Ein tensorkategorieller Zugang zum Satz von Hurwitz

Dominik Boos

19. März 1998

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Es ist nun genau hundert Jahre her, seit A. Hurwitz seinen berühmten Satz gefunden hat, der „die alte Streitfrage, ob sich die bekannte Produktformeln für Summen von 2,4 und 8 Quadrate auf Summen von mehr als 8 Quadrate ausdehnen lässt, endgültig, und zwar im verneinenden Sinn entscheidet“[Hu]. Heute formuliert man schlichter: „Eine Kompositionsalgebra hat Dimension 0,1,2,4 oder 8.“ Betrachten wir diese Algebren über $\mathbb{R}$ heisst das, dass $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$, wobei $\mathbb{H}$ die Hamilton-Quaternionen und $\mathbb{O}$ die Cayley-Oktaven bezeichnen, bis auf Isomorphie die einzigen nicht trivialen Kompositionsalgebren über $\mathbb{R}$ sind.

Wir können nun anstelle dieser Algebren deren Imaginärräume betrachten. Dies führt uns zum Begriff der Vektorprodukt-Algebra. Diese Bezeichnung geht darauf zurück, dass $\mathbb{R}^3$ zusammen mit dem klassischen Vektorprodukt eine solche Algebra ist. Wir geben nun eine Definition für Vektorprodukt-Algebren, die auf dem Zusammenhang zwischen $\mathbb{H}$ und $(\mathbb{R}^3, \times)$ basiert. Nun sieht man aber, dass diese Zusammenhänge nicht nur in diesem Fall gültig sind. Genauer gesagt ist der Imaginärraum jeder Kompositionsalgebra eine Vektorprodukt-Algebra (wobei das Produkt natürlich noch genauer zu bestimmen ist). Umgekehrt gibt es zu jeder Vektorprodukt-Algebra der Dimension d eine Kompositionsalgebra der Dimension (d+1). Zeigen wir also, dass die Dimension einer Vektorprodukt-Algebra 0,1,3 oder 7 ist, folgt der Satz von Hurwitz.

Bis hierhin folgen wir genau der Argumentation in [Ro], wo die Frage nach der Dimension so gelöst wird, dass zuerst für ein Skalarprodukt $b(\cdot,\cdot)$ und eine orthonormale Basis $e_1, e_2, ..., e_d$

$$(1) \qquad d = \sum_{i=1}^{d} b(e_i, e_i)$$

gesetzt wird. Danach wird durch Anwenden der Axiome einer Vektorprodukt-Algebra die Gleichung

$$(2) \qquad d(d-1)(d-3)(d-7) = 0,$$

die im Grundkörper gilt, gezeigt. Daraus folgt der Satz von Hurwitz in Charakteristik 0. Der Beweis kann so rein algebraisch geführt werden.

In der Einleitung des Artikels ist aber auch erwähnt, dass diese Berechnungen die algebraischen Entsprechungen, eines mit graphischen Techniken gefundenen Beweises über die Dimension von Vektorprodukt-Algebren sind. In dieser Arbeit werden nun die Grundlagen dieses graphischen Kalküls ausgearbeitet und schliesslich und endlich der graphische Beweis geführt.

Die Vorgehensweise ist nun so, dass wir eine Reihe von Graphenkategorien definieren. Eine Graphenkategorie ist eine Kategorie, deren Objekte endliche Mengen sind und deren Morphismen durch Graphen dargestellt werden können. Stellt man einen solchen Morphismus dar, bildet die Vereinigung des Bildes und des Urbildes den Rand (dh. die Ecken mit Valenz eins) des Graphen. Die Verknüpfung zweier Graphen wird so definiert, dass man die beiden Graphen entlang dem Bild des ersten und dem Urbild des zweiten zusammenklebt.

Betrachtet man die disjunkte Vereinigung zweier Graphen, stellt man fest, dass diese Vereinigung viele Eigenschaften hat, die man vom Tensorprodukt linearer Abbildungen her kennt. Sei nun V ein fester Vektorraum mit einer Bilinearform $b(\cdot,\cdot)$. Man definiert dann einen Funktor $\mathcal{R}$, der Objekte mit n Elementen in ein n-faches Tensorprodukt von V mit sich selbst überführt. Dieser Funktor hat die Eigenschaft, dass er Graphen in lineare Abbildungen transformiert und, dass die disjunkte Vereinigung ins Tensorprodukt übergeht. Hier kommt also der tensorkategorielle Aspekt der ganzen Arbeit zu tragen.

Die erste Kategorie A_1 die wir betrachten werden, besteht nur aus Komponenten, die entweder zu S^1 oder zum abgeschlossenen Einheitsintervall homöomorph sind. Da diese Kategorie nun sehr einfach ist, gelingt es uns, die Verknüpfung kombinatorisch zu definieren. Dadurch ist es einfach, den oben erwähnten Funktor auf dieser Kategorie zu definieren und dann die Funktoraxiome zu verifizieren. Man stellt dann fest, dass ähnlich wie in (1), der Funktor $\mathcal{R}$ Kreise (also (S^1)) in dim V abbildet. Der leere Graph (dh. der Graph ohne Ecken und ohne Kanten) wird zur Identität.

Das Ziel ist es nun, diese Kategorie so zu vergrössern, dass sie Eigenschaften einer Algebra annimmt, bzw. dass $\mathcal{R}$ zusätzlich die Multiplikation respektiert. Die Multiplikation wird dann durch 3-valente Ecken definiert. Wir erweitern also unsere Kategorie, indem wir zusätzlich noch Ecken der Valenz 3 zulassen. Diese Kategorie ist nun schon zu kompliziert, als dass die für A_1 angewandten kombinatorischen Methoden zur Erweiterung von $\mathcal{R}$ auf die neue Kategorie noch ausreichen würden. Wir bedienen uns deshalb einer kanonischen Zerlegung, die im wesentlichen auf den für A_1 gezeigten Eigenschaften beruht.

Wir haben aber eine wichtige Eigenschaft von Algebren noch gar nicht in unsere Kategorie eingebracht, nämlich die Addition. Wir tun dies, indem wir anstelle der Graphen freie Moduln über diesen Graphen betrachten. Dies erlaubt es uns, dass wir auf diesen Moduln Relationen vom Typ

$$\sum_{i=1}^{l_1} a_i G_i = \sum_{j=1}^{l_2} b_j H_j,$$

mit $a_i, b_j \in R$ und $G_i, H_j \in \mathrm{Mor}_{A_2}(X, Y)$ betrachten können. Wir wählen nun die Relationen so, dass ihre Bilder durch $\mathcal{R}$ den Axiomen einer Vektorprodukt-Algebra entsprechen. Wir haben also einen Funktor zwischen einer Graphen-Kategorie und der Kategorie der Vektorprodukt-Algebren gefunden. Die Relationen implizieren aber auch eine Relation zwischen dem leeren Graphen und S^1 die, wenn sie durch $\mathcal{R}$ abgebildet wird, (2) ergibt. Der Beweis der Dimensionsaussage von Vektorprodukt-Algebren kann so auf einem neuen Weg beschritten werden.

Die Methoden, die in dieser Arbeit verwendet werden, sind im allgemeinen sehr elementar. Wie es in der Graphentheorie oft der Fall ist, sind die meisten Überlegungen kombinatorischer Art. Am Anfang dieses Textes wird zusätzlich der Graphenbegriff so eingeführt, wie er in dieser Arbeit verwendet wird.

Da wie bereits erwähnt, diese Arbeit in engem Zusammenhang zum Artikel von M. Rost steht, werden die Beziehungen zu diesem Artikel am Schluss noch aufgelistet.

2 Vektorprodukt-Algebren und der Satz von Hurwitz

Zu Begin dieser Arbeit gehen wir, wie im Titel des Abschnittes angetönt, auf den Zusammenhang zwischen Vektorprodukt-Algebren und dem Satz von Hurwitz ein. Eine ausführliche Beschreibung Findet sich in [Eb]. Wir beginnen mit der Definition einer Vektorprodukt-Algebra.

2.1 Definition: Vektorprodukt-Algebra
Eine Vektorprodukt-Algebra besteht aus einem Vektorraum V zusammen mit

(1) *einer nicht entarteten bilinearen Form b auf V,*

(2) *einer linearen Abbildung $V \otimes V \to V,\ x \otimes y \mapsto x \times y$,*

so dass

(3) *$b(x \times y, z)$ alternierend in x, y, z ist.*

(4) *$(x \times y) \times x = b(x,x)y - b(x,y)x$.*

2.2 Bemerkung: *In dieser Definition kann (4) kann auch durch*

(5) $b(x \times y, z \times t) + b(y \times z, t \times x) = 2b(x,z)b(y,t) - b(x,y)b(z,t) - b(y,z)b(t,x)$

ersetzt werden.

Beweis:
Durch mehrmaliges anwenden von (3) folgt

$$(6)\quad b(x \times y, z) = -b(z \times y, x) = b(y \times z, x) = b(x, y \times z).$$

Wir benutzen nun (6), um (5) in folgende Form zu bringen

$$b((x \times y) \times z, t) + b(x \times (y \times z), t) = 2b(b(x,z)y, t) - b(b(x,y)z, t) - b(b(y,z)x, t),$$

was äquivalent ist zu

$$(7)\ (x \times y) \times z + x \times (y \times z) = 2b(x,z)y - b(x,y)z - b(y,z)x.$$

Setzen wir nun $z = x$ in (7) folgt (4). Andererseits folgt die Gleichung (7), falls wir $x + z$ für x in (4) einsetzen.

2.3 Definition: Kompositions-Algebra
Eine Kompositions-Algebra besteht aus einem Vektorraum C zusammen mit

1) *einer nicht entarteten bilinearen Form b_C auf C,*

2) *einer linearen Abbildung $C \otimes C \to C,\ x \otimes y \mapsto x \cdot y$,*

3) *einem Element $0 \neq e \in C$,*

so dass für $N(x) = b_C(x, x)$ gilt:

4) *$e \cdot x = x \cdot e = x$,*

5) *$N(x \cdot y) = N(x)N(y)$.*

In Charakteristik $\neq 2$ sind Kompositionsalgebren und Vektorprodukt-Algebren äquivalente Begriffe. Genauer können wir zu jeder Kompositionsalgebra C, eine Vektorprodukt-Algebra V finden, indem wir $V = \langle e \rangle^{\perp}$ setzen und das Produkt definieren als

$$x \times y = \frac{1}{2}(x \cdot y - y \cdot x).$$

Die Bilinearform b definieren wir durch Einschränkung von b_C.

Umgekehrt finden wir zu jeder Vektorprodukt-Algebra V eine Kompositions-algebra $C = \langle e \rangle \perp V$. Für $x, y \in V$ und $a, b \in F$ setzen wir

$$(ae + x) \cdot (be + y) = (ab - b(x, y))e + ay + bx + x \times y.$$

Wir finden auch eine natürliche Definition für b_C, indem wir

$$b_C(ae + x, be + y) = ab + b(x, y)$$

setzen.

Durch diese Beziehung zwischen Kompositionsalgebren und Vektorprodukt-Algebren können wir in Charakteristik 0, folgende Variante des Satzes von Hurwitz finden.

2.4 Satz: *Die Dimension einer Vektorprodukt-Algebra ist entweder 0,1,3 oder 7.*

3 Graphen

Der Begriff des Graphen wird in der Literatur immer wieder anders definiert, je nachdem wie allgemein er im Rahmen einer Arbeit oder eines Buches gebraucht wird. Ein Graph besteht ganz allgemein aus einer Menge von Ecken und einer Menge von Kanten, die entweder gerichtet oder ungerichtet sind. In dieser Arbeit haben wir es mit ungerichteten Graphen zu tun, die Schlaufen (dh. Kanten wo die beiden Endecken identisch sind) zulassen. Weiter besteht auch die Möglichkeit, dass verschiedene Kanten dasselbe Paar von Endecken haben. Wir schliessen hingegen aus, dass einzelne Ecken isoliert sind (dh. dass es Ecken gibt die nicht Endecke mindestens einer Kante sind). Wir definieren Graphen als Zellkomplexe und fangen daher mit der Definition einer Zelle an.

