0 \end{aligned}$$

□

Bemerkung 10.6. Die Implikationen aus 10.4 und 10.5 sind in umgekehrter Richtung falsch. Gegenbeispiele hierzu wurden in den Übungsaufgaben bearbeitet.

Ü

Theorem 10.7. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Maß μ . Dann existiert eine \mathcal{A} -messbare Funktion f auf Ω , so dass $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im Maß μ , und es gibt eine Teilfolge $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so dass μ -f.ü. gilt: $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k} = f$.

Vgl. den Satz von Riesz-Fischer!
Jede Cauchy-Folge im Maß μ konvergiert im Maß μ und besitzt eine μ -f.ü. konvergente Teilfolge

10 Formen der Konvergenz

Beweis. Wir konstruieren eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, so dass gilt:

$$\mu\left(\underbrace{\{|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \geq \frac{1}{2^k}\}}_{=: E_k}\right) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Wenn $\omega \in \bigcap_{k=m}^{\infty} E_k^C$ gilt, bekommen wir für $l > j \geq k \geq m$

$$\begin{aligned} |f_{n_l}(\omega) - f_{n_j}(\omega)| &\leq \sum_{i=j}^{l-1} |f_{n_{i+1}}(\omega) - f_{n_i}(\omega)| \\ &< \sum_{i=j}^{l-1} \frac{1}{2^i} \leq \frac{1}{2^{j-1}} \leq \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned} \quad (10.2)$$

$(f_{n_k}(\omega))_{k \in \mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge, wenn gilt:

$$\omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq m} E_k^C =: \liminf_{k \rightarrow \infty} E_k^C.$$

Gleichzeitig ist für alle $m \in \mathbb{N}$

$$\mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq m} E_k\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}},$$

also $\mu((\liminf_{k \rightarrow \infty} E_k^C)^C) = 0$. Damit konvergiert $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ μ -f.ü. gegen eine \mathcal{A} -messbare Funktion f auf Ω . Aber wegen (10.2) konvergiert $f_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ sogar gleichmäßig auf $\bigcap_{k=m}^{\infty} E_k^C$, und zwar für alle $m \in \mathbb{N}$. Folglich gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$\{|f_{n_k} - f| > \frac{\varepsilon}{2}\} \subset \bigcup_{i=m}^{\infty} E_i$$

und damit

$$\mu(\{|f_{n_k} - f| > \frac{\varepsilon}{2}\}) \leq \sum_{i=m}^{\infty} \mu(E_i) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ und hinreichend große k . Daraus folgt

$$\mu(\{|f_n - f| > \varepsilon\}) \leq \underbrace{\mu(\{|f_n - f_{n_k}| > \frac{\varepsilon}{2}\})}_{\text{beliebig klein, wenn } k, n \text{ hinreichend groß}} + \underbrace{\mu(\{|f_{n_k} - f| > \frac{\varepsilon}{2}\})}_{\leq \frac{1}{2^{m-1}} \forall m, \text{ wenn } k \text{ hinreichend groß}}.$$

Also konvergiert $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im Maß μ . □

Theorem 10.8 („Modifikation von Fatou’s Lemma“). $f, f_n, n \in \mathbb{N}$, seien \mathcal{A} -messbare Funktionen, so dass alle f_n (μ -f.ü.) nichtnegativ sind, und $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im Maß μ . Dann folgt

f, f_n seien \mathcal{A} -messbar und nichtnegativ. Wenn $f_n \rightarrow f$ im Maß μ , dann $\int f d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu$

$$\int f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus 10.7 und dem Lemma von Fatou (vgl. 6.9).

Die Einzelheiten sind Inhalt einer Übungsaufgabe. □ Ü

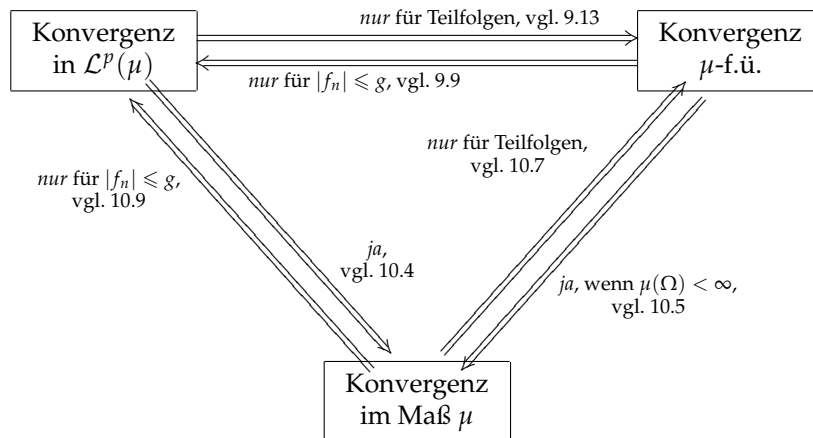
Korollar 10.9 („Modifikation von Lebesgue’s Theorem von der dominierten Konvergenz“). Sei $p \in [1, \infty[$, und $f_n, n \in \mathbb{N}$, seien \mathcal{A} -messbare Funktionen auf Ω , für die eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ existiert mit $|f_n| \leq g$ μ -f.ü. für alle $n \in \mathbb{N}$. Wenn f eine \mathcal{A} -messbare Funktion auf Ω ist, so dass $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ im Maß μ gilt, dann folgt $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, und $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$.

$p < \infty, f_n$ \mathcal{A} -messbar, $g \in \mathcal{L}^p(\mu), |f_n| \leq g, f_n \rightarrow f$ im Maß μ . Dann ist $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, und $f_n \rightarrow f$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$

Beweis. Der Beweis folgt aus 10.8 und verläuft analog zum Beweis von 9.9. Die Ausführung ist Inhalt einer Übungsaufgabe. □ Ü

Übersicht

Seien $f_n, n \in \mathbb{N}$, allesamt \mathcal{A} -messbar auf Ω . Sei $g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann gilt:



11 Produkte von σ -Algebren bzw. Maßen und der Satz von Fubini

Produkte von σ -Algebren

Definition 11.1. Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i), i = 1, \dots, n$, messbare Räume. Betrachte

$$\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$$

und die Projektionen $p_i : \Omega \rightarrow \Omega_i, 1 \leq i \leq n$, also

$$p_i(\omega) = p_i((\omega_1, \dots, \omega_n)) = \omega_i, \quad \omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega.$$

Die Produkt- σ -Algebra $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ ist definiert durch

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i := \sigma(p_1^{-1}(\mathcal{A}_1) \cup \dots \cup p_n^{-1}(\mathcal{A}_n)).$$

Erzeugendensystem von $\bigotimes \mathcal{A}_i$ ist also die Vereinigung aller Zylinder auf den Elementen der \mathcal{A}_i

Bemerkung 11.2. Folgendes haben wir im Rahmen von Übungen gezeigt:



- (i) Für jedes $i = 1, \dots, n$ ist $p_i^{-1}(\mathcal{A}_i)$ eine σ -Algebra über Ω . Die Vereinigung dieser Urbilder ist jedoch im Allgemeinen keine σ -Algebra.
- (ii) $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ ist die kleinste σ -Algebra \mathcal{A} auf Ω , so dass alle $p_i : \Omega \rightarrow \Omega_i, i = 1, \dots, n, \mathcal{A}/\mathcal{A}_i$ -messbar sind.

Satz 11.3. Für alle $i = 1, \dots, n$ sei \mathcal{E}_i Erzeuger von \mathcal{A}_i , und es existiere für jedes i eine Folge $(E_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E}_i , so dass $E_{i,k} \uparrow_{k \rightarrow \infty} \Omega_i$ gilt. Dann folgt

Wenn für jedes i gilt, dass der Erzeuger \mathcal{E}_i von \mathcal{A}_i eine Ω_i ausschöpfende Folge von Mengen enthält, dann wird $\bigotimes \mathcal{A}_i$ schon von allen Produkten der $E_i \in \mathcal{E}_i$ erzeugt

$$\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i = \sigma(\{E_1 \times \dots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i = 1, \dots, n\}). \quad (11.1)$$

Beweis. Bezeichne die σ -Algebra auf der rechten Seite von (11.1) mit \mathcal{A} .

„ $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ “: Wir wissen, dass $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ die kleinste σ -Algebra über Ω ist, für die alle Projektionen p_i messbar sind. Wenn wir also zeigen können, dass $p_i, i = 1, \dots, n$ allesamt $\mathcal{A}/\mathcal{A}_i$ -messbar sind, haben wir $\bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$.

