WiSe 2021/22
Prof. Dr. Michael Röckner und Dr. Andre Schenke

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 11*
Abgabe: Freitag, 14.01.2022, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe* 42. (mit Korollar 1.10.7 und Hinweis[1]) (4 Punkte)
Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsmaße μ_n, μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit zugehörigen Verteilungsfunktionen F_n, F. Zeigen Sie: konvergiert $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen μ und ist F stetig, so konvergiert $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen F auf $\mathbb{R}$.

Aufgabe* 43. (ZGE und schwaches Gesetz der großen Zahlen) (1,5 + 1,5 + 1 Punkte)
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, quadratisch integrierbarer Zufallsvariablen mit Varianzen $\sigma_n^2 := \operatorname{var}(X_n) > 0$, welche die ZGE haben. Seien $\varepsilon > 0$ und

$$s_n := \left(\sum_{k=1}^n \sigma_k^2\right)^{1/2}, \quad \alpha_n := \frac{\varepsilon n}{s_n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n (X_k - \mathbb{E}[X_k])\right| < \varepsilon\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert (sogar gleichmäßig in ε).

(b) Folgern Sie, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht dem **schwachen Gesetz der großen Zahlen** genügt, wenn die Folge $\left(\frac{n}{s_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(c) Wenden Sie das Ergebnis aus (b) auf die Situation von Aufgabe 35 im Fall $\lambda \geqslant \frac{1}{2}$ an.

Aufgabe* 44. (Korollar 3.1.8, Satz 3.1.19, Bemerkung 3.1.16/17) (4 Punkte)
Für jede absolutstetige Verteilung μ auf $\mathbb{R}$ definieren wir (analog zum diskreten Fall aus Definition 3.1.1) die Entropie

$$H(\mu) := -\int_{\mathbb{R}} f(x) \log f(x) dx,$$

wobei f die Dichte von μ sei. Zeigen Sie die folgende Aussage: Von allen absolutstetigen Verteilungen μ auf $\mathbb{R}$ mit Varianz 1, hat die Standard-Normalverteilung $N(0,1)$ die größte Entropie[2].

---

[1] Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $\varepsilon > 0$ endliche viele Punkte $x_0 < x_1 < \ldots < x_k$ existieren, so dass sich F jeweils auf den Intervallen $]-\infty, x_0]$, $]x_i, x_{i+1}]$, $[x_k, \infty[$ um weniger als ε ändert.

[2] Zeigen Sie zunächst den Fall, dass die absolutstetige Verteilung μ Varianz 1 und Erwartungswert 0 hat.

Aufgabe* 45. (Definition 3.1.5, Satz 3.2.7) (4 Punkte)
Bestimmen Sie diejenige Wahrscheinlichkeitsverteilung ν auf $\mathbb{R}$, die $H(\nu|N(0,1))$ unter der Nebenbedingung

$$\int x d\nu(x) = m$$

minimiert.

Aufgabe* 46. (Ein ganz aktueller Beweis des starken Gesetzes der großen Zahlen) (3 Punkte)

Schauen Sie sich den folgenden Preprint von P. J. Fitzsimmons an und formulieren Sie den Beweis nochmal in Ihren eigenen Worten.

URL: `https://arxiv.org/abs/2111.05766`

Aufgabe* 47. (Weitere Konvergenzbegriffe neben schwache Konvergenz) (2+2 Punkte)
In dieser Aufgabe wollen wir die Aussage untersuchen, wie verschiedene Konvergenzbegriffe außer der schwachen Konvergenz miteinander zusammenhängen und inwiefern die schwache Konvergenz "schwach" ist. Sei $(S, \mathcal{S})$ ein metrischer Raum mit Borel-σ-Algebra $\mathcal{S}$. Wir betrachten die folgenden drei Konvergenzbegriffe:

(i) $\mu_n \to \mu$ *schwach*, falls $\int f d\mu_n \to \int f d\mu \ \forall f \in C_b(S)$;

(ii) $\mu_n \to \mu$ *stark* (oder *mengenweise*), falls $\mu_n(A) \to \mu(A) \ \forall A \in \mathcal{S}$;

(iii) $\mu_n \to \mu$ *in totaler Variation*, falls $\|\mu_n - \mu\|_{\mathrm{TV}} := \sup_{A \in \mathcal{S}} |\mu_n(A) - \mu(A)| \to 0$.

Zeigen Sie, dass

(a) Die Implikationen (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) gelten, d.h. Konvergenz in totaler Variation impliziert starke Konvergenz, welche wiederum schwache Konvergenz impliziert.

(b) Untersuchen Sie die beiden Beispiele aus Beispiel 1.10.2 auf die genannten Konvergenzarten, also $\mu_n = \delta_{1/n}$ und $\nu_n = N(0, 1/n)$ und $\mu = \nu = \delta_0$.

Wir wünschen Ihnen ein schöne Feiertage!