3.1 Definition: *Eine n-dim Zelle (n-Zelle) ist ein hausdorffscher topologischer Raum homöomorph zu* $\mathbb{R}^n$*. 0-Zellen sind einpunktige Räume.*

Für die Definition des Zellkomplexes benutzen wir folgende Definitionen.
$U^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \parallel x \parallel < 1\}$
$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \parallel x \parallel = 1\}$

3.2 Definition: *Ein endlicher (Zell-) Komplex ist ein hausdorffscher topologischer Raum K, bestehend aus einer endlichen disjunkten Vereinigung einer Menge C von Zellen, so dass gilt: Zu jeder n-Zelle* $c \in C$ *gibt es eine stetige Abbildung* $\Phi_c \colon U^n \cup S^{n-1} \longrightarrow K$ *die* U^n *homöomorph auf C abbildet und* S^{n-1} *auf eine Vereinigung von höchstens (n-1)-dimensionalen Zellen in C. Die Dimension von K ist die höchste vorkommende Zelldimension. Ein n-Komplex ist ein Komplex der Dimension n.*

3.3 Definition: *Ein Graph ist ein 1-Komplex.*
Die 0-Zellen heissen Ecken und die 1-Zellen heissen Kanten.

Wir bezeichnen einen Graphen durch die Menge V seiner Ecken und durch die Menge E seiner Kanten. Jede Kante $e \in E$ *können wir durch ihre Endecken (dh.* $Im(\Phi_e |_{S^0})$*) bezeichnen und schreiben* $e = \{v_1, v_2\}$ *oder* $e = v_1 v_2$*. Diese Darstellung ist, da wir mehrere Kanten zwischen den beide Ecken haben können, nicht eindeutig, aber sehr praktisch, da man gleich die beiden Endecken kennt. Solange sie nicht mehrdeutig ist, werden wir diese Schreibweise benutzen. Wir werden sie auch benutzen, falls* $v_1 = v_2$ *(dh.* $Im(\Phi_e |_{S^0}) = \{v_1\}$*), also im Falle einer Schlaufe.*

3.4 Definition: *Ein Weg ist ein nichtleerer Graph $P = (V, E)$ der Form*

$$V = \{x_0, x_1, ..., x_k\} \qquad E = \{x_0x_1, x_1x_2, ..., x_{k-1}x_k\}$$

wobei die x_i paarweise verschieden sind, als Ausnahme lassen wir jedoch den Fall $x_0 = x_k$ zu. Oft bezeichnen wir einen Weg durch die natürliche Folge seiner Ecken, schreiben also $P = x_0x_1...x_k$.
Wir sprechen dann von x_0 als Anfangsecke und x_k als Endecke und nennen P einen Weg von x_0 nach x_k (oder $x_0 - x_k$ Weg).
k ist die Länge des Weges.
Gilt $x_0 = x_k$ heisst P ein Zykel.

3.5 Bemerkung: *Zyklen sind homöomorph zu S^1.*
Für $x_0 \neq x_k$ ist ein Weg homöomorph zu $[0, 1]$.

Wir benötigen nun zwei veschiedene Typen von Vereinigung, die wir der Klarheit wegen auch verschieden schreiben werden. Die erste ist die disjunkte Vereinigung (wir bezeichnen sie mit $\sqcup$), die andere ist das Zusammenkleben zweier Graphen entlang einer Menge von gemeinsamen Ecken. Das Zusammenkleben von Graphen ist nichts anderes, als das Zusammenkleben [1] zweier topologischer Räume, wir formulieren es jedoch als eine Vereinigung von Ecken und Kanten.

3.6 Definition: *Seien $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ Graphen. Wir setzen $G \sqcup G' = (V \sqcup V', E \sqcup E')$.*
Sei $S = V \cap V'$, also die Menge der Ecken, die sowohl Ecken des Graphen G, als auch Ecken des Graphens G sind. Wir setzen $G \cup_S G' = (V \cup V', E \sqcup E')$. $G \cup_S G'$ heisst nun der Graph, der aus G und G' durch Zusammenkleben entlang S entsteht.

3.7 Bemerkung: *Seien G, G', H, H' Graphen, mit $G \cap H = S$ und $G' \cap H' = S'$, wobei S und S' eine Menge von Ecken sind und so, dass alle anderen Durchschnitte leer sind. Dann gilt:*

$$(G \cup_S H) \sqcup (G' \cup_{S'} H') = (G \sqcup G') \cup_{S \sqcup S'} (H \sqcup H').$$

Beweis:
Seien $G = (V, E),\ G' = (V', E'),\ H = (W, F),\ H' = (W', F')$.
$\Rightarrow (G \cup_S H) \sqcup (G' \cup_{S'} H') = (V \cup W, E \sqcup F) \sqcup (V' \cup W', E' \sqcup F')$
$= (V \cup V' \cup W \cup W', E \sqcup E' \sqcup F \sqcup F')$.

[1] Das Zusammenkleben zweier topologischer Räume wird in [Jä] S. 50 beschrieben.

Aber $V \cap V' = \emptyset, W \cap W' = \emptyset, V \cap W = S, V' \cap W' = S'$.
Also darf man schreiben
$(G \cup_S H) \sqcup (G' \cup_{S'} H') = ((V \sqcup V') \cup (W \sqcup W'), E \sqcup E' \sqcup F \sqcup F')$
$= (V \sqcup V', E \sqcup E') \cup_{S \sqcup S'} (W \sqcup W', F \sqcup F') = (G \sqcup G') \cup_{S \sqcup S'} (H \sqcup H')$.

3.8 Definition: *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph und* $A_i, A, B \subset V$ *und* $P = x_0 x_1 ... x_k$ *ein Weg, dann heisst* P *ein* $A - B$ *Weg, falls* $x_0 x_1 ... x_{k-1} \cap A = \{x_0\}$, $x_1 x_2 ... x_k \cap B = \{x_k\}$.
Sind $P_i = x_0^i ... x_{k_i}^i \; 1 \leq i \leq n \;\; A_{i-1} - A_i$ *Wege, mit* $x_{k_i}^i = x_0^{i+1} \; 1 \leq i \leq n-1$, *dann heisst der Weg* $P_1 P_2 ... P_n = x_0^1 ... x_{k_1}^1 x_1^2 ... x_{k_n}^n$ *ein* $A_0 A_1 ... A_n$ *Weg. Ein* $A_0 A_1 ... A_n$ *Weg entsteht also durch Zusammenkleben von* $A_{i-1} - A_i$ *Wegen an deren gemeinsamen Endecken.*

3.9 Definition: *Sei* $G = (V, E)$ *ein Graph. Ersetzen wir in* G *jede Kante* xy *so durch einen* $x - y$ *Weg der Länge* ≥ 1, *dass die Ersetzungswege keine inneren Ecken mit* G *oder miteinander gemeinsam haben, so nennen wir den entstandenen Graphen eine Unterteilung von* G.
Zwei Graphen G, H *heissen isomorph, falls sie eine gemeinsame Unterteilung haben. Wir schreiben* $G \cong H$. [2] *Da ein Weg homöomorph zu einer Kante ist sind sie dann auch homöomorph. Umgekehrt sind zwei homöomorphe Graphen die auf den Ecken mit Valenz* $\neq 2$ *übereinstimmen isomorph. Die Isomorphie-Klasse eines Graphens wird mit [G] bezeichnet.*

3.10 Definition: *Eine Kante e ist zu einer Ecke v inzident, falls v ein Endecke von e ist.*

Die Definition der Valenz (dh. der Anzahl inzidenter Kanten einer Ecke) ist unproblematisch für Graphen die keine Schlaufen besitzen. Lässt man aber Schlaufen zu, möchte man diese doppelt zählen (man spricht von der Valenz auch als von der Anzahl der inzidenten Halbkanten). Wir haben nun die Möglichkeit unsere Graphen zu unterteilen. Wählen wir die Unterteilung so, dass alle Kanten mindestens einmal geteilt werden, so können wir das Problem der Valenz auf Graphen ohne Schlaufen zurückführen.

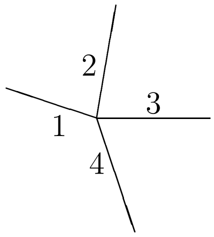
3.11 Definition: *Sei* $G = \{V, E\}$ *ein Graph. Sei dann* $G' = \{V', E'\}$ *die Unterteilung von* G, *bei der alle Kanten von* G *durch Wege der Länge 2 ersetzt werden. Der Stern von* $v \in V$ *ist nun die Menge der Kanten* $e' \in E'$ *die zu v inzident sind. Wir schreiben kurz St(v).*
Die Anzahl der Elemente des Sterns, heisst die Valenz von v und wird mit val(v) bezeichnet.

[2] In [Tu] S. 51, wird diese Äquivalenzklassenbildung dadurch vermieden, dass man keine Ecken mit Valenz 2, dafür aber Kreise, als Komponenten ohne Ecken, zulässt.

3.12 Definition: *Eine Ordnung auf einer Ecke ist eine bijektive Abbildung*

$$\Phi_v\colon \{1, 2, ..., val(v)\} \longrightarrow St(v).$$

Wir bezeichnen eine Ordnung dadurch, dass wir $\Phi_v^{-1}(e)$ *jeweils neben die entsprechende Kante schreiben. Also z.B.*



Für $e \in St(v)$ heisst $\Phi_v^{-1}(e)$ der Wert der Ordnung auf e.

Für diese Arbeit sollen nun, wie in der Einleitung zu diesem Kapitel angetönt wurde, Graphen auch keine Ecken mit Valenz null haben.

3.13 Definition: *Der Rand eines Graphen ist die Menge der Punkte mit Valenz eins. Wir bezeichnen ihn mit* ∂G*.*

Die Komponenten eines Graphen sind seine Wegzusammenhangskomponenten.

4 Die Kategorie A_1

Nachdem wir nun einen genauen Graphenbegriff ausgearbeitet haben, definieren wir in diesem Kapitel die erste Graphen-Kategorie A_1. Ihre Objekte sind endliche Mengen und ihre Morphismen sind die Isomorphie-Klassen von Graphen, die nur Ecken der Valenz eins oder zwei besitzen. Der Rand eines solchen Graphen ist die disjunkte Vereinigung des Bildes (dom) und des Urbildes (cod), des zu ihm gehörigen Morphismus. Wir definieren die Verknüpfung dadurch, dass wir zwei den Morphismus repräsentierende Graphen an den Ecken, die zum Bild des einen gehören, mit dem Urbild des anderen zusammenkleben.
Zu Beginn dieses Kapitels soll erst einmal der Kategorien- und der Funktorbegriff in Erinnerung gerufen werden.

4.1 Definition: *Eine Kategorie $\mathcal{C}$ besteht aus folgenden Daten*

a) *eine Klasse Obj($\mathcal{C}$) von Objekten.*

b) *zu jedem geordneten Paar (X, Y) von Objekten eine Klasse Mor(X, Y) von Morphismen, wobei Mor$(X, Y)\cap$Mor$(X', Y') = \emptyset$, falls $X \neq X'$ oder $Y \neq Y'$. Für $f \in$Mor(X, Y) schreiben wir auch $f\colon X \longrightarrow Y$ und $X = dom(f)$ bzw. $Y = cod(f)$.*

c) *eine Verknüpfung*
$$\begin{aligned} Mor(X, Y)\times Mor(Y, Z) &\longrightarrow Mor(X, Z) \\ (f, g) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

und erfüllt zusätzlich

A1 *Für $f \in$Mor$(X, Y), g \in$Mor$(Y, Z), h \in$Mor(Z, U) gilt*
$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

A2 $\forall X \in Obj(\mathcal{C})\ \exists 1_X \in Mor(X, X)$ *mit* $1_X \circ f = f$ *und* $g \circ 1_X = g$
$\forall\ f\colon Y \longrightarrow X,\ g\colon X \longrightarrow Z.$

4.2 Definition: *Seien $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien. Ein kovarianter Funktor $F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ist eine Abbildung die jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(X)$ in $\mathcal{D}$ und jedem Morphismus $\Phi\colon X \longrightarrow Y$ von $\mathcal{C}$ ein Morphismus $F(\Phi)\colon F(X) \longrightarrow F(Y)$ in $\mathcal{D}$ zuordnet, so dass:*

A1 $F(1_X) = 1_{F(X)}$

A2 $F(\Phi \circ \Psi) = F(\Phi) \circ F(\psi)\ \forall \Phi, \Psi \in Mor(\cdot, \cdot).$

4.3 Definition: Kategorie A_1

a) $Obj(A_1) = \{endliche\ Mengen\}$

b) $Mor_{A_1}(X, Y) =$

$$\{G = (V, E)\ Graph:\ val(v) \in \{1, 2\}\ \forall v \in V, \partial G = X \sqcup Y\}/_\sim$$

wobei $G \sim G'$ *falls* $G \cong G'$.

c) Wir definieren die Verknüpfung

$$\begin{aligned} Mor_{A_1}(X, Y) \circ Mor_{A_1}(Y, Z) &\longrightarrow Mor_{A_1}(X, Z) \\ ([G], [H]) &\longmapsto [H] \circ [G] \end{aligned}$$

wie folgt: $[H] \circ [G] = [G \cup_Y H]$

d) Sei $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in Obj(A_1)$.
Wir definieren $1_X \in Mor(X, X)$ *wie folgt:*
$1_X = (V, E)$ *mit* $V = \{x_1, x'_1, x_2, ..., x_n, x'_n\}$, $E = \{x_1x'_1, x_2x'_2, ..., x_nx'_n\}$
wobei $x_i \in dom(1_X)$ *und* $x'_i \in cod(1_X)$ *mit* $x_i = x'_i$ *als Element von X.*

Wir nennen die Elemente von $\text{Mor}_{A_1}(\cdot, \cdot)$ auch (A_1-)Graphen, meinen damit aber die Äquivalenzklasse der isomorphen Graphen.

