

## Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

**Aufgabe 1.** Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  eine Familie von ZVen auf einem W-Raum  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  mit den folgenden Eigenschaften:

- (i) Für  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$  sind die Inkremente  $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , unabhängig.
- (ii) Die Verteilung von  $X_{t+s} - X_t$  hängt für alle  $s$  nicht von  $t$  ab. ("stationäre Inkremente")
- (iii)  $\mathbb{E}[X_t] = 0$  und  $\mathbb{E}[X_t^2] = t$  für alle  $t \geq 0$ .

Zeigen Sie, dass  $(X_t)_{t \geq 0}$  eine Brownsche Bewegung ist genau dann, wenn für alle  $c > 0$  und  $t \geq 0$  die Verteilung von  $c^{-1}X_{c^2t}$  gleich der Verteilung von  $X_t$  ist.

Hinweis: ZGS.

**Aufgabe 2.** Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  eine stetige Brownsche Bewegung. Aus dem Satz vom iterierten Logarithmus folgt (warum?): Für  $\alpha > 0$  und  $\varepsilon > 0$  gilt

$$P[|X_t| \leq \alpha t \text{ für alle } 0 \leq t \leq \varepsilon] = 0,$$

d.h. ein typischer Pfad einer Brownschen Bewegung bleibt auf keinem Intervall  $[0, \varepsilon]$  innerhalb des Sektors  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |y| \leq \alpha x\}$ . Geben Sie hierfür einen direkten Beweis mittels Borel-Cantelli.

Hinweis: Der Sektor wird bereits verlassen, wenn ein Inkrement  $X_{t_2} - X_{t_1} \geq 2\alpha(t_2 + t_1)$  ist für irgendwelche  $t_1 < t_2 < \varepsilon$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $(X_t)_{t \geq 0}$  eine stetige Brownsche Bewegung. Dann ist

$$Y_t := x + \sigma X_t + mt, \quad t \geq 0,$$

eine verallgemeinerte Brownsche Bewegung mit Startpunkt  $x \in \mathbb{R}$ , Varianz  $\sigma^2 > 0$  und Driftparameter  $m \in \mathbb{R}$ .

- (i) Sei  $a < x < b$ . Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass  $(Y_t)_{t \geq 0}$   $b$  vor  $a$  erreicht.
- (ii) Sei  $Y^* := \max_{t \geq 0} Y_t$ . Zeigen Sie, dass im Falle  $m < 0$  die ZV  $(Y^* - x)$  exponentialverteilt ist mit Parameter  $\alpha = \frac{2|m|}{\sigma^2}$  d.h.

$$P[Y^* \geq x + b] = e^{-\alpha b}$$

(Insbesondere gilt also  $Y^* < \infty$  fast sicher.)

Hinweis zu (i): Falls  $m \neq 0$ , bestimmen Sie  $\lambda \in \mathbb{R}$  so, dass  $(e^{\lambda Y_t})_{t \geq 0}$  ein Martingal wird.