WS 2010/11
M. Röckner
Blatt 14

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie I

Zu diesem Blatt gibt es kein Tutorium mehr; daher bitte KEINE Lösungen abgeben. Lösungsvorschläge werden in einer Woche online sein.

Aufgabe 1. *Sei X eine reellwertige ZVe auf einem W-Raum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.*

(i) Sei X exponentialverteilt. Zeigen Sie, dass

$$P[X > s + t | X > t] = P[X > s], \qquad (1)$$

für alle $s, t \geq 0$, d.h. X hat kein "Gedächtnis".

(ii) Umgekehrt gelte (1) und $P[X \in (0, \infty)] = 1$. Zeigen Sie, dass X exponentialverteilt ist.

Hinweis zu (ii): Es sei $\varphi(t) := P[X > t]$. Zeigen Sie zunächst, dass $\varphi(t + s) = \varphi(t)\varphi(s)$ für alle $s, t \geq 0$ gilt. Folgern Sie dann (da muss man sorgfältig vorgehen und sich auch über Stetigkeitsfragen Gedanken machen), dass es ein $\lambda > 0$ gibt mit $\varphi(t) = e^{-\lambda t}$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 2. *Wir betrachten das folgende Zufallsexperiment: Gegeben seien n Urnen, von denen jede Urne s schwarze und w weiße Kugeln enthält. Nun werde aus der ersten Urne zufällig eine Kugel gezogen und in die zweite Urne gelegt. Danach werde eine Kugel zufällig aus der zweiten Urne gezogen und in die dritte Urne gelegt und so weiter, bis eine Kugel zufällig aus der vorletzten Urne gezogen und in die letzte Urne gelegt wurde. Zuletzt werde nun eine Kugel zufällig aus der letzten Urne gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Kugel weiß ist.*

Aufgabe 3. *Zeigen Sie, dass $N\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\alpha^2}\right)$ eine Gleichgewichtsverteilung ist für den Kern K von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, der durch $K(x, \cdot) := N(\alpha x, \sigma^2)$ gegeben ist, wobei $|\alpha| < 1$.*