4.4 Lemma: *A_1 ist eine Kategorie.*

Beweis:

Seien $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}, Z = \{z_1, z_2, ..., z_k\} \in \text{Obj}(A_1)$

i) Seine $[G], [G'] \in \text{Mor}(X, Y), [H], [H'] \in \text{Mor}(Y, Z)$ mit $G \cong G'$, $H \cong H'$. Sei weiter $\overline{G}$ (bzw $\overline{H}$) eine gemeinsame Unterteilung von G und G' (bzw. H und H'). $G \cap H = Y$ und $\overline{G} \cap \overline{H} = Y$ (dh. bestehen nur aus Ecken) und $\overline{G} \cup \overline{H}$ ist eine Unterteilung von $G \cup H$, da man alle Kanten mit denselben Ersetzungswegen ersetzen kann wie in G (bzw H). Dasselbe gilt symmetrisch für $G' \cup H'$, also ist $\overline{G} \cup \overline{H}$ eine gemeinsame Unterteilung von $G \cup H$ und $G' \cup H'$ dh. $G \cup H \cong G' \cup H'$ und die Komposition ist wohldefiniert.

ii) $(V, E) = G \cup_Y H$ entsteht durch Zusammenkleben der Ecken y_i. Diese haben jeweils Valenz 1. Es entstehen also Ecken mit Valenz 2. Die Valenz aller anderen Ecken bleibt gleich. Insbesondere sind die x_i und z_j die einzigen Ecken mit Valenz 1. Also $\partial(G \cup_Y H) = X \sqcup Z$ und $\text{val}(v) \leq 2\ \forall v \in V$, damit ist $[H] \circ [G] \in \text{Mor}_{A_1}(X, Z)$.

iii) Seien G, H wie oben und $D \in$Mor$(Z, W).D \cap G = \emptyset$
Also gilt $(G \cup H) \cap D = H \cap D = Z$ und $G \cap (H \cup D) = G \cap H = Y$.
Wegen der Assoziativität von $\cup$ gilt schon $(G \cup H) \cup D = G \cup (H \cup D)$.
Es gilt also $(G \cup_Y H) \cup_Z D = G \cup_Y (H \cup_Z D)$. Damit ist A1 erfüllt.

iv) $G \cup 1_X$ entsteht durch Ankleben von Wegen an den Ecken x_i, ist also ein Unterteilung von G. Es gilt:
$[G] \circ [1_X] = [G \cup_X 1_X] = [G]$.
Analog für $[1_Y] \circ [G]$ und A2 ist erfüllt.

4.5 Definition: *Seien $X, X', Y, Y' \in Obj(A_1), [G] \in Mor_{A_1}(X, Y)$, $[G'] \in Mor_{A_1}(X', Y')$.*
Wir definieren die Abbildung $\Box\colon A_1 \times A_1 \longrightarrow A_1$ wie folgt:

$$\Box\colon Obj(A_1) \times Obj(A_1) \longrightarrow Obj(A_1)$$
$$\Box(X, Y) \longmapsto X \sqcup Y$$

$$\Box\colon Mor_{A_1}(X, Y) \times Mor_{A_1}(X', Y') \longrightarrow Mor_{A_1}(X \sqcup X', Y \sqcup Y')$$
$$\Box(\ {}^{Y}_{X}[G],\ {}^{Y'}_{X'}[G']\ ) \longmapsto {}^{Y \sqcup Y'}_{X \sqcup X'}[G \sqcup G']$$

und schreiben dann $[G]\Box[G']$ für $\Box([G], [G'])$ und $X \Box Y$ für $X \cup Y$.

Hier benutzen wir die Notation ${}^{cod(\cdot)}_{dom(\cdot)}[\cdot]$, um zusätzlich das Urbild bzw das Bild eines Morphismus anzugeben. Diese Notation ist nützlich, da für einen Graphen Bild und Urbild nicht fest bestimmt sind. Geht dies aber aus dem Zusammenhang klar hervor, unterdrücken wir diese Notation.

4.6 Bemerkung: *Sei $[\emptyset] \in Mor_{A_1}(\emptyset, \emptyset)$ der Graph ohne Ecken und ohne Kanten. Es gilt nun $[\emptyset]\Box G = G\Box[\emptyset] = G$ für alle A_1-Morphismen G. Weiter ist $\sqcup$ kommutativ und assoziativ und deshalb auch $\Box$. Mor_{A_1} zusammen mit $\Box$ als Produkt bilden also ein Monoid, mit $[\emptyset]$ als neutralem Element.*

4.7 Definition: *Sei $[G] = {}^{X}_{Y}[G] \in Mor(X, Y)$. Wir definieren die Transposition von $[G]$ durch ${}^{X}_{Y}[G]^t = {}^{Y}_{X}[G] \in Mor_{A_1}(Y, X)$.*

4.8 Bemerkung: *Für $[G'] \in Mor_{A_1}(Y, Z)$ gilt dann :*

$$([G'] \circ [G])^t = [G]^t \circ [G']^t$$

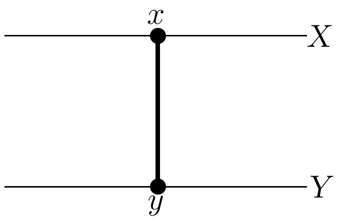
Beweis:
$({}^{Z}_{Y}[G'] \circ {}^{Y}_{X}[G])^t = {}^{Z}_{X}[G \cup_Y G']^t = {}^{X}_{Z}[G \cup_Y G'] = {}^{X}_{Y}[G] \circ {}^{Y}_{Z}[G']$
$= {}^{Y}_{X}[G]^t \circ {}^{Z}_{Y}[G']^t$.

Wie wir soeben bei der Transposition gesehen haben, kann ein Graph mehrere Morphismen darstellen. Stellen wir also einen Morphismus G als Graph dar, können wir dom(G) (bzw. cod(G)) nicht eindeutig bestimmen. Wir müssen also Konventionen finden, wie solche Graphen dargestellt werden sollen. Nun legen wir uns darauf fest, dass für einen Graphen, der einen Morphismus repräsentiert, alle Ecken die nicht Valenz zwei haben, mit einem ausgefüllten Kreis markiert weden. Die Elemente von dom(G) sind alle auf einer horizontalen Linie, diejenigen von cod(G) auf einer darunterliegenden Linie. Die restlichen Ecken und die Kanten liegen zwischen diesen beiden Linien.

Da wir zweivalente Ecken gar nicht darstellen, ist diese Darstellung sogar eindeutig auf den Isomorphie-Klassen. Damit sind aber für die Darstellung eines Graphen noch lange nicht alle Probleme aus der Welt geschafft. Zum einen wissen wir, dass Graphen auf verschiedene Arten projiziert werden können, zum anderen taucht beim Zusammenkleben das Problem auf, welche Ecke mit welcher verklebt werden muss.

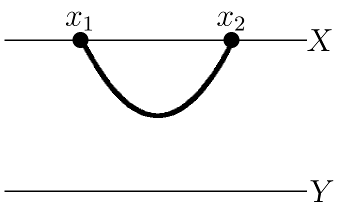
4.9 Bemerkung: *Da wir in einem Graphen G mit* $[G] \in Mor_{A_1}(X, Y)$ *nur Ecken mit Valenz 1 oder 2 haben, sind die Komponenten von G entweder zu* S^1 *oder zu* $[0, 1]$ *homöomorph. Da* $\partial G = X \sqcup Y$*, dh. die Ecken mit Valenz 1 sind entweder in* X *oder in* Y*, können wir zwischen 4 Typen von Komponenten unterscheiden. Es sind:*

1) $X - Y$ *Wege*



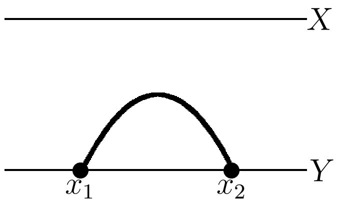
Wir nennen sie I *oder* ${}^{\,y}_{x}[I]$*, falls der Anfangs- und der Endpunkt angegeben werden sollen.*

2) $X - X$ *Wege*



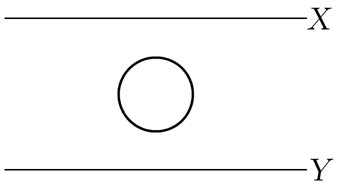
Wir nennen sie α *oder* ${}^{\quad\emptyset}_{x_1,x_2}[\alpha]$.

3) $Y-Y$ Wege



Wir nennen sie α^t oder ${}^{x_1,x_2}_{\emptyset}[\alpha^t]$.

4) Kreise



Wir nennen sie Zyklen oder d.

4.10 Bemerkung: *Ein A_1- Graph kann als disjunkte Vereinigung seiner Komponenten dargestellt werden, also auch als $\square$-Produkt seiner Komponenten. Diese Darstellung ist dann bis auf Permutation der Komponenten eindeutig.*

4.11 Bemerkung: *Enthält ein Graph $G \in \mathrm{Mor}_{A_1}(X,Y)$ nur $X-Y$ Wege so verbindet er jedes $x_i \in X$ mit einem $y_j \in Y$. Es gilt $\mid X \mid \ = \ \mid Y \mid$ und G kann als Bijektion zwischen X und Y aufgefasst werden. Insbesondere ist die Menge all dieser Äquivalenzklassen von Graphen eine Unterkategorie von A_1, wir nennen sie A_0. Es ist die Kategorie der Bijektionen zwischen endlichen Mengen.*

4.12 Bemerkung: *Mit Ausnahme von $[\emptyset]$ wird jedes Element von $\mathrm{Mor}(A_1)$ durch $\square$ und Komposition erzeugt von den Elementen α, α^t und I.*

Beweis:
Wegen 2.10 genügt es zu zeigen, dass d durch Komposition erzeugt wird. Offensichtlich gilt aber

$$ {}^{\emptyset}_{x_1,x_2}[\alpha] \circ {}^{x_1,x_2}_{\emptyset}[\alpha^t] = d. $$

4.13 Bemerkung: *Wir wissen bereits, dass die Morphismen von A_1 nur aus 4 verschiedene Typen von Komponenten bestehen. Wir betrachten nun, wie diese 4 verschiedenen Typen durch Komposition entstehen können.*
Alle Komponenten von Elementen in $\mathrm{Mor}_{A_1}(X,Z)$ sind Wege, die wir also gemäss 4.9 in folgende 4 Gruppen einteilen können.

1) $X - X$ *Wege*

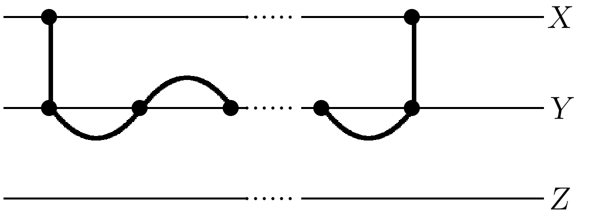
2) $X - Z$ *Wege*

3) $Z - Z$ *Wege*

4) *Zyklen*

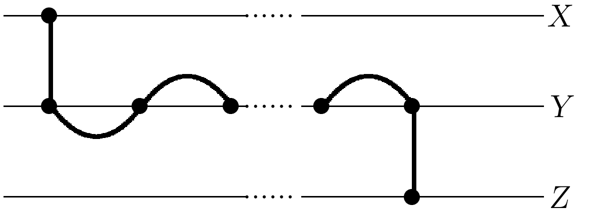
Seien nun $G \in \mathrm{Mor}_{A_1}(X,Y), H \in \mathrm{Mor}_{A_1}(Y,Z)$, dann können die Komponenten von $H \circ G$ nur einem der 4 obigen Typen entsprechen. Untersuchen wir nun wie diese Wege durch Komposition entstehen können:

1) $X - X$ *Wege sind auch* $X - \underbrace{Y - Y - ... - Y}_{2i\text{-mal } (i \geq 0)} - X$ *Wege.*



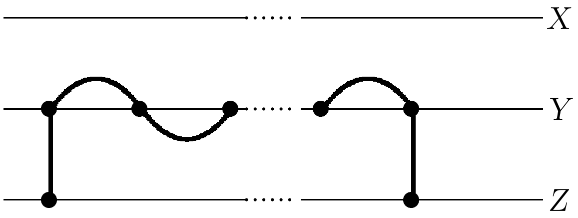
Also $G = (I \square \underbrace{\alpha^t \square ... \square \alpha^t}_{(i-1)\text{-mal}} \square I)$ *und* $H = (\underbrace{\alpha \square \alpha \square ... \square \alpha}_{i\text{-mal}})$ *für* $i \geq 1$ *oder*
$G = \alpha, H = [\emptyset]$ *für* $i = 0$.

2) $X - Z$ *Wege sind auch* $X - \underbrace{Y - Y - ... - Y}_{(2i+1)\text{-mal } (i \geq 0)} - Z$ *Wege.*



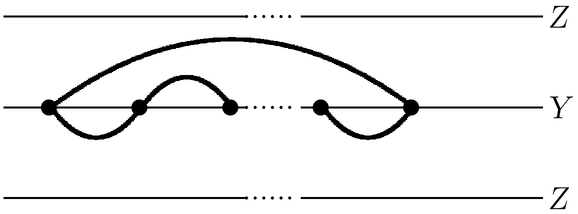
Also $G = (I \square \underbrace{\alpha^t \square ... \square \alpha^t}_{i\text{-mal}})$ *und* $H = (\underbrace{\alpha \square ... \square \alpha}_{i\text{-mal}} \square I)$.

3) $Z - Z$ *Wege sind auch* $Z - \underbrace{Y - Y - ... - Y}_{2i\text{-mal } (i \geq 0)} - Z$ *Wege.*



Also $G = [\underbrace{\alpha^t \Box ... \Box \alpha^t}_{i\text{-mal}}]$ *und* $H = [I \Box \underbrace{\alpha \Box ... \Box \alpha}_{(i-1)\text{-mal}} \Box I]$ *für* $i \geq 1$ *oder*
$G = \alpha^t, H = [\emptyset]$ *für* $i = 0$.

4) *Zyklen sind entweder Zyklen aus G oder H oder* $\underbrace{Y - Y - ... - Y}_{2i\text{-mal } i \geq 1}$ *Wege, wobei Anfangs und Endpunkt gleich sind.*



Also $G = {}^{y_{2i}, y_1, y_2, \ldots, y_{2i-1}}_{\emptyset}[\alpha^t \Box \alpha^t \Box ... \Box \alpha^t]$ *und* $H = {}^{\emptyset}_{y_1, y_2, \ldots, y_{2i}}[\alpha \Box \alpha \Box ... \Box \alpha]$.

