

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie I

Aufgabe 1. Sei S ein separabler metrischer Raum mit Metrik d . X_1, \dots, X_n seien ZVen auf einem W -Raum (Ω, \mathcal{A}, P) mit Werten in S . Zeigen Sie:

(i) Eine Metrik auf S^n ist gegeben durch

$$d_n((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) := \sup_{1 \leq i \leq n} d(x_i, y_i).$$

(ii) Die Abbildung

$$\Omega \ni \omega \mapsto (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \in S^n$$

ist messbar bezüglich der durch die Metrik d^n induzierte Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(S^n)$ auf S^n .

(iii) Die Abbildung

$$S^n \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto \chi_n(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \in \mathcal{M}_1(S)$$

ist stetig.

(iv) Folgern Sie aus (ii) und (iii), dass $\omega \mapsto \xi_n(\omega) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i(\omega)}$ eine $\Omega/\mathcal{B}(\mathcal{M}_1(S))$ messbare Abbildung ist.

Hinweis zu (ii): $\mathcal{B}(S^n)$ wird z.B. erzeugt von den offenen Kugeln $B_\varepsilon(x) = \{y \in S^n \mid d_n(x, y) < \varepsilon\}$, $x \in S^n$, $\varepsilon > 0$.

Aufgabe 2. Sei S ein separabler metrischer Raum mit Metrik d und Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}(S)$.

(i) Sei $S_0 \subset S$ eine abzählbare dichte Teilmenge, $\mathcal{U}_0 := \{B_q(s_0) \mid q \in \mathbb{Q}^+, s_0 \in S_0\}$, wobei $B_q(s_0)$ die Kugel um s_0 mit Radius q ist, und

$$\mathcal{U} := \left\{ \bigcup_{n=1}^m V_n \mid m \in \mathbb{N}, V_n \in \mathcal{U}_0, 1 \leq n \leq m \right\}$$

Zeigen Sie: Für jede offene Teilmenge U von S existiert eine isotone Folge $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{U}$ mit $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$.

(ii) Folgern Sie aus (i), dass Wahrscheinlichkeitsmaße μ_k auf S genau dann gegen ein μ schwach konvergieren, wenn $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U) \geq \mu(U)$ für alle $U \in \mathcal{U}$.

(iii) Folgern Sie aus (ii): Es gibt Funktionen $g_1, g_2, \dots \in \mathcal{C}_b(S)$, so dass Wahrscheinlichkeitsmaße μ_k auf S genau dann gegen ein μ schwach konvergieren, wenn $\lim_{k \rightarrow \infty} \int g_n d\mu_k = \int g_n d\mu$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis zu (iii): Konstruieren Sie für jedes $U \in \mathcal{U}$ (das sind nur abzählbar viele !?) eine Folge von stetigen Funktionen $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $0 \leq f_j \uparrow 1_U$.