# Vektorproduktalgebren

Diplomarbeit
von
Susanne Maurer

Mathematische Fakultät der Universität Regensburg
1998

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Die Frage, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2)({y_1}^2 + \cdots + {y_n}^2) = {z_1}^2 + \cdots + {z_n}^2 \qquad (1)$$

durch geeignete reelle positiv definite Bilinearformen $z_1, z_2, \ldots, z_n$ in den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ gelöst werden kann, wurde 1898 von A. Hurwitz in seiner Arbeit "Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen"([**5**]) geklärt. Er stellte fest, daß das Problem, quadratische Formen zu bestimmen, die Komposition erlauben, im wesentlichen identisch ist mit der Frage, Gleichungen der Form (1) zu lösen. Dabei bedeutet Komposition, daß für einen quadratischen Raum $(V, N)$ eine bilineare Abbildung $V \times V \to V$, $(x, y) \mapsto xy$ existiert, so daß $N(xy) = N(x)N(y)$ für $x$, $y \in V$ gilt. Hurwitz ersetzte für reguläre quadratische Formen $\varphi$, $\psi$ und $\chi$ die Gleichung

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n)\psi(y_1, \ldots, y_n) = \chi(z_1, \ldots, z_n)$$

durch die Gleichung (1), indem er die quadratischen Formen durch lineare Transformation der Variablen in Summen von Quadraten überführte. Dann zeigte er, daß eine Kompositionstheorie neben dem trivialen Fall $n = 1$ nur für $n = 2$ (binäre Formen), $n = 4$ (quaternäre Formen) und $n = 8$ (Formen mit 8 Variablen) existiert.

1943 bewies B. Eckmann in seiner Arbeit "Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon ueber die Komposition quadratischer Formen" ([**4**]) die Aussage mit Hilfe von grundlegenden Sätzen der Darstellungstheorie der endlichen Gruppen neu. Er ließ für die Koeffizienten $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ auch komplexe Zahlen zu und zeigte, daß jede Lösung der komplexen Aufgabe äquivalent zu einer reellen Lösung ist.

Einen Beweis mit Clifford-Algebren lieferte C. Chevalley 1954 in "The algebraic theory of spinors" ([**2**]) für Körper mit beliebiger Charakteristik.

N. Jacobson bezeichnete 1958 in seiner Arbeit "Composition algebras and their automorphisms" ([**6**]) unitäre Algebren mit quadratischer Form, die bezüglich des Produkts multiplikativ ist, als *Kompositionsalgebren.* In seinem Theorem 1 bewies er für beliebige Körper der Charakteristik ungleich 2 mit Hilfe der Cayley-Dickson-Verdopplung, daß Kompositionsalgebren nur der Grundkörper $F$, quadratische Erweiterungen, Quaternionenalgebren oder Cayley-Algebren sein können.

In der Veröffentlichung "The arithmetics of octaves and of the group $G_2$" ([**1**]) verallgemeinerten F. van der Blij und T. A. Springer 1959 den Beweis von Jacobson auf den Fall von Körpern mit Charakeristik 2.

M. Rost lieferte 1996 in "On the dimension of a composition algebra" ([**9**]) einen neuen Beweis über die möglichen Dimensionen einer Kompositionsalgebra, der mit Tensoren arbeitet. Vor dem Hintergrund dieser Veröffentlichung entstand diese Diplomarbeit:

Anstelle von unitären Kompositionsalgebren wird übergegangen zu *Vektorproduktalgebren*. Auf diesen werden gewisse Tensoren $R_1, \ldots, R_4$ definiert und in Satz 2.4 wird gezeigt, daß $R_4 \equiv 0$ ist. Bezeichnet man mit $d$ die Dimension der Vektorproduktalgebra, so ergibt sich daraus durch Tensorrechnung im Grundkörper die folgende Aussage:

$$d(d-1)(d-3)(d-7) = 0.$$

Im Fall Charakteristik Null erhält man daraus für eine unitäre Kompositionsalgebra $C$ die bekannte Tatsache, daß $\dim C = 1$, 2, 4 oder 8 ist. Ferner wird gezeigt, daß es assoziative Kompositionsalgebren nur im ein-, zwei- oder vierdimensionalen Fall und kommutative Kompositionsalgebren nur für die Dimensionen 1 und 2 gibt.

Zusätzlich kann man die Multiplikationstabelle für Vektorproduktalgebren angeben und daraus auf die Multiplikationstabelle für unitäre Kompositionsalgebren schließen.

Über die Vorgehensweise in den einzelnen Kapiteln möchte ich hier einen kurzen Überblick geben.

Das erste Kapitel dient der Einführung der beiden Begriffe "Kompositionsalgebra" und "Vektorproduktalgebra" und es wird gezeigt, daß Kompositionsalgebren mit Eins und Vektorproduktalgebren äquivalente Bezeichnungen sind.

Im zweiten Kapitel werden für Vektorproduktalgebren Tensoren definiert, mit deren Hilfe Aussagen über die Kommutativität bzw. Assoziativität der dazu äquivalenten Kompositionsalgebren getroffen werden können.

Im dritten Kapitel wird gezeigt, daß für eine Vektorproduktalgebra mit der Dimension $d$ in $F$ die Beziehung $d(d-1)(d-3)(d-7) = 0$ gilt.

Im vierten Kapitel werden die Strukturen der Vektorproduktalgebren näher betrachtet.

An dieser Stelle möchte ich mich noch bei Herrn Dr. Markus Rost bedanken, der mich in das Gebiet der quadratischen Formen eingeführt hat und mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt hat.

Susanne Maurer

KAPITEL 1

# Vorbereitungen

In diesem Kapitel werden Kompositionsalgebren und Vektorproduktalgebren eingeführt. Satz 1.21 beschreibt die Konstruktion einer Vektorproduktalgebra aus einer unitären Kompositionsalgebra und Satz 1.23 den umgekehrten Weg. Daraus kann man dann schließen, daß Kompositionsalgebren mit Eins und Vektorproduktalgebren äquivalente Begriffe sind.

In dieser Arbeit ist $F$ stets ein Körper mit $\operatorname{char} F \neq 2$. $V$ bezeichne stets einen endlich-dimensionalen Vektorraum über $F$.

Im folgenden Absatz wird an einige Notationen der Bilinearformen und quadratischen Formen erinnert. Eine Zusammenfassung dazu findet sich auch in [**10**] oder [**11**].

**Definition 1.1.** Sei $V$ ein Vektorraum über $F$. Eine Abbildung $N\colon V \to F$ heißt *quadratische Form auf* $V$, wenn $N(\lambda v) = \lambda^2 \cdot N(v)$ ist für alle $\lambda \in F$ und alle $v \in V$ und wenn für alle $v,\, w \in V$

$$\langle v, w\rangle_N := \frac{1}{2}\,(N(v+w) - N(v) - N(w))$$

eine Bilinearform ist.

Das Paar $(V, N)$ heißt *quadratischer Raum* und $\langle\ ,\ \rangle_N$ heißt *die* $N$ *zugeordnete Bilinearform.*

**Definition 1.2.** Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein symmetrischer bilinearer Raum über $F$. Die Abbildung

$$N_{\langle,\rangle}\colon V \longrightarrow F, \qquad N_{\langle,\rangle}(v) := \langle v, v\rangle$$

ist eine quadratische Form auf $V$. Sie heißt *die* $\langle\ ,\ \rangle$ *zugeordnete quadratische Form.*

**Lemma 1.3.** *Sei* $V$ *ein Vektorraum über* $F$*,* $\langle\ ,\ \rangle$ *eine symmetrische Bilinearform auf* $V$ *und* $N$ *eine quadratische Form auf* $V$*. Dann gilt:* $\langle\ ,\ \rangle_{N_{\langle,\rangle}} = \langle\ ,\ \rangle$ *und* $N_{\langle,\rangle_N} = N$*.*

REFERENZ: [**10**, S. 3] □

**Definition 1.4.** Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein symmetrischer bilinearer Raum über $F$.

1. Für eine Teilmenge $W \subseteq V$ ist das *orthogonale Komplement* $W^\perp$ definiert durch
$$W^\perp := \{\, v \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \text{ für alle } w \in W \,\}.$$
Offensichtlich ist $W^\perp$ ein linearer Unterraum von $V$.
2. $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ heißt *regulär*, falls $V^\perp = \{0\}$ ist.

**Lemma 1.5.** *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein symmetrischer bilinearer Raum über* $F$ *und bezeichne* $V^*$ *den Dualraum zu* $V$*. Dann gilt:*

$$(V, \langle\ ,\ \rangle) \text{ ist regulär} \iff \varphi\colon V \longrightarrow V^*,\ v \longmapsto (w \mapsto \langle v, w\rangle) \text{ ist bijektiv.}$$

REFERENZ: [**10**, S. 7] □

**Lemma 1.6.** *Sei $(V, \langle\, , \rangle)$ ein symmetrischer bilinearer regulärer Raum über $F$ und $W$ ein regulärer Unterraum von $V$. Dann gilt:*

1. $V = W \perp W^{\perp}$,
2. $(W^{\perp}, \langle\, , \rangle|_{W^{\perp}\times W^{\perp}})$ *ist regulär.*

REFERENZ: [**10**, S. 7] □

**Definition 1.7.** Eine *Kompositionsalgebra über $F$* ist ein Tripel $(C, \cdot, N)$ bestehend aus einem $F$-Vektorraum $C$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$C \times C \longrightarrow C, \qquad (x, y) \longmapsto x \cdot y$$

und einer regulären quadratischen Form

$$N : C \longrightarrow F,$$

so daß gilt:

(KA 1) $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$ für alle $x, y \in C$.

Eine Kompositionsalgebra $(C, \cdot, N)$ heißt *unitär* oder *Kompositionsalgebra mit Eins*, wenn ein $e \neq 0 \in C$ existiert, so daß gilt:

(KA 2) $x \cdot e = e \cdot x = x$ für alle $x \in C$.

**Bemerkung 1.8.** In einer unitären Kompositionsalgebra $(C, \cdot, N)$ bezeichnet $e$ stets das eindeutig bestimmte Element aus $C$ mit $x \cdot e = e \cdot x = x$ für alle $x \in C$.

Die in dieser Arbeit behandelten Aussagen über die möglichen Dimensionen von unitären Kompositionsalgebren gelten auch schon für Kompositionsalgebren, da man in einer Kompositionsalgebra durch Änderung der Multiplikation ein Einselement auf folgende Weise erhalten kann:

**Proposition 1.9.** *Sei $(C, \cdot, N)$ eine Kompositionsalgebra über $F$ mit $C \neq 0$. Dann gibt es eine bilineare Abbildung*

$$\diamond : C \times C \longrightarrow C, \qquad (x, y) \longmapsto x \diamond y,$$

*so daß $(C, \diamond, N)$ eine unitäre Kompositionsalgebra ist.*

REFERENZ: [**3, 7**] □

**Definition 1.10.** Eine *Vektorproduktalgebra* über $F$ ist ein Tripel $(V, \times, \langle\, , \rangle)$ bestehend aus einem $F$-Vektorraum $V$ zusammen mit einer bilinearen Abbildung

$$V \times V \longrightarrow V, \qquad (u, v) \longmapsto u \times v$$

und einer regulären symmetrischen Bilinearform

$$V \times V \longrightarrow F, \qquad (u, v) \longmapsto \langle u, v\rangle,$$

so daß gilt:

(VPA 1) $\langle u \times v, w\rangle = \langle u, v \times w\rangle$ für alle $u, v, w \in V$,
(VPA 2) $v \times v = 0$ für alle $v \in V$,
(VPA 3) $(u \times v) \times u = N(u)v - \langle u, v\rangle u$ für alle $u, v \in V$,

wobei $N$ die $\langle\,,\,\rangle$ zugeordnete quadratische Form ist.