Im vierten Fall haben wir dom(·) und cod(·) jeweils explizit angegeben, da das Zusammenkleben nicht in derselben Reihenfolge passiert wie die Komponenten aufgezählt werden. In den übrigen Fällen können wir diese Notation unterdrücken, da die Aufzählung der Randpunkte in derselben Reihenfolge stattfindet.
Dies sind alle Möglichkeiten durch die Komponenten durch Komposition entstehen, da sie andernfalls nicht definiert ist.

4.14 Bemerkung: *Für* $G \in \mathrm{Mor}_{A_1}(X, Y), G' \in \mathrm{Mor}_{A_1}(X', Y',), H \in \mathrm{Mor}_{A_1}(Y, Z)$ *und* $H' \in \mathrm{Mor}_{A_1}(Y', Z')$ *gilt wegen Bemerkung 3.7*

$$[H \Box H'] \circ [G \Box G'] = [H' \circ G'] \Box [H \circ G].$$

Sei F ein Körper, $\mathcal{V}$ die Kategorie der Vektorräume über F, wobei die linearen Abbildungen die Morphismen von $\mathcal{V}$ sind. Sei weiter V ein Vektorraum endlicher Dimension und $b : V \otimes V \longrightarrow F$ eine bilineare symmetrische nicht entartete Form und $e_1, e_2, ..., e_d$ eine orthonormale Basis von V.

4.15 Lemma: *Es gibt genau einen Funktor $\mathcal{R}_{V,b} : A_1 \longrightarrow \mathcal{V}$ mit:*

1) $\mathcal{R}_{V,b}(X) := V^{\otimes|X|} = \bigotimes_{i=1}^{n} V_{x_i}$.
Für $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in Obj(A_1)$. Wir bezeichnen hier V als V_{x_i}, um anzugeben welches x_i auf V abgebildet wird. Die Basis von V_{x_i} bezeichnen wir dann als $e_1^{x_i}, e_2^{x_i}, ..., e_n^{x_i}$.

2) $\mathcal{R}_{V,b}(I) := 1_V$
und für $\sigma \in A_0(X, Y)$, so dass $\sigma(x_i) = y_{\sigma(i)}$ ist das folgende Diagramm kommutativ.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{R}_{V,b}(\sigma) : \bigotimes_{i=1}^{n} V_{x_i} \arrow[r] & \bigotimes_{i=1}^{n} V_{y_i} \\ \prod_{i=1}^{n} V_{x_i} \arrow[u, "\otimes"] \arrow[r, "\Psi"] & \prod_{i=1}^{n} V_{y_i} \arrow[u, "\otimes"'] \end{tikzcd}$$

$\Psi = f_1 \times f_2 ... \times f_n$
mit $f_i : V_{x_i} \longrightarrow V_{y_{\sigma(i)}}$
$\qquad e_j^{x_i} \longmapsto e_j^{y_{\sigma(i)}}$
Dann ist $\mathcal{R}_{V,b}(\sigma)$ die einzige Abbildung die dieses Diagramm kommutativ macht.

3) $\mathcal{R}_{V,b}(\alpha) \in Hom(V^{\otimes 2}, F)$ *mit* $\mathcal{R}_{V,b}(\alpha) = b$.

4) $\mathcal{R}_{V,b}(\alpha^t) \in Hom(F, V^{\otimes 2})$ *mit* $\mathcal{R}_{V,b}(\alpha^t) = b^* = \sum_{i=1}^{d} e_i \otimes e_i$. *Das ist so zu verstehen, dass in folgendem Diagramm $\mathcal{R}_{V,b}(\alpha^t) = (Id \otimes j^{-1}) \circ L$.*

$$F \xrightarrow{L} End(V) = V \otimes V^* \xrightarrow{Id \otimes j^{-1}} V \otimes V$$

mit $L(1) = 1_V = \sum_{i=1}^{d} e_i \otimes e_i^*$, wobei V^* der Dualraum von V ist $e_1^*, e_2^*, ..., e_d^*$ die entsprechende duale Basis und j die Dualitätsabbildung die e_i auf e_i^* abbildet.

5) $\mathcal{R}_{V,b}(G \square H) = \mathcal{R}_{V,b}(G) \otimes \mathcal{R}_{V,b}(H)$.

Beweis:

$\mathcal{R}_{V,b}$ ist auf allen Komponenten ausser den Zyklen eindeutig definiert und linear. Für Zyklen finden wir eine eindeutige Definition mit 4.12.

Jeder Graph ist nun aber eindeutige Vereinigung seiner Komponenten. Mit 5) finden wir also eindeutige Definitionen für beliebige Graphen (hier identifizieren wir $A \otimes B$ mit $B \otimes A$ durch den üblichen kanonischen Isomorphismus). Diese Abbildungen sind dann als Tensorprodukte linearer Abbildungen auch linear.
$\mathcal{R}_{V,b}([\emptyset])$ ist wegen 5) und Bemerkung 4.6 die Identität auf F.
Existenz und Eindeutigkeit von Ψ aus 2) folgen aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes.
Es bleiben also noch die beiden Funktoraxiome zu verifizieren, wobei zwangsläufig auch eine eindeutige Definition $\mathcal{R}_{V,b}(d)$ entsteht.

A1 $\mathcal{R}_{V,b}(1_X) = Id$ folgt aus 2).

A2 $\mathcal{R}_{V,b}(H \circ G) = \mathcal{R}_{V,b}(H) \circ \mathcal{R}_{V,b}(G)$

Um A2 zu zeigen beginnen wir damit, dass wir die vier Fälle aus 4.13 verifizieren. Damit zeigen wir A2, falls $H \circ G$ nur aus einer Komponente besteht. Wir übernehmen die Notation aus 4.13.

- $\mathcal{R}_{V,b}(\alpha\Box...\Box\alpha\Box I) \circ \mathcal{R}_{V,b}(I\Box\alpha^t\Box...\Box\alpha^t)(v)$
  $= (\mathcal{R}_{V,b}(\alpha)\Box....\Box\mathcal{R}_{V,b}(\alpha)\Box\mathcal{R}_{V,b}(I))(v \otimes \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_i=1}^d e_{k_1} \otimes e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes ... \otimes e_{k_i})$
  $= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_i=1}^d b(v, e_{k_1}) \otimes b(e_{k_1}, e_{k_2}) \otimes ... \otimes b(e_{k_{i-1}}, e_{k_i}) \otimes e_{k_i}$
  $= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_i=1}^d b(v, e_{k_1})\ b(e_{k_1}, e_{k_2})\ ...\ b(e_{k_{i-1}}, e_{k_i})\ e_{k_i}$
  $= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_i=1}^d b(v, e_{k_1})\ \delta_{k_1,k_2}\ ...\ \delta_{k_{i-1},k_i}\ e_{k_i}$
  $= \sum_{k=1}^d b(v, e_k)\ b(e_k, e_k)\ ...\ b(e_k, e_k)\ e_k$
  $= \sum_{k=1}^d b(v, e_k)\ e_k = v = Id_V(v) = \mathcal{R}_{V,b}(I)(v)$
- $\mathcal{R}_{V,b}(\alpha\Box...\Box\alpha) \circ \mathcal{R}_{V,b}(I\Box\alpha^t\Box...\Box\alpha^t\Box I)(v, w)$
  $= \mathcal{R}_{V,b}(\alpha\Box...\Box\alpha)(v \otimes \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_i=1}^d e_{k_1} \otimes e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes ... \otimes e_{k_i} \otimes w)$
  $= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_i=1}^d b(v, e_{k_1}) \otimes b(e_{k_1}, e_{k_2}) \otimes ... \otimes b(e_{k_{i-1}}, e_{k_i}) \otimes b(e_{k_i}, w)$
  $= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_i=1}^d b(v, e_{k_1})\ \delta_{k_1,k_2}\ ...\ \delta_{k_{i-1},k_i}\ b(e_{k_i}, w)$
  $= \sum_{k=1}^d b(v, e_k)\ b(e_k, w) = b(\sum_{k=1}^d b(v, e_k)\ e_k, w) = b(v, w) = \mathcal{R}_{V,b}(\alpha)(v, w)$

- $\mathcal{R}_{V,b}(I\Box\alpha\Box...\Box\alpha\Box I) \circ \mathcal{R}_{V,b}(\alpha^t\Box...\Box\alpha^t)$
  $= \mathcal{R}_{V,b}(I\Box\alpha\Box....\Box\alpha\Box I)(\sum_{k_1=1}^{d} ... \sum_{k_i=1}^{d} e_{k_1} \otimes e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes ... \otimes e_{k_i})$
  $= \sum_{k_1=1}^{d} ... \sum_{k_i=1}^{d} e_{k_1} \otimes b(e_{k_1}, e_{k_2}) \otimes ... \otimes b(e_{k_{i-1}}, e_{k_i}) \otimes e_{k_i}$
  $= \sum_{k_1=1}^{d} ... \sum_{k_i=1}^{d} e_{k_1} \otimes \delta_{k_1,k_2} \ ... \ \delta_{k_{i-1},k_i} \otimes e_{k_i}$
  $= \sum_{k=1}^{d} e_k \otimes b(e_k, e_k) \ ... \ b(e_k, e_k) \otimes e_k$
  $= \sum_{k=1}^{d} e_k \otimes e_k = \mathcal{R}_{V,b}(\alpha^t)$.
- Im vierten Fall betrachten wir:
  $G \longmapsto \sum_{k_1=1}^{n} ... \sum_{k_i=1}^{n} e_{k_1} \otimes e_{k_1} \otimes e_{k_2} \otimes ... \otimes e_{k_i}$
  $H(v_1, v_2, ..., v_{2i}) = b(v_2, v_3)b(v_4, v_5)...b(v_{2i}, v_1)$
  Daraus folgt also:
  $H \circ G = \sum_{k_1=1}^{n} ... \sum_{k_i=1}^{n} b(e_{k_1}, e_{k_2})b(e_{k_2}, e_{k_3})...b(e_{k_i}, e_{k_1})$
  $= \sum_{k_1=1}^{d} ... \sum_{k_i=1}^{d} \delta_{k_1,k_2}\delta_{k_2,k_3}...\delta_{k_i,k_1} = \sum_{k=1}^{d} 1 = d = dimV.$
  Wir müssen also wegen 2.12 $\mathcal{R}_{V,b}(d) = dimV = d$ setzen.

Seien nun $\Gamma_1, ..., \Gamma_l$ die Komponenten von $H \circ G$ und $H_1\Box...\Box H_l = H$ und $G_1\Box...\Box G_l = G$ Zerlegungen, so dass $H_i \circ G_i = \Gamma_i$ (i=1...k). Wegen Bemerkung 4.14 gilt dann

$$(H_1\Box...\Box H_l) \circ (G_1\Box...\Box G_l) = (H_1 \circ G_1)\Box...\Box(H_l \circ G_l) = \Gamma_1\Box...\Box\Gamma_l.$$

Daraus folgt nun
$\mathcal{R}_{V,b}(H \circ G) = \mathcal{R}_{V,b}((H_1\Box...\Box H_l) \circ (G_1\Box...\Box G_l)) = \mathcal{R}_{V,b}((H_1 \circ G_1)\Box...\Box(H_l \circ G_l))$
$= \mathcal{R}_{V,b}(H_1 \circ G_1) \otimes ... \otimes \mathcal{R}_{V,b}(H_l \circ G_l) = \mathcal{R}_{V,b}(H_1) \circ \mathcal{R}_{V,b}(G_1) \otimes ... \otimes \mathcal{R}_{V,b}(H_l) \circ \mathcal{R}_{V,b}(G_l)$
$= (\mathcal{R}_{V,b}(H_1) \otimes ... \otimes \mathcal{R}_{V,b}(H_l)) \circ (\mathcal{R}_{V,b}(G_1) \otimes ... \otimes \mathcal{R}_{V,b}(G_l))$
$= \mathcal{R}_{V,b}(H_1\Box...\Box H_l) \circ \mathcal{R}_{V,b}(G_1\Box...\Box G_l) = \mathcal{R}_{V,b}(H) \circ \mathcal{R}_{V,b}(G)$.

Wir haben hier die zu 4.14 äquivalent Eigenschaft für Tensorprodukte benutzt und natürlich auch, dass A2 für Komponenten erfüllt ist.

5 Die Kategorie A_2

In diesem Abschnitt führen wir eine weitere Graphenkategorie ein. Diese Kategorie enthält A_1 als Unterkategorie, lässt aber zusätzlich Ecken mit Valenz 3 zu. Zusätzlich sollen alle Ecken mit Valenz 3 noch geordnet sein, insbesondere repräsentieren zwei isomorphe Graphen nur dann denselben Morphismus, wenn auch die 3-valenten Ecken gleich geordnet sind.
Für diese neuen Morphismen ergeben sich dieselben Probleme, wie für die Morphismen in A_1, aber sie können, da es nun beliebig viele Typen von Komponenten gibt, nicht mehr kombinatorisch gelöst werden. Wir werden die einzelnen Morphismen kanonisch zerlegen, dadurch gelingt es uns die Eigenschaften die wir für die A_1-Morphismen gezeigt haben auf die neue Kategorie auszuweiten.

