

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie I

Aufgabe 1. Bestimmen Sie (mit sauberer Begründung!) einen ungefähren Wert für die Wahrscheinlichkeit, dass man bei 3600 Würfeln mit einem fairen und abnutzungsfreien Würfel mindestens 630-mal die 3 würfelt. (Tabellen für die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung findet man praktisch überall im Internet.)

Aufgabe 2. Seien Y_1, \dots und $S_n := Y_1 + \dots + Y_n$ wie kurz vor Kapitel 1.8 in der Vorlesung beschrieben (der random walk). Zeigen Sie (mittels ZGS), dass für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq c \right\}\right) > 0.$$

Folgern Sie daraus, dass

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = \infty\right) = 1.$$

(Damit gilt analog auch P -f.s., dass $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = -\infty$.)

Aufgabe 3. Sei $\widetilde{\mathcal{M}} = \{f_u \mid u \in \mathbb{R}\} \cup \{g_u \mid u \in \mathbb{R}\}$, wobei $f_u(x) := \cos(ux)$ und $g_u(x) := \sin(ux)$ für $u, x \in \mathbb{R}$. Sei \mathcal{M} die lineare Hülle von $\widetilde{\mathcal{M}}$, d.h. die Menge aller Linearkombinationen von Elementen aus $\widetilde{\mathcal{M}}$.

- (i) Zeigen Sie, dass das Produkt je zweier Elemente aus \mathcal{M} wieder in \mathcal{M} ist.
- (ii) Für $a < b$ sei

$$A_{[a,b]} := \{y \in \mathbb{R} \mid g_q(y) \in g_q([a,b]) \text{ für alle } q \in \mathbb{Q}\}.$$

Zeigen Sie, dass $A_{[a,b]} = [a,b]$.

- (iii) Folgern Sie aus (ii), dass $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{M})$.
- (iv) Zeigen Sie Satz 2.5.3 für den Fall $n = 1$ unter Verwendung des Satzes über monotone Klassen.