SS 2021
M. Röckner

Übungen zur Funktionalanalysis

Blatt 4
Abgabe: Freitag, 14.05.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen und beschränkt, $x_0 \in \Omega$. Sei $\alpha < 0$. Sei $f(x) := |x - x_0|^{-\alpha}$.
a) Zeigen Sie, dass f ein Element des Sobolevraumes $H^{1,1}(\Omega)$ ist. *(2 Punkte)*
b) Berechnen Sie die schwache Ableitung von f. *(2 Punkte)*

Aufgabe 2.
Sei X eine nicht leere Menge, auf der zwei Metriken d_1 und d_2 gegeben sind. Seien $f, g\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ in 0 stetige Funktionen mit $f(0) = g(0) = 0$ und mit

$$d_1(x,y) \leqslant f(d_2(x,y)), \qquad d_2(x,y) \leqslant g(d_1(x,y)), \qquad \forall x, y \in X.$$

Beweisen Sie, dass die beiden Metriken äquivalent sind. *(4 Punkte)*

Aufgabe 3.
Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ offen und beschränkt. Sei $0 < \alpha \leqslant 1$. Beweisen Sie, dass $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ nicht separabel ist. *(4 Punkte)*
Hinweis: Betrachte im Fall $\Omega = (0,1)$ die Menge der Funktionen $f_t(x) = (\max\{x - t, 0\})^{\alpha}$. Zeige, dass $\|f_t - f_t'\|_{C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})} \geqslant 1$ für $t \neq t'$. Folgere, dass die Menge $\{f_t \colon t \in (0,1)\}$ und damit auch $C^{0,\alpha}(\bar{\Omega})$ nicht separabel sein kann.

Aufgabe 4.
Sei $d\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$d(x,y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

Beweisen Sie, dass
a) d eine Metrik auf $\mathbb{R}$ definiert *(1 Punkt)*
b) der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ nicht vollständig ist *(1 Punkt)*
c) die durch d erzeugte Topologie die gleiche wie die euklidische Toplogie ist (D.h. eine Menge ist genau dann offen bzgl. d wenn sie offen bzgl. $|\cdot|$ ist). *(2 Punkte)*