5.1 Definition: Kategorie A_2

a) *$Obj(A_2) = \{$endliche Mengen$\}$*

b) *$Mor_{A_1}(X, Y) = \{G = (V, E)$ Graph: $1 \leq val(v) \leq 3\ \forall v \in V, \partial G = X \sqcup Y$ und für 3 valente Ecken w ist st(w) geordnet $\}/_\sim$*
wobei $G \sim G'$ falls G und G' eine gemeinsame Unterteilung haben auf der $St(w)$ gleich geordnet ist für alle $w \in V$ mit Valenz 3.

c) *Wir definieren die Verknüpfung*

$$Mor_{A_2}(X,Y) \times Mor_{A_2}(Y,Z) \longrightarrow Mor_{A_2}(X,Z)$$
$$([G],[H]) \longmapsto [H] \circ [G]$$

wie folgt: $[H]\square[G] = [G \cup_Y H]$, wobei wir die Ordnungen auf den Ecken mit Valenz 3 übernehmen.

d) *Da A_1 in A_2 enthalten ist und $Obj(A_1) = Obj(A_2)$ können wir 1_X wie in der Kategorie A_1 definieren.*

5.2 Bemerkung: *A_2 ist natürlich auch eine Kategorie. Auch in A_2 können wir wieder eine Transposition und ein $\square$ Produkt einführen. Wir haben also wieder eine monoidale Struktur auf A_2. Da die auf den 3-valenten Ecken definierte Ordnung bei der Verknüpfung einfach übernommen wird, sind die Beweise zu diesen Aussagen analog zu den Beweisen für die Kategorie A_1.*

5.3 Definition: *Für* $X = \{x_1, x_2, ...x_n\} \in Obj(A_2)$ *definieren wir*

$$\alpha_X : X \Box X \longrightarrow \emptyset$$

$$\alpha_X = \ {}^{\emptyset}_{x_1,x_1'}[\alpha] \Box ... \Box \ {}^{\emptyset}_{x_n,x_n'}[\alpha] = \ {}^{\emptyset}_{x_1,...x_n,x_1',...,x_n'}[\alpha \Box ... \Box \alpha]$$

wobei $x_i = x_i'$ *als Element von* X*. Die zweite Schreibweise zeigt wieder an wie die Komposition zu verstehen ist.*
Wir können auch die Transposition von α_X *betrachten*

$$\alpha_X^t : \emptyset \longrightarrow X \Box X$$

Wie oben kann man α_X^t *auch wieder als* $\Box$ *Produkt von* α^t *schreiben, falls wir die Transposition wieder wie in 4.7 definieren.*

Diese beiden Definitionen führt uns zu folgender Bemerkung, die später bei der Ausweitung des Funktors $\mathcal{R}_{V,b}$ auf die Kategorie A_2 eine Rolle spielen wird.

5.4 Bemerkung: *Gemäss Bemerkung 4.13 2) gilt:*

$$[\alpha_X \Box 1_X] \circ [1_X \Box \alpha_X^t] = [1_X \Box \alpha_X] \circ [\alpha_X^t \Box 1_X] = 1_X.$$

5.5 Bemerkung: *Seien* $G \in Mor_{A_2}(X, Y)$*,* $G' \in Mor_{A_2}(X', Y')$*,*
$H \in Mor_{A_2}(Y, Z)$ *und* $H' \in Mor_{A_2}(Y', Z')$ *dann gilt:*

$${}^{Z \cup Z'}_{Y \cup Y'}[H \Box H'] \circ \ {}^{Y \cup Y'}_{X \cup X'}[G \Box G'] = \ {}^{Z'}_{X'}[H' \circ G'] \Box \ {}^{Z}_{X}[H \circ G].$$

Beweis:

Aus Bemerkung 3.7 folgt
$[H \Box H'] \circ [G \Box G'] = (H \sqcup H') \cup_{Y \sqcup Y'} (G \sqcup G') = (G' \cup_{Y'} H') \sqcup (G \cup_Y H)$
$= [H' \circ G'] \Box [H \circ G]$,
da alle Kompositionen definiert sind und die Ordnung der 3-valenten Ecken nicht verändert wird.

Wir werden nun eine explizite Formel definieren mit welcher man für einen beliebigen Graphen G in $\mathrm{Mor}_{A_2}(X,Y)$ einen Graphen G^* in $\mathrm{Mor}_{A_2}(X\Box Y,\emptyset)$ findet. Diese Zuordnung ist natürlich (für festes X und Y) bijektiv.
Wir brauchen diese Zuordnung, um den Funktor $\mathcal{R}_{V,b}$ auf die Kategorie A_2 auszuweiten, da wir zuerst nur eine Definition für diese Erweiterung für Graphen in $\mathrm{Mor}_{A_2}(\cdot,\emptyset)$ finden.

5.6 Definition: *Seien $X,Y \in Obj(A_2)$ wir definieren:*

$$\text{(1)}\ \Phi_{X,Y} : Mor_{A_2}(X,Y) \longrightarrow Mor(Y\Box X,\emptyset)$$
$$[G] \longmapsto [\alpha_Y]\circ[1_Y\Box G] = G^*$$

$$\text{(2)}\ \Psi_{X,Y} : Mor_{A_2}(Y\Box X,\emptyset) \longrightarrow Mor(X,Y)$$
$$[G^*] \longmapsto [1_Y\Box G^*]\circ[\alpha_Y^t\Box 1_X]$$

Es gilt nun $\Phi_{X,Y}\circ\Psi_{X,Y} = \Psi_{X,Y}\circ\Phi_{X,Y} = Id$.

Beweis:

Der Beweis kann nun algebraisch geführt werden und benutzt nur die Relationen aus den beiden vorangehenden Bemerkungen.

$i)$ $(1_Y\Box(\alpha_Y\circ(1_Y\Box G))\circ(\alpha_Y^t\Box 1_X) = (1_Y\Box\alpha_Y)\circ(1_Y\Box 1_Y\Box G)\circ(\alpha_Y^t\Box 1_X)$

$= (1_Y\Box\alpha_Y)\circ(\alpha_Y^t\Box 1_X)\circ G = G$

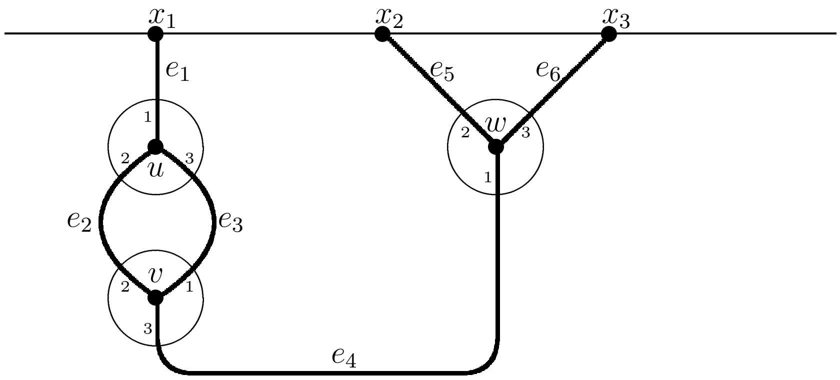
$ii)$ $\alpha_Y\circ(1_Y\Box((1_Y\Box G^*)\circ(\alpha_Y^t\Box 1_X))) = \alpha_Y\circ(1_Y\Box 1_Y\Box G^*)\circ(1_Y\Box\alpha_Y^t\Box 1_X)$

$= (\alpha_Y\Box G^*)\circ(1_Y\Box\alpha_Y^t\Box 1_X) = G^*\circ(\alpha_Y\Box 1_Y\Box 1_X)\circ(1_Y\Box\alpha_Y^t\Box 1_X)$

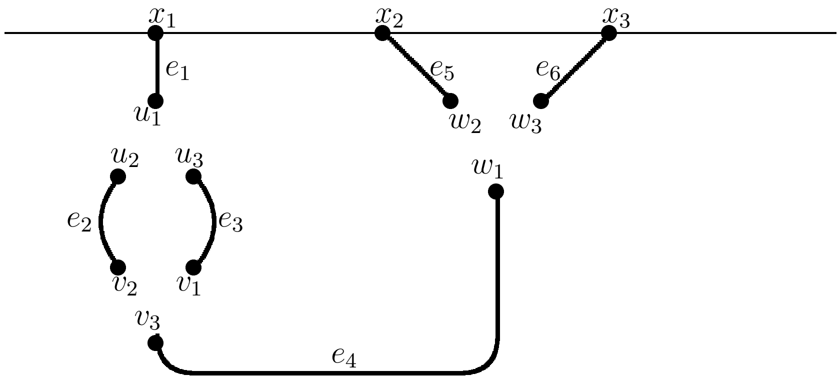
$= G^*\circ((\alpha_Y\Box 1_Y)\circ(1_Y\Box\alpha_Y^t))\Box 1_X) = G^*\circ(1_Y\Box 1_X) = G^*$

Hier sieht man, dass es durchaus Sinn macht diese Graphenkategorie mit Ausdrücken, wie denen aus den Bemerkungen 5.5 und 5.6 zu formalisieren.

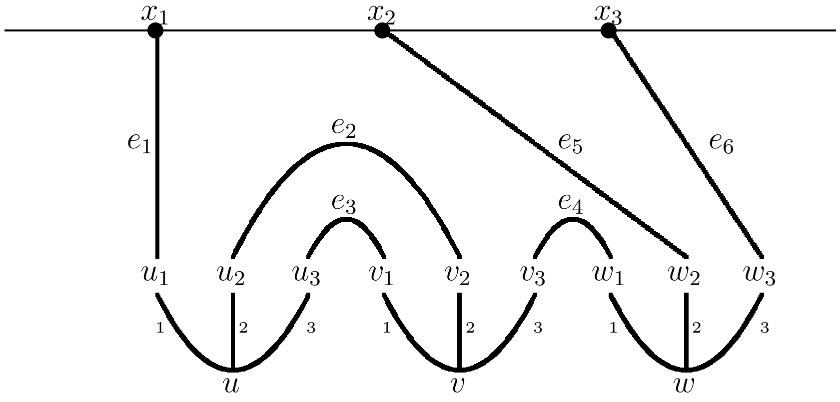
Wir zeigen nun zuerst graphisch an einem Beispiel, dann allgemein wie man einen A_2-Graphen so zerlegen kann, dass er als Komposition eines A_1-Graphen mit eine $\square$-Produkt nur eines Types von Graphen geschrieben werden kann. Wir schauen folgendes Beispiel an.



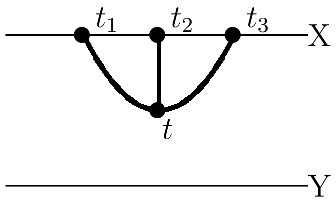
Hier ist um alle 3-valenten Ecken einen Kreis gezogen. Wir können nun für eine beliebige Ecke t das Innere des Kreises ausschneiden und die neu entstandenen Enden mit t_i bezeichnen, wobei i jeweils die Ordnung der durchschnittenen Kante bezüglich t ist. Wir erhalten dann folgenden Graphen.



Dieser Graph kann jetzt als Element von $\mathrm{Mor}_{A_1}(\{x_1, x_2, x_3\}, \{u_1, ..., w_3\})$ aufgefasst werden. Zeichnen wir ihn wie bis anhin üblich, in der Darstellung aus Abschnitt 4 und kleben die ausgeschnittenen Graphen wieder an, so finden wir den ursprünglichen Graphen wieder.



Dieser Graph ist nun aber, wie man in dieser Darstellung sehen kann, eine Komposition eines A_1 Graphen und einem $\Box$ Produkt von isomorphen Graphen, die folgendermassen aussehen.



Solche Graphen heissen γ oder ${}^{\emptyset}_{t_1,t_2,t_3}[\gamma]$. Wir werden nun die selbe Konstruktion bei einem beliebigen Graphen
$G = (V, E)$ mit $[G] \in \mathrm{Mor}_{A_2}(X, \emptyset)$ und $T = \{t \in V : val(t) = 3\}$ durchführen. Zuerst ersetzen wir Kanten $\{s, t\}$ mit $t \in T$ durch Kanten $\{s, t^{ord_t(\{s,t\})}\}$, falls val$(s) \neq 3$ und durch $\{s^{ord_s(\{s,t\})}, t^{ord_t(\{s,t\})}\}$ falls val$(s) = 3$.

Es entsteht also ein neuer Graph $\overline{G} = (\overline{V}, \overline{E})$ mit $\overline{V} = (V - T) \cup \bigcup\limits_{t \in T} (\bigcup\limits_{i=1}^{3} t^i)$.
Für $G \cong H$ gilt dann auch $\overline{G} \cong \overline{H}$ da $\overline{G}$ offensichtlich homöomorph zu $\overline{H}$ ist, die Ordnung auf allen 3-valenten Ecken dieselbe bleibt und die beiden Graphen auf dem Rand übereinstimmen.
Weiter definieren wir $G_t = (V_t, E_t)$ mit $V_t = \{t, t_1, t_2, t_3\}$ und $E_t = \{tt_1, tt_2, tt_3\}$. G_t kann als Element von $\mathrm{Mor}_{A_2}(\{t_1, t_2, t_3\}, \emptyset)$ aufgefasst werden. G_t ist also isomorph zu γ (bzw. ${}^{\emptyset}_{t_1,t_2,t_3}[\gamma]$), wobei die Ordnung so definiert ist, dass $ord(tt_i) = i$.