Für einen symmetrischen bilinearen Raum $(V, \langle\,,\,\rangle)$ über $F$ heißt eine bilineare Abbildung $\times$ ein *Kreuzprodukt auf* $V$, falls die Regeln (VPA 1), (VPA 2) und (VPA 3) gelten.

**Definition 1.11.** Sei $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ heißt *Vektorprodukt-Unteralgebra von* $V$ über $F$, wenn $W$ ein Untervektorraum des Vektorraumes $V$ ist, wenn sich die Operation $\times\colon V \times V \to V$ zu einer Operation $W \times W \to W$ beschränken läßt und wenn die Einschränkung von $\langle\,,\,\rangle$ auf $W$

$$\langle\,,\,\rangle|_{W\times W}\colon W \times W \to F$$

regulär ist.

**Bemerkung 1.12.** Sei $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ und $W \subseteq V$ eine Vektorprodukt-Unteralgebra von $V$ über $F$, so ist $W$ zusammen mit den aus $V$ induzierten Abbildungen selbst eine Vektorproduktalgebra über $F$.

**Lemma 1.13.** *Sei $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$. Eine Teilmenge $W \subseteq V$ ist genau dann eine Vektorprodukt-Unteralgebra von $V$ über $F$, wenn gilt:*

1. $W \neq \emptyset$,
2. *Für alle $w$, $w' \in W$ und alle $\lambda$, $\mu \in F$ ist $\lambda w + \mu w' \in W$,*
3. *Für jedes $w$, $w' \in W$ ist $w \times w' \in W$,*
4. *Für jedes $w \in W$ mit $w \neq 0$ existiert ein $w' \in W$ mit $\langle w, w'\rangle \neq 0$.*

Beweis. Offensichtlich sind die Bedingungen notwendig. Sie sind sogar hinreichend, denn aus 1. und 2. folgt zunächst, daß $W$ ein Vektorraum ist. Wegen 3. läßt sich die Abbildung $\times$ auf $W$ beschränken und wegen 4. ist $\langle\,,\,\rangle|_{W\times W}$ regulär. □

**Proposition 1.14.** *Sei $V$ ein Vektorraum über $F$ und $\alpha\colon V \times V \times V \to F$ eine Trilinearform. Sind für beliebige $v$, $w \in V$ zwei der drei folgenden Bedingungen*

$$\alpha(v, v, w) = 0$$
$$\alpha(v, w, v) = 0$$
$$\alpha(v, w, w) = 0$$

*erfüllt, dann ist $\alpha$ schon alternierend.*

Beweis. Vorbemerkung: Sei $\Psi\colon V^n \to F$ eine Multilinearform, $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ beliebig und $i$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$. Sei ferner $\tau_{i,j} \in S_n$ die Transposition, welche die Elemente $i$ und $j$ vertauscht. Dann gilt:

Für $v_i = v_j$ ist $\Psi(v_1, \ldots, v_n) = 0 \Leftrightarrow \Psi(v_1, \ldots, v_n) = -\Psi(v_{\tau_{i,j}(1)}, \ldots, v_{\tau_{i,j}(n)})$

Für den Beweis von "$\Rightarrow$" der Vorbemerkung sei ohne Einschränkung $i = 1$ und $j = 2$ gegeben. Dann gilt:

$$0 = \Psi(v_1 + v_2, v_1 + v_2, v_3, \ldots, v_n) = \Psi(v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n) + \Psi(v_2, v_1, v_3, \ldots, v_n)$$

und man erhält für die Transposition $\tau_{1,2} \in S_n$

$$\Psi(v_1, \ldots, v_n) = -\Psi(v_{\tau_{1,2}(1)}, \ldots, v_{\tau_{1,2}(n)}).$$

Umgekehrt sei $v_i = v_j$ für $i,\ j \in \{1, \dots, n\}$ mit $i \neq j$ gegeben. Dann ist $v_{\tau_{i,j}(l)} = v_l$ für alle $l \in \{1, \dots, n\}$ und also

$$\Psi(v_1, \dots, v_n) = -\Psi(v_1, \dots, v_n).$$

Da in der Arbeit $\operatorname{char} F \neq 2$ vorausgesetzt ist, folgt $\Psi(v_1, \dots, v_n) = 0$.

Damit ist die Vorbemerkung gezeigt.

Sei o. E. $\alpha(v, w, w) = \alpha(v, w, v) = 0$ für alle $v,\ w \in V$. Nach der Vorbemerkung ist dies äquivalent zu

$$\alpha(v_1, v_2, v_3) = -\alpha(v_1, v_3, v_2) \quad \text{und} \quad \alpha(v_1, v_2, v_3) = -\alpha(v_3, v_2, v_1)$$

für alle $(v_1, v_2, v_3) \in V^3$. Daraus erhält man

$$\alpha(v_1, v_2, v_3) = -\alpha(v_1, v_3, v_2) = \alpha(v_2, v_3, v_1) = -\alpha(v_2, v_1, v_3)$$

und nach der Vorbemerkung folgt dann $\alpha(v, v, w) = 0$ für alle $v,\ w \in V$. Also ist $\alpha$ alternierend. □

**Notation 1.15.** *Für einen bilinearen Raum $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ über $F$ und eine bilineare Abbildung $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u \times v$ bezeichnet $f$ im weiteren Verlauf der Arbeit die Abbildung, die durch*

$$f \colon V \times V \times V \longrightarrow F, \qquad (u, v, w) \longmapsto \langle u \times v, w \rangle$$

*gegeben ist.*

**Proposition 1.16.** *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein regulärer symmetrischer bilinearer Raum über $F$ und $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u \times v$ eine bilineare Abbildung auf $V$. Dann gilt: $f$ ist genau dann alternierend, wenn die Rechenregeln* (VPA 1) *und* (VPA 2) *gelten.*

Beweis. Ist $f$ alternierend und $v \in V$ beliebig, so gilt für alle $w \in V$

$$0 = f(v, v, w) = \langle v \times v, w \rangle.$$

Da die Bilinearform regulär ist, folgt (VPA 2). Die Eigenschaft (VPA 1) gilt wegen

$$\langle u \times v, w \rangle = f(u, v, w) = f(v, w, u) = \langle v \times w, u \rangle = \langle u, v \times w \rangle.$$

Umgekehrt folgt aus (VPA 2), daß $f(u, u, v) = 0$ für $v \in V$. Ferner gilt:

$$f(u, v, u) = \langle u \times v, u \rangle = \langle u, u \times v \rangle \overset{\text{(VPA 1)}}{=} \langle u \times u, v \rangle = f(u, u, v) = 0.$$

Also ist $f$ nach Lemma 1.14 alternierend. □

**Proposition 1.17.** *Sei $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ und seien $v$, $w \in V$. Dann gilt:*

$$v \times w = -w \times v \qquad \text{(„Schiefsymmetrie“)}.$$

Beweis. Wegen (VPA 2) gilt $v \times v = 0$ für alle $v \in V$. Also erhält man für beliebige $v,\ w \in V$

$$\begin{aligned} 0 &= (v + w) \times (v + w) = (v \times v) + (v \times w) + (w \times v) + (w \times w) \\ &= (v \times w) + (w \times v), \end{aligned}$$

da das Kreuzprodukt bilinear ist. □

**Proposition 1.18.** *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein regulärer symmetrischer bilinearer Raum über* $F$ *und* $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u \times v$ *eine bilineare Abbildung auf* $V$.

1. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
   (a) *Es gilt* (VPA 3),
   (b) $u \times (v \times w) + w \times (v \times u) = 2 \cdot \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w - \langle w, v\rangle u$ *für alle* $u$, $v$, $w \in V$.
2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
   (a) $N(v \times w) = N(v)N(w) - \langle v, w\rangle^2$ *für alle* $v$, $w \in V$,
   (b) $\langle v \times w, v \times u\rangle = N(v)\langle w, u\rangle - \langle v, w\rangle\langle v, u\rangle$ *für alle* $u$, $v$, $w \in V$.

Beweis. Zu 1: (1a) $\Rightarrow$ (1b): Für $v \in V$ definiere $q$, $q_i \colon V \to V$, $(i = 1, 2)$ durch

$$\begin{aligned} q(u) &:= (u \times v) \times u, \\ q_1(u) &:= \langle u, u\rangle v, \\ q_2(u) &:= \langle u, v\rangle u. \end{aligned}$$

Da (VPA 3) gilt, folgt $q = q_1 - q_2$. Weil die Abbildungen $q$, $q_i$ $(i = 1, 2)$ quadratisch sind, kann man polarisieren. Man erhält die folgenden Bilinearformen:

$$\begin{aligned} b(u, w) &= \frac{1}{2}[q(u + w) - q(u) - q(w)] = \frac{1}{2}[(w \times v) \times u + (u \times v) \times w] \\ &\overset{1.17}{=} \frac{1}{2}[u \times (v \times w) + w \times (v \times u)], \\ b_1(u, w) &= \langle u, w\rangle v, \\ b_2(u, w) &= \frac{1}{2}[\langle u, v\rangle w + \langle w, v\rangle u]. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun, da $b(u, w) = b_1(u, w) - b_2(u, w)$ ist.

(1b) $\Rightarrow$ (1a): klar (setze $w := u$).

Zu 2: (2a) $\Rightarrow$ (2b): Analog zu 1. mit

$$\begin{aligned} q(w) &:= N(v \times w), \\ q_1(w) &:= N(v)N(w), \\ q_2(w) &:= \langle v, w\rangle^2. \end{aligned}$$

(2b) $\Rightarrow$ (2a): klar (setze $u := w$).

$\square$

Für Vektorproduktalgebren können die Axiome (VPA 1), (VPA 2) und (VPA 3) durch zwei andere ersetzt werden, die besser die Idee eines Vektorprodukts wiedergeben:

**Lemma 1.19.** *Sei* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *ein regulärer symmetrischer bilinearer Raum über* $F$ *und* $V \times V \to V$, $(u, v) \mapsto u \times v$ *eine bilineare Abbildung auf* $V$. *Dann sind die Aussagen* (VPA 1), (VPA 2) *und* (VPA 3) *äquivalent zu*

(VPA 1′) $\langle v \times w, v\rangle = \langle v \times w, w\rangle = 0$ *für alle* $v$, $w \in V$,
(VPA 2′) $N(v \times w) = N(v) \cdot N(w) - \langle v, w\rangle^2$ *für alle* $v$, $w \in V$.

Beweis. Gezeigt wird

1. (VPA 1) und (VPA 2) $\iff$ (VPA 1′)
2. (VPA 1) $\Longrightarrow$ ((VPA 3) $\iff$ (VPA 2′))

Zu 1: Sei $f$ die in 1.15 angegebene Trilinearform. Gelten die Regeln (VPA 1) und (VPA 2), so ist nach Proposition 1.16 $f$ alternierend und also

$$f(v,w,v) = \langle v \times w, v\rangle = 0$$
$$f(v,w,w) = \langle v \times w, w\rangle = 0.$$

Umgekehrt folgt aus (VPA 1′), daß für alle $v,\, w \in V$ $f(v,w,v) = f(v,w,w) = 0$ ist. Nach 1.14 ist also $f$ alternierend und damit gelten nach Proposition 1.16 die Regeln (VPA 1) und (VPA 2).

