Eine Bemerkung zu einem Satz von E. Becker und D. Gondard

J.-L. Colliot-Thélène

Eberhard Becker zum 60. Geburtstag gewidmet

In ihrer Arbeit [B-G] geben E. Becker und D. Gondard eine algebraische Formel für die Anzahl von Zusammenhangskomponenten der reellen Punkte einer reellen, glatten, projektiven Varietät. In der Arbeit [C-T] hatte ich eine andere algebraische Formel für diese Anzahl gegeben. In dieser Note zeige ich, wie man von einer Formel zur anderen gehen kann – ohne von diesen beiden Sätzen Gebrauch zu machen.

Becker und Gondard benutzen den Raum aller **R**-Stellen eines Körpers, sowie einen Satz von Ludwig Bröcker diesen Raum betreffend. Dieser Raum wird hier nicht benutzt. Dafür wird ein Reinheitssatz von Markus Rost angewandt. Sowohl in [B-G] als in dieser Note wird Beckers Charakterisierung der Summen n-ter Potenzen in einem Körper benutzt.

Zitieren wir zuerst die erwähnten Sätze.

Sei $X/\mathbf{R}$ eine glatte, projecktive, absolut irreduzible Varietät über dem Körper $\mathbf{R}$ der (üblichen) Reellen. Sei $X(\mathbf{R})$ die Menge der reellen Punkte von X. Nehmen wir an, daß diese Menge nicht leer ist. Sei S die (endliche) Menge der Zusammenhangskomponenten von $X(\mathbf{R})$ und s die Ordnung von S.

Sei $K = \mathbf{R}(X)$ der Funktionenkörper von X. Sei $D(K) \subset K^*$ die multiplikative Untergruppe aller Funktionen in $\mathbf{R}(X)^*$, die sich in jedem Punkt P von X (im schematischen Sinne) als Produkt einer Einheit im lokalen Ring $O_{X,M}$ und einer Summe von Quadraten von Elementen von K schreiben lassen.

Satz 1 ([CT]). *Der Quotient der Gruppe $D(X)$ durch die Untergruppe $K^* \cap (\sum K^2)$ ist der Gruppe $(\mathbf{Z}/2)^S$ isomorph.*

Satz 2 (Becker und Gondard, [B-G]). *Der Quotient von $K^{*2} \cap (\sum K^4)$ durch die Untergruppe $K^* \cap (\sum K^2)^2$ ist endlich, der Ordnung 2^{s-1}.*

Daß $K^* \cap (\sum K^2)^2$ eine Untergruppe von $K^{*2} \cap (\sum K^4)$ ist, folgt aus dem Satz :

Satz 3 (Becker, [B]). *Sei K ein Körper. Sei n eine gerade Zahl. Ein Element $f \in K^*$ ist eine Summe von n-ter Potenzen in K, dann und nur dann, wenn beide folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(a) Das Element f ist eine Summe von Quadraten in K.

(b) Für jede Krullbewertung v von K mit formallreellen Residuenklassenkörper ist $v(f)$ durch n teilbar.

Die Quadratabbildung $x \mapsto x^2$ induziert eine surjektive Abbildung

$$K^*/K^* \cap (\sum K^2) \to K^{*2}/K^{*2} \cap (\sum K^2)^2)$$

mit Kern $\{\pm 1\}$.

Nach dem Satz von Becker hat man

$$(\sum K^2)^2 \subset \sum K^4,$$

also

$$K^* \cap (\sum K^2)^2 \subset K^{*2} \cap \sum K^4.$$

Hauptsatz. *Ein Element $f \in K^*$ liegt in der Gruppe $D(K)$ dann und nur dann, wenn das Element f^2 in $K^{*2} \cap \sum K^4$ liegt.*

Aus diesem Satz folgt sofort, daß die Abbildung $x \mapsto x^2$ eine exakte Folge induziert

$$1 \to \{\pm 1\} \to D(K)/(K^* \cap \sum K^2) \to (K^{*2} \cap \sum K^4)/(K^* \cap \sum K^2)^2 \to 1,$$

die die Verbindung zwischen Satz 1 und Satz 2 genau erklärt.