Es gilt nun $G \cong \overline{G} \cup \bigcup\limits_{t \in T} G_t$ als Graph, wobei auch die Ordnung der ursprünglichen entspricht. Also gilt $[G] = [\bigcup\limits_{t \in T} G_t] \circ [\overline{G}] = [\bigcup\limits_{t \in T} \gamma] \circ [\overline{G}]$. $[\overline{G}]$ ist aber in A_1. Wir haben also bewiesen, dass $G \in \mathrm{Mor}_{A_2}(X, \emptyset)$ durch $\Box$ und

Komposition erzeugt wird von γ und Morphismen aus A_1. Nach Definition 5.6 und Bemerkung 4.12 haben wir folgendes Lemma bewiesen:

5.7 Lemma: *$\mathrm{Mor}_{A_2}(\cdot,\cdot)$ wird durch $\Box$ und Komposition erzeugt durch die Elemente α, α^t, γ und I.*

5.8 Lemma: *Seien $G \in \mathrm{Mor}_{A_2}(X,Y), H \in \mathrm{Mor}_{A_2}(Y,Z)$ dann gilt*

1) $(H \circ G)^* = (H^* \Box G^*) \circ (1_Z \Box \alpha_Y^t \Box 1_X)$.

Für zwei Graphen $G \cong H, [G], [H] \in \mathrm{Mor}_{A_2}(X, \emptyset)$ gilt

2) $[\overline{G}] = [\overline{H}]$.

Wir können also $\overline{[G]}$ für $[\overline{G}]$ schreiben.

Für $G \in \mathrm{Mor}_{A_2}(X,\emptyset), H \in \mathrm{Mor}_{A_2}(Y,\emptyset)$ gilt

3) $\overline{G \Box H} = \overline{G} \Box \overline{H}$

und für $G \in \mathrm{Mor}_{A_1}(X,Y), H \in \mathrm{Mor}_{A_2}(y,\emptyset)$

4) $\overline{H \circ G} = \overline{H} \circ G$.

Beweis:

1) $(H \circ G)^* = \alpha_Z \circ (1_Z \Box (H \circ G) = \alpha_Z \circ (1_Z \Box H) \circ (1_Z \Box G)$
$= H^* \circ (1_Z \Box G) = H^* \circ (1_Z \Box ((1_Y \Box \alpha_Y) \circ (\alpha_Y^t \Box 1_Y) \circ G))$
$= H^* \circ (1_Z \Box ((1_Y \Box \alpha_Y) \circ (\alpha_Y^t \Box G)) = H^* \circ (1_Z \Box 1_Y \Box \alpha_Y) \circ (1_Z \Box \alpha_Y^t \Box G)$
$= H^* \circ (1_Z \Box 1_Y \Box \alpha_Y) \circ (1_Z \Box 1_Y \Box 1_Y \Box 1_Y) \circ (1_Z \Box \alpha_Y^t \Box G)$
$= H^* \circ (1_Z \Box 1_Y \Box \alpha_Y) \circ (1_Z \Box 1_Y \Box 1_Y \Box G) \circ (1_Z \Box \alpha_Y^t \Box 1_X)$
$= (H^* \Box (\alpha_Y \circ (1_Y \Box G))) \circ (1_Z \Box \alpha_Y^t \Box 1_X) = (H^* \Box G^*) \circ (1_Z \Box \alpha_Y^t \Box 1_X)$
2) ist oben schon erwähnt und 3) folgt aus der Kommutativität und der Assoziativität der Vereinigung.
4) Seien $G = (V,E), H = (W,F)$
$\overline{H \cup_Y G} = \overline{(W \cup V, F \cup E)} = (\overline{W \cup V}, \overline{F \cup E}) = (\overline{W} \cup \overline{V}, \overline{F} \cup \overline{E})$
da alle Kanten $\{s,t\}$ entweder in F oder in E sind und die neu entstandenen Ecken (bzw Kanten) natürlich als Element von $\overline{W}$ $(\overline{F})$ zu verstehen sind.
Da $\overline{V} = V$ und $\overline{E} = E$ folgt $\overline{H \cup_Y G} = (\overline{W} \cup V, \overline{F} \cup E) = (\overline{W}, \overline{F}) \cup (V,E) = \overline{H} \cup_Y G$, wegen $\overline{W} \cap V = \emptyset$ und $\overline{F} \cap E = Y$.

5.9 Satz: *Seien $F; \mathcal{V}, V, b$ und $e_1, e_2, ..., e_d$ wie in Lemma 4.15.*
Sei $\mu : V \otimes V \otimes V \longrightarrow F$ linear.
Dann $\exists!$ Funktor $\mathcal{R}_{V,b,\mu} : A_2 \longrightarrow \mathcal{V}$ mit,

1) $\mathcal{R}_{V,b,\mu}(X) := V^{\otimes|X|} = \bigotimes_{i=1}^{n} V_{x_i}$.
   Für $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \in Obj(A_2)$.

2) $\mathcal{R}_{V,b,\mu}(G) = \mathcal{R}_{V,b}(G)$ *für $G \in \mathrm{Mor}_{A_1}(\cdot, \cdot)$.*

3) $$\mathcal{R}_{V,b,\mu}(\gamma) : V \otimes V \otimes V \longrightarrow F$$
   $$(u, v, w) \longmapsto \mu(u, v, w)$$

4) $\mathcal{R}_{V,b,\mu}(G \Box H) = \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G) \otimes \mathcal{R}_{V,b,\mu}(H)$.

Beweis:

Sei $G \in \mathrm{Mor}A_2(X, \emptyset)$.
Wir wissen bereits, dass $G = (\Box_{t\in T} G_t) \circ \overline{G} = (\Box_{t\in T} \gamma) \circ \overline{G}$
Wir definieren

$$(1)\ \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G) = \bigotimes\nolimits_{t\in T} \mu \circ \mathcal{R}_{V,b}(\overline{G}).$$

Ist nun $G \in \mathrm{Mor}_{A_2}(X, Y)$ ein beliebiger Morphismus, dann nutzen wir aus, dass $G = (1_Y \Box G^*) \circ (\alpha_Y^t \Box 1_X)$ und setzen

$$(2)\ \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G) = (\mathcal{R}_{V,b}(1_Y) \otimes \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G^*)) \circ (\mathcal{R}_{V,b}(\alpha_Y^t \Box 1_X))$$

Somit ist $\mathcal{R}_{V,b,\mu}$ vollständig definiert und als Komposition und Tensorprodukt von linearen Abbildungen linear.
Haben wir die Existenz gezeigt, folgen aus dem Funktoraxiom A2 wieder (1) und (2), woraus aus der Eindeutigkeit dieser beiden Definitionen die Eindeutigkeit von $\mathcal{R}_{V,b,\mu}$ folgt.
$\mathcal{R}_{V,b,\mu}$ ist wegen Lemma 5.8 2) wohldefiniert, da $\mathcal{R}_{V,b}$ wohldefiniert ist.
Wir müssen noch zeigen, dass $\mathcal{R}_{V,b,\mu}(H \circ G) = \mathcal{R}_{V,b,\mu}(H) \circ \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G)$.

Seien $G \in \mathrm{Mor}_{A_2}(X,Y)$, $H \in \mathrm{Mor}_{A_2}(Y,Z)$ mit $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}, Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, $Z = \{z_1, z_2, ..., z_k\}$. Sei s die Menge der 3-valenten Punkte von G, T diejenige von H.

$\mathcal{R}_{V,b,\mu}(H \circ G) = (\mathcal{R}_{V,b}(1_Z) \otimes \mathcal{R}_{V,b,\mu}((H \circ G)^*)) \circ (\mathcal{R}_{V,b}(\alpha_Z^t) \otimes \mathcal{R}_{V,b}(1_X))$

$= (\mathcal{R}_{V,b}(1_Z) \otimes ((\bigotimes_{t \in T} \mu \otimes \bigotimes_{s \in S} \mu) \circ \mathcal{R}_{V,b}(\overline{(H \circ G)^*}))) \circ (\mathcal{R}_{V,b}(\alpha_Z^t) \otimes \mathcal{R}_{V,b}(1_X))$

$= (\mathcal{R}_{V,b}(1_Z) \otimes ((\bigotimes_{t \in T} \mu \otimes \bigotimes_{s \in S} \mu) \circ \mathcal{R}_{V,b}((\overline{H}^* \Box \overline{G}^*) \circ (1_Z \Box \alpha_Y^t \Box 1_X)))) \circ (\mathcal{R}_{V,b}(\alpha_Z^t) \otimes \mathcal{R}_{V,b}(1_X))$

$= (\mathcal{R}_{V,b}(1_Z) \otimes ((\mathcal{R}_{V,b,\mu}(H^*) \otimes \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G^*)) \circ \mathcal{R}_{V,b}(1_Z \Box \alpha_Y^t \Box 1_X))) \circ (\mathcal{R}_{V,b}(\alpha_Z^t) \otimes \mathcal{R}_{V,b}(1_X))$

also

$\mathcal{R}_{V,b,\mu}(H \circ G)(v_1, ..., v_n)$

$= (\mathcal{R}_{V,b}(1_Z) \otimes ((\mathcal{R}_{V,b,\mu}(H^*) \otimes \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G^*)) \circ (\mathcal{R}_{V,b}(1_Z \Box \alpha_Y^t \Box 1_X)))(\sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_k=1}^d e_{k_1} \otimes$
$... \otimes e_{k_k} \otimes e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k}, , v_1, v_2, ..., v_n)$

$= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_k=1}^d (\mathcal{R}_{V,b}(1_Z)(e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k}) \otimes (\mathcal{R}_{V,b,\mu}(H^*) \otimes \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G^*))(\sum_{m_1=1}^d ... \sum_{m_m=1}^d e_{k_1} \otimes$
$... \otimes e_{k_k} \otimes e_{m_1} \otimes ... \otimes e_{m_m} \otimes e_{m_1} \otimes ... \otimes e_{m_m}, , v_1, v_2, ..., v_n))$

$= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_k=1}^d \sum_{m_1=1}^d ... \sum_{m_m=1}^d e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k} H^*(e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k}, e_{m_1} \otimes ... \otimes e_{m_m} G^*(e_{m_1} \otimes$
$... \otimes e_{m_m}, v_1, v_2, ..., v_n)$

Andererseits gilt aber:

$\mathcal{R}_{V,b,\mu}(G)(v_1, v_2, ..., v_n)$

$= \sum_{m_1}^d ... \sum_{m_m=1}^d e_{m_1} \otimes ... \otimes e_{m_m} G^*(e_{m_1} \otimes ... \otimes e_{m_m}, v_1, v_2, ..., v_n)$

und $\mathcal{R}_{V,b,\mu}(H)(v_1, v_2, ..., v_k)$

$= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_k=1}^d e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k} H^*(e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k}, v_1, v_2, ..., v_m)$

also

$\mathcal{R}_{V,b,\mu}(H) \circ \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G)(v_1, v_2, ..., v_n)$

$= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_k=1}^d e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k} H^*(e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k}, \sum_{m_1=1}^d ... \sum_{m_m=1}^d e_{m_1} \otimes ... \otimes e_{m_m} G^*(e_{m_1} \otimes$
$... \otimes e_{m_m}, v_1, v_2, ..., v_n)$

$= \sum_{k_1=1}^d ... \sum_{k_k=1}^d \sum_{m_1=1}^d ... \sum_{m_m=1}^d e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k} H^*(e_{k_1} \otimes ... \otimes e_{k_k}, e_{m_1} \otimes ... \otimes e_{m_m}) G^*(e_{m_1} \otimes$
$... \otimes e_{m_m}, v_1, v_2, ..., v_n)$.

womit das zweite Funktoraxiom erfüllt ist.

6 Die Kategorie A_3 und A_4-Kategorien

Wir erweitern die Kategorie A_2 ein weiteres mal, indem wir anstelle der Morphismen von A_2 freie Moduln über diesen betrachten.
Sei R ein assoziativer und kommutativer Ring mit 1.

***6.1 Definition: Kategorie** A_3*

a) *$Obj(A_3) = \{$endliche Mengen$\}$*

b) *$Mor_{A_3}(X,Y) = \{\sum_{i=1}^{l} a_i G_i : a_i \in R, G_i \in Mor_{A_2}(X,Y), l$ endlich$\}$*

c) *Wir definieren die Verknüpfung*

$$\begin{aligned} Mor_{A_3}(X,Y) \circ Mor_{A_3}(Y,Z) &\longrightarrow Mor_{A_3}(X,Z) \\ (G,H) &\longmapsto H \circ G \end{aligned}$$

*wobei $G = \sum_{i=1}^{l_1} a_i G_i, H = \sum_{j=1}^{l_2} b_j H_j$ mit $a_j, b_j \in R$,
$G_i \in Mor_{A_2}(X,Y), H_j \in Mor_{A_2}(Y,Z)$
wie folgt: $H \circ G = \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2} a_i b_i \; H_i \circ G_i$
Die Verknüpfung auf der rechten Seite ist als Verknüpfung in A_2 zu verstehen.*

Wir nennen diese Kategorie die A_3 Kategorie über dem Ring R.

***6.2 Bemerkung:** Die Assoziativität der Verknüpfung folgt aus der Assoziativität von R, der Assoziativität von $\circ$ in A_2 und der Tatsache, dass die Summen endlich sind.
Wir verwenden*

$$\underbrace{1_X}_{\in Mor_{A_3}} = 1 \cdot \underbrace{1_X}_{\in Mor_{A_2}}$$

als neutrales Element in A_3.

***6.3 Definition:** Wir können auch $\Box$ auf A_3 ausdehnen. Wir setzen*

$$G \Box H = \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2} \; a_i b_j (G_i \Box H_j)$$

wobei auf der linken Seite die $\Box-$Definition in A_2 gilt. Aus denselben Gründen wie in 4.2 impliziert die Assoziativität von $\Box$ in A_2 wieder die Assoziativität von $\Box$ in A_3.

