

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie I

Aufgabe 1. Sei X eine reellwertige ZVe auf einem W -Raum (Ω, \mathcal{A}, P) .

(i) Sei X exponentialverteilt. Zeigen Sie, dass

$$P[X > s + t | X > t] = P[X > s], \quad (1)$$

für alle $s, t \geq 0$, d.h. X hat kein "Gedächtnis".

(ii) Umgekehrt gelte (1) und $P[X \in (0, \infty)] = 1$. Zeigen Sie, dass X exponentialverteilt ist.

Hinweis zu (ii): Es sei $\varphi(t) := P[X > t]$. Zeigen Sie zunächst, dass $\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s)$ für alle $s, t \geq 0$ gilt. Folgern Sie dann (da muss man sorgfältig vorgehen und sich auch über Stetigkeitsfragen Gedanken machen), dass es ein $\lambda > 0$ gibt mit $\varphi(t) = e^{-\lambda t}$ für alle $t \geq 0$.

Loesungsvorschlag zu Aufgabe 1. (i): Es gilt

$$P[X > s + t | X > t] = \frac{P[X > s + t]}{P[X > t]} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P[X > s].$$

Hierbei benutzen wir, dass für $r \in \mathbb{R}$: $P[X > r] = \lambda \int_r^\infty e^{-\lambda r'} dr' = e^{-\lambda r}$.

Zur Interpretation: Man wartet auf ein Ereignis, das zur Zeit X eintreten soll. Wenn man schon die Zeit t gewartet hat und es ist noch nicht eingetreten, dann ist man in derselben Lage wie am Anfang der Wartezeit.

(ii): Für $\varphi(t) > 0$ gilt nach Voraussetzung und nach Definition der bedingten W -keit

$$\begin{aligned} \varphi(t + s) &= P[X > t + s] = P[\{X > t\} \cap \{X > t + s\}] \\ &= P[X > t]P[X > t + s | X > t] = P[X > s]P[X > t] = \varphi(t)\varphi(s), \end{aligned}$$

damit ist die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erfüllt jedenfalls für alle t mit $\varphi(t) > 0$; wenn nun $\varphi(t)$ für irgendein t gleich 0 sein sollte, wäre das kein Beinbruch, denn dann wäre sie wegen $0 \leq \varphi(t + s) < \varphi(t)$ ebenfalls sowieso erfüllt. Weiterhin ist φ rechtsstetig, denn für $x_n \downarrow x$ gilt

$$\varphi(x) = P[X > x] = P\left[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{X > x_n\}\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P[X > x_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n).$$

Hier haben wir benutzt, dass die Folge $\{X > x_n\}$ von Mengen antiton ist und P nach Satz 1.1.11 antiton stetig ist (Grundlegende Eigenschaft eines Maßes).

Setzt man $\lambda := \log \varphi(1)$ (vorsicht, das darf man nur, wenn $\varphi(1) > 0$ ist, siehe unten), dann bekommt man erst für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(n) = (\varphi(1))^n = e^{\lambda n},$$

durch n -fache Anwendung der Funktionalgleichung und dann mit demselben Argument

$$(\varphi(1/n))^n = \varphi(1) = e^\lambda, \quad \text{also} \quad \varphi(1/n) = e^{\lambda/n}.$$

und wieder mit der Funktionalgleichung für alle $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(\varphi(m/n)) = (\varphi(1/n))^m = e^{\lambda m/n},$$

also für alle rationalen Zahlen $x \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$:

$$\varphi(x) = e^{\lambda x}.$$

Um das auf alle reellen Zahlen zu übertragen, benutzen wir die oben bewiesene Rechtsstetigkeit von φ : Sei $x \in [0, \infty)$, dann gibt es eine fallende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, so dass $x_n \downarrow x$, und wir erhalten wegen Rechtsstetigkeit von φ sowie der Stetigkeit der Exponentialfunktion

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = e^{\lambda x_n} = e^{\lambda x}.$$

Es gilt also $P[X > x] = e^{\lambda x}$ für alle $x \geq 0$ (und $P[X > x] = 1$ für alle $x < 0$ nach Voraussetzung). Damit kennen wir die Verteilungsfunktion von P , es ist $F(x) = P[X \leq x] = 1 - e^{\lambda x}$; sie stimmt mit der einer Exponentialverteilung überein, und nach der Eindeutigkeitsaussage von Satz 1.9.2(ii) ist P die Exponentialverteilung mit Parameter $-\lambda$.

Wir hätten nur (ziemlich) am Anfang des Beweises zeigen müssen, dass $\varphi(1) > 0$ ist. Also vergessen wir nochmal, was wir bisher bewiesen haben und beachten, dass

$$\varphi(0) = P[X > 0] = 1,$$

und wegen Rechtsstetigkeit gilt $1 = \varphi(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(1/n)$. Folglich existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass $\varphi(1/n) > 0$. Damit ist aber $\varphi(1) = (\varphi(1/n))^n > 0$.

