SS 2011
M. Röckner
Blatt 9

Übungen zu Wahrscheinlichkeitstheorie II

Aufgabe 1. *Seien* $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *unabhängige Zufallsvariablen auf einem W-Raum* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *mit* $P(X_i = 2^i) = P(X_i = -2^i) = \frac{1}{2i^2}$ *und* $P(X_i = 0) = 1 - \frac{1}{i^2}$. *Wir definieren* $Y_n := X_1 + \cdots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$. *Zeigen Sie:* $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist ein Martingal, so dass der Limes* $Y_\infty := \lim_{n\to\infty} Y_n$ *P-f.s. existiert, aber* $\sup_n \mathbb{E}[|Y_n|] = \infty$.

Aufgabe 2. *Sei* $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *eine rechtsstetige Funktion und für* $a < b$ *und* $T \in (0,\infty]$ *sei* $U(a,b;T)$ *definiert wie in der Vorlesung oder in Aufgabe 3 auf Blatt 6. Wir definieren für* $m \in \mathbb{N}$

$$\varphi_m(t) := \varphi\left(\frac{\lfloor 2^m t\rfloor}{2^m}\right), \quad t \in [0,\infty).$$

$U_m(a,b;T)$ *sei definiert wie* $U(a,b;T)$, *wobei wir aber* φ *durch* φ_m *ersetzen. Zeigen Sie, dass* $U_m(a,b;T) \uparrow U(a,b;T)$. *(D.h. zeigen Sie:* $U_m(a,b;T)$ *ist aufsteigend und beschränkt durch* $U(a,b;T)$, *und wenn* $U(a,b;T) \geq K$ *ist, dann ist zumindest für ein großes* m *auch* $U_m(a,b;T) \geq K$.*)*

Aufgabe 3. *Sei* $I = -\mathbb{N}$ *mit der üblichen Ordnung (also* $\cdots < -3 < -2 < -1$*). Sei* $(X_n)_{n\in-\mathbb{N}}$ *ein* $(\mathcal{A}_n)_{n\in-\mathbb{N}}$*-Submartingal. Zeigen Sie, dass der Limes*

$$X_{-\infty} := \lim_{n\to-\infty} X_n \in [-\infty, \infty]$$

P-fast sicher existiert und dass außerdem $X_{-\infty} < \infty$ *P-f.s. ist.*
Hinweis: Offensichtlich gilt die Upcrossing-Ungleichung auch für diskrete Submartingale. Benutzen Sie es für die Submartingale $(Y_i)_{1\leq i\leq n}$, *die gegeben sind durch* $(Y_1, \cdots, Y_n) = (X_{-n}, \cdots, X_{-1})$. *(Sie müssen nicht alle Details der Beweise geben, sofern sie z.B. analog zu Aufgabe 3(i) auf Blatt 7 laufen.)*