WiSe 2021/22
Prof. Dr. Michael Röckner und Dr. Andre Schenke

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 7
Abgabe: Freitag, 03.12.2021, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(*Aufgaben(teile), die mit einem "*" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.*)

Aufgabe 25. (Lemma 2.1.8) (4 Punkte)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X reellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass für **unabhängige** Zufallsvariablen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X_n - X| > \varepsilon] < \infty \ \forall \varepsilon > 0 \quad \Leftrightarrow \quad X_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} X \ P-\text{f.s.}$$

Aufgabe 26. (Definition 2.2.1) (4 Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Zufallsvariablen X_1 und X_2 auf Unabhängigkeit (mit Beweisen):

a) Seien $(\Omega, \mathcal{A}) = ([0,1]^2, \mathcal{B}([0,1]^2))$ und P das Lebesgue-Maß auf $[0,1]^2$. Setze für $(x_1, x_2) \in \Omega = [0,1]^2$

$$X_1(x_1, x_2) := x_1,$$
$$X_2(x_1, x_2) := x_2.$$

b) Seien $(\Omega, \mathcal{A}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$ und P das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Setze[1] für $x \in \Omega = [0,1]$

$$X_1(x) := \cos(2\pi x),$$
$$X_2(x) := \sin(2\pi x).$$

Aufgabe 27. (4 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable und sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Zeigen Sie, dass X genau dann integrierbar ist, wenn gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P[|X| > n\varepsilon] < \infty.$$

Aufgabe 28. (mit Aufgabe 27, Borel–Cantelli) (4 Punkte)
Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Zeigen Sie, dass X_1 genau dann P-integrierbar ist, wenn gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|X_n|}{n} = 0, \quad P-\text{f.s.}$$

[1] X_1, X_2 beschreiben hierbei die Koordinaten eines zufälligen Punktes, der auf dem Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ gleichverteilt ist.