Zu 2: Wegen Proposition 1.18 2. ist (VPA 2′) äquivalent zu

$$\langle v \times w, v \times u\rangle = N(v)\langle w,u\rangle - \langle v,w\rangle\langle v,u\rangle \text{ für alle } u,v,w \in V.$$

Wegen (VPA 1) und der Bilinearität von $\langle\,,\,\rangle$ kann man diese Gleichung umformen zu

$$\langle (v \times w) \times v, u\rangle = \langle N(v)w - \langle v,w\rangle v, u\rangle \text{ für alle } u,v,w \in V.$$

Da $\langle\,,\,\rangle$ regulär ist, folgt für alle $v,\, w \in V$

$$(v \times w) \times v = N(v)w - \langle v,w\rangle v,$$

womit die Äquivalenz gezeigt ist.

□

**Notation 1.20.** *Für eine unitäre Kompositionsalgebra $(C,\cdot,N)$ über $F$ setze*

$$V_C := \{\, x \in C \mid \langle e,x\rangle_N = 0 \,\}.$$

*Für eine Vektorproduktalgebra $(V,\times,\langle\,,\,\rangle)$ über $F$ setze*

$$C_V := F \oplus V.$$

**Satz 1.21.** *Sei $(C,\cdot,N)$ eine unitäre Kompositionsalgebra über $F$. Bezeichnet $\langle\,,\,\rangle$ die $N$ zugeordnete Bilinearform und definiert man eine bilineare Abbildung auf $V_C$*

$$\times\colon V_C \times V_C \longrightarrow V_C, \qquad (u,v) \longmapsto u\cdot v - \langle u \cdot v, e\rangle e,$$

*so ist $(V_C,\times,\langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ und es gilt für $u,\, v \in V_C$:*

$$\langle u\cdot v, e\rangle = -\langle u,v\rangle.$$

Beweis. Für $u,\, v \in V_C$ ist $u \times v \in V_C$, denn

$$\langle u\cdot v - \langle u\cdot v, e\rangle e, e\rangle = \langle u \cdot v, e\rangle - \langle u\cdot v, e\rangle\langle e,e\rangle = 0.$$

Dies zeigt die Existenz der Abbildung $\times$. Offensichtlich ist die Abbildung $\times$ bilinear und die Einschränkung von $\langle\,,\,\rangle$ auf $V_C \times V_C$ ist bilinear, symmetrisch und regulär. Um zu zeigen, daß $(V_C,\times,\langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ ist, reicht es, nach Lemma 1.19, die Regeln (VPA 1′) und (VPA 2′) nachzuweisen. Seien dazu $x := ae + u$, $y := be + v \in C$ beliebig gewählt mit $a,\, b \in F$, $u,\, v \in V_C$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= (ae+u)(be+v) = abe + av + bu + u\cdot v \\ &= abe + av + bu + u \times v + \langle u \cdot v, e\rangle e \\ &= (ab + \langle u\cdot v, e\rangle)e + av + bu + u \times v \end{aligned}$$

und

$$N(x) = N(ae+u) = a^2\langle e,e\rangle + 2a\langle e,u\rangle + \langle u,u\rangle = a^2 + N(u).$$

Da (KA 1) gilt, folgt

$$\begin{aligned}0 &= N(x\cdot y) - N(x)\cdot N(y)\\ &= (ab + \langle u\cdot v, e\rangle)^2 + N(av+bu+u\times v) - \big(a^2+N(u)\big)\big(b^2+N(v)\big)\\ &= 2ab[\langle u\cdot v,e\rangle + \langle u,v\rangle] + 2a\langle v, u\times v\rangle + 2b\langle u, u\times v\rangle\\ &\quad + [\langle u\cdot v,e\rangle^2 + N(u\times v) - N(u)\cdot N(v)].\end{aligned}$$

Setzt man in dieser Gleichung $a=0$ und $b=0$, so erhält man

$$N(u\times v) = N(u)N(v) - \langle u\cdot v, e\rangle^2. \tag{1.1}$$

Für $a=0$ gilt dann mit (1.1)

$$\langle u, u\times v\rangle = 0 \tag{1.2}$$

und analog erhält man für $b=0$

$$\langle v, u\times v\rangle = 0. \tag{1.3}$$

Mit (1.1), (1.2) und (1.3) folgt die Gleichung

$$\langle u\cdot v, e\rangle = -\langle u, v\rangle. \tag{1.4}$$

Aus (1.2) und (1.3) folgt somit (VPA 1′) und aus (1.1) und (1.4) (VPA 2′). Also ist $(V_C, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$. □

**Bemerkung 1.22.** Für eine unitäre Kompositionsalgebra $(C,\cdot,N)$ über $F$ und $u$, $v\in V_C$ bezeichnet $u\times v$ das in Satz 1.21 definierte Kreuzprodukt auf $V_C$.

**Satz 1.23.** *Sei $(V,\times,\langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$. Setze $e := (1,0)\in C_V$. Für $a$, $b\in F$ und $v$, $w\in V$ sei eine bilineare Abbildung auf $C_V$ gegeben durch*

$$\begin{aligned}\cdot : C_V\times C_V &\longrightarrow C_V,\\ (ae+v, be+w) &\longmapsto (ab - \langle v,w\rangle)e + aw + bv + v\times w\end{aligned}$$

*und eine quadratische Form auf $C_V$ durch*

$$N\colon C_V \longrightarrow F, \qquad ae+v \longmapsto a^2 + \langle v,v\rangle.$$

*Dann ist $(C_V,\cdot,N)$ eine unitäre Kompositionsalgebra über $F$ mit Einselement $e$.*

Beweis. Offensichtlich ist die angegebene Abbildung $\cdot$ bilinear.

Da $F\to F$, $a\mapsto a^2$ und $V\to F$, $v\mapsto\langle v,v\rangle$ reguläre quadratische Formen auf $F$ bzw. $V$ sind, ist nach [**10**, S. 10] $N$ als Summe von regulären quadratischen Formen eine reguläre quadratische Form auf $C_V = F\oplus V$.

Im folgenden werden die Regeln (KA 1) und (KA 2) überprüft.

Seien dazu $x := ae+v$, $y := be+w$ mit $a$, $b\in F$, $v$, $w\in V$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}x\cdot e = (ae+v)\cdot e &= (1\cdot a - \langle v,0\rangle)e + a\cdot 0 + 1\cdot v + v\times 0 =\\ &= ae+v = x.\end{aligned}$$

Analog folgt $e\cdot x = x$.

Für die Multiplikativität der Norm ist zu zeigen:

$$N\left((ae+v)\cdot(be+w)\right) = N(ae+v)N(be+w).$$

Dies gilt wegen

$$\begin{aligned}
&N\left((ae+v)\cdot(be+w)\right)\\
&\quad= N(ab-\langle v,w\rangle)^2 + \langle aw+bv+v\times w, aw+bv+v\times w\rangle\\
&\quad= a^2b^2 - 2ab\langle v,w\rangle + \langle v,w\rangle^2 + a^2\langle w,w\rangle + b^2\langle v,v\rangle\\
&\qquad\quad + N(v\times w) + 2ab\langle v,w\rangle + 2a\langle w, v\times w\rangle + 2b\langle v, v\times w\rangle\\
&\quad= a^2b^2 + a^2\langle w,w\rangle + b^2\langle v,v\rangle + \langle v,v\rangle\langle w,w\rangle\\
&\quad= (a^2+\langle v,v\rangle)(b^2+\langle w,w\rangle) = N(ae+v)N(be+w).
\end{aligned}$$

Bei der Rechnung wurden die Regeln (VPA 1′) und (VPA 2′) aus Lemma 1.19 benutzt. Insgesamt erhält man also, daß $(C_V, \cdot, N)$ eine unitäre Kompositionsalgebra über $F$ ist. □

**Bemerkung 1.24.** Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ über $F$ und $u, v \in V$ bezeichne $u\cdot v$ die bilineare Abbildung auf $C_V$, die nach Satz 1.23 durch

$$u\cdot v = -\langle u,v\rangle e + u\times v$$

gegeben ist.

**Proposition 1.25.** *Sei $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ und seien $u$, $v \in V$. Dann gilt für das Produkt in $C_V$:*

$$uv - vu = 2(u\times v).$$

Beweis. Nach Satz 1.23 ist

$$uv = -\langle u,v\rangle e + u\times v, \tag{1.5}$$

$$vu = -\langle v,u\rangle e + v\times u. \tag{1.6}$$

Subtrahiert man (1.6) von (1.5), so liefert dies

$$uv - vu = u\times v - v\times u \overset{1.17}{=} 2(u\times v),$$

und also die Behauptung. □

**Notation 1.26.** *Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ bezeichne $\mathbf{C}(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ die in Satz 1.23 konstruierte unitäre Kompositionsalgebra $(C_V, \cdot, N)$.*

*Für eine unitäre Kompositionsalgebra $(C, \cdot, N)$ bezeichne $\mathbf{V}(C, \cdot, N)$ die in Satz 1.21 konstruierte Vektorproduktalgebra $(V_C, \times, \langle\ ,\ \rangle)$.*

Die Notationen für Kompositionsalgebren und Vektorproduktalgebren bezeichnen die gleichen Strukturen, wie das folgende Korollar zeigt:

**Korollar 1.27.** *Es ist $\mathbf{V}(\mathbf{C}(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)) = (V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ und $\mathbf{C}(\mathbf{V}(C, \cdot, N)) = (C, \cdot, N)$.*

Beweis. Zunächst wird gezeigt, daß $V_{C_V} = V$ ist.

"$\supseteq$": Sei $v \in V$ beliebig gegeben. Da $C_V = F \oplus V$ ist, ist $v \in C_V$ und $\langle e, v\rangle = 0$, also ist $v \in V_{C_V}$.

"$\subseteq$": Sei $\tilde{v} \in V_{C_V}$, d. h. $\tilde{v} = ae + v$ mit $a \in F$, $v \in V$ und $\langle e, \tilde{v} \rangle = 0$. Dann gilt $0 = \langle e, \tilde{v} \rangle = a \cdot N(e) + \langle e, v \rangle = a$ und also ist $\tilde{v} \in V$.

Insgesamt gilt $V_{C_V} = V$.

Bezeichnet $\times'$ die in Satz 1.21 definierte bilineare Abbildung $V_{C_V} \times V_{C_V} \to V_{C_V}$ und $\langle\ ,\ \rangle'\colon V_{C_V} \times V_{C_V} \to F$ die definierte Bilinearform, dann gilt für $v$, $w \in V_{C_V}$:

$$\begin{aligned} v \times' w &= v \cdot w + \langle v, w \rangle e \overset{1.23}{=} -\langle v, w \rangle e + v \times w + \langle v, w \rangle e \\ &= v \times w \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle' &= \frac{1}{2}\left(N(v+w) - N(v) - N(w)\right) \\ &\overset{1.23}{=} \frac{1}{2}\left(\langle v+w, v+w \rangle - \langle v, v \rangle - \langle w, w \rangle\right) = \langle v, w \rangle. \end{aligned}$$

Also ist $\mathbf{V}(\mathbf{C}(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)) = (V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$.