Sei also $1 \leq i \leq n$. Im Kapitel über messbare Abbildungen haben wir gezeigt (vgl. 4.3), dass eine Abbildung genau dann $\mathcal{A}'/\mathcal{A}''$ -messbar ist, wenn alle Urbilder von Mengen aus dem Erzeugendensystem von

\mathcal{A}'' in \mathcal{A}' liegen. Wir müssen also zeigen, dass für jedes $E \in \mathcal{E}_i$ automatisch $p_i^{-1}(E) \in \mathcal{A}$ gilt. Aber es ist

$$\begin{aligned} p_i^{-1}(E) &= \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{i-1} \times E \times \Omega_{i+1} \times \cdots \times \Omega_n \\ &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_{1,k} \times \cdots \times E_{i-1,k} \times E \times E_{i+1,k} \times \cdots \times E_{n,k} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

„ $\mathcal{A} \subset \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ “: Wir müssen zeigen, dass für alle $E_i \in \mathcal{E}_i, i = 1, \dots, n$, gilt: $E_1 \times \cdots \times E_n \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$. Aber es ist

$$E_1 \times \cdots \times E_n = p_1^{-1}(E_1) \cap \cdots \cap p_n^{-1}(E_n) \in \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i.$$

□

Ü **Bemerkung 11.4.** Die Voraussetzung „ $E_{i,k} \uparrow_{k \rightarrow \infty} \Omega_i$ “ kann nicht weggelassen werden. Ein Gegenbeispiel ($\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, \Omega_1\}$, \mathcal{A}_2 mit mindestens vier Elementen) wurde in den Übungen behandelt.

Maße auf Produkt- σ -Algebren

Seien nun $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), i = 1, \dots, n$, Maßräume, so dass \mathcal{A}_i jeweils von einem Mengensystem \mathcal{E}_i erzeugt wird. Es sei $\Omega := \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.

Nun interessiert uns die Frage, unter welchen Voraussetzungen ein (eindeutiges) Maß μ auf $(\Omega, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$ existiert mit

$$\mu(E_1 \times \cdots \times E_n) = \mu_1(E_1) \cdots \mu_n(E_n) \quad (11.2)$$

für alle möglichen Auswahlen von $E_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, E_n \in \mathcal{E}_n$.

B.ex. **Beispiel 11.5.** Für jedes $i = 1, \dots, n$ sei $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), m)$. Sei m_n das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, und \mathcal{E}_i für jedes i die Menge aller Intervalle des Typs $[a, b[, a, b \in \mathbb{R}, a \leq b$. Dann ist nach Definition von m_n für alle $a_i, b_i \in \mathbb{R}, a_i \leq b_i, i = 1, \dots, n$,

$$m_n([a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[) = m([a_1, b_1[) \cdots m([a_n, b_n[).$$

Wir haben in 2.12 und im Satz von Caratheodory (vgl. 3.3) gesehen, dass dies das Lebesgue-Maß m_n eindeutig bestimmt.

Wir verallgemeinern diese Aussage nun, indem wir zeigen, dass jedes Maß auf einem messbaren Raum unter bestimmten Bedingungen durch seine Einschränkung auf einen Erzeuger der σ -Algebra eindeutig definiert wird:

Satz 11.6 (Eindeutigkeit). Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \dots, n$, Maßräume. Die \mathcal{A}_i seien für jedes i jeweils erzeugt von einem Mengensystem \mathcal{E}_i , das folgende Eigenschaften hat:

- (i) \mathcal{E}_i ist \cap -stabil.
- (ii) Es gibt eine Folge $(E_{i,k})_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E}_i , so dass $E_{i,k} \uparrow_{k \rightarrow \infty} \Omega_i$ gilt, und $\mu_i(E_{i,k}) < \infty$ für jedes k .

Wenn die Erzeuger der \mathcal{A}_i schnittstabil sind und jeweils eine Ω_i ausschöpfende Folge $E_{i,k}$ mit $\mu_i(E_{i,k}) < \infty$ enthalten, dann gibt es maximal ein Maß μ auf (Ω, \mathcal{A}) mit (11.2)

Dann gibt es höchstens ein Maß μ auf $(\Omega, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$, $\Omega := \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, mit der Eigenschaft (11.2).

Theorem 11.7 (Existenz und Eindeutigkeit). Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$, $i = 1, \dots, n$, Maßräume, so dass für jedes i das Maß μ_i ein σ -endliches ist. Dann existiert für $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ genau ein Maß μ auf $(\Omega, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$, so dass für alle $A_i \in \mathcal{A}_i$, $i = 1, \dots, n$, gilt:

Ist μ_i immer σ -endlich auf \mathcal{A}_i , so gibt es genau ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}) mit (11.3)

$$\mu(A_1 \times \dots \times A_n) = \mu_1(A_1) \dots \mu_n(A_n). \quad (11.3)$$

Definition 11.8. Das neue Maß

$$\mu =: \bigotimes_{i=1}^n \mu_i$$

auf $(\Omega, \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i)$ heißt *Produktmaß* von μ_1, \dots, μ_n .

Wir beweisen zunächst den Satz 11.6. Wir benötigen dazu die folgende, allgemeine Aussage, deren Beweis auf die zu Beginn der Vorlesung eingeführten Dynkinsysteme zurückgreift (vgl. S. 7ff.).

Satz 11.9 (Eindeutigkeitssatz). Sei (Ω, \mathcal{A}) ein messbarer Raum, und \mathcal{E} Erzeuger von \mathcal{A} mit den Eigenschaften:

- (i) \mathcal{E} ist \cap -stabil.
- (ii) Es gibt eine Folge $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{E} , mit $E_k \uparrow_{k \rightarrow \infty} \Omega$.

Sei \mathcal{E} schnittfester Erzeuger von \mathcal{A} mit $E_k \uparrow \Omega$ in \mathcal{E} . Wenn μ_1, μ_2 auf \mathcal{E} identisch und endlich sind, folgt $\mu_1 = \mu_2$ auf \mathcal{A}

Seien μ_1, μ_2 Maße auf (Ω, \mathcal{A}) , so dass für alle $E \in \mathcal{E}$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mu_1(E) = \mu_2(E) \quad \text{und} \quad \mu_1(E_k) = \mu_2(E_k) < \infty.$$

Dann folgt $\mu_1 = \mu_2$ auf ganz \mathcal{A} .

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Sei

$$\mathcal{D}_k := \{D \in \mathcal{A} \mid \mu_1(E_k \cap D) = \mu_2(E_k \cap D)\}.$$

Dann ist \mathcal{D}_k ein Dynkin-System auf Ω . Denn es gilt $\Omega \in \mathcal{D}_k$, und aus $D \in \mathcal{D}_k$ folgt $D^C \in \mathcal{D}_k$, wegen

$$\begin{aligned} \mu_1(E_k \cap D^C) &= \mu_1(E_k \setminus E_k \cap D) = \mu_1(E_k) - \underbrace{\mu_1(E_k \cap D)}_{\substack{\leq \mu_1(E_k) \\ < \infty}} \\ &\stackrel{D \in \mathcal{D}_k}{=} \mu_2(E_k) - \underbrace{\mu_2(E_k \cap D)}_{\substack{\leq \mu_2(E_k) \\ < \infty}} = \mu_2(E_k \cap D^C). \end{aligned}$$

Außerdem gilt für jedes System $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus \mathcal{D}_k immer auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathcal{D}_k$, denn:

$$\begin{aligned} \mu_1\left(E_k \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right) &= \mu_1\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_k \cap D_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1(E_k \cap D_n) \\ &\stackrel{D_n \in \mathcal{D}_k}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_2(E_k \cap D_n) = \mu_2\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (E_k \cap D_n)\right) \\ &= \mu_2\left(E_k \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n\right), \end{aligned}$$

Da \mathcal{E} per Voraussetzung \cap -stabiler Erzeuger von \mathcal{A} ist, gilt auch $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}_k$, und somit $\mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_k$. Nach 2.10 ist $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ als Dynkin-System, das von einem schnittfesten Mengensystem \mathcal{E} erzeugt wurde, sogar identisch mit der kleinsten σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, die von \mathcal{E} erzeugt wird.