Beweis des Hauptsatzes. Sei $f \in D(K)$. Sei A eine Krullbewertung v von K mit formallreelen Restklassenkörper. Sei A der Ring der Bewertung. Da $X/\mathbf{R}$ projektiv ist, besitzt A ein Zentrum auf X, das heißt, es gibt einen (nicht unbedingt abgeschlossenen) Punkt $M \in X$, so daß die natürliche Abbildung $\operatorname{Spec} \mathbf{R}(X) \to X$ einen Homomorphismus von lokalen Ringen $O_{X,M} \to A$ induziert. Da f in $D(K)$ liegt, kann man $f = u.g$ schreiben, mit $u \in O_{X,M}^*$ und $g \in \sum K^2$, also $f = u.g$ mit $u \in A^*$ und $g \in K^* \cap \sum K^2$. Da der Restklassenkörper von A formalreell ist, folgt $2 \mid v(f)$. Aber dann hat man $f^2 \in K^{*2}$ und $4 \mid v(f^2)$. Dies gilt für eine beliebige Krullbewertung v von K mit formallreellem Restklassenkörper. Aus dem Satz von Becker folgt $f^2 \in \sum K^4$.

Sei umgekehrt $f \in K^*$ gegegen, mit der Eigenschaft $f^2 \in K^{*2} \cap \sum K^4$.

Sei v eine Krullbewertung von K mit formalreellem Restklassenkörper. Dann hat man $4 \mid v(f^2)$, also $2 \mid v(f)$. Wenn $M \in X$ ein Punkt der Kodimension 1 mit formalreellem Residuenklassenkörper ist, dann kann man f als Produkt einer Einheit in $O_{X,M}$ und eines Quadrates in K schreiben.

Sei $M \in X$ ein Punkt der Kodimension 1 mit nichtformalreellem Restklassenkörper. Sei π ein Erzeuger des maximalen Ideals des diskret bewerteten Rings $R = O_{X,M}$. In R kann man Elemente $a_i, i = 1, \ldots, m$ und b finden, mit $1 + \sum_i a_i^2 = \pi.b \in R$. Aus dieser Gleichung folgt die Gleichung $(1+\pi)^2 + \sum_i a_i^2 = \pi.b + 2\pi + \pi^2 \in R$. Wenn $b \in R$ keine Einheit ist, dann ist $2 + b + \pi$ eine Einheit. Also kann man π als Produkt von einer Einheit in $O_{X,M}$ und einer Summe von Quadraten in K schreiben. Daraus folgt, daß jedes Element in K^* sich als Produkt von einer Einheit in $O_{X,M}$ und einer Summe von Quadraten in K schreiben lässt.

Also: wenn $f \in K^*$ die Eigenschaft hat, daß sein Quadrat f^2 in $K^{*2} \cap \sum K^4$ liegt, dann kann man f in jedem Punkt der Kodimension 1 als Produkt einer Einheit in $O_{X,M}$ und einer Summe von Quadraten in K schreiben.

Nach einem bekannten Satz von A. Pfister ([P]) ist jede Summe von Quadraten in $K = \mathbf{R}(X)$ eine Summe von 2^d Quadraten, wobei d die Dimension von X ist.

Jetzt kann man einen allgemeinen Reinheitssatz von Rost [R] in dieser speziellen Situation anwenden: wenn $f \in \mathbf{R}(X)^*$ sich in jedem Punkt M der Kodimension 1 der glatten Varietät X als Produkt einer Einheit in M und einer Summe von 2^d Quadraten im Funktionenkörper von X schreiben lässt, dann besitzt f auch eine solche Darstellung in jedem Punkt von X. Also gehört f der Gruppe $D(K)$ an.

Literatur

[B] E. Becker, Summen n-ter Potenzen in Körpern, J. reine angew. Math. (Crelle) **307/308** (1979) 8–30.

[B-G] E. Becker und D. Gondard, Notes on the space of real places of a formally real field, in *Real analytic and algebraic geometry* (Trento, 1992), 21–46, de Gruyter, Berlin, 1995.

[CT] J.-L. Colliot-Thélène, Formes multiplicatives et variétés algébriques, Bull. Soc. math. France **106** (1978) 113–151.

[P] A. Pfister, Zur Darstellung definiter Funktionen als Summe von Quadraten. Invent. math. **4** (1967) 229–237.

[R] M. Rost, Durch Normengruppen definierte birationale Invarianten, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, Mathématiques, **310** (1990), no. 4, 189–192.

J.-L. Colliot-Thélène
C.N.R.S., Mathématiques
Bâtiment 425
Université Paris-Sud
F-91405 Orsay
Frankreich

colliot@math.u-psud.fr