Daß $C_{V_C} = C$ ist, sieht man folgendermaßen ein:

Sei $x \in C_{V_C}$, dann ist $x$ von der Form $x = ae + v$ mit $a \in F$ und $v \in V_C \subset C$, und also ist $x \in C$. Für die umgekehrte Inklusion läßt sich jedes $x \in C$ schreiben als $x = ae + v$ mit $a \in F$ und $v \in V$ mit $\langle e, v \rangle = 0$.

Es bezeichnet $\circ$ die in Satz 1.23 definierte bilineare Abbildung $C_{V_C} \times C_{V_C} \to C_{V_C}$ und $\tilde{N}$ die definierte quadratische Form auf $C_{V_C}$. Für $x$, $y \in C_{V_C}$, $x = ae + v$, $y = be + w$ mit $a$, $b \in F$, $v$, $w \in V_C$ gilt dann:

$$\begin{aligned} x \circ y &= (ae + v) \circ (be + w) \overset{1.23}{=} (ab - \langle v, w \rangle)e + aw + bv + v \times w \\ &\overset{1.21}{=} ab - \langle v, w \rangle e + aw + bv + v \cdot w + \langle v, w \rangle e \\ &= (ae + v) \cdot (be + w) = x \cdot y \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{N}(x) &= \tilde{N}(ae + v) \overset{1.23}{=} a^2 + \langle v, v \rangle = a^2 + N(v) \\ &= a^2 N(e) + 2a\underbrace{\langle e, v \rangle}_{=0,\ \mathrm{da}\, v \in V_C} + N(v) = N(ae + v) = N(x). \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\mathbf{C}(\mathbf{V}(C, \cdot, N)) = (C, \cdot, N)$ ist. $\square$

KAPITEL 2

# Die Tensoren $R_n$

In diesem Kapitel werden auf einer Vektorproduktalgebra die Tensoren $R_1, \dots, R_4$ definiert. In Satz 2.4 werden damit Aussagen über die Kommutativität und Assoziativität der Kompositionsalgebren getroffen. Ferner wird die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigte Aussage, daß $R_4 \equiv 0$ ist, bewiesen.

**Definition 2.1.** Sei $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$. Die Tensoren

$$R_n \colon V^{\otimes n} \longrightarrow V$$

sind für $n = 1, 2, 3, 4$ definiert als

$$\begin{aligned} R_1(v) &:= v, \\ R_2(v \otimes w) &:= v \times w, \\ R_3(u \otimes v \otimes w) &:= (u \times v) \times w - v\langle u, w\rangle + u\langle v, w\rangle, \\ R_4(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3 \otimes t) &:= R_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) \times t \\ &\quad - \sum_{i=1}^{3} v_i \langle v_{i+1} \times v_{i+2}, t\rangle + \sum_{i=1}^{3} v_{i+1} \times v_{i+2} \langle v_i, t\rangle, \end{aligned}$$

wobei $i$ mod 3 betrachtet wird.

**Proposition 2.2.** *Die Abbildung $R_3$ ist alternierend.*

Beweis. Seien $v, w \in V$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned} R_3(v \otimes v \otimes w) &\overset{\text{(VPA 2)}}{=} (v \times v) \times w - v\langle v, w\rangle + v\langle v, w\rangle = 0, \\ R_3(v \otimes w \otimes v) &= (v \times w) \times v - w\langle v, v\rangle + v\langle w, v\rangle \\ &\overset{\text{(VPA 3)}}{=} N(v)w - \langle v, w\rangle v - N(v)w + v\langle w, v\rangle = 0. \end{aligned}$$

Also ist $R_3$ nach Lemma 1.14 alternierend. $\square$

**Definition 2.3.** Sei $R$ ein Ring und $A$ eine $R$-Algebra. Für $x, y \in A$ heißt

$$[x, y] := xy - yx$$

der *Kommutator von $x$ und $y$* und für $x, y, z \in A$ heißt

$$\{x, y, z\} := (xy)z - x(yz)$$

der *Assoziator von $x$, $y$ und $z$.*

**Satz 2.4.** *Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ über $F$ gilt:*

1. *Für $v,\ w \in V$ ist $2 \cdot R_2(v \otimes w)$ der Kommutator in $C_V$.*
   *Insbesondere gilt: $R_2 \equiv 0 \iff \mathbf{C}(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ ist kommutativ.*
2. *Für $v,\ w,\ z \in V$ ist $2 \cdot R_3(v \otimes w \otimes z)$ der Assoziator in $C_V$.*
   *Insbesondere gilt: $R_3 \equiv 0 \iff \mathbf{C}(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ ist assoziativ.*
3. *$R_4 \equiv 0$.*

Beweis. Zu 1: Nach Proposition 1.25 ist $v \times w = \frac{1}{2}(vw - wv)$ für $v,\ w \in V$ und daraus erhält man $2 \cdot R_2(v \otimes w) = vw - wv = [v, w]$. Also ist $R_2 \equiv 0$ äquivalent zu der Aussage, daß die bilineare Abbildung $\cdot\colon V \times V \to C_V$ symmetrisch ist. Da $C_V = F \oplus V$ und $F$ ein Körper ist, folgt die Behauptung.

Zu 2: Seien $u,\ v,\ w \in V$. Da nach Satz 1.21 $vw = v \times w - \langle v, w\rangle e$ gilt, erhält man für $u,\ v,\ w \in V$:

$$\begin{aligned}
\{u, v, w\} &= (uv)w - u(vw) = (u \times v - \langle u, v\rangle e)w - u(v \times w - \langle v, w\rangle e)\\
&= (u \times v) \cdot w - \langle u, v\rangle w - u \cdot (v \times w) + \langle v, w\rangle u\\
&= (u \times v) \times w - \langle u \times v, w\rangle e - \langle u, v\rangle w\\
&\qquad - u \times (v \times w) + \langle u, v \times w\rangle e + \langle v, w\rangle u\\
&\overset{1.18\,1.}{=} (u \times v) \times w - \langle u \times v, w\rangle e - \langle u, v\rangle w\\
&\qquad + w \times (v \times u) - 2\langle u, w\rangle v + \langle u, v\rangle w + \langle w, v\rangle u\\
&\qquad + \langle u, v \times w\rangle e + \langle v, w\rangle u\\
&= 2 \cdot (u \times v) \times w + 2 \cdot \langle v, w\rangle u - 2 \cdot \langle u, w\rangle v\\
&= 2 \cdot R_3(u \otimes v \otimes w),
\end{aligned}$$

womit der erste Teil der Aussage gezeigt ist.

Also ist $R_3 \equiv 0$ äquivalent zu der Aussage, daß $V$ bzgl. der bilinearen Abbildung $\cdot\colon V \times V \to C_V$ assoziativ ist. Daraus folgt die Behauptung, da $C_V = F \oplus V$ und $F$ ein Körper ist.

Zu 3: Definiere für $u,\ v,\ w \in V$:

$$\Delta(u, v, w) := (u \times v) \times w + u \times (v \times w).$$

Nach Proposition 1.18 1. ist dann:

$$\Delta(u, v, w) = 2 \cdot \langle u, w\rangle v - \langle u, v\rangle w - \langle w, v\rangle u.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\Delta(u \times v, w, t) - \Delta(u, v, w \times t) + u \times \Delta(v, w, t) - \Delta(u, v \times w, t) + \Delta(u, v, w) \times t\\
&\quad = ((u \times v) \times w) \times t + (u \times v) \times (w \times t) - (u \times v) \times (w \times t) - u \times (v \times (w \times t))\\
&\qquad + u \times ((v \times w) \times t) + u \times (v \times (w \times t)) - (u \times (v \times w)) \times t - u \times ((v \times w) \times t)\\
&\qquad + ((u \times v) \times w) \times t + (u \times (v \times w)) \times t\\
&\quad = 2 \cdot ((u \times v) \times w) \times t
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Die Aussage $R_4 \equiv 0$ ist folgende:

$$\begin{aligned}2 \cdot ((u \times v) \times w) \times t = 2\langle u, w\rangle v \times t - 2\langle v, w\rangle u \times t + 2\langle v \times w, t\rangle u \\ + 2\langle w \times u, t\rangle v + 2\langle u \times v, t\rangle w - 2\langle u, t\rangle v \times w \\ - 2\langle v, t\rangle w \times u - 2\langle w, t\rangle u \times v.\end{aligned}$$

Dies erhält man mittels (2.1) auf die folgende Weise:

$$\begin{aligned}\text{l. S.} &= \Delta(u \times v, w, t) - \Delta(u, v, w \times t) + u \times \Delta(v, w, t) \\ &\quad - \Delta(u, v \times w, t) + \Delta(u, v, w) \times t \\ &= 2\langle u \times v, t\rangle w - \langle u \times v, w\rangle t - \langle t, w\rangle u \times v \\ &\quad - 2\langle u, w \times t\rangle v + \langle u, v\rangle w \times t + \langle w \times t, v\rangle u \\ &\quad + 2\langle v, t\rangle u \times w - \langle v, w\rangle u \times t - \langle t, w\rangle u \times v \\ &\quad - 2\langle u, t\rangle v \times w + \langle u, v \times w\rangle t + \langle t, v \times w\rangle u \\ &\quad + 2\langle u, w\rangle v \times t - \langle u, v\rangle w \times t - \langle w, v\rangle u \times t \\ &= 2\langle u \times v, t\rangle w - 2\langle t, w\rangle u \times v - 2\langle u, w \times t\rangle v + 2\langle v, t\rangle u \times w \\ &\quad - 2\langle v, w\rangle u \times t - 2\langle u, t\rangle v \times w + 2\langle u, w\rangle v \times t + 2\langle w \times t, v\rangle u \\ &= \text{r. S.}\end{aligned}$$

und damit ist der Satz bewiesen.

$\square$

KAPITEL 3

# Dimension von Vektorproduktalgebren

In diesem Kapitel werden auf einer $d$-dimensionalen Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ die Abbildungen $Q_n \in (V^{\otimes(n+1)})^\star$ definiert und deren Normen betrachtet. Mit Hilfe der im vorigen Kapitel gezeigten Aussage, daß der Tensor $R_4$ identisch Null ist, ergibt sich im Grundkörper die Gleichung

$$d(d-1)(d-3)(d-7) = 0.$$

Daraus kann man dann für Körper der Charakteristik Null den Satz von Hurwitz beweisen und zusätzliche Aussagen über die möglichen Dimensionen von kommutativen und assoziativen Kompositionsalgebren treffen.

Im folgenden wird an einige für den späteren Verlauf der Arbeit benötigte Aussagen im Zusammenhang mit den Bilinearformen von Tensorprodukten und Dualräumen erinnert:

Für bilineare Räume $(V, \langle\,,\,\rangle_V)$ und $(W, \langle\,,\,\rangle_W)$ über $F$ ist die Bilinearform auf $V \otimes W$ gegeben durch

$$\langle v \otimes w, v' \otimes w' \rangle_{V \otimes W} = \langle v, v' \rangle_V \cdot \langle w, w' \rangle_W$$

für alle $v$, $v' \in V$ und alle $w$, $w' \in W$. Also ist $(V \otimes W, \langle\,,\,\rangle_{V\otimes W})$ ein bilinearer Raum über $F$. Sind $(V, \langle\,,\,\rangle_V)$ und $(W, \langle\,,\,\rangle_W)$ reguläre symmetrische bilineare Räume, dann ist $(V \otimes W, \langle\,,\,\rangle_{V\otimes W})$ auch ein regulärer symmetrischer bilinearer Raum (vgl. [**8**, S. 10]).

