WiSe 2021/22
Prof. Dr. Michael Röckner und Dr. Andre Schenke

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 1
Abgabe: Freitag, 22.10.2021, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(*Aufgaben(teile), die mit einem "*" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.*)

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(a) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Geben Sie alle Elemente der kleinsten σ-Algebra auf Ω an, welche $\{1\}$ enthält.

(b) Geben Sie alle möglichen σ-Algebren der Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$ an.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Seien $\Omega \neq \emptyset$ und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ σ-Algebren. Untersuchen Sie, ob dann auch folgende Mengen σ-Algebren sind:

(a) $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$,

(b) $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$.

Aufgabe 3. (4 Punkte)

Sei Ω eine abzählbar-unendliche Menge.

$$\mathcal{A} = \{A \subset \Omega \mid A \text{ ist endlich oder } A^c \text{ ist endlich}\}.$$

Überprüfen Sie, ob $\mathcal{A}$ eine Algebra bzw. eine σ-Algebra ist. Geben Sie ggf. ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 4. (4 Punkte)

Seien $\Omega \neq \emptyset$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ eine beliebige σ-Algebra, $\Omega_0 \subset \Omega$ eine endliche oder abzählbar-unendliche Teilmenge von Ω, $f\colon \Omega_0 \to [0, \infty]$ eine beliebige Funktion und

$$\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty] \quad \text{mit} \quad A \mapsto \sum_{\omega \in A \cap \Omega_0} f(\omega).$$

Zeigen Sie, dass μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ ist. (Ein Maß dieser Form bezeichnet man auch als *diskretes Maß*.)
Bemerkung: Im 1. Tutorium werden wir zeigen, dass ein diskretes Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ mit $\mu(A) > 0$ für alle offenen Teilmengen $A \neq \emptyset$ von $\mathbb{R}$ existiert.

Aufgabe* 5. (4 Punkte)

Ist Ω eine endliche Menge, so ist das durch $f(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$, $\omega \in \Omega$ gegebenes Maß ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Dies wird auch *Gleichverteilung auf* Ω genannt. Erläutern Sie, wie eine Ziehung beim klassischen Lotto "6 aus 49" durch ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß (und Wahrscheinlichkeitsraum) beschrieben werden kann. Berechnen Sie zudem die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Ziehung die Zahlen $12, 24, 36, 48$ gezogen werden.