SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 1
Abgabe: Freitag, 23.04.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Seien (X_n, d_n) *eine Familie von metrischen Räumen und*

$$X := \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in X_n \text{ für } n \in \mathbb{N}\}$$

das kartesische Produkt der Mengen X_n, $n \in \mathbb{N}$.
a) Setze

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Beweisen Sie, dass (X, d) *ein metrischer Raum ist.* *(2 Punkte)*
b) Beweisen Sie, dass (X, d) *genau dann vollständig ist, wenn* (X_n, d_n) *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *vollständig ist.* *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.
Der Raum $\ell^1_{\mathbb{R}}$ *ist definiert durch:*

$$\ell^1_{\mathbb{R}} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty\}.$$

Für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1_{\mathbb{R}}$ *setze*

$$\|x\| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right|.$$

Beweisen Sie, dass $(\ell^1_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|)$ *ein normierter Raum ist.* *(2 Punkte)*
Ist $(\ell^1_{\mathbb{R}}, \|\cdot\|)$ *ein Banchraum? Beweisen Sie es oder konstruieren Sie ein Gegenbeispiel* *(2 Punkte)*

Aufgabe 3.
Die $\ell^p_{\mathbb{R}}$ *Räume sind definiert durch:*

$$\ell^p_{\mathbb{R}} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}, \quad p \in [1, \infty)$$

und

$$\ell^\infty_{\mathbb{R}} := \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}.$$

Für welche $s \in \mathbb{R}$ *und* $p \in [1, \infty]$ *gilt* $(n^s)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p_{\mathbb{R}}$*?* *(4 Punkte)*

Aufgabe 4.
Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *ein Maßraum mit einem endlichem Maß* μ. *Sei* (Y, d) *ein metrischer Raum. Wir setzen:*

$$M(\mathcal{B}, d) := \{f\colon X \to Y \mid f \text{ ist } \mathcal{B}/\mathcal{B}(Y)\text{-messbar}\}$$

und

$$D_\mu\colon M(\mathcal{B}, d) \times M(\mathcal{B}, d) \to \mathbb{R}, \qquad D_\mu(f, g) := \int \frac{d(f, g)}{1 + d(f, g)} \, \mathrm{d}\mu.$$

a) Beweisen Sie, dass D_μ *eine Halbmetrik auf* $M(\mathcal{B}, d)$ *ist.*

(1 Punkt)

b) Beweisen Sie, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* $M(\mathcal{B}, d)$ *genau dann im Maß* μ *gegen ein* $f \in M(\mathcal{B}, d)$ *konvergiert (d.h.* $\mu(d(f, f_n) > \varepsilon) \to 0$*), wenn* $\lim_{n\to\infty} D_\mu(f, f_n) = 0$ *gilt.*
Hinweis: Betrachten Sie

$$\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mu(d(f_n, f) > \varepsilon) = \int\limits_{\{d(f_n,f)>\varepsilon\}} \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \, \mathrm{d}\mu$$

und nutzen Sie aus, dass die Funktion $x \mapsto \frac{x}{1+x}$ *monoton steigend ist.*

(2 Punkte)

c) Betrachten wir die Äquivalenzrelation

$$f \sim g :\Leftrightarrow f = g \ \mu\text{-fast überall}$$

dann ist $((M(\mathcal{B}, d)/\sim, D_\mu)$ *ein metrischer Raum (kein Beweis nötig!). Zeigen, Sie dass unter der zusätzlichen Annahme, dass* (Y, d) *vollständig ist,* $((M(\mathcal{B}, d)/\sim, D_\mu)$ *ebenfalls vollständig ist.*

(1 Punkt)