Ist $d := \dim V$, $d' := \dim W$, $(e_i)_1^d$ eine Orthonormalbasis von $V$ und $(f_j)_1^{d'}$ eine Orthonormalbasis von $W$, so ist $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ eine Orthonormalbasis von $V \otimes W$, denn für $k$, $m \in \{1, \dots, d\}$ und für $l$, $n \in \{1, \dots, d'\}$ gilt

$$\langle e_k \otimes f_l, e_m \otimes f_n \rangle_{V\otimes W} = \langle e_k, e_m \rangle_V \cdot \langle f_l, f_n \rangle_W = \delta_{(k,l)(m,n)}.$$

Ist $(V, \langle\,,\,\rangle_V)$ ein regulärer symmetrischer bilinearer Raum über $F$ und bezeichnet man mit $V^\star$ den zu $V$ dualen Raum, dann gibt es wegen der Regularität einen Isomorphismus $\varphi\colon V \to V^\star$ mit $\varphi(v)(w) := \langle v, w \rangle$ (vgl. 1.5). Die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}$ weist jeder Linearform $f \in V^\star$ das Element $\sum_{i=1}^d f(e_i)e_i$ aus $V$ zu, wobei $(e_i)_1^d$ eine Orthonormalbasis von $V$ ist. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß $\varphi$ und $\varphi^{-1}$ zueinander inverse Abbildungen sind. Aus $(V, \langle\,,\,\rangle_V)$ erhält man folgende Bilinearform auf $V^\star$

$$\begin{aligned} \langle\,,\,\rangle_{V^\star}\colon V^\star \times V^\star &\to F \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \sum_{i=1}^d \alpha(e_i) \cdot \beta(e_i), \end{aligned}$$

wobei $(V^\star, \langle\,,\,\rangle_{V^\star})$ ist ein regulärer symmetrischer bilinearer Raum über $F$ ist.

Ist $(e_i)_1^d$ eine Orthonormalbasis von $V$ und ${e_i}^\star$ für $i \in \{1,\dots,d\}$ der Homomorphismus mit ${e_i}^\star(e_j) = \delta_{ij}$, dann ist $({e_i}^\star)_1^d$ eine Orthonormalbasis von $(V^\star, \langle\ ,\ \rangle_{V^\star})$, denn

$$\langle {e_i}^\star, {e_j}^\star \rangle_{V^\star} = \sum_{k=1}^{d} {e_i}^\star(e_k){e_j}^\star(e_k) = \delta_{ij}.$$

Ferner gelten die Rechenregeln:

**Proposition 3.1.** *Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein symmetrischer bilinearer Raum über $F$, $d$ die Dimension von $V$, $N$ die $\langle\ ,\ \rangle$ zugeordnete quadratische Form auf $V$ und $(e_i)_1^d$ eine Orthonormalbasis von $V$. Dann gilt:*

1. $v = \sum_{i=1}^d \langle v, e_i\rangle \cdot e_i$,
2. $N(v) = \sum_{i=1}^d \langle v, e_i\rangle^2$.

Beweis. Da $(e_i)_1^d$ eine Basis von $V$ ist, hat jedes $v \in V$ eine Darstellung $v = \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i$ mit $\lambda_i \in F$.

Zu 1: Für $j \in \{1,\dots,d\}$ ist

$$\langle v, e_j\rangle = \langle \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i, e_j\rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i \langle e_i, e_j\rangle = \lambda_j.$$

Daraus erhält man $v = \sum_{i=1}^d \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^d \langle v, e_i\rangle \cdot e_i$.

Zu 2: Es gilt $N(v) = N(\sum_{i=1}^d \lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^d N(\lambda_i e_i) = \sum_{i=1}^d {\lambda_i}^2 \overset{1.}{=} \sum_{i=1}^d \langle v, e_i\rangle^2$ und somit gilt die Behauptung.

□

**Notation 3.2.** *Sei $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$, $v_1,\dots,v_{n+1} \in V$ und $n = 1,2,3,4$. Dann bezeichnen $Q_n$ und $N_n$ die Abbildungen*

$$\begin{aligned} Q_n \colon V^{\otimes(n+1)} &\to F \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_{n+1} &\mapsto \langle R_n(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n), v_{n+1}\rangle \end{aligned}$$

*und*

$$N_n := N_{(V^{\otimes(n+1)})^*}(Q_n).$$

Für die leichtere Berechnung der $N_n$ sei ohne Einschränkung statt einer Orthogonalbasis von $V$ über $F$ eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^d$ von $V$ über einem algebraischen Abschluß von $F$ gegeben.

**Lemma 3.3.** *Sei $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ und $d$ die Dimension von $V$. Sei $(e_i)_{i=1}^d$ eine Orthonormalbasis von $V$ und $(g_j)_{j=1}^{d^n}$ die von $(e_i)_{i=1}^d$ induzierte Orthonormalbasis von $V^{\otimes n}$. Dann gilt für $n = 1, 2, 3, 4$:*

$$N_n = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d^n} \left(Q_n(g_j \otimes e_i)\right)^2 = \sum_{j=1}^{d^n} N\left(R_n(g_j)\right),$$

*wobei $N$ die $\langle\ ,\ \rangle$ zugeordnete quadratische Form ist.*

Beweis. Für $(e_i)_{i=1}^d$ und $(g_j)_{j=1}^{d^n}$ bezeichne $((g_j \otimes e_i)^\star)_{i,j}$ die zu $(g_j \otimes e_i)_{i,j}$ gehörige duale Basis. Dann ist $((g_j \otimes e_i)^\star)_{i,j}$ eine Orthonormalbasis von $(V^{\otimes n} \otimes V)^\star$. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
N_{(V^{\otimes n}\otimes V)^\star}(Q_n) &= \sum_{i,j} \langle Q_n, (g_j \otimes e_i)^\star \rangle^2_{(V^{\otimes n}\otimes V)^\star} \\
&= \sum_{i,j} \langle \sum_{k,l} \langle Q_n, (g_l \otimes e_k)^\star \rangle_{(V^{\otimes n}\otimes V)^\star} (g_l \otimes e_k)^\star, (g_j \otimes e_i)^\star \rangle^2_{(V^{\otimes n}\otimes V)^\star} \\
&= \sum_{i,j} \langle \sum_{k,l} (\sum_{r,s} Q_n(g_s \otimes e_r) \cdot \underbrace{(g_l \otimes e_k)^\star (g_s \otimes e_r)}_{=\delta_{(k,l)(r,s)}}) (g_l \otimes e_k)^\star, (g_j \otimes e_i)^\star \rangle^2_{(V^{\otimes n}\otimes V)^\star} \\
&= \sum_{i,j} \langle \sum_{k,l} Q_n(g_l \otimes e_k)(g_l \otimes e_k)^\star, (g_j \otimes e_i)^\star \rangle^2_{(V^{\otimes n}\otimes V)^\star} \\
&= \sum_{i,j} \left( \sum_{k,l} Q_n(g_l \otimes e_k) \delta_{(i,j)(k,l)} \right)^2 = \sum_{i,j} \left( Q_n(g_j \otimes e_i) \right)^2 .
\end{aligned}$$

Die zweite Gleichheit der Behauptung folgt aus:

$$\begin{aligned}
N_n &= \sum_{i,j} Q_n(g_j \otimes e_i)^2 = \sum_{i,j} \langle R_n(g_j), e_i \rangle^2 = \sum_{j=1}^{d^n} \left( \sum_{i=1}^{d} \langle R_n(g_j), e_i \rangle^2 \right) \\
&\overset{3.1\,2.}{=} \sum_{j=1}^{d^n} N(R_n(g_j)).
\end{aligned}$$

□

Für den Beweis des Satzes 3.6 werden in den folgenden Hilfssätzen einige technische Vorbereitungen getroffen.

**Hilfssatz 3.4.** *Sei $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ mit $d = \dim V$ und $(e_i)_{i=1}^d$ eine Orthonormalbasis von $V$, sei $v \in V$. Dann gilt:*

1. $\sum_{i=1}^d e_i \times (v \times e_i) = (d-1)v$,
2. $\sum_{i=1}^d N(v \times e_i) = (d-1)N(v)$,
3. $\sum_{i,j,k=1}^d N\left((e_i \times e_j) \times e_k\right) = (d-1)^2 \cdot d \cdot 1_F$,
4. $\sum_{i,j,k=1}^d N(e_j)\langle e_i, e_k\rangle^2 = d^2 \cdot 1_F$,
5. $\sum_{i,j,k=1}^d \langle (e_i \times e_j) \times e_k, e_j\rangle\langle e_i, e_k\rangle = (d-1)d \cdot 1_F$,
6. $\sum_{i,j,k=1}^d \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_k\rangle\langle e_j, e_i\rangle = d \cdot 1_F$.

Beweis. Zu 1: Wegen (VPA 3) gilt

$$e_i \times (v \times e_i) = N(e_i)v - \langle e_i, v\rangle e_i$$

und damit erhält man

$$\sum_{i=1}^d e_i \times (v \times e_i) = \sum_{i=1}^d N(e_i)v - \sum_{i=1}^d \langle e_i, v\rangle e_i \overset{3.1\,1.}{=} dv - v = (d-1)\cdot v.$$

Zu 2:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{d} N(v\times e_i) &\overset{(\mathrm{VPA}\ 2')}{=} \sum_{i=1}^{d} N(v)N(e_i) - \sum_{i=1}^{d}\langle v, e_i\rangle^2 \overset{3.1\,2.}{=} d\cdot N(v) - N(v)\\ &= (d-1)N(v).\end{aligned}$$

Zu 3:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k=1}^{d} N((e_i\times e_j)\times e_k) &= \sum_{i,j=1}^{d}\left(\sum_{k=1}^{d} N\left((e_i\times e_j)\times e_k\right)\right)\\ &\overset{2.}{=} \sum_{i,j=1}^{d}(d-1)\cdot N(e_i\times e_j) = (d-1)\sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d} N(e_i\times e_j)\right)\\ &\overset{2.}{=} (d-1)^2\sum_{i=1}^{d} N(e_i) = (d-1)^2\cdot d\cdot 1_F.\end{aligned}$$

Zu 4:

$$\sum_{i,j,k=1}^{d} N(e_j)\langle e_i, e_k\rangle^2 = \sum_{j=1}^{d}\left(N(e_j)\cdot\sum_{i,k=1}^{d}\underbrace{\langle e_i, e_k\rangle^2}_{=0\,\text{für}\,i\neq k}\right) = \sum_{j=1}^{d}\cdot\sum_{i=1}^{d}\langle e_i, e_i\rangle^2 = d^2\cdot 1_F.$$

Zu 5:

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k=1}^{d}\langle (e_i\times e_j)\times e_k, e_j\rangle\underbrace{\langle e_i, e_k\rangle^2}_{=0\,\text{für}\,i\neq k} &= \sum_{j=1}^{d}\langle\sum_{i=1}^{d}\left((e_i\times e_j)\times e_i\right), e_j\rangle\\ &\overset{1.}{=} (d-1)\sum_{j=1}^{d} N(e_j) = (d-1)d\cdot 1_F.\end{aligned}$$

Zu 6: Da $\langle e_i, e_j\rangle = 0$ für $i\neq j$, gilt:

$$\sum_{i,j,k=1}^{d}\langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_k\rangle\langle e_j, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{d}\langle e_i, e_i\rangle^2 = d\cdot 1_F.$$

□

**Hilfssatz 3.5.** *Für eine Vektorproduktalgebra $(V,\times,\langle\ ,\ \rangle)$ über $F$ mit $d=\dim V$ und eine Orthonormalbasis $(e_i)_{i=1}^d$ von $V$ gilt:*

1. $\sum_{i,j,k,l=1}^{d} N(e_j\times e_k)\langle e_i, e_l\rangle^2 = d^2(d-1)\cdot 1_F$,
2. $\sum_{i,j,k,l=1}^{d}\langle e_j\times e_k, e_k\times e_i\rangle\langle e_i, e_l\rangle\langle e_j, e_l\rangle = -d(d-1)\cdot 1_F$,
3. $\sum_{i,j,k,l=1}^{d} N(e_i)\langle e_j\times e_k, e_l\rangle^2 = d^2(d-1)\cdot 1_F$,
4. $\sum_{i,j,k,l=1}^{d}\langle e_j\times e_k, e_l\rangle\langle e_k\times e_i, e_l\rangle\langle e_i, e_j\rangle = -d(d-1)\cdot 1_F$.