Aufgabe 2. *Wir betrachten das folgende Zufallsexperiment: Gegeben seien n Urnen, von denen jede Urne s schwarze und w weiße Kugeln enthält. Nun werde aus der ersten Urne zufällig eine Kugel gezogen und in die zweite Urne gelegt. Danach werde eine Kugel zufällig aus der zweiten Urne gezogen und in die dritte Urne gelegt und so weiter, bis eine Kugel zufällig aus der vorletzten Urne gezogen und in die letzte Urne gelegt wurde. Zuletzt werde nun eine Kugel zufällig aus der letzten Urne gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel weiß ist.*

Loesungsvorschlag zu Aufgabe 2. Bezeichne $X_i \in \{W, S\}$ die Farbe der Kugel, die aus der i -ten Urne gezogen wird. Es ist

$$P[X_1 = S] = \frac{s}{s+w}, \quad P[X_1 = W] = \frac{w}{s+w}.$$

Weiterhin ist:

$$P[X_i = W | X_{i-1} = W] = \frac{w+1}{w+1+s}, \quad P[X_i = W | X_{i-1} = S] = \frac{w}{w+1+s}.$$

Vermutung gewinnen:

Wir finden die Lösung erst einmal für $n = 1$. Hier erhalten wir $P[X_1 = W] = \frac{w}{s+w}$. Fertig.

Jetzt für $n = 2$. Es gilt:

$$\begin{aligned} P[X_2 = W] &= P[X_2 = W|X_1 = S]P[X_1 = S] + P[X_2 = W|X_1 = W]P[X_1 = W] \\ &= \frac{w}{w+1+s} \frac{s}{w+s} + \frac{w+1}{w+1+s} \frac{w}{w+s} = \frac{ws + w^2 + w}{(w+s)(w+1+s)} = \frac{w}{w+s}. \end{aligned}$$

Im Prinzip sehen wir schon, dass wohl allgemein

$$P[X_n = W] = \frac{w}{w+s}$$

gelten sollte.

Vermutung beweisen:

Wir beweisen es trotzdem noch komplett per Induktion: Wir wissen, dass die Aussage gilt für $n = 1$. Sie gelte für ein $n \in \mathbb{N}$, dann ist $P[X_n = W] = \frac{w}{w+s}$ und $P[X_n = S] = \frac{s}{w+s}$, also

$$\begin{aligned} P[X_{n+1} = W] &= P[X_{n+1} = W|X_n = S]P[X_n = S] \\ &\quad + P[X_{n+1} = W|X_n = W]P[X_n = W] \\ &= \frac{w}{w+1+s} \frac{s}{w+s} + \frac{w+1}{w+1+s} \frac{w}{w+s} = \frac{ws + w^2 + w}{(w+s)(w+1+s)} = \frac{w}{w+s}. \end{aligned}$$

Fertig.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass $N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right)$ eine Gleichgewichtsverteilung ist für den Kern K von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, der durch $K(x, \cdot) := N(\alpha x, \sigma^2)$ gegeben ist, wobei $|\alpha| < 1$.

Loesungsvorschlag zu Aufgabe 3. Wir müssen zeigen, dass mit $\mu := N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right)$ gilt $\mu K = \mu$. Es gilt für $A \in \mathcal{B}(R)$:

$$\begin{aligned} (\mu K)(A) &= \int_{\mathbb{R}} K(x, A) d\mu(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} K(x, A) e^{-\frac{x^2(1-\alpha^2)}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_A e^{-\frac{(y-\alpha x)^2}{2\sigma^2}} dy e^{-\frac{x^2(1-\alpha^2)}{2\sigma^2}} dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_A \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{-y^2+2\alpha xy-\alpha^2 x^2-x^2+\alpha^2 x^2}{2\sigma^2}} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_A \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{-y^2+2\alpha xy-x^2}{2\sigma^2}} dx dy \end{aligned}$$

(Zwischendurch wurde Fubini benutzt, um die Integrationsreihenfolge zu vertauschen.) Um jetzt x rauszuintegrieren, machen wir eine quadratische

Ergänzung für $-x^2 + 2\alpha xy$:

$$-x^2 + 2\alpha xy = -(x - \alpha y)^2 + \alpha^2 y^2,$$

und erhalten

$$(\mu K)(A) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_A e^{-\frac{y^2(1-\alpha^2)}{2\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\alpha y)^2}{2\sigma^2}} dx dy.$$

Jetzt fällt das Integral über x leicht, es kommt $\sqrt{2\pi\sigma^2}$ raus, also gilt

$$(\mu K)(A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_A e^{-\frac{y^2(1-\alpha^2)}{2\sigma^2}} dy,$$

aber das ist gerade $\mu(A)$.