Insgesamt folgt also

$$\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}_k \subset \mathcal{A}.$$

Nach Definition von \mathcal{D}_k gilt also für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\mu_1(A \cap E_k) = \mu_2(A \cap E_k).$$

Das wiederum gilt für alle $k \in \mathbb{N}$, und daher wissen wir für alle $A \in \mathcal{A}$

$$\mu_1(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_1(A \cap E_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_2(A \cap E_k) = \mu_2(A).$$

□

Beweis von Satz 11.6. Sei

$$\mathcal{E} := \{E_1 \times \cdots \times E_n \mid E_i \in \mathcal{E}_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Dann gilt nach Satz 11.3 für die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra gerade

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigotimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i.$$

\mathcal{E} ist offensichtlich \cap -stabil, und

$$\mathcal{E} \ni E_k := E_{1,k} \times \cdots \times E_{n,k} \uparrow_{k \rightarrow \infty} \Omega.$$

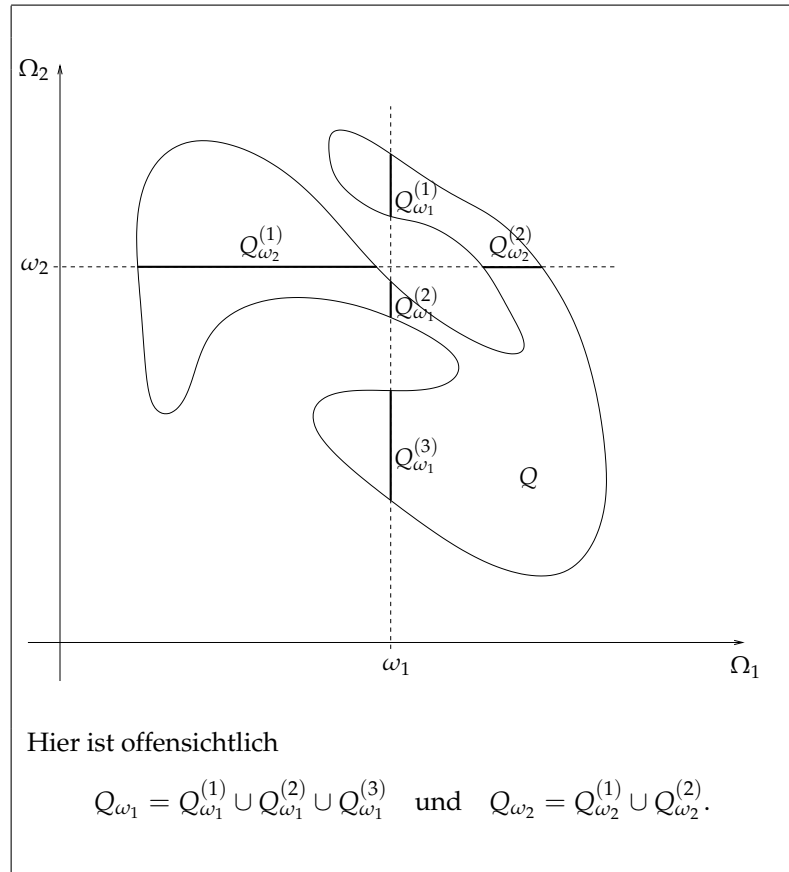
Da für alle $i = 1, \dots, n$ und alle $k \in \mathbb{N}$ die Endlichkeit von $\mu_i(E_{i,k})$ vorausgesetzt ist, folgt die Behauptung mit dem obigen Eindeigkeitssatz 11.9. \square

Definition 11.10. Seien Ω_1, Ω_2 Mengen, und $Q \subset \Omega_1 \times \Omega_2$. Für feste $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$ ist der ω_1 -Schnitt Q_{ω_1} von Q definiert durch

$$Q_{\omega_1} := \{\omega'_2 \in \Omega_2 \mid (\omega_1, \omega'_2) \in Q\} \quad (\subset \Omega_2),$$

und der ω_2 -Schnitt Q_{ω_2} durch

$$Q_{\omega_2} := \{\omega'_1 \in \Omega_1 \mid (\omega'_1, \omega_2) \in Q\} \quad (\subset \Omega_1).$$



$Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \omega_1 \in \Omega_1$
 $\Rightarrow Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$
 (analog: $Q_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1$)

Lemma 11.11. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ messbare Räume, $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ und $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$. Dann folgt

$$Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2 \quad \text{und} \quad Q_{\omega_2} \in \mathcal{A}_1.$$

Beweis. Wir zeigen nur „ $Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ “. Die andere Aussage funktioniert analog.

Sei $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$, und

$$\mathcal{A} := \{Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2\}.$$

Dieses Mengensystem \mathcal{A} ist eine σ -Algebra, denn: Wegen $\Omega_{\omega_1} = \Omega_2$ folgt $\Omega \in \mathcal{A}$, und für $Q \in \mathcal{A}$ folgt aus

$$\Omega_2 = Q_{\omega_1} \dot{\cup} (\Omega \setminus Q)_{\omega_1} \tag{11.4}$$

$(\Omega \setminus Q)_{\omega_1} = \Omega_2 \setminus Q_{\omega_1}$; da \mathcal{A}_2 eine σ -Algebra ist, impliziert $Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$ sofort $(\Omega_2 \setminus Q_{\omega_1}) \in \mathcal{A}_2$, also $(\Omega \setminus Q)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$, und daher folgt $\Omega \setminus Q \in \mathcal{A}$. Weiterhin gilt für $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus \mathcal{A} :

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \right)_{\omega_1} &= \{ \omega'_2 \in \Omega_2 \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ mit } (\omega_1, \omega'_2) \in Q_n \} \\ &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (Q_n)_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2, \end{aligned} \quad (11.5)$$

und somit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \mathcal{A}$.

Für $A_1 \in \mathcal{A}_1$ und $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1} = \begin{cases} A_2 & (\in \mathcal{A}_2) \quad \text{für } \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & (\in \mathcal{A}_2) \quad \text{für } \omega_1 \notin A_1, \end{cases} \quad (11.6)$$

also $A_1 \times A_2 \in \mathcal{A}$. Es folgt

$$\sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}) \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2.$$

Aber nach dem ersten Satz dieses Kapitels ist die linke Seite gerade $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, es gilt also $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$, und damit für jedes $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ automatisch $Q_{\omega_1} \in \mathcal{A}_2$. \square

Lemma 11.12. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume, und $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$.

(i) Wenn μ_2 ein σ -endliches Maß ist, dann ist die Funktion

$$\omega_1 \mapsto \mu_2(Q_{\omega_1})$$

\mathcal{A}_1 -messbar auf Ω_1 .

(ii) Wenn μ_1 ein σ -endliches Maß ist, dann ist die Funktion

$$\omega_2 \mapsto \mu_1(Q_{\omega_2})$$

\mathcal{A}_2 -messbar auf Ω_2 .

Beweis. Wir beweisen nur die erste Aussage, die zweite funktioniert analog.

Sei $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{A}_2 mit $E_k \uparrow_{k \rightarrow \infty} \Omega_2$, und $\mu_2(E_k) < \infty$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Wähle $k \in \mathbb{N}$ fest und definiere für $D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ die Funktion $\sigma_D : \Omega_1 \rightarrow \mathbb{R}_+$ durch

$$\sigma_D(\omega_1) := \mu_2(D_{\omega_1} \cap E_k)$$

für $\omega_1 \in \Omega_1$. Offensichtlich ist $\sigma_D(\omega_1)$ für alle ω_1 kleiner als (oder gleich) $\mu_2(E_k) (< \infty)$. Es gilt, wegen $\Omega_{\omega_1} = \Omega_2$,

$$\sigma_\Omega = \mu_2(E_k),$$

$\omega_1 \mapsto \mu_2(Q_{\omega_1})$ ist für $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ \mathcal{A}_1 -messbar, wenn μ_2 σ -endlich ist. analog für $\omega_2 \mapsto \mu_1(Q_{\omega_2})$

und für jedes $D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt, da nach (11.4) der Schnitt $(\Omega \setminus D)_{\omega_1}$ identisch ist mit $\Omega_2 \setminus D_{\omega_1}$,

$$\sigma_{\Omega \setminus D} = \sigma_{\Omega} - \sigma_D.$$

Nachdem wir in (11.5) gesehen haben, dass

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \right)_{\omega_1} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (D_n)_{\omega_1}$$

gilt, folgt für paarweise disjunkte $D_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\sigma_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{D_n}. \quad (11.7)$$

Damit wissen wir, dass

$$\mathcal{D} := \{D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \mid \sigma_D \text{ ist } \mathcal{A}_1\text{-messbar}\}$$

ein Dynkin-System ist. Weiterhin gilt für $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ nach (11.6)

$$\sigma_{A_1 \times A_2} = \mathbb{I}_{A_1} \mu_2(A_2 \cap E_k).$$

Folglich ist $\sigma_{A_1 \times A_2}$ eine \mathcal{A}_1 -messbare Abbildung, und $A_1 \times A_2$ liegt in \mathcal{D} . Nach dem Satz, dass das Dynkin-System eines schnittfesten Erzeugers \mathcal{E} identisch ist mit der von \mathcal{E} erzeugten σ -Algebra (vgl. 2.10), folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 &\stackrel{11.3}{=} \sigma(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}) \\ &\stackrel{2.10, \text{ da } \cap\text{-stabil}}{=} \mathcal{D}(\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}) \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2. \end{aligned}$$

Also ist $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so dass

$$\omega_1 \mapsto \sigma_D(\omega_1) = \mu_2(D_{\omega_1} \cap E_k)$$

für alle $D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ eine \mathcal{A}_1 -messbare Abbildung ist. Das gilt für jedes $k \in \mathbb{N}$, also folgt, dass

$$\omega_1 \mapsto \mu_2(D_{\omega_1}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \mu_2(D_{\omega_1} \cap E_k)$$

für alle $D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ eine \mathcal{A}_1 -messbare Abbildung ist. □

Beweis von Theorem 11.7. Existenz: Wir beweisen die Aussage zunächst für $n = 2$. Der allgemeine Fall folgt dann leicht per Induktion. Dies wird zur Übung gegeben.