Beweis. Zu 1:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} N(e_j \times e_k) \underbrace{\langle e_i, e_l\rangle^2}_{=0 \text{ für } i\neq l} = \sum_{i,j,k=1}^{d} N(e_j \times e_k) N(e_i)^2$$
$$= \sum_{i,j=1}^{d} \left( \sum_{k=1}^{d} N(e_j \times e_k) \right) \overset{3.4\,2.}{=} \sum_{i,j=1}^{d} (d-1) N(e_j) = (d-1)d^2 \cdot 1_F.$$

Zu 2:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_k \times e_i\rangle \underbrace{\langle e_i, e_l\rangle\langle e_j, e_l\rangle}_{=0 \text{ für } i\neq l \text{ oder } j\neq l} = \sum_{k,l=1}^{d} \langle e_l \times e_k, e_k \times e_l\rangle N(e_l)^2$$
$$= -\sum_{k=1}^{d} \left( \sum_{l=1}^{d} N(e_k \times e_l) \right) \overset{3.4\,2.}{=} -\sum_{k=1}^{d} (d-1) N(e_k) = -d(d-1) \cdot 1_F.$$

Zu 3:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} N(e_i)\langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2 = d \cdot \sum_{j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2 = d \cdot \sum_{j,k=1}^{d} \left( \sum_{l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2 \right)$$
$$\overset{3.1\,2.}{=} d \cdot \sum_{j,k=1}^{d} N(e_j \times e_k) \overset{3.4\,2.}{=} d \cdot \sum_{j=1}^{d} (d-1) N(e_j) = d^2(d-1) \cdot 1_F.$$

Zu 4:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle\langle e_k \times e_i, e_l\rangle \underbrace{\langle e_i, e_j\rangle}_{=0 \text{ für } i\neq j}$$
$$= \sum_{j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle\langle e_k \times e_j, e_l\rangle N(e_j) = -\sum_{j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2$$
$$\overset{3.}{=} -d(d-1) \cdot 1_F.$$

□

**Satz 3.6.** *Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ über $F$ mit $d = \dim V$ gilt:*

$$N_1 = d \cdot 1_F$$
$$N_2 = d(d-1) \cdot 1_F$$
$$N_3 = d(d-1)(d-3) \cdot 1_F$$
$$N_4 = d(d-1)(d-3)(d-7) \cdot 1_F$$

Beweis. Sei $(e_i)_{i=1}^{d}$ eine Orthonormalbasis von $V$ über $F$. Die Aussage für $N_1$ ist klar, da

$$N_1 \overset{3.3}{=} \sum_{i=1}^{d} N\left(R_1(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{d} N(e_i) = d \cdot 1_F.$$

Für $N_2$ gilt dann:

$$N_2 \overset{3.3}{=} \sum_{i,j=1}^{d} N\left(R_2(e_i \otimes e_j)\right) = \sum_{i=1}^{d}\left(\sum_{j=1}^{d} N(e_i \times e_j)\right) \overset{3.4\,2.}{=} \sum_{i=1}^{d}(d-1)N(e_i) = d(d-1)\cdot 1_F.$$

Für $N_3$ erhält man:

$$\begin{aligned}
N_3 &\overset{3.3}{=} \sum_{i,j,k=1}^{d} N\left(R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k)\right) = \sum_{i,j,k=1}^{d} N\left((e_i \times e_j) \times e_k - e_j\langle e_i, e_k\rangle + e_i\langle e_k, e_j\rangle\right) \\
&= \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{d} N((e_i \times e_j) \times e_k)}_{=d(d-1)^2\cdot 1_F \text{ nach } 3.4\,3.} + \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{d} N(e_j)\langle e_i, e_k\rangle^2}_{=d^2\cdot 1_F \text{ nach } 3.4\,4.} + \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{d} N(e_i)\langle e_k, e_j\rangle^2}_{=d^2\cdot 1_F \text{ nach } 3.4\,4.} \\
&\quad - 2\cdot \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{d} \langle (e_i \times e_j) \times e_k, e_j\rangle\langle e_i, e_k\rangle}_{=d(d-1)\cdot 1_F \text{ nach } 3.4\,5.} + 2\cdot \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{d} \langle (e_i \times e_j) \times e_k, e_i\rangle\langle e_j, e_k\rangle}_{=-d(d-1)\cdot 1_F \text{ nach } 3.4\,5.} \\
&\quad - 2\cdot \underbrace{\sum_{i,j,k=1}^{d} \langle e_i, e_k\rangle\langle e_j, e_k\rangle\langle e_j, e_i\rangle}_{=d\cdot 1_F \text{ nach } 3.4\,6.} \\
&= \left(d(d-1)^2 + d^2 + d^2 - 2d(d-1) - 2d(d-1) - 2d\right)\cdot 1_F \\
&= \left(d(d-1)^2 + 2d^2 - 4d(d-1) - 2d\right)\cdot 1_F = \left(d(d-1)(d-1-4) + 2d(d-1)\right)\cdot 1_F \\
&= d(d-1)(d-3)\cdot 1_F.
\end{aligned}$$

Jetzt wird noch gezeigt, daß $N_4 = d(d-1)(d-3)(d-7)\cdot 1_F$ ist:

$$\begin{aligned}
N_4 &\overset{3.3}{=} \sum_{i,j,k,l=1}^{d} N\left(R_4(e_i \otimes e_j \otimes e_k \otimes e_l)\right) \\
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{d} N(R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l - e_i\langle e_j \times e_k, e_l\rangle - e_j\langle e_k \times e_i, e_l\rangle \\
&\qquad - e_k\langle e_i \times e_j, e_l\rangle + e_j \times e_k\langle e_i, e_l\rangle + e_k \times e_i\langle e_j, e_l\rangle \\
&\qquad + e_i \times e_j\langle e_k, e_l\rangle)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{d} N\left(R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l\right) \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} N\left(e_i\langle e_j \times e_k, e_l\rangle + e_j\langle e_k \times e_i, e_l\rangle + e_k\langle e_i \times e_j, e_l\rangle\right) \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} N\left(e_j \times e_k\langle e_i, e_l\rangle + e_k \times e_i\langle e_j, e_l\rangle + e_i \times e_j\langle e_k, e_l\rangle\right) \\
&\quad - 2 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l, \\
&\qquad\qquad e_i\langle e_j \times e_k, e_l\rangle + e_j\langle e_k \times e_i, e_l\rangle + e_k\langle e_i \times e_j, e_l\rangle\rangle \\
&\quad + 2 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l, \\
&\qquad\qquad e_j \times e_k\langle e_i, e_l\rangle + e_k \times e_i\langle e_j, e_l\rangle + e_i \times e_j\langle e_k, e_l\rangle\rangle \\
&\quad - 2 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_i\langle e_j \times e_k, e_l\rangle + e_j\langle e_k \times e_i, e_l\rangle + e_k\langle e_i \times e_j, e_l\rangle, \\
&\qquad\qquad e_j \times e_k\langle e_i, e_l\rangle + e_k \times e_i\langle e_j, e_l\rangle + e_i \times e_j\langle e_k, e_l\rangle\rangle.
\end{aligned}
$$

Im folgenden werden, um eine übersichtliche Darstellung zu erhalten, die Summanden der letzten Zeilen einzeln berechnet. Dabei ist es von Vorteil, bei einigen Summanden eine Umindizierung vorzunehmen, um sie anschließend besser zusammenfassen zu können. Der erste Summand ergibt dann

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,l=1}^{d} N\left(R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l\right) = \sum_{i,j,k=1}^{d} \left( \sum_{l=1}^{d} N\left(R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l\right) \right) \\
&\overset{3.4\,2.}{=} \sum_{i,j,k=1}^{d} (d-1) \cdot N\left(R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k)\right) = (d-1) \cdot N_3 = d(d-1)^2(d-3) \cdot 1_F.
\end{aligned}
$$

Für den zweiten Summanden gilt:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,l=1}^{d} N\left(e_i\langle e_j \times e_k, e_l\rangle + e_j\langle e_k \times e_i, e_l\rangle + e_k\langle e_i \times e_j, e_l\rangle\right) \\
&\quad = 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2 N(e_i) + 3 \cdot 2 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle\langle e_k \times e_i, e_l\rangle\langle e_i, e_j\rangle \\
&\overset{3.5\,3.\text{ und }4.}{=} 3 \cdot d^2(d-1) \cdot 1_F + 6 \cdot (-d(d-1)) \cdot 1_F = 3d(d-1)(d-2) \cdot 1_F.
\end{aligned}
$$

Für den dritten Summanden erhält man:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,l=1}^{d} N\left(e_j \times e_k\langle e_i, e_l\rangle + e_k \times e_i\langle e_j, e_l\rangle + e_i \times e_j\langle e_k, e_l\rangle\right) \\
&\quad = 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} N(e_j \times e_k)\langle e_i, e_l\rangle^2 + 3 \cdot 2 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_k \times e_i\rangle\langle e_i, e_l\rangle\langle e_j, e_l\rangle \\
&\quad \overset{3.5\ \text{1. und 2.}}{=} 3 \cdot d^2(d-1) \cdot 1_F - 6 \cdot d(d-1) \cdot 1_F = 3d(d-1)(d-2) \cdot 1_F.
\end{aligned}$$

