Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie I

Blatt 8
Abgabe: Freitag, 10.12.2021, 12:00 Uhr
Digitale Abgabe im Lernraum des Tutoriums

(Aufgaben(teile), die mit einem "" gekennzeichnet sind, sind Zusatzaufgaben.)*

Aufgabe 29. (Beispiel 2.4.3) (1+1+2 Punkte)
Seien X, Y unabhängige, $N(0, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariablen und definiere

$$R := \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \Psi := \arctan \frac{Y}{X}.$$

Zeigen Sie:

(a) R und Ψ sind unabhängig.

(b) Ψ ist gleichverteilt auf $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(c) Die Verteilung von R ist absolutstetig mit Dichte

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right), & \text{falls } r \geqslant 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimmen Sie dazu

$$P\left(\{R \in A\} \cap \{\Psi \in B\}\right), \quad A, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 30. (Beispiel 2.4.7 (ii)) (4 Punkte)
Seien X_i, $i = 1, 2$ unabhängige, $N(m_i, \sigma_i^2)$-verteilte Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung der Summe $X_1 + X_2$.

Aufgabe 31. (Satz 2.4.6, Beispiel 2.4.7 (iii)) (4 Punkte)
Nach Beispiel 2.4.8 (iii) ist die Dichte der **Gamma-Verteilung** $\Gamma_{\alpha,p}$ für $\alpha > 0, p > 0$ gegeben durch

$$g_{\alpha,p}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(p)} \alpha^p x^{p-1} \exp(-\alpha x) & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Verteilungen Γ_{α,p_X} bzw. Γ_{α,p_Y}. Zeigen Sie, dass die Summe $X + Y$ dann Γ_{α,p_X+p_Y}-verteilt ist.

Aufgabe 32. (Satz 2.5.2) (0.5 + 0.5 + 0.5 + 1.5 + 1 Punkte)
Beweisen Sie Satz 2.5.2 der Vorlesung, d.h. zeigen Sie, dass die folgenden Eigenschaften der Fourier-Transformierten für alle $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^n)$ gelten:

(i) $\hat{\mu}(0) = 1$;

(ii) $|\hat{\mu}| \leqslant 1$;

(iii) $\hat{\mu}(-u) = \overline{\hat{\mu}(u)}$;

(iv) $\hat{\mu}$ ist gleichmäßig stetig;

(v) $\hat{\mu}$ ist positiv definit.