□

Für Q aus $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ definiere für $\omega_1 \in \Omega_1$

$$s_Q(\omega_1) := \mu_2(Q_{\omega_1}).$$

Diese Abbildung ist trivialerweise nichtnegativ, und nach dem letzten Lemma ist sie \mathcal{A}_1 -messbar. Damit ist

$$\mu(Q) := \int s_Q d\mu_1 \tag{11.8}$$

ein Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$, denn: Es gilt $\mu \geq 0$, und $\mu(\emptyset) = 0$. Für paarweise disjunkte $Q_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $n \in \mathbb{N}$, gilt außerdem wegen (11.7):

$$\mu\left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} Q_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int s_{Q_n} d\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(Q_n).$$

Weiter gilt für $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$:

$$\begin{aligned} \mu(A_1 \times A_2) &= \int \mathbb{I}_{A_1} \cdot \mu_2(A_2) d\mu_1 = \left(\int \mathbb{I}_{A_1} d\mu_1 \right) \cdot \mu_2(A_2) \\ &= \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2), \end{aligned}$$

da $s_{A_1 \times A_2} = \mathbb{I}_{A_1} \cdot \mu_2(A_2)$.

Eindeutigkeit: Die Eindeutigkeit folgt aus 11.6, da alle μ_i , $i = 1, \dots, n$, jeweils σ -endlich sind (setze $\mathcal{E}_i := \mathcal{A}_i$ für jedes i).

□

Aus dem letzten Beweis können wir noch sehen, wie $\mu_1 \otimes \mu_2$ zu „berechnen“ ist; bei manchen Autoren wird diese Aussage Cavalieri zugeschrieben:

„Fubini für Indikatorfunktionen“
 Berechnung von $(\mu_1 \otimes \mu_2)(Q)$ für
 $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

Korollar 11.13. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ -endlichen Maßen μ_1 und μ_2 . Dann gilt für jedes $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(Q) = \int \mu_2(Q_{\omega_1}) \mu_1(d\omega_1) = \int \mu_1(Q_{\omega_2}) \mu_2(d\omega_2).$$

Beweis. Aus dem vorigen Beweis wissen wir, dass die erste Gleichung gilt. Die zweite Gleichung sieht man wie folgt: Definiere für jedes $Q \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

$$\tilde{\mu}(Q) := \int \mu_1(Q_{\omega_2}) \mu_2(d\omega_2).$$

Dann folgt, wie in dem Existenzbeweis oben, dass $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ ist, so dass für beliebige $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt:

$$\tilde{\mu}(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2).$$

Nun folgt aus der Eindeutigkeitsaussage des Theorems 11.7 sofort $\tilde{\mu} = \mu_1 \otimes \mu_2$, also die zweite Gleichung. \square

Der Satz von Fubini

Nun wollen wir herleiten, wie sich Integrale bezüglich $\mu_1 \otimes \mu_2$ aus denen bezüglich μ_1 bzw. μ_2 berechnen lassen. Dazu führen wir für Abbildungen $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega'$, wo Ω' eine beliebige Menge ist und ω_1, ω_2 in Ω_1 bzw. Ω_2 liegen, neue Abbildungen $f_{\omega_1} : \Omega_2 \rightarrow \Omega'$ und $f_{\omega_2} : \Omega_1 \rightarrow \Omega'$ ein. Diese werden definiert durch

$$\begin{aligned} \omega_2 &\mapsto f_{\omega_1}(\omega_2) := f(\omega_1, \omega_2) \\ \omega_1 &\mapsto f_{\omega_2}(\omega_1) := f(\omega_1, \omega_2), \end{aligned}$$

oder kurz

$$f_{\omega_1} = f(\omega_1, \cdot), \quad f_{\omega_2} = f(\cdot, \omega_2).$$

Sei f $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 / \mathcal{A}'$ -messbar. Dann ist
 f_{ω_1} $\mathcal{A}_2 / \mathcal{A}'$ -messbar, und f_{ω_2} ist
 $\mathcal{A}_1 / \mathcal{A}'$ -messbar

Lemma 11.14. Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2), (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, und sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \Omega'$ eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 / \mathcal{A}'$ -messbare Abbildung. Dann gilt für alle $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$, dass f_{ω_2} eine $\mathcal{A}_1 / \mathcal{A}'$ -messbare, und f_{ω_1} eine $\mathcal{A}_2 / \mathcal{A}'$ -messbare Abbildung ist.

Beweis. Sei $A' \in \mathcal{A}'$. Dann ist

$$(f_{\omega_1})^{-1}(A') = \{\omega_2 \in \Omega_2 \mid (\omega_1, \omega_2) \in f^{-1}(A')\} = (f^{-1}(A'))_{\omega_1}.$$

Da aber $f^{-1}(A')$ in $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ liegt, folgt mit Lemma 11.11, dass $(f^{-1}(A'))_{\omega_1}$ in \mathcal{A}_2 liegt.

Dass $(f_{\omega_2})^{-1}(A')$ in \mathcal{A}_1 liegt, zeigt man analog. \square

Beachte: Sei $f := \mathbb{I}_Q$ für Q beliebig in $\mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Dann ist

$$f_{\omega_1} = \mathbb{I}_{Q_{\omega_1}} \quad \text{und} \quad f_{\omega_2} = \mathbb{I}_{Q_{\omega_2}}. \quad (11.9)$$

Theorem 11.15 (Fubini). Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ Maßräume mit σ -endlichen Maßen μ_1 bzw. μ_2 . Sei

Voraussetzungen:
 σ -endliche Maße
 f sei $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -messbar

$$f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -messbare Funktion.

(i) Sei $f \geq 0$. Dann sind die Funktionen

$f \geq 0 \Rightarrow$
 $\omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1$ ist \mathcal{A}_2 -messbar

$$\omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1 \quad \text{bzw.} \quad \omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\mu_2$$

\mathcal{A}_2 - bzw. \mathcal{A}_1 -messbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) & \quad (11.10) \\ &= \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) \mu_2(d\omega_2) = \int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1). \end{aligned}$$

(ii) Sei f eine $\mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbare Funktion. Dann ist f_{ω_1} für μ_1 -f.a. $\omega_1 \in \Omega_1$ μ_2 -integrierbar, und analog f_{ω_2} für μ_2 -f.a. $\omega_2 \in \Omega_2$ μ_1 -integrierbar.

$f \mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbar \Rightarrow
für f.a. ω_1 ist f_{ω_1} eine
 μ_2 -integrierbare Funktion, und
 $\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\mu_2$ ist μ_1 -integrierbar

Weiterhin ist die μ_1 -f.ü. definierte Funktion

$$\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\mu_2$$

μ_1 -integrierbar, und die μ_2 -f.ü. definierte Funktion

$$\omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1$$

ist μ_2 -integrierbar.

Es gilt (11.10).

Bemerkung 11.16. (i) Wegen (11.10) ist folgende Schreibweise gerechtfertigt:

Sei $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbare Funktion. Dann ist

„Die Fubini-Formel für alle
 $\mu_1 \otimes \mu_2$ -integrierbaren Funktionen“

$$\begin{aligned} \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2) & \\ &= \iint f(\omega_1, \omega_2) \mu_1(d\omega_1) \mu_2(d\omega_2) \\ &= \iint f(\omega_1, \omega_2) \mu_2(d\omega_2) \mu_1(d\omega_1). \end{aligned}$$

Ü

(ii) Der Satz von Fubini gilt analog für n Faktoren. Die genaue Formulierung und der Beweis (über vollständige Induktion) ist eine Übung.