Für den vierten Summanden hat man:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l, \\
&\qquad\qquad e_i\langle e_j \times e_k, e_l\rangle + e_j\langle e_k \times e_i, e_l\rangle + e_k\langle e_i \times e_j, e_l\rangle\rangle \\
&\quad = 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l, e_i\rangle\langle e_j \times e_k, e_l\rangle \\
&\quad = 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle R_3(e_k \otimes e_j \otimes e_i) \times e_i, e_l\rangle\langle e_j \times e_k, e_l\rangle \\
&\quad = 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle((e_k \times e_j) \times e_i) \times e_i, e_l\rangle\langle e_j \times e_k, e_l\rangle \\
&\qquad\qquad - 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \underbrace{\langle e_k, e_i\rangle}_{=0\,\text{für}\, i\neq k}\langle e_j \times e_i, e_l\rangle\langle e_j \times e_k, e_l\rangle \\
&\qquad\qquad + 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \underbrace{\langle e_j, e_i\rangle}_{=0\,\text{für}\, i\neq j}\langle e_k \times e_i, e_l\rangle\langle e_j \times e_k, e_l\rangle \\
&\quad = 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_i \times \left((e_j \times e_k) \times e_i\right), e_l\rangle\langle e_j \times e_k, e_l\rangle \\
&\qquad\qquad - 3 \cdot \sum_{j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2 - 3 \cdot \sum_{j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2 \\
&\quad \overset{\text{(VPA 3)}}{=} 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2 - 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_i, e_j \times e_k\rangle \underbrace{\langle e_i, e_l\rangle}_{=0\,\text{für}\, i\neq l}\langle e_j \times e_k, e_l\rangle \\
&\qquad\qquad - 6 \cdot \sum_{j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2
\end{aligned}$$

$$= 3d \cdot \sum_{j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2 - 9 \cdot \sum_{j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle^2$$
$$\overset{3.1\,2.}{=} 3(d-3) \cdot \sum_{j,k=1}^{d} N(e_j \times e_k) = 3(d-3)(d-1) \cdot 1_F$$

Der fünfte Summand ergibt:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l, e_j \times e_k\langle e_i, e_l\rangle + e_k \times e_i\langle e_j, e_l\rangle + e_i \times e_j\langle e_k, e_l\rangle\rangle$$
$$= 3 \cdot \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \underbrace{\langle e_i, e_l\rangle}_{=0 \text{ für } i\neq l} \langle R_3(e_i \otimes e_j \otimes e_k) \times e_l, e_j \times e_k\rangle$$
$$= -3 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} \langle R_3(e_k \otimes e_j \otimes e_i), e_i \times (e_j \times e_k)\rangle$$
$$= -3 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} \langle (e_k \times e_j) \times e_i, e_i \times (e_j \times e_k)\rangle + 3 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} \underbrace{\langle e_k, e_i\rangle}_{=0 \text{ für } i\neq k} \langle e_j, e_i \times (e_j \times e_k)\rangle$$
$$- 3 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} \underbrace{\langle e_j, e_i\rangle}_{=0 \text{ für } j\neq i} \langle e_k, e_i \times (e_j \times e_k)\rangle$$
$$= -3 \cdot \sum_{i,j,k=1}^{d} N\left(e_i \times (e_j \times e_k)\right) + 3 \cdot \sum_{i,j=1}^{d} N(e_j \times e_i) - 3 \cdot \sum_{i,k=1}^{d} -N(e_i \times e_k)$$
$$\overset{3.4\ 2.}{=} (-3 \cdot d(d-1)^2 + 3 \cdot d(d-1) + 3 \cdot d(d-1)) \cdot 1_F$$
$$= -3d(d-1)(d-1-1-1) \cdot 1_F = -3d(d-1)(d-3) \cdot 1_F.$$

Für den letzten Summanden gilt:

$$\sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_i\langle e_j \times e_k, e_l\rangle + e_j\langle e_k \times e_i, e_l\rangle + e_k\langle e_i \times e_j, e_l\rangle,$$
$$e_j \times e_k\langle e_i, e_l\rangle + e_k \times e_i\langle e_j, e_l\rangle + e_i \times e_j\langle e_k, e_l\rangle\rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle \underbrace{\langle e_i, e_l\rangle}_{=0\,\text{für}\, i\neq l} \langle e_i, e_j \times e_k\rangle + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle \langle e_j, e_l\rangle \underbrace{\langle e_i, e_k \times e_i\rangle}_{=0} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_l\rangle \langle e_k, e_l\rangle \underbrace{\langle e_i, e_i \times e_j\rangle}_{=0} + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_k \times e_i, e_l\rangle \langle e_i, e_l\rangle \underbrace{\langle e_j, e_j \times e_k\rangle}_{=0} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_k \times e_i, e_l\rangle \underbrace{\langle e_j, e_l\rangle}_{=0\,\text{für}\, j\neq l} \langle e_j, e_k \times e_i\rangle + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_k \times e_i, e_l\rangle \langle e_k, e_l\rangle \underbrace{\langle e_j, e_i \times e_j\rangle}_{=0} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_i \times e_j, e_l\rangle \langle e_i, e_l\rangle \underbrace{\langle e_k, e_j \times e_k\rangle}_{=0} + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_i \times e_j, e_l\rangle \langle e_j, e_l\rangle \underbrace{\langle e_k, e_k \times e_i\rangle}_{=0} \\
&\quad + \sum_{i,j,k,l=1}^{d} \langle e_i \times e_j, e_l\rangle \underbrace{\langle e_k, e_l\rangle}_{=0\,\text{für}\, k\neq l} \langle e_k, e_i \times e_j\rangle \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{d} \langle e_j \times e_k, e_i\rangle^2 + \sum_{i,j,k=1}^{d} \langle e_k \times e_i, e_j\rangle^2 + \sum_{i,j,k=1}^{d} \langle e_i \times e_j, e_k\rangle^2 \\
&\overset{3.5\,3.}{=} 3 \cdot d(d-1) \cdot 1_F.
\end{aligned}
$$

Insgesamt erhält man dann:

$$
\begin{aligned}
N_4 &= (d(d-1)^2(d-3) + 3d(d-1)(d-2) + 3d(d-1)(d-2) \\
&\qquad - 6d(d-1)(d-3) - 6d(d-1)(d-3) - 6d(d-1)) \cdot 1_F \\
&= (d(d-1)(d-3)(d-1-6-6) + d(d-1)(6(d-2)-6)) \cdot 1_F \\
&= (d(d-1)(d-3)(d-13) + d(d-1) \cdot 6(d-3)) \cdot 1_F \\
&= d(d-1)(d-3)(d-7) \cdot 1_F.
\end{aligned}
$$

□

**Korollar 3.7.** *Sei $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ mit $\operatorname{char} F = 0$ und $d = \dim V$. Dann ist $d = 0$, 1, 3 oder 7.*

Beweis. Nach Satz 2.4 3. ist $R_4 \equiv 0$ und somit erhält man $Q_4 \equiv 0$, also ist

$$N_4 = N_{(V^{\otimes 5})^\star}(Q_4) = 0.$$

Wegen Satz 3.6 gilt $N_4 = d(d-1)(d-3)(d-7) \cdot 1_F$ und für $\operatorname{char} F = 0$ ist dann $d = 0$, 1, 3 oder 7. □

**Korollar 3.8.** *Sei $(C, \cdot, N)$ eine unitäre Kompositionsalgebra über $F$ und $\operatorname{char} F = 0$, so ist $\dim C = 1$, 2, 4 oder 8.*

*Ferner gilt:*

*Ist $C$ kommutativ, dann ist $\dim C = 1$ oder 2.*

*Ist $C$ assoziativ, dann ist $\dim C = 1$, 2 oder 4.*

Beweis. Nach Korollar 3.7 gilt für $\mathbf{V}(C, \cdot, N)$, daß $\dim V_C = 0$, 1, 3 oder 7 ist und deshalb ist $\dim C = 1$, 2, 4 oder 8.

Ist $(C, \cdot, N)$ kommutativ (bzw. assoziativ), dann ist nach Satz 2.4 $R_2 \equiv 0$ (bzw. $R_3 \equiv 0$). Also gilt

$$N_2 = N_{(V^{\otimes 3})^\star}(Q_2) = N_{(V^{\otimes 3})^\star}(0) = 0$$

(bzw.

$$N_3 = N_{(V^{\otimes 4})^\star}(Q_3) = N_{(V^{\otimes 4})^\star}(0) = 0).$$

Wegen Satz 3.6 ist $N_2 = d(d-1) \cdot 1_F$ (bzw. $N_3 = d(d-1)(d-3) \cdot 1_F$), außerdem ist $\operatorname{char} F = 0$ nach Voraussetzung, woraus die Behauptung folgt. $\square$

KAPITEL 4

# Struktur von Vektorproduktalgebren

In diesem Kapitel werden auf einer Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\, ,\, \rangle)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ die Abbildungen $P_n$ definiert und in den Sätzen 4.2, 4.8, 4.13 und 4.17 die Vektorproduktalgebren über ihre Erzeugenden näher bestimmt. Damit und mit der in Satz 1.23 angegebenen Multiplikation für unitäre Kompositionsalgebren können dann die Multiplikationstabellen für Quaternionen- und Oktavenalgebren angegeben werden.

**Definition 4.1.** Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\, ,\, \rangle)$ über $F$ und $n = 1, 2, 3, 4$ definiere $P_n \colon V^n \longrightarrow F$ durch

$$P_n(v_1, \dots, v_n) := N(R_n(v_1 \otimes \dots \otimes v_n)),$$

wobei $N$ die $\langle\, ,\, \rangle$ zugeordnete quadratische Form ist.

**Satz 4.2.** *Sei $(V, \times, \langle\, ,\, \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ mit $P_1 \equiv 0$. Dann ist $V = \{0\}$.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $P_1(v) = N(v) = \langle v, v\rangle = 0$ für alle $v \in V$.
Also gilt für $w \in V$:

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{2}\left(N(v + w) - N(v) - N(w)\right) = 0.$$

Da $\langle\, ,\, \rangle$ regulär ist, folgt die Behauptung. $\square$

**Korollar 4.3.** *Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\, ,\, \rangle)$ über $F$ mit $P_1 \equiv 0$ ist auch $R_i \equiv 0$ für $1 \le i \le 4$ und $P_j \equiv 0$ für $2 \le j \le 4$.* $\square$

**Definition 4.4.** Für einen bilinearen Raum $(V, \langle\, ,\, \rangle)$ über $F$ und $v_1, \dots, v_n \in V$ heißt $\mathrm{GSD}(v_1, \dots, v_n)$ die *Gram-Schmitt-Determinante* von $v_1, \dots, v_n$, d. h.

$$\mathrm{GSD}(v_1, \dots, v_n) := \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \dots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix}$$

**Bemerkung 4.5.** Es ist $P_2(v, w) = \mathrm{GSD}(v, w) = N(v)N(w) - \langle v, w\rangle^2$.

**Lemma 4.6.** *Sei $(V, \times, \langle\, ,\, \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$, seien $v_1, \dots, v_n \in V$. Dann gilt:*

1. $\mathrm{GSD}(v_1, \dots, v_n) = \mathrm{GSD}(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(n)})$ *für* $\sigma \in S_n$,
2. *Für* $a \in F$ *ist* $\mathrm{GSD}(v_1, \dots, v_{i-1}, av_i, v_{i+1}, \dots, v_n) = a^2\, \mathrm{GSD}(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$,
3. *Für* $\lambda, \mu \in F$ *ist* $\mathrm{GSD}(\lambda v_1 + \mu v_2, v_2) = \lambda^2 \cdot \mathrm{GSD}(v_1, v_2)$ *und* $\mathrm{GSD}(v_1, \lambda v_1 + \mu v_2) = \mu^2 \cdot \mathrm{GSD}(v_1, v_2)$.

