WS 2020/21
M. Röckner

Übungen zur Maß- und Integrationstheorie

Blatt 11
Abgabe: Freitag, 05.02.2021
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

Aufgabe 1.
a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine $n \times n$ unitäre, reelle $n \times n$-Matrix ($U^T = U^{-1}$). Beweisen Sie, dass für jede Lebesgue-integrierbare Funktion f

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\ m(\mathrm{d}x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(Ux)\ m(\mathrm{d}x)$$

gilt. *(2 Punkte)*
b) Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Sei die Rotation $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$x \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Beweisen Sie, dass für jede Lebesgue-integrierbare Funktion f

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\ \mathrm{d}m = \int_{\mathbb{R}^3} f \circ \varphi\ \mathrm{d}m$$

gilt. *(1 Punkt)*

Aufgabe 2.
Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definert durch

$$f(x,z,y) := (x^2 + xy - y - z, 2x^2 + 3xy - 2y - 3z)$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(0)$ eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist. (2 Punkte)

Aufgabe 3.
Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass der Graph von f eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist. *(2 Punkte)*

Aufgabe 4.
Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ und $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$. Des Weiteren seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $M \subseteq U$ und $\Phi\colon U \to V$ ein Diffeomorphismus. Zeigen Sie, dass $\Phi(M)$ ebenfalls eine k-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$ ist. *(2 Punkte)*