Es gilt also insbesondere für eine $\otimes_{i=1}^n \mathcal{A}_i$ -messbare Funktion $f : \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, die nichtnegativ oder $\otimes_{i=1}^n \mu_i$ -integrierbar ist, dass für jede Permutation i_1, \dots, i_n von $1, \dots, n$ gilt:

$$\begin{aligned} & \int f d(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n) \\ &= \int \left(\cdots \left(\int \left(\int f(\omega_1, \dots, \omega_n) \mu_{i_1}(d\omega_{i_1}) \right) \mu_{i_2}(d\omega_{i_2}) \right) \cdots \right) \mu_{i_n}(d\omega_{i_n}) \\ &=: \int \cdots \int f(\omega_1, \dots, \omega_n) \mu_{i_1}(d\omega_{i_1}) \cdots \mu_{i_n}(d\omega_{i_n}). \end{aligned}$$

Beweis des Satzes von Fubini. Sei $\Omega := \Omega_1 \times \Omega_2$.

(i): Wir zeigen jeweils nur die erste Gleichheit von (11.10). Die zweite folgt dann analog.

Fall 1: Sei f eine Elementarfunktion. Dann gibt es nichtnegative reelle Zahlen α_i und Mengen Q^i aus $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, so dass

$$f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{I}_{Q^i}$$

gilt, also nach (11.9) für jedes ω_2 aus Ω_2

$$f_{\omega_2} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mathbb{I}_{Q_{\omega_2}^i}.$$

Somit ist

$$\int f_{\omega_2} d\mu_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot \mu_1(Q_{\omega_2}^i).$$

Nach Lemma 11.12 ist daher die Abbildung

$$\omega_2 \mapsto \int f_{\omega_2} d\mu_1$$

\mathcal{A}_2 -messbar auf Ω_2 , und nach dem „Satz von Fubini für Indikatorfunktionen“ (vgl. 11.13) gilt

$$\begin{aligned} \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) \mu_2(d\omega_2) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \int \mu_1(Q_{\omega_2}^i) \mu_2(d\omega_2) \\ &= \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2). \end{aligned}$$

Fall 2: Sei f nichtnegativ und $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ -messbar. Sei $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementarfunktionen mit $u^{(n)} \uparrow_{n \rightarrow \infty} f$. Dann folgt für jedes $\omega_2 \in \Omega_2$, dass die Elementarfunktion $u_{\omega_2}^{(n)}$ mit $n \rightarrow \infty$ gegen f_{ω_2} wächst. Mit dem Satz von B. Levi (vgl. 6.8) ist

$$\int f_{\omega_2} d\mu_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int u_{\omega_2}^{(n)} d\mu_1.$$

Nun ist das Integral auf der rechten Seite der Gleichung nach dem oben gesagten \mathcal{A}_2 -messbar in ω_2 , da $u_{\omega_2}^{(n)}$ „elementar“ ist. Außerdem ist die rechte Seite in n aufsteigend, das heißt wir können mit B. Levi und dem „elementaren“ Fall schließen:

$$\begin{aligned} \int \left(\int f_{\omega_2} d\mu_1 \right) \mu_2(d\omega_2) &\stackrel{6.8}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int \left(\int u_{\omega_2}^{(n)} d\mu_1 \right) \mu_2(d\omega_2) \\ &\stackrel{\text{s.o.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int u^{(n)} d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &\stackrel{6.8}{=} \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2). \end{aligned}$$

(ii): Wir zeigen wieder nur den ersten Teil der Behauptung, der zweite folgt analog.

Klar: Für alle $\omega_i \in \Omega_i, i = 1, 2$, gilt

$$|f|_{\omega_i} = |f_{\omega_i}|, \quad (f^+)_{\omega_i} = (f_{\omega_i})^+, \quad (f^-)_{\omega_i} = (f_{\omega_i})^-. \quad (11.11)$$

Somit ist nach (i)

$$\begin{aligned} \int \left(\int |f_{\omega_1}| d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1) &= \int \left(\int |f_{\omega_2}| d\mu_1 \right) \mu_2(d\omega_2) \\ &= \int |f| d(\mu_1 \otimes \mu_2) < \infty. \end{aligned}$$

Also ist $\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\mu_2$ eine μ_1 -integrierbare Abbildung, und daher ist nach 7.10(ii) die Abbildung

$$\omega_1 \mapsto \int |f_{\omega_1}| d\mu_2$$

μ_1 -f.ü. endlich. Damit ist für μ_1 -f.a. $\omega_1 \in \Omega_1$ die Abbildung f_{ω_1} μ_2 -integrierbar. Insbesondere ist für μ_1 -f.a. ω_1 die Abbildung

$$\omega_1 \mapsto \int f_{\omega_1} d\mu = \int (f_{\omega_1})^+ d\mu_1 - \int (f_{\omega_1})^- d\mu_2$$

wohldefiniert, und nach (i) gilt wegen (11.11)

$$\begin{aligned}
 & \int \left(\int f_{\omega_1} d\mu_2 \right) \mu_1(d\mu_1) \\
 &= \int \left(\int (f_{\omega_1})^+ d\mu_2 - \int (f_{\omega_1})^- d\mu_2 \right) \mu_1(d\omega_1) \\
 &\stackrel{\text{(i) und (11.11)}}{=} \int f^+ d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int f^- d(\mu_1 \otimes \mu_2) \\
 &= \int f d(\mu_1 \otimes \mu_2).
 \end{aligned}$$

□

B.ex.

Beispiel 11.17. Bezeichne das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ mit m_n . Dann gilt für beliebige $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$, dass das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^{n_1+\dots+n_k}$ angegeben werden kann durch

$$m_{n_1+\dots+n_k} = m_{n_1} \otimes \dots \otimes m_{n_k}.$$

12 Der Transformationssatz

Bemerkung 12.1. Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, und $g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ eine \mathcal{A} -messbare, nichtnegative Abbildung. Dann ist

$$\nu := g \cdot \mu,$$

definiert durch

$$\nu(A) = \int_A g \, d\mu$$

für beliebige $A \in \mathcal{A}$, wieder ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}) .

Beweis. Siehe Übungen. □ Ü

Betrachte nun, und für den Rest dieses Kapitels, die Situation unseres Standard-Beispiels: Den Maßraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), m)$ mit Lebesgue-Maß m . B.ex.

Für $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ bezeichne $m|_A$ die Einschränkung von m auf $\mathcal{B}(A) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap A$ (vgl. auch hierzu die Übungen zur Vorlesung). $(A, \mathcal{B}(A), m|_A)$ ist dann wieder ein Maßraum. Ü

Folgende Begriffe sollten aus den Grundvorlesungen geläufig sein:

Definition 12.2. Eine Abbildung $f : A \rightarrow B$ wird als C^1 -Diffeomorphismus bezeichnet, wenn sie bijektiv und in beiden Richtungen C^1 (also einmal stetig differenzierbar) ist.

Sei $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine differenzierbare Abbildung, dann ist die sogenannte *Jacobi-Matrix*

$$Dg(x) = \left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

die Matrix der partiellen Ableitungen.

12 Der Transformationssatz

U, V offen in \mathbb{R}^d , $\varphi : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus
 $\Rightarrow \varphi(|\det D\varphi| \cdot m|_U) = m|_V$

Theorem 12.3. Seien U, V offene Mengen in \mathbb{R}^d , und $\varphi : U \rightarrow V$ ein C^1 -Diffeomorphismus. Dann gilt:

$$\underbrace{\varphi(|\det D\varphi| \cdot m|_U)}_{\substack{\text{Bildmaß von } |\det D\varphi| \cdot m|_U \\ \text{unter } \varphi : U \rightarrow V}} = m|_V. \quad (12.1)$$

f m -integrierbar $\Leftrightarrow (f \circ \varphi)|\det D\varphi|$ m -int'bar.
 Dann gilt außerdem
 $\int_V f = \int_U (f \circ \varphi)|\det D\varphi|$

Insbesondere ist eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann m -integrierbar über V , wenn $(f \circ \varphi)|\det D\varphi| : U \rightarrow \mathbb{R}$ eine m -integrierbare Funktion über U ist, und es gilt in diesem Fall:

$$\int_V f \, dm = \int_U (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, dm. \quad (12.2)$$

Ü *Beweis.* Der zweite Teil der Behauptung folgt unter Zuhilfenahme einer Übungsaufgabe direkt aus dem ersten.

Der erste Teil der Behauptung ist äquivalent zu

$$\underbrace{\varphi^{-1}(m|_V)}_{\substack{\text{Bildmaß von } m|_V \\ \text{unter } \varphi^{-1} : V \rightarrow U}} = |\det D\varphi| \cdot m|_U, \quad (12.3)$$

das heißt, für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap U$,

$$m(\varphi(A)) = \int_A |\det D\varphi(x)| \, m(dx). \quad (12.4)$$

Wir beweisen (12.4) in fünf Schritten:

Beh. 1. Es genügt, folgende „Lokalisierung“ von (12.4) zu zeigen:

Für jedes $p \in U$ gibt es eine offene Kugel $W \subset U$, die p enthält, so dass (12.4) gilt mit W anstelle U und $\varphi(W)$ (offen!) anstelle V .