Beweis. Zu 1: Sei $\tau_{i,j} \in S_n$ die Transposition mit $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ und $\tau(k) = k$ für $k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i, j\}$. Dann entsteht $\mathrm{GSD}(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(n)})$ aus $\mathrm{GSD}(v_1, \ldots, v_n)$ durch Vertauschen der $i$-ten mit der $j$-ten Zeile und durch Vertauschen der $i$-ten mit der $j$-ten Spalte. Also ist $\mathrm{GSD}(v_{\tau(1)}, \ldots, v_{\tau(n)}) = \mathrm{GSD}(v_1, \ldots, v_n)$, woraus die Behauptung für jede Permutation $\sigma \in S_n$ gilt, denn jede Permutation läßt sich als Hintereinanderausführung von endlich vielen Transpositionen auffassen.

Zu 2: Wegen 1. kann man o. B. d. A. $i = 1$ annehmen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{GSD}(av_1, v_2, \ldots, v_n) &= \det \begin{pmatrix} a^2\langle v_1, v_1\rangle & a\langle v_1, v_2\rangle & \ldots & a\langle v_1, v_n\rangle \\ a\langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \ldots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \ldots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} \\
&= a \cdot \det \begin{pmatrix} a\langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \ldots & \langle v_1, v_n\rangle \\ a\langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \ldots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a\langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \ldots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} \\
&= a^2 \cdot \det \begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \ldots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \ldots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \ldots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix} \\
&= a^2 \cdot \mathrm{GSD}(v_1, \ldots, v_n).
\end{aligned}$$

Zu 3: Es ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{GSD}(\lambda v_1 + \mu v_2, v_2) &= \det \begin{pmatrix} N(\lambda v_1 + \mu v_2) & \langle \lambda v_1 + \mu v_2, v_2\rangle \\ \langle v_2, \lambda v_1 + \mu v_2\rangle & N(v_2) \end{pmatrix} \\
&= \left(\lambda^2 N(v_1) + \mu^2 N(v_2) + 2\lambda\mu\langle v_1, v_2\rangle\right) N(v_2) - (\lambda\langle v_1, v_2\rangle + \mu N(v_2))^2 \\
&= \lambda^2 \left(N(v_1)N(v_2) - \langle v_1, v_2\rangle^2\right) = \lambda^2\, \mathrm{GSD}(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

Wegen 1. und dem soeben gezeigten gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{GSD}(v_1, \lambda v_1 + \mu v_2) &= \mathrm{GSD}(\mu v_2 + \lambda v_1, v_1) = \mu^2 \cdot \mathrm{GSD}(v_2, v_1) \\
&= \mu^2 \cdot \mathrm{GSD}(v_1, v_2).
\end{aligned}$$

□

**Lemma 4.7.** *Sei $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$, seien $v_1$, $v_2$, $v_3 \in V$. Dann gilt:*

1. $P_3(v_1, v_2, v_3) = P_3(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, v_{\sigma(3)})$ *für* $\sigma \in S_3$,
2. $P_3(v_1 + v_i, v_2, v_3) = P_3(v_1, v_2 + v_j, v_3) = P_3(v_1, v_2, v_3 + v_k) = P_3(v_1, v_2, v_3)$ *für* $i \in \{2, 3\}$, $j \in \{1, 3\}$, $k \in \{1, 2\}$,
3. $P_3(v_1 + (v_2 \times v_3), v_2, v_3) = P_3(v_1, v_2 + (v_1 \times v_3), v_3) = P_3(v_1, v_2, v_3 + (v_1 \times v_2)) = P_3(v_1, v_2, v_3)$,
4. $P_3(v_1 - \lambda v_i, v_2, v_3) = P_3(v_1, v_2 - \mu v_j, v_3) = P_3(v_1, v_2, v_3 - \tau v_k) = P_3(v_1, v_2, v_3)$ *für* $i \in \{2, 3\}$, $j \in \{1, 3\}$, $k \in \{1, 2\}$ *und* $\lambda$, $\mu$, $\tau \in F$.

Beweis. Zu 1: Die Aussage folgt, da $P_3 = N(R_3)$ und $R_3$ nach Proposition 2.2 alternierend ist.

Zu 2: Es genügt zu zeigen, daß $P_3(v_1 + v_i, v_2, v_3) = P_3(v_1, v_2, v_3)$ für $i \in \{2,3\}$ gilt. Die weiteren Aussagen folgen daraus mit 1. Mittels Proposition 2.2 erhält man

$$\begin{aligned} P_3(v_1+v_2, v_2, v_3) &= N\left(R_3\left((v_1+v_2)\otimes v_2 \otimes v_3\right)\right) \\ &= N\left(R_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) + R_3(v_2 \otimes v_2 \otimes v_3)\right) \\ &= N\left(R_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)\right) = P_3(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}$$

und analog

$$P_3(v_1+v_3, v_2, v_3) = N\left(R_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) + R_3(v_3 \otimes v_2 \otimes v_3)\right) = P_3(v_1, v_2, v_3).$$

Zu 3: Es ist

$$\begin{aligned} P_3(v_1 + (v_2 \times v_3), v_2, v_3) &= N\left(R_3\left((v_1 + (v_2 \times v_3))\otimes v_2 \otimes v_3\right)\right) \\ &= N\left(R_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) + R_3((v_2 \times v_3) \otimes v_2 \otimes v_3)\right) \\ &\overset{2.2}{=} N\left(R_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)\right) = P_3(v_1, v_2, v_3). \end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen folgen daraus mit 1.

Zu 4: Es gilt für $\lambda \in F$:

$$P_3(v_1 - \lambda v_2, v_2, v_3) = N\left(R_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3) - \lambda \cdot R_3(v_2 \otimes v_2 \otimes v_3)\right) \overset{2.2}{=} P_3(v_1, v_2, v_3).$$

Die restlichen Aussagen folgen daraus mit 1.

□

**Satz 4.8.** *Sei $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ mit $P_1 \not\equiv 0$, $P_2 \equiv 0$. Dann existiert ein $v \in V$ mit $N(v) \neq 0$, so daß $V = F \cdot v$ ist.*

Beweis. Da $P_1 \not\equiv 0$ ist, existiert ein $v \in V$ mit $P_1(v) = N(v) \neq 0$. Dann ist $v \neq 0$ und $F \cdot v$ ist eine Vektorprodukt-Unteralgebra von $V$.

Nach Lemma 1.6 ist $V = F\cdot v \oplus (F\cdot v)^\perp$. Für $w \in (F \cdot v)^\perp$ ist dann $N(w) = 0$, denn

$$0 = P_2(v, w) = N(v)N(w) - \langle v, w\rangle^2 = N(v)N(w),$$

d. h. $N|_{(F\cdot v)^\perp} \equiv 0$. Da $V$ und $F \cdot v$ regulär sind, ist nach Lemma 1.6 auch $(F\cdot v)^\perp$ regulär. Insgesamt gilt $V = F \cdot v$. □

**Korollar 4.9.** *Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ über $F$ mit $P_1 \not\equiv 0$ und $P_2 \equiv 0$ ist $R_i \equiv 0$ für $2 \leq i \leq 4$ und $P_j \equiv 0$ für $j \in \{3, 4\}$.*

Beweis. Nach Satz 4.8 existiert ein $v \in V$ mit $N(v) \neq 0$, so daß $V = F \cdot v$ ist. Für beliebige $w$, $w'$, $w'' \in V$ gibt es also eine Darstellung $w := \lambda v$, $w' := \mu v$ und $w'' := \tau v$ mit $\lambda$, $\mu$, $\tau \in F$. Dann gilt:

$$R_2(w \otimes w') = \lambda\mu(v \times v) \overset{\text{(VPA 2)}}{=} 0$$

und

$$\begin{aligned} R_3(w \otimes w' \otimes w'') &= (w \times w') \times w'' - w'\langle w, w''\rangle + w\langle w', w''\rangle \\ &= \lambda\mu\tau(v \times v) \times v - \lambda\mu\tau\langle v, v\rangle + \lambda\mu\tau\langle v, v\rangle \overset{\text{(VPA 2)}}{=} 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.4 3. ist $R_4 \equiv 0$. Da $P_n = N_V(R_n)$ für $n = 1, \ldots, 4$, folgt daraus die Behauptung. $\square$

**Lemma 4.10.** *Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ über $F$ und für Vektoren $v$, $w \in V$ mit $\mathrm{GSD}(v, w) \neq 0$ existiert ein $v' \in V$ mit $N(v') \neq 0$, so daß $\mathrm{GSD}(v', v) \neq 0$ oder $\mathrm{GSD}(v', w) \neq 0$ ist.*

Beweis. Angenommen, für alle $v' \in V$ von der Form $v' := av + bw$ mit $a, b \in F$ gelte $N(v') = 0$, d. h.

$$a^2 N(v) + b^2 N(w) + 2ab\langle v, w\rangle = 0.$$

Dann folgt für $a = 1$ und $b = 0$, daß $N(v) = 0$ ist. Für $a = 0$ und $b = 1$ gilt $N(w) = 0$. Daraus erhält man für $a = 1$ und $b = 1$, daß $\langle v, w\rangle = 0$ ist. Dies steht im Widerspruch zu $\mathrm{GSD}(v, w) \neq 0$. Also existiert ein $v' \in F \cdot v + F \cdot w$ mit $N(v') \neq 0$.

Wegen $N(v') \neq 0$ ist dann $v' \neq 0$. Sei ohne Einschränkung $a \neq 0$. Dann ist

$$\mathrm{GSD}(v', w) = \mathrm{GSD}(av + bw, w) \overset{4.6\ 3.}{=} a^2 \cdot \mathrm{GSD}(v, w).$$

Da $\mathrm{GSD}(v, w) \neq 0$ vorausgesetzt war und $a \neq 0$ angenommen wurde, ist $\mathrm{GSD}(v', w) \neq 0$.

Für $b \neq 0$ folgt analog mit Lemma 4.6 3. die Aussage $0 \neq \mathrm{GSD}(v', v) = b^2 \cdot \mathrm{GSD}(v, w)$. $\square$

**Lemma 4.11.** *Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ über $F$ und für Vektoren $v$, $w \in V$ mit $\mathrm{GSD}(v, w) \neq 0$ existieren $v'$, $w' \in V$ mit $N(v') \neq 0$, $N(w') \neq 0$, $\langle v', w'\rangle = 0$ und $\mathrm{GSD}(v', w') \neq 0$.*

Beweis. Nach Lemma 4.10 existiert ein $v' \in V$ mit $N(v') \neq 0$ und o. E. $\mathrm{GSD}(v', w) \neq 0$. Definiert man nun

$$w' := w - \frac{\langle v', w\rangle}{N(v')} v',$$

dann gilt:

$$\begin{aligned} N(w') &= N(w) + N\left(\frac{\langle v', w\rangle}{N(v')} v'\right) - 2\left\langle w, \frac{\langle v', w\rangle}{N(v')} v'\right\rangle \\ &= N(w) - \frac{\langle v', w\rangle^2}{N(v')}. \end{aligned}$$

Da $\mathrm{GSD}(v', w) \neq 0$ ist, folgt $N(w') \neq 0$.

Ferner ist

$$\langle v', w'\rangle = \langle v', w\rangle - \left\langle v', \frac{\langle v', w\rangle}{N(v')} v'\right\rangle = 0$$

und daher

$$\mathrm{GSD}(v', w') = \mathrm{GSD}(v', w - \frac{\langle v', w\rangle}