6.4 Satz: *Seien $F; \mathcal{V}, V, b$ und μ wie in Satz 3.9.*
Sei weiter R ein assoziativer und kommutativer Ring mit 1 und $h\colon R \longrightarrow F$ ein Ringhomomorphismus, $G_i \in$Mor$_{A_2}(\cdot,\cdot)$ und $a_i \in R$.
Dann $\exists!$ Funktor $\mathcal{R} : A_3 \longrightarrow \mathcal{V}$ mit,

1) $\mathcal{R}(X) := V^{\otimes |X|} = \bigotimes_{i=1}^{n} V_{x_i}$.
   Für $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\} \in Obj(A_3)$.
2) $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G)$ *für* $G \in$Mor$_{A_2}(\cdot,\cdot)$.
3) $\mathcal{R}(G \Box H) = \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(H)$.
4) $\mathcal{R}(\sum_{i=1}^{l} a_i G_i) = \sum_{i=1}^{l} h(a_i) \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G_i)$

Beweis:

$\mathcal{R}$ ist durch 4) eindeutig definiert und linear.
1), 2) und das Funktoraxiom A1 sind erfüllt, da sie für $\mathcal{R}_{V,b,\mu}$ erfüllt sind.
Wir nehmen also 4) als Definition von $\mathcal{R}$ und zeigen 3) und A2.

i) Seien $a_i, b_j \in R$ $G_i, H_j \in$Mor$_{A_2}(X,Y)$

$\mathcal{R}(G \Box H) = \mathcal{R}(\sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2}\ a_i b_j (G_i \Box H_j)) = \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2}\ h(a_i b_j)\ \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G_i \Box H_j))$

$= \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2}\ h(a_i) h(b_j)\ (\mathcal{R}_{V,b,\mu}(G_i) \otimes \mathcal{R}_{V,b,\mu}(H_j)) = \mathcal{R}(G) \otimes \mathcal{R}(H)$

ii) Seien $a_i, b_j \in R, G_i \in$Mor$_{A_2}(X,Y), H_j \in$Mor$_{A_2}(Y,Z)$

$\mathcal{R}(H \circ G) = \mathcal{R}(\sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2}\ a_i b_j\ (H_j \circ G_i)) = \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2}\ h(a_i b_j)\ \mathcal{R}_{V,b,\mu}(H_j \circ G_i))$

$= \sum_{i=1}^{l_1} \sum_{j=1}^{l_2}\ h(a_i) h(b_j)\ (\mathcal{R}_{V,b,\mu}(H_j) \circ \mathcal{R}_{V,b,\mu}(G_i)) = \mathcal{R}(G) \circ \mathcal{R}(H)$.

Wir können neue Kategorien auch dadurch erzeugen, dass wir nicht nur ein System von Erzeugenden, sondern ein System von Erzeugenden und Relationen betrachten.

6.5 Definition: *Wir können also eine Menge von Relationen*

$$\sum_{i=1}^{l}\ a_i G_i = 0,$$

mit $a_i \in R$ und $G_i \in$Mor$_{A_2}(X,Y)$ betrachten. Mittels Komposition oder $\Box$ Produkt impliziert man damit Relationen auf Mor$_{A_3}(Z_1, Z_2)$ für beliebige Z_1, Z_2. Diese Relationen sind Äquivalenzrelationen auf Mor$_{A_3}(Z_1, Z_2)$.
Oft schreibt man die Relationen auch in der Form

$$\sum_{i=1}^{l_1}\ a_i G_i = \sum_{j=1}^{l_2}\ b_j H_j$$

mit $a_i, b_j \in R$ und $G_i, H_j \in$Mor$_{A_2}(X,Y)$.

6.6 Definition: *Seien $\Lambda = \{S_1 = T_1, ..., S_N = T_N\}$ eine Menge von Relationen auf $\mathrm{Mor}_{A_3}(\cdot,\cdot)$. Kategorien die anstelle der A_3-Morphismen Äquivalenzklassen von A_3-Morphismen (unter den Relationen Λ) haben, heissen A_4-Kategorien (erzeugt durch die Relationen Λ). Die Objekte dieser Kategorien bleiben natürlich dieselben. Die Äquivalenzklasse von 1_X wird zum 1-Element in A_4 und die Verknüpfung definieren wir als*

$$[H] \circ [G] = [H \circ G],$$

für $G, H \in \mathrm{Mor}A_3(\cdot,\cdot)$ mit $cod(G) = dom(H)$.

Sei nun $\mathcal{Q}$ der Projektionsfunktor, das heisst der Funktor $\mathcal{Q}\colon A_3 \longrightarrow A_4$ für den gilt $\mathcal{Q}$ ist der Projektionsfunktor. Das heisst

$$\mathcal{Q}(X) = X \ \forall X \ \in \mathrm{Obj}(A_3)$$
$$\mathcal{Q}(G) = [G] \ \forall G \ \in \mathrm{Mor}_{A_3}(\cdot,\cdot),$$

dann garantiert die Kategorientheorie, dass alle A_4-Kategorien auch wirklich Kategorien sind und auch folgenden Satz. [3]

6.7 Satz: *Seien $F; \mathcal{V}, V, b, \mu, R$ und h wie in Satz 6.4.*
Sei $\Lambda = \{S_1 = T_1, ..., S_N = T_N\}$ eine Menge von Relationen. Sei A_Λ die A_4-Kategorie erzeugt durch die Relationen Λ.
Sei $\mathcal{R} : A_3 \longrightarrow \mathcal{V}$ ein Funktor wie in Satz 6.4 mit $\mathcal{R}(S_i) = \mathcal{R}(T_i)$. Dann gibt es genau einen Funktor $\mathcal{R}_\Lambda\colon A_\Lambda \longrightarrow \mathcal{V}$, so dass $\mathcal{R}_\Lambda \circ \mathcal{Q} = \mathcal{R}$.

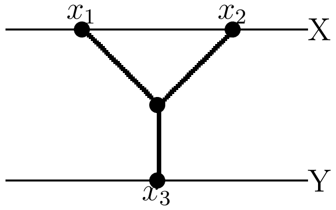
[3] siehe zB. [ML].

7 Der Beweis

Nun kommen wir zum Hauptresultat dieser Arbeit. Wir geben eine A_4-Kategorie vor, deren Relationen sich durch unseren Funktor $\mathcal{R}$ in die Axiome einer Vektorprodukt-Algebra transformieren. Wir werden dann versuchen mit den vorgegebenen Relationen eine neue Relation zu finden, wo der Graph d vorkommt. Dadurch wird diese Aussage dank unserem Funktor $\mathcal{R}$, zu einer Dimensionsaussage für Vektorprodukt-Algebren.

7.1 Algebren und Graphen-Kategorien

Wir möchten eine Aussage über Vektorprodukt-Algebren machen, haben aber noch nie direkt von einer Multiplikation gesprochen. Die Multiplikation ist eine Abbildung von $V \otimes V$ nach V. Die einfachst mögliche, und daher die natürliche, Entsprechung in einer Graphen-Kategorie ist folgender Graph in $\mathrm{Mor}_{A_2}(\{x_1, x_2\}, \{x_3\})$ den wir β nennen.



Wegen Definition 4.6 gibt es eine eins zu eins Zuordnung zwischen β und γ. Wir können schreiben

$$\gamma = \alpha \circ (\beta \Box I).$$

Wir definieren also für eine Algebra mit Produkt $\times$

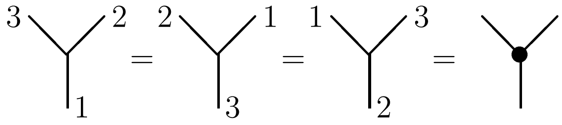
$$\mathcal{R}(\gamma)(u, v, w) = \mu(u, v, w) = b(u \times v, w).$$

7.2 Die Kategorie A_Λ

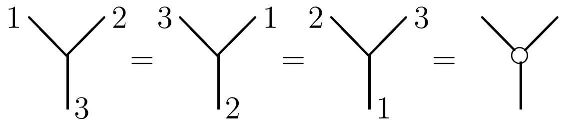
Wir definieren nun die Kategorie in der wir unsere Rechnung vollziehen werden. Unsere Kategorie ist eine A_4-Kategorie über dem Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$. Wir wählen $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$, da wie wir später sehen werden es nötig ist, dass man durch 2 teilen kann. Ausserdem ist für jeden Körper F mit $\mathrm{char}(F) \neq 2$ ein Homöomorphismus $h_F \colon \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \longrightarrow F$ gegeben, der 1 auf 1 abbildet. Die Voraussetzungen für Satz 6.7 sind also erfüllt.

Jetzt stellt sich die Frage welches die richtigen Relationen sind. 6.1 (3) impliziert, dass $\mathcal{R}(\gamma) = b(x \times y, z)\colon V^{\otimes 3} \longrightarrow F$ alternierend ist. Wie man aber die Argumente in $b(x \times y, z)$ einsetzt wird durch die Ordnug auf der 3-valenten Ecke von γ bestimmt. Verändert man in einer 3-valenten Ecke die Ordnung so, dass der Wert auf einer Kante gleich bleibt und auf den beiden anderen vertauscht wird, so ändert $\mathcal{R}$ das Vorzeichen. Berücksichtigt man alle Arten wie das möglich ist, so ergeben sich folgende Relationen:

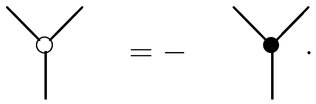
$(R1)$



$(R2)$



$(R3)$

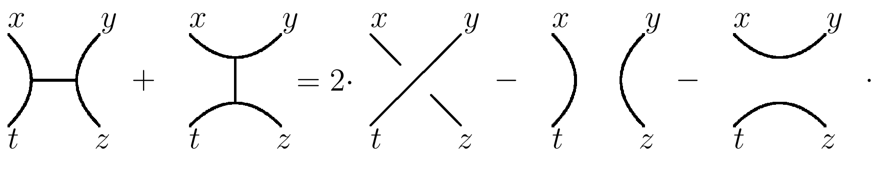


Diese drei Relationen sind z.B. so zu verstehen, dass man die Graphen als Elemente von $\mathrm{Mor}(\{x, y, z\}, \emptyset)$ betrachtet (dann sind sie γ-Graphen). In der Folge wird es aber keine Rolle spielen, als welche Art von Morphismen man sie betrachtet.

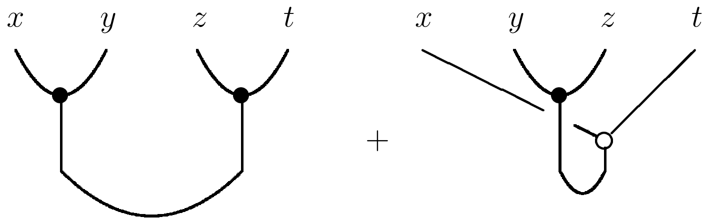
Der schwarze Punkt in (R1) soll anzeigen, dass der Stern im Uhrzeigersinn geordnet ist, der weisse bezeichnet eine Ordnung im Gegenuhrzeigersinn. Diese Notation werden wir aber sogleich wieder unterdrücken und die Konvention einhalten, dass in einer Relation alle Sterne entweder im Uhr- oder im Gegenuhrzeigersinn geordnet sind, falls nichts anderes angegeben ist.

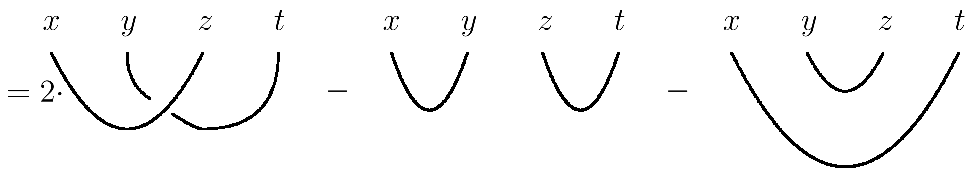
Da man (4) aus 2.1 nicht auf Graphen übertragen kann, bedienen wir uns der äquivalenten Definition, wo wir (5) mit (4) vertauschen. (5) entspricht dann

$(R4)$



Dies ist nun nicht sehr offensichtlich, aber diese Relation ist identisch mit der folgenden, die wir als Element von $\mathrm{Mor}(\{x, y, z, t\}, \emptyset)$ betrachten.





Was wir schreiben können als

$$ {}^{\emptyset}_{a,b}[\alpha] \circ^{a,b}_{x,y,z,t} [\beta\Box\beta] \;+\; {}^{\emptyset}_{a,b}[\alpha] \circ^{a,b}_{t,x,y,z} [\beta\Box\beta] = $$
$$ 2 \cdot {}^{\emptyset}_{x,z,y,t} [\alpha\Box\alpha] \;-\; {}^{\emptyset}_{x,y,z,t}[\alpha\Box\alpha] \;-\; {}^{\emptyset}_{x,t,y,z}[\alpha\Box\alpha] $$

$\mathcal{R}(R4)(x, y, z, t)$ ergibt dann

$$ b(x \times y, z \times t) + b(y \times z, t \times x) = 2b(x, z)b(y, t) - b(x, y)b(z, t) - b(y, z)b(t, x) $$

also (5) aus 7.1.