Bew. Angenommen, diese „Lokalisierung“ gilt. Dann gibt es abzählbar viele solche Kugeln $W_j, j \in \mathbb{N}$, mit

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} W_j$$

(Man betrachte etwa alle solche Kugeln mit Mittelpunkten aus \mathbb{Q}^d und Radien aus \mathbb{Q}_+). Sei, wie oben, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap U$. Dann ist

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} (A \cap W_j),$$

also gibt es Teilmengen $A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap U$, so dass $A_j \subset A \cap W_j \subset W_j$ gilt und

$$A = \dot{\bigcup}_{j \in \mathbb{N}} A_j$$

(wir haben in 2.19 gezeigt, dass man jede Vereinigung von Mengen aus einem Ring in eine identische disjunkte Vereinigung von Mengen aus demselben Ring verwandeln kann). Somit gilt wegen σ -Additivität

$$m(\varphi(A)) = \sum_{j=1}^{\infty} m(\varphi(A_j)),$$

also, wegen Gültigkeit der „Lokalisierung“

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_{A_j} |\det D\varphi(x)| m(dx) \\ &= \int_A |\det D\varphi(x)| m(dx). \end{aligned}$$

Beh. 2. (12.4) gilt, falls φ eine Permutation der Koordinaten ist.

Bew. Dies ist klar nach dem Satz von Fubini, da in diesem Fall $|\det D\varphi| \equiv 1$ gilt.

Beh. 3. Seien U, V, W offene Teilmengen des \mathbb{R}^d , und $\psi : U \rightarrow W$ und $\varrho : W \rightarrow V$ seien C^1 -Diffeomorphismen.

Gilt (12.4) (und damit auch (12.1)) für $\varrho : W \rightarrow V$ und für $\psi^{-1} : W \rightarrow U$, so gilt (12.4) auch für $\varrho \circ \psi : U \rightarrow V$.

Bew. Für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap U$ gilt

$$\begin{aligned} &m((\varrho \circ \psi)(A)) \\ &= m[\varrho(\psi(A))] \\ &= \int_{\psi(A)} |\det D\varrho| dm \\ &= \int_W \mathbb{I}_{\psi(A)}(y) |\det D\varrho|(y) m(dy) \\ &= \int_W \mathbb{I}_A(\psi^{-1}(y)) |\det D\varrho|(\psi \circ \psi^{-1}(y)) m(dy), \end{aligned}$$

also mit der Nebenrechnung von unten

$$\begin{aligned}
 &= \int_W (\mathbb{I}_A \circ \psi^{-1})(y) |\det D(\varrho \circ \psi)|(\psi^{-1}(y)) \\
 &\quad \cdot \underbrace{|\det D\psi(\psi^{-1}(y))|^{-1}}_{\stackrel{(*)}{=} |\det D\psi^{-1}(y)|} m(dy) \\
 &\stackrel{(12.2)}{\stackrel{\text{mit } \psi^{-1}}{=} } \int_U \mathbb{I}_A |\det D(\varrho \circ \psi)| dm,
 \end{aligned}$$

wobei die Gleichheit (*) mit dem Satz über inverse Funktionen begründet ist.

Nebenrechnung: Es ist

$$D(\varrho \circ \psi)(x) = D\varrho(\psi(x)) \circ D\psi(x).$$

Also folgt:

$$\begin{aligned}
 \det D(\varrho \circ \psi)(x) &= \det D\varrho(\psi(x)) \cdot \det D\psi(x) \\
 \Leftrightarrow \det D\varrho(\psi(x)) &= \det D(\varrho \circ \psi)(x) \cdot (\det D\psi(x))^{-1}.
 \end{aligned}$$

Beh. 4. Die „Lokalisierung“ von (12.4) gilt für $d = 1$.

Bew. Sei $[a, b] \subset U \subset \mathbb{R}$. Wir wissen nach Analysis 1 und dem Satz 12.4 über die Gleichheit von Riemann- und Lebesgue-Integral über einem Intervall, dass für alle stetigen Funktionen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

φ' notiert hier keine Hilfsfunktion, sondern die Ableitung von φ

$$\begin{aligned}
 &\int_a^b (f \circ \varphi) \varphi' dm \\
 &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f dm = \begin{cases} \int_{\varphi([a,b])} f dm & \text{für } \varphi' > 0 \text{ auf } [a, b] \\ - \int_{\varphi([a,b])} f dm & \text{für } \varphi' < 0 \text{ auf } [a, b]. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Da φ ein C^1 -Diffeomorphismus ist, also $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{id}$, gilt entweder $\varphi' > 0$ oder $\varphi' < 0$ auf $[a, b]$, und somit

$$\int_{\varphi([a,b])} f dm = \int_{[a,b]} (f \circ \varphi) |\varphi'| dm.$$

Also folgt, da $m(\{x\}) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt,

$$\int_{\varphi([a,b])} f dm = \int_{[a,b]} (f \circ \varphi) |\varphi'| dm.$$

Schränkt man nun die Betrachtung ein auf $f \equiv 1$, so folgt für jedes offene Intervall $W \subset U$ und $V := \varphi(W)$:

$$\underbrace{\varphi^{-1}(m|_V)}_{\text{Bildmaß}}([a, b[) = (|\varphi'| \cdot m|_W)([a, b[)$$

für jedes Intervall $[a, b[\subset W$. Somit ist nach Satz 11.9 (Maße, die auf einem Erzeuger der σ -Algebra identisch sind, sind überall identisch)

$$\underbrace{\varphi^{-1}(m|_V)}_{\text{Bildmaß}} = |\varphi'| \cdot m|_W.$$

Also gilt, da $W \subset U$ ein beliebiges offenes Intervall ist, die „Lokalisierung“ von (12.4) im Fall $d = 1$.

Beh. 5. Gilt die „Lokalisierung“ von (12.4) für $d - 1$, so gilt sie auch für d .

Bew. Es gelte also die „Lokalisierung“ von (12.4) für $d - 1$.

Sei $p \in U$. Wegen $\det D\varphi \neq 0$ und *Beh. 2* können wir annehmen, dass in einer offenen Umgebung U_1 von p gilt:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \neq 0.$$

Setze

$$\psi(x_1, \dots, x_d) := (\varphi_1(x), x_2, \dots, x_d) \quad \text{für } x = (x_1, \dots, x_d) \in U_1.$$

Dann ist ψ eine C^1 -Abbildung auf U_1 , und dort gilt

$$D\psi = \left(\begin{array}{c|ccc} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_d} \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 \end{array} \right).$$

Also ist ψ invertierbar auf einer Umgebung U_2 von p (nach dem Satz über inverse Funktionen), und ψ^{-1} ist eine C^1 -Abbildung auf $W := \psi(U_2)$ (offen!).

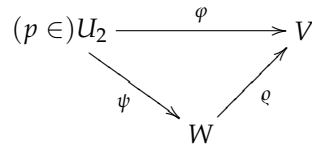
Definiere nun $\varrho : W \rightarrow V := \varphi(U_2)$ durch

$$\varrho := \varphi \circ \psi^{-1}.$$

Für alle $y = (y_1, \dots, y_d) \in W$ ist dann

$$\varrho(y) = (y_1, \varphi_2(y), \dots, \varphi_d(y)),$$

und das folgende Diagramm kommutiert:



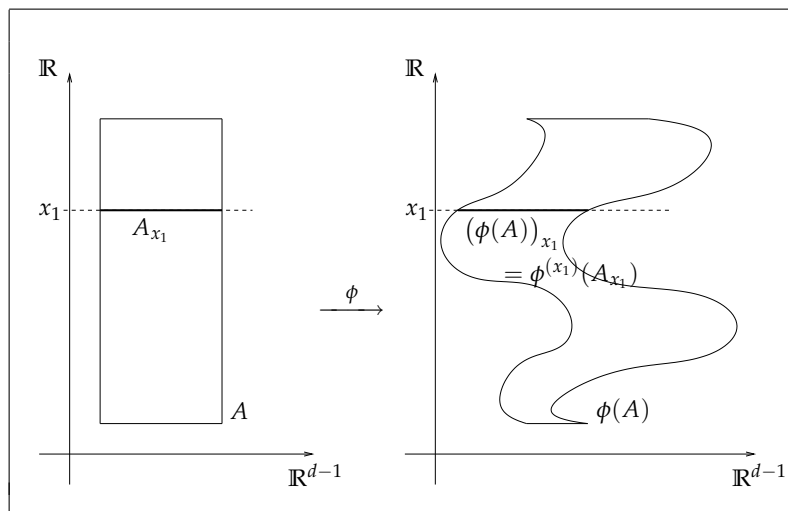
Also ist $\varphi = \varrho \circ \psi$. Somit kann man nach *Beh. 3* annehmen, dass φ mindestens eine Koordinate fest lässt, da ψ – und somit ψ^{-1} – und ϱ das auch tun. Wieder wegen *Beh. 2* kann man annehmen, dass $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ in einer Umgebung $U_3 =: U$ von p die erste Koordinate fest lässt. Sei nun für $x_1 \in \mathbb{R}$ die Abbildung $\varphi^{(x_1)} : U_{x_1} \rightarrow \mathbb{R}^{d-1}$ definiert durch

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(x_1)}(x_2, \dots, x_d) &= (\varphi_2(x_1, \dots, x_d), \dots, \varphi_d(x_1, \dots, x_d)) \\
 &\text{für } (x_2, \dots, x_d) =: x' \in U_{x_1},
 \end{aligned}$$

wo U_{x_1} wieder der Schnitt gemäß Definition im vorhergehenden Kapitel ist.

