SS 2021
M. Röckner

# Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 10
Abgabe: Freitag, 25.06.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

**Aufgabe 1.**
*Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionale in $[C([-1,1])]'$ liegen und berechnen Sie ihre Norm.*

(a) $l(f) := \int_0^1 f(s)\ \mathrm{d}s$

(b) $l(f) := \int_{-1}^0 f(s)\ \mathrm{d}s - \int_0^1 f(s)\ \mathrm{d}s$

(c) $l(f) := \int_{-1}^1 f(s)\ \mathrm{d}s - f(0)$

*(4 Punkte)*

**Aufgabe 2.**
*Beweisen Sie, dass die folgenden Funktionale in $[\ell^p]'$ liegen und berechnen Sie ihre Norm.*

(a) $l(x) := x_1 + x_2, \qquad x = (x_1, x_2, ...), \quad p = 2$

(b) $l(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}, \qquad x = (x_1, x_2, ...), \quad p = 1$

*(4 Punkte)*

**Aufgabe 3.**
*Sei $f \in L^2((0,1))$. Prüfen Sie nach, ob das lineare Funktional*

$$g \mapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x} f\ \mathrm{d}x$$

*auf den folgenden Räumen*

(a) $H^{1,2}((0,1))$

(b) $C^1([0,1])$

*stetig ist.* *(4 Punkte)*

**Aufgabe 4.**
*Sei $H$ ein reeller Hilbertraum und $T \in L(H)$. Beweisen Sie, dass*

(a) $\|T\|_{L(H)} = \sup\limits_{x,y \in H,\ \|x\|=\|y\|=1} (Tx, y)$

(b) *Ist $T$ symmetrisch (d.h. $(Tx, y) = (x, Ty)$ für alle $x, y \in H$), dann gilt*

$$\|T\|_{L(H)} = \sup_{x \in H,\ \|x\|=1} |(Tx, x)|.$$

*Hinweis:* $T(x,y) = \frac{1}{4}\left((T(x+y), x+y) - (T(x-y), x-y)\right)$ *(4 Punkte)*