Wir nennen nun die Menge der Relationen (R1)-(R4) Λ und die Quotienten Kategorie A_{Lambda}. Bildet man sie durch $\mathcal{R}$ nach $\mathcal{V}$ ab, werden sie durch ihre Konstruktion die Axiome einer Vektorprodukt-Algebra.
Nach Satz 6.7 gibt es nun einen Funktor $\mathcal{R}_\Lambda$ von A_Λ nach $\mathcal{V}$, wobei $\mu(x, y, z) = b(x \times y, z)$ wie in 7.1 definiert.
Das heisst nun aber, dass für jede Relation $S = T$ in A_3, die aus (R1)-(R4) folgt auch $\mathcal{R}_\Lambda(S) = \mathcal{R}_\Lambda(T)$ gilt. Nun können wir also alle A_3-Relationen, in Relationen in Vektorprodukt-Algebren übersetzen.

7.3 Die graphischen Berechnungen

Wir werden nun in $\mathrm{Mor}_\Lambda(\emptyset, \emptyset)$ folgende Identität zeigen.

$$(*) \qquad d\Box(d-1)\Box(d-3)\Box(d-7) = \mathrm{O}$$

Bilden wir diese Identität durch $\mathcal{R}_\Lambda$ ab, finden wir eine neue Identität in $\mathrm{Mor}_\mathcal{V}(\mathcal{R}_\Lambda([\emptyset]), \mathcal{R}_\Lambda([\emptyset]))$ $=\mathrm{Mor}_\mathcal{V}(F,F) = F$. Wir wissen, dass $\mathcal{R}_\Lambda(d) = dim(V)$. Die Gleichung in F lautet also

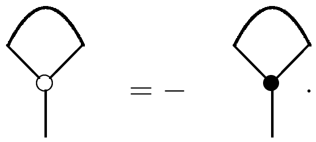
$$\dim(\mathrm{V})\ (\ \dim(\mathrm{V}) - 1)(\ \dim(\mathrm{V}) - 3)(\ \dim(\mathrm{V}) - 7) = 0.$$

Da V nach Satz 6.7 und Abschnitt 7.2 eine Vektorproduktalgebra ist, folgt Satz 2.4.

7.1 Bemerkung: *In der Gleichung $(*)$ ist mit $a \in A$ einfach $a \cdot [\emptyset]$ gemeint. Es gilt dann $a\Box G = aG$. Ausserdem gilt $\mathcal{R}[(\emptyset)] = 1 \in F$ wie schon in 4.15 erwähnt.*

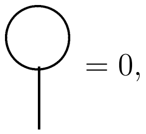
Beginnen wir nun mit dem Beweis von $(*)$.

Von jetzt an fassen wir die Graphen in den Relationen (R1)-(R3) als Elemente von $\mathrm{Mor}_\Lambda(\{x,y\},\{z\})$ auf. Wir schreiben nun (R3)$\circ\alpha^t$ (oder ähnliches) und meinen damit, dass wir alle Graphen mit α^t verknüpfen.
Stellen wir (R3)$\circ\alpha^t$ graphisch dar, finden wir



Nun ist der linke Graph nur eine andere Projektion des rechten Graphen. Nehmen wir beide auf die gleiche Seite finden wir für beliebigen Umlaufsinn

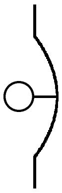
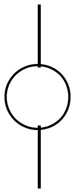
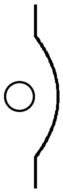
(1)



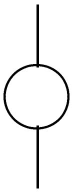
da 2 in $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ invertierbar ist.

7.2 Bemerkung: *Ist es möglich eine Graphen so zu konstruieren, dass er durch Zusammenkleben des obigen Graphen und eines beliebigen Graphen, entlang eines 1-valenten Punktes oder durch disjunkte Vereinigung derselben Graphen entsteht, ist der so konstruierte Graph ebenfalls null. Dies folgt daraus, dass wir wieder wie oben, zwei verschiedene Projektionen des Graphen betrachten können.*

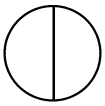
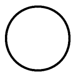
Fassen wir nun die Graphen in (R4) als Elemente von $\mathrm{Mor}_\Lambda(\{x,y\},\{z,t\})$ auf und betrachten dann $(\alpha\square I)\circ(I\square(R4))\circ(\alpha^t\square I)$ erhalten wir

 $+$  $= 2\cdot$  $-$  $-$  .

Wegen Bemerkung 7.2 ist der Graph ganz links null.
Die rechte Seite finden wir
$2\cdot I-(d\square I)-I=I-(d\square I)=-(d-1)\square I$
also wird die Gleichung zu

(2) $\Gamma =$  $= -(d-1)\ \square$.

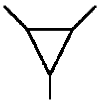
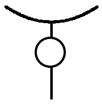
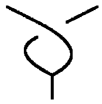
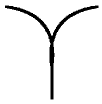
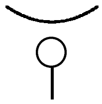
$\alpha\circ(I\square(2)\ )\circ\alpha^t$ ergibt dann

(3)  $= -(d-1)\ \square$  $= -d\square(d-1).$

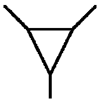
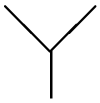
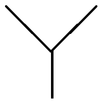
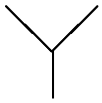
In [Ro] wird eine Formel erwähnt die auf T.A. Springer zurückgeht, sie besagt, dass in einer Vektorprodukt-Algebra der Dimension d

$$\textstyle\sum_{i=1}^{d}\ (u\times e_i)\times(e_i\times v)=(d-4)\ (u\times v)$$

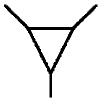
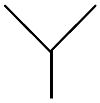
gilt.
Mit unserer graphischen Methode ist es nun ein leichtes diese Formel zu beweisen. Wir betrachten $(R4)\circ\beta$ und finden

(4)  $+$  $= 2\cdot$  $-$  $-$  .

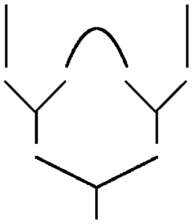
Der Graph ganz rechts ist wegen Bemerkung 7.2 null. Der zweite Graph von links entsteht durch Komposition von Γ aus (2) mit β. Ersetzen wir nun Γ durch die rechte Seite von (2) können wir (4) wie folgt schreiben:

 $-(d-1)\Box$  $= -2\cdot$  $-$  -0

Der Graph ganz in der Mitte wurde anders projiziert. Deshalb erscheint er jetzt mit negativem Vorzeichen. Zählen wir alle gleichen Graphen zusammen, finden wir nichts anderes als

(5)  $= (d-4)\Box$  .

Diese Formel ist nun die Springersche Formel in A_3, was wir einfach einsehen wenn wir zuerst die linke Seite folgendermassen zerschneiden:

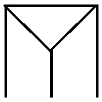
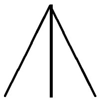


Nun haben wir die linke Seite von (5) also in eine Menge von Graphen zerlegt, die wir kennen. So aufgezeichnet ist dieser Graph leicht als Komposition dreier Graphen aufzufassen. (5) lässt sich also auch schreiben als

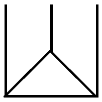
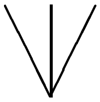
$$\beta \circ (\beta\Box\beta) \circ (I\Box\alpha^t\Box I) = (d-4)\Box\beta.$$

Wir wenden nun $\mathcal{R}$ an.
Auf der linken Seite finden wir
$\mathcal{R}(\beta \circ (\beta\Box\beta) \circ (I\Box\alpha^t\Box I))(u,v)$
$= \sum_{i=1}^{d} \ \mathcal{R}(\beta \circ (\beta\Box\beta))(u,e_i,e_i,v)$
$= \sum_{i=1}^{d}(u \times e_i) \times (e_i \times v)$.
Andererseits gilt
$\mathcal{R}'_h((d-4)\Box\beta)(u,v) = (d-4)\ u \times v$,
womit die Springer'sche Formel in einer Vektorprodukt-Algebra folgt.

Die Graphen der Springer'schen Formel aufgefasst in $\mathrm{Mor}(\emptyset, \{x, y, z\})$ ergeben

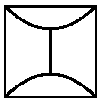
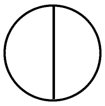
(5a)  $= (d-4) \,\square$ 

und auch

(5b)  $= (d-4) \,\square$  .

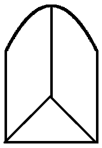
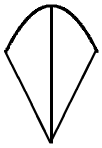
wenn man sie als Elemente von $\mathrm{Mor}_\Lambda(\{x, y, z\}, \emptyset)$ auffasst.

Kleben wir die linke Seite von (5a) mit der linken von (5b) und die beiden rechten Seiten zusammen, finden wir

(6)  $= (d-4)^2 \square$  $= -d\square(d-1)\square(d-4)^2.$

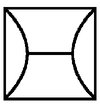
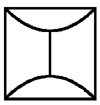
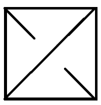
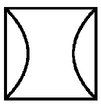
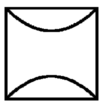
Hier ist $(d-4)^2$ als $(d-4)\square(d-4)$ zu verstehen ist. Die zweite Gleichung folgt aus (3).

Wir zeichnen auch noch $(5b) \circ \gamma$, was

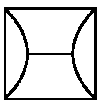
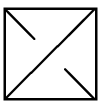
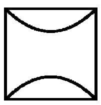
(7)  $= (d-4) \,\square$ 

ergibt.

Nun betrachten wir noch eine weitere Konsequenz von (R4), aus der wir schliesslich und endlich die gewünschte Identität folgern können. Wir bilden den Graphen $\alpha \circ (\gamma \square \gamma) \circ (I \square (R4) \square I) \circ (\gamma^t \square \gamma^t) \circ \alpha^t$.

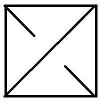
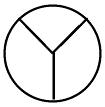
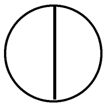
 $+$  $= 2\cdot$  $-$  $-$  .

Die beiden Graphen ganz links und die beiden Graphen ganz rechts sind isomorph. Also erhalten wir

(8)  $=$  $-$  ,

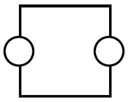
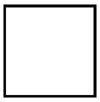
nachdem wir durch 2 geteilt haben.

Für den mittleren Term erhalten wir

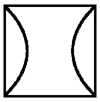
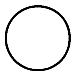
(9)  $=$  $= (d-4)$  $= -d\square(d-1)\square(d-4).$

Die erste Identität daraus, dass die beiden Graphen nur verschiedene Projektionen desselben Graphen sind. Biegen wir den ersten so zurecht, dass er aussieht wie der zweite, dann müssen wir zweimal das Vorzeichen wechseln. Also folgt die erste Gleichheit. Die zweite Gleichheit folgt aus (7) und die dritte aus (3).

Wir können auch den rechten Graphen aus (8) noch vereinfachen.

 $= (d-1)^2\square$ 

Diese Identität finden wir, wenn wir (2) zweimal anwenden.
Der linke Graph ist nun aber eine andere Darstellung des gesuchten Graphen und wir finden also

(10)  $= (d-1)^2\square$  $= d\square(d-1)^2,$

da Quadrate natürlich isomorph zu Kreisen sind.

Jetzt haben wir alle nötigen Gleichungen zusammengetragen.

Setzen wir (6),(9) und (10) in (8) ein finden wir
$-d\square(d-1)\square(d-4)^2 = -d\square(d-1)\square(d-4) - d\square(d-1)^2$
also
$0 = d\square(d-1)\square(-(d-4)-(d-1)+(d-4)^2) =$
$d\square(d-1)\square(d-3)\square(d-7).$ $\square$

7.4 Beziehungen zu [Ro]

Zum Schluss möchte ich noch die Relationen zum in der Einführung erwähnten Artikel geben. Dies ist so zu verstehen, dass die graphischen Beziehungen durch den Funktor $\mathcal{R}$ in die algebraischen Gleichungen in [Ro] übergehen, wie wir das z.B. für die Springer'sche Formel dargelegt haben.

$(R1), (R2) \rightarrow (2.3a)$
$(R3) \rightarrow (2.3b)$
$(R4) \rightarrow (2.4b)$
$(2) \rightarrow (3.1)$
$(3) \rightarrow (3.2)$
$(5) \rightarrow (3.3)$
Die Gleichung (8) ist äquivalent zur Gleichung $B = C - D$, wobei B dem Graphen aus (6), C demjenigen aus (9) und D demjenigen aus (10) entsprechen.

8 Literatur

[Di] Diestel, R., Graphentheorie. Springer-Verlag, Berlin 1996.

[Eb] Ebbinghaus et al., Zahlen. Springer-Verlag, Berlin 1992.

[Hu] Hurwitz, A., Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen, Nachrichten Ges. der Wiss. Göttingen 1898, 309-316 (pp. 565–571 in: Mathematische Werke. Bd. II, Birkhäuser Verlag, Basel, 1963)

[Ka] Kauffman, L.M., On Knots. World Scientific, Princeton University Press, 1987.

[La] Lang, S., Algebra. Addison-Weseley 1993.

[Jä] Jänich, K., Topologie. Springer-Verlag Berlin 1980.

[Ma] Massey, W.S.,A basic Cours in Algebraic Topology. Springer-Verlag, New York 1991.

[ML] Mac Lane, S., Categories for the Working Mathematician. Springer-Verlag, New York 1971.

[Ro] Rost, M., On the Dimension of a Composition Algebra. Doc. Math. 1/1996.

[Sc] Scharlau, W., Quadratic and Hermitian Forms. Springer-Verlag, Berlin 1985.

[Tu] Turaev, V., Quantum Invariants of 3-Manifolds. Publication de l'institut de recherche mathématique avancée, Strassbourg 1992.