Da $\varphi_1(x_1, \dots, x_d) = x_1$ ist, folgt für alle $A \subset U$

$$(\varphi(A))_{x_1} = \varphi^{(x_1)}(A_{x_1}), \tag{12.5}$$



und für jedes $x = (x_1, x')$ ist

$$D\varphi(x) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & & & \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_1}(x) & & D\varphi^{(x_1)}(x') & \end{array} \right). \quad (12.6)$$

Letzteres impliziert: $\det D\varphi(x_1, x') = \det D\varphi^{(x_1)}(x')$. Insgesamt folgt für alle $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \cap U$, wenn m_d das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ notiert,

$$\begin{aligned} m_d(\varphi(A)) & \stackrel{11.13}{=} \int m_{d-1}[(\varphi(A))_{x_1}] m_1(dx_1) \\ & \stackrel{(12.5)}{=} \int m_{d-1}[\varphi^{(x_1)}(A_{x_1})] m_1(dx_1) \\ & \stackrel{\text{Ind-Ann.}}{=} \int \int_{A_{x_1}} |\det D\varphi^{(x_1)}| dm_{d-1} m_1(dx_1) \\ & \stackrel{(12.6)}{=} \int \int (\mathbb{I}_A)_{x_1} (|\det D\varphi|)_{x_1} dm_{d-1} m_1(dx_1) \\ & \stackrel{11.17}{=} \int_A |\det D\varphi| dm_d. \end{aligned}$$

□

13 Nachträge

In diesem Kapitel werden noch einige wichtige Sätze aufgelistet mit Verweis auf die Literatur, was deren Beweise angeht.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum.

Der Satz von Radon–Nikodym

Definition 13.1. Sei ν ein weiteres Maß auf (Ω, \mathcal{A}) . ν heißt *absolut stetig* bzgl. μ , falls für alle $N \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\mu(N) = 0 \Rightarrow \nu(N) = 0.$$

Proposition 13.2. Ein endliches Maß ν auf (Ω, \mathcal{A}) ist genau dann absolut stetig bzgl. μ , wenn $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, so dass $\forall A \in \mathcal{A}$:

$$\mu(A) \leq \delta \Rightarrow \nu(A) \leq \varepsilon.$$

Beweis. Siehe [H. Bauer, deGruyter 1978, Satz 17.8] \square

Theorem 13.3 (Radon–Nikodym). Sei μ σ -endlich und ν ein Maß auf (Ω, \mathcal{A}) . Dann sind äquivalent

(i) ν ist absolut stetig bzgl. μ .

(ii) ν hat eine Dichte bzgl. μ , d.h.: $\exists \varphi : \Omega \rightarrow [0, \infty]$, \mathcal{A} -messbar mit $\nu = \varphi\mu$
(also

$$\nu(A) = \int_A \varphi \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Beweis. Siehe [H. Bauer, deGruyter 1978, Satz 17.10] \square

Gleichgradige Integrierbarkeit und der verallgemeinerte Konvergenzsatz von Lebesgue

Definition 13.4. Eine Menge \mathcal{F} \mathcal{A} -messbarer Funktionen von Ω nach $\overline{\mathbb{R}}$ heißt p -fach *gleichgradig* (μ -)integrierbar, wenn zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ eine p -fach μ -integrierbare Funktion $g \geq 0$ auf Ω existiert derart, dass

$$\int_{\{|f| \geq g\}} |f|^p \, d\mu \leq \varepsilon \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}$$

gilt. Im Falle $p = 1$ nennt man \mathcal{F} dann kurz *gleichgradig integrierbar*.

Bemerkung 13.5. (i) Sind $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_n$ endlich viele p -fach gleichgradig μ -integrierbare Mengen \mathcal{A} -meßbarer Funktionen von Ω nach $\overline{\mathbb{R}}$, so ist auch

$$\mathcal{F}_1 \cup \dots \cup \mathcal{F}_n$$

p -fach gleichgradig μ -integrierbar.

(ii) Jede endliche Menge $\{f_1, \dots, f_n\}$ p -fach μ -integrierbarer Funktion ist gleichgradig μ -integrierbar.

(iii) Jede Menge \mathcal{F} meßbarer Funktionen von Ω nach $\overline{\mathbb{R}}$, zu der eine p -fach μ -integrierbare Funktion $g \geq 0$ mit

$$|f| \leq g \quad \mu\text{-fast überall} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}$$

existiert, ist p -fach gleichgradig μ -integrierbar.

Proposition 13.6. Eine Menge \mathcal{F} meßbarer Funktionen von Ω nach $\overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann p -fach gleichgradig μ -integrierbar, wenn sie folgenden zwei Bedingungen genügt:

(i) $\sup_{f \in \mathcal{F}} \int |f|^p d\mu < \infty$.

(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine p -fach μ -integrierbare Funktion $h \geq 0$ und ein $\delta > 0$ derart, dass für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt

$$\int_A h^p d\mu \leq \delta \Rightarrow \int_A |f|^p d\mu \leq \varepsilon \quad \text{für alle } f \in \mathcal{F}.$$

Beweis. Siehe [H. Bauer, deGruyter 1978, Satz 20.2] \square

Theorem 13.7. Für jede Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ p -fach μ -integrierbarer \mathbb{R} -wertiger Funktionen auf einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $1 \leq p < +\infty$, sind folgende zwei Aussagen äquivalent:

(i) Die Folge (f_n) ist im p -ten Mittel konvergent.

(ii) Die Folge (f_n) konvergiert (lokal) im Maß μ und ist p -fach gleichgradig μ -integrierbar.

Beweis. Siehe [H. Bauer, deGruyter 1978, Satz 20.4] \square

Bemerkung 13.8. In Theorem 13.7 wird nicht behauptet, dass aus der (lokalen) Konvergenz im Maß μ einer p -fach gleichgradig integrierbaren Folge (f_n) gegen eine meßbare reelle Funktion f die p -fache Integrierbarkeit von f und die Konvergenz von (f_n) im p -ten Mittel gegen f folgt. Vielmehr garantiert der Satz nur die Existenz einer p -fach integrierbaren Funktion unter den möglichen Limiten im Maß μ der Folge (f_n) . Gegen jeden p -fach integrierbaren, μ -Maß-Limes f konvergiert (f_n) im p -ten Mittel.

Gleichgradige Integrierbarkeit und der verallgemeinerte Konvergenzsatz von Lebesgue

Korollar 13.9. Eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ konvergiere fast überall gegen eine meßbare \mathbb{R} -wertige Funktion f . Genau dann ist f p -fach integrierbar und die Folge (f_n) konvergiert im p -ten Mittel gegen f , wenn (f_n) p -fach gleichgradig integrierbar ist.

Beweis. Siehe [H. Bauer, deGruyter 1978, Satz 20.5] \square

Und zum Abschluss noch eine Charakterisierung der “Konvergenz in μ -Maß” durch die “Konvergenz μ -f.ü.”

Proposition 13.10. Ist das Maß μ σ -endlich, so konvergiert eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ meßbarer reeller Funktionen genau dann (lokal) im Maß μ gegen eine meßbare reelle Funktion f , wenn aus jeder Teilfolge von (f_n) eine fast überall gegen f konvergente Teilfolge ausgewählt werden kann.

