

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Für das ganze Blatt sei (Ω, \mathcal{A}, P) ein W-Raum und $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ eine σ -Algebra.

Aufgabe 1. Sei $X \geq 0$ eine ZV auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Beweisen Sie mittels Satz 3.1.11 (Radon-Nikodym), dass es eine ZV X_0 mit den Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition 5.1.1 gibt. Zeigen Sie auch, dass je zwei solche ZVen X_0 und \tilde{X}_0 P -f.s. übereinstimmen.

Aufgabe 2. Zeigen Sie den folgenden Satz: Sei $0 \leq X \in \mathcal{L}^1$ eine ZV auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Weiterhin seien $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}$ σ -Algebren. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\mathbb{E}[X | \sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)] = \mathbb{E}[X | \mathcal{A}_1]$.
- (ii) $\mathbb{E}[XY | \mathcal{A}_1] = \mathbb{E}[X | \mathcal{A}_1] \mathbb{E}[Y | \mathcal{A}_1]$ für alle $\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ -messbaren $Y \geq 0$.
- (iii) $\mathbb{E}[XX_2 | \mathcal{A}_1] = \mathbb{E}[X | \mathcal{A}_1] \mathbb{E}[X_2 | \mathcal{A}_1]$ für alle \mathcal{A}_2 -messbaren $X_2 \geq 0$.

Hinweis zum Beweis von “(iii) \Rightarrow (i)”: Sie müssen zeigen, dass $\mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{A}_1]Z]$ für alle $\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ -messbaren $Z \geq 0$ gilt. Betrachten Sie zunächst $Z = \mathbb{I}_{C_1 \cap C_2}$ mit $C_1 \in \mathcal{A}_1, C_2 \in \mathcal{A}_2$. Benutzen Sie dann Argumente z.B. aus Kapitel 1.11, um die Aussage für allgemeinere Z zu bekommen.

Aufgabe 3. Sei u eine konkave Funktion auf \mathbb{R} .

- (i) Sei M die Menge aller Funktionen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $h(x) = ax + b$, wobei $a, b \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass wenn u keine Gerade ist, für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ gilt

$$u(x_0) = \inf_{h \in M, h \geq u} h(x_0).$$

- (ii) Sei X eine integrierbare ZVe auf (Ω, \mathcal{A}, P) . Zeigen Sie mittels (i), dass P -f.s. gilt

$$\mathbb{E}[u(X) | \mathcal{A}_0] \leq u(\mathbb{E}[X | \mathcal{A}_0]).$$

(Wenn u eine Gerade beschreibt, ist die Aussage trivial.)

Hinweis zu (i): Die Aussage ist “irgendwie klar” und wenig interessant, aber evtl. mühsam zu beweisen. Benutzen Sie notfalls anschauliche Argumente.