SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 11
Abgabe: Freitag, 02.07.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei H ein Hilbertraum, $L \subseteq H$ ein Unterraum und $f \in L'$. Beweisen Sie mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatz, dass genau eine Fortsetzung F' auf H mit $\|F\|_{H'} = \|f\|_{L'}$ existiert. *(4 Punkte)*

Aufgabe 2.
Sei ℓ^∞ der Raum aller beschränkten reellwertigen Folgen. Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Hahn–Banach, dass ein lineares Funktional $F\colon \ell^\infty \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften existiert.

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant F(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n \qquad \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty,$$

$$F((x_1, x_2, x_3, ...)) = F((x_2, x_3, x_4, ...)) \qquad \forall x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty.$$

(4 Punkte)

Hinweis: Zeigen Sie, dass durch $p(x) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty$ ein sublineares Funktional auf ℓ^∞ definiert wird. Betrachten Sie dann den linearen Unterraum $A := \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty \mid \lim_{n\to\infty} x_n \text{ existiert}\}$ und wenden Sie den Satz von Hahn–Banach auf das lineare Funktional $f\colon A \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_1 + ... + x_n)$ an.

Aufgabe 3.
Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach für lineare Funktionale, dass die Abbildung $T\colon \ell^1 \to (\ell^\infty)'$, $T(x)(y) = \sum_{n=1}^\infty x_n y_n$ für $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ isometrisch, aber nicht surjektiv ist. (4 Punkte)
Hinweis: Betrachen Sie auf dem Teilraum c der konvergenten Folgen das lineare Funktional $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ und setzen Sie f fort zu einem stetigen linearen Funktional F auf ℓ^∞. Zeigen Sie, dass $F \notin T(\ell^1)$.

Aufgabe 4.
Sei X ein linearer, normierter Raum und x, $y \in X$ mit $x \neq y$. Beweisen Sie, dass ein Funktional $f \in X'$ existiert, welches

$$f(x) \neq f(y)$$

erfüllt. *(4 Punkte)*