SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Bonus
Abgabe: Samstag, 19.07.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Seien (X_i, d_i), $i = 1, 2$, metrische Räume und (X_2, d_2) vollständig. Sei $A \subseteq X_1$ und $f\colon A \longrightarrow X_2$ gleichmäßig stetig. Zeige: Es existiert genau eine stetige Funktion $\bar{f}\colon \bar{A} \to X_2$ mit $f|_A = f$. Diese Funktion $\bar{f}$ ist gleichmäßig stetig auf $\bar{A}$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 2.
Sei $n \in \mathbb{N}$. Betrache auf $[-1, 1]$ die Maße $\mu_n := n1_{[0,1/n]}$. Für jede nicht-negative messbare Funktion f gilt also $\mu_n(f) := \int_{-1}^{1} f(x)\ \mu_n(\mathrm{d}x) = n \int_0^{1/n} f(x)\ \mathrm{d}x$. Beweisen Sie, dass die Folge $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, betrachtet als Folge linearer Funktionale auf $\mathcal{C}([-1, 1])$, schwach konvergiert. *(4 Punkte)*

Aufgabe 3.
Sei X ein reeller Hilbertraum und $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \to 0$ schwach in X. Beweisen Sie, dass eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, so dass die Cesaro-Mittel $y_N := \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_{n_k}$ stark gegen 0 konvergieren. *(4 Punkte)*
Hinweis: Zeigen Sie die Existenz einer Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|(x_{n_1}, x_{n_{k+1}})| \leqslant \frac{1}{k+1}$, …, $|(x_{n_k}, x_{n_{k+1}})| \leqslant \frac{1}{k+1}$ und benutzen Sie, dass schwach konvergente Teilfolgen beschränkt sind.

Aufgabe 4.
Ein normierter Vektorraum X heißt gleichmäßig konvex, falls gilt:

$$\|x_n\| \leqslant 1, \quad \|y_n\| \leqslant 1 \quad \text{und} \quad \|x_n + y_n\| \to 2 \text{ impliziert } \|x_n - y_n\| \to 0.$$

Beweisen Sie: In einem gleichmäßig konvexen Banachraum X sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\|x_n - x\| \to 0$

(ii) $x_n \to x$ *schwach und* $\|x_n\| \to \|x\|$.

(4 Punkte)