Beweis. Siehe [H. Bauer, deGruyter 1978, Satz 19.6] \square

Literaturverzeichnis

- [AB66] Edgar Asplund and Lutz Bungart, *A first course in integration*, Holt, Rinehart and Winston, 1966.
- [AG96] Malcolm R. Adams and Victor Guillemin, *Measure theory and probability*, Birkhäuser, 1996.
- [Alt99] Hans W. Alt, *Lineare Funktionalanalysis*, Springer, 1999.
- [Ash72] Robert B. Ash, *Measure, integration and functional analysis*, Acad. Press, 1972.
- [Bau78] Heinz Bauer, *Maß- und Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, 1978, (Neuaufgabe in zwei Teilen; vgl. [Bau92] und [Bau02]).
- [Bau92] ———, *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter, 1992.
- [Bau02] ———, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, 2002.
- [Ber99] Sterling K. Berberian, *Fundamentals of real analysis*, Springer, 1999.
- [DB81] Gearoid De Barra, *Measure theory and integration*, Ellis Horwood, 1981.
- [Dud99] Richard M. Dudley, *Real analysis and probability*, Chapman & Hall, 1999.
- [Els99] Jürgen Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer, 1999.
- [Flo81] Klaus Floret, *Maß- und Integrationstheorie: eine Einführung*, Teubner, 1981.
- [For99] Otto Forster, *Analysis 3. Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*, Vieweg, 1999.
- [Hac87] Wolfgang Hackenbroch, *Integrationstheorie. Eine Einführung in die Integrationstheorie und ihre Anwendungen*, Teubner, 1987.
- [Hal74] Paul R. Halmos, *Measure theory*, Springer, 1974.
- [Hen85] Ernst Henze, *Einführung in die Maßtheorie*, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1985.
- [Heu00] Harro Heuser, *Lehrbuch der Analysis. Teil 2*, Teubner, 2000.

Literaturverzeichnis

- [Mal95] Paul Malliavin, *Integration and probability*, Springer, 1995.
- [Sim96] Michel Simonnet, *Measures and probabilities*, Springer, 1996.
- [Str94] Daniel W. Stroock, *A concise introduction to the theory of integration*, Birkhäuser, 1994.

Index

- \mathcal{A}_{μ^*} , σ -Algebra aller μ^* -messbaren Mengen, 19
- C^1 , einmal stetig differenzierbar (Abbildung), 93
- \mathcal{L} , Vektorraum integrierbarer Funktionen, 50
- \mathcal{L}^p , Vektorraum p -fach integrierbarer Funktionen, 63–70
Vollständigkeit, 68–70
- L^p , Quotientenraum von \mathcal{L}^p , 71–72
- ∞ , rechnen mit, 2
- μ^* , zum Maß μ assoziiertes, äußeres Maß, 16
- $\|\cdot\|_p$, Seminorm auf \mathcal{L}^p , 66
- $\|\cdot\|_p$, Norm auf L^p , 71
- \mathcal{P} , Potenzmenge, 3
- Abbildung
 - C^1 (einmal stetig differenzierbare), 93
 - messbare, 25–26, 31
- Algebra, 5
 - erzeugte, 6
- B.ex., 2
- Banach
 - Raum, 71
- Bildmaß, 26
 - Notation, 26
- Borel
 - Lebesgue-Integrierbarkeit, 57
 - Lebesgue-Maß, *siehe* Lebesgue-Maß
 - Menge, 32
- messbar
 - Funktion, 32
 - Menge, 32
- σ -Algebra, 6, 25, 27, 31
- Cantor
 - Funktion, 54
 - Menge, 53–55
- Caratheodory
 - Grafik, 23
 - Satz, 21, 23
 - Lebesgue-Maß, 27
- Cauchy
 - Folge
 - im Maß μ , 73, 75
 - in \mathcal{L}^p , 68–70
 - Schwartz-Ungleichung, 64
- Cavalieri
 - Satz, 88
- Diffeomorphismus, 93
- Dirac
 - Maß, 9
- Dynkin
 - System, 7–8
- Elementarfunktion, 35–42
- Erweiterungssatz, *siehe* Caratheodory
- Erzeugendensystem, 25
- Erzeuger, 6
- fast überall, 50–53
- Fatou
 - Satz, 46
 - Modifikation, 77
- Fischer
 - Riesz-Fischer, Satz, 68

- Folge
 - Cauchy-, *siehe* Cauchy
- Fubini
 - Satz, 89
 - „Fubini-Formel“, 89
 - für n Faktoren, 90
 - Variante für
 - Indikatorfunktionen, 88
- Funktion, 2
 - Borel-messbare, *siehe* Borel
 - C^1 (einmal stetig differenzierbare), 93
 - charakteristische, 38
 - fast überall definierte, 52
 - integrierbare, 47–53
 - konkave, 64
 - Lebesgue-messbare, *siehe*
 - Lebesgue
 - messbare, 31–39
 - nichtnegative, messbare, 42–46
 - Approximation durch
 - Elementarfunktionen, 36
 - Positiv- und Negativ-Teil, 35
 - quasi-integrierbare, 47
 - wesentlich beschränkte, 63
- Hölder
 - Ungleichung, 64
- Hilbert
 - Raum, 72
- Indikatorfunktion, 31
- Inhalt, 8
- Integral
 - Lebesgue-, *siehe* Lebesgue
 - Notation, 59
 - Riemann-, *siehe* Riemann
 - uneigentliches (Riemann-), 61
- Integrierbarkeit, *siehe* Funktion, integrierbare
- Jacobi
 - Matrix, 93
- Konvergenz
 - dominierte, 67
 - Formen, 73–77
 - Grafik, 77
 - im Maß μ , 73
 - in \mathcal{L}^p , 67, 74
 - μ -f.ü., 74
- Lebesgue
 - Integral, 2
 - Definition, 37–46
 - für Elementarfunktionen, 40–42
 - für nichtnegative, messbare Funktionen, 42–46
 - Grafik, 37
 - Isotonie, 49
 - Linearität, 48
 - Notation, 41, 59
 - positive Homogenität, 41, 44
 - Integrierbarkeit, 57–62
 - Maß, 9
 - äußeres, 17
 - Caratheodory, 27
 - Eindeutigkeit, 12, 27, 29
 - Existenz, 13
 - Notation, 24
 - Translationsinvarianz, 28, 29
 - unter Drehstreckungen, 28
 - Menge, 32
 - messbar
 - Funktion, 32
 - Menge, 32
 - Satz (dominierte Konvergenz), 67
 - Modifikation, 77
- Levi
 - Satz, 45
- Markov

- Tschebyschew-Markov-
 Ungleichung,
 74
 Maß, 8–29
 äußeres, 15–24
 assoziiertes, 16, 21
 auf Produktraumen, *siehe*
 Produkt
 Dirac-, *siehe* Dirac
 Eindeutigkeit, 81
 endlich additives, 8
 Lebesgue-, *siehe* Lebesgue
 σ -additives, 9
 Maßraum, 24
 Vervollständigung, 27
 Menge
 messbare, 31
 messbarer Raum, 24
 Messbarkeit
 Borel-, *siehe* Borel
 Lebesgue-, *siehe* Lebesgue
 μ^* -, 19
 von Abbildungen, *siehe*
 Abbildung
 von Funktionen, *siehe*
 Funktion
 unter sup, inf, lim, 34
 von Mengen, *siehe* Menge
 Minkowski
 -Ungleichung, 65

 Norm, 71
 Nullmenge, 50, 53

 Polarisierungsidentität, 34
 Produkt
 -Menge
 Schnitt, 83
 -Maß, 80–88
 Eindeutigkeit, 81
 Existenz, 81
 σ -Algebra, 79–88
 Erzeugendensystem, 79
 Projektion, 79

 Raum
 messbarer, 24–26
 Repräsentant, 35
 normaler, 35, 38, 39
 Riemann
 -Integral, 1–2
 -Integrierbarkeit, 1, 57–62
 uneigentliche, 61
 Riesz
 -Fischer, Satz, 68
 Ring, 5
 erzeugter, 6

 Schnitt
 in einer Produktmenge, 83
 Schwartz
 Cauchy-Schwartz-
 Ungleichung,
 64
 σ -Additivität, 9
 σ -Algebra, 5–8, 23
 auf Produkträumen, *siehe*
 Produkt
 Borel, *siehe* Borel
 erzeugte, 6
 Urbild-, 25
 σ -endlich, 15, 21
 σ -Ring, 5
 erzeugter, 6
 Spur- σ -Algebra, 6, 34
 Stetigkeit
 von oben, 10
 in \emptyset , 10
 von unten, 10
 Subadditivität, 9
 σ -, 12, 15
 Superadditivität, 10

 Transformationssatz, 94
 Tschebyschew
 -Markov-Ungleichung, 74

 \square , 5

Index
