WS 2010/11
M. Röckner
Blatt 1

# Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie I

**Aufgabe 1** (Formel von Sylvester)**.** *Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $I$ eine endliche Menge und sei $A_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, eine Familie von Mengen aus $\mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass dann*

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{\substack{J\subset I,\\ J\neq\emptyset}} (-1)^{|J|-1} \cdot P\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right)$$

*gilt. Zeigen Sie zudem, dass im Spezialfall $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ mit $n \in \mathbb{N}$ die Formel*

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{(k-1)} \cdot \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} P\big(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}\big)$$

*gilt.*

**Aufgabe 2** ($\infty$-viele Münzwürfe)**.** *Sei $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und sei $p \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass es genau ein Wahrscheinlichkeitsmaß $P$ auf*

$$\left(\Omega, \sigma\Big( \cup_{n\in\mathbb{N}} \cup_{\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n\in\{0,1\}} \big\{\big\{(x_1, x_2, \ldots) \in \Omega \,\big|\, x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_n = \bar{x}_n\big\}\big\} \Big)\right)$$

*mit*

$$P\big(\big\{(x_1, x_2, \ldots) \in \Omega \,\big|\, x_1 = \bar{x}_1, \ldots, x_n = \bar{x}_n\big\}\big) = p^{\left(\sum_{i=1}^n \bar{x}_i\right)} (1-p)^{\left(n-\sum_{i=1}^n \bar{x}_i\right)}$$

*für alle $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n \in \{0,1\}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.*

**Aufgabe 3.** *Seien $k, n \in \mathbb{N}$ und sei $\Omega = \{1, 2, \ldots, k\}^n$ und sei $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ die Gleichverteilung auf $\Omega$. Seien zudem $X_1, \ldots, X_k : \Omega \to \{0, 1, \ldots, n\}$ gegeben durch*

$$X_i(\omega) := \sum_{l=1}^{n} \mathbb{1}_{\{i\}}(\omega_l)$$

*für alle $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$ und alle $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Zeigen Sie, dass dann*

$$P\Big(X_1 = l_1, \ldots, X_k = l_k\Big) = \frac{n!}{k^n \cdot l_1! \cdot \ldots \cdot l_k!}$$

*für alle $l_1, \ldots, l_k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ mit $l_1 + \ldots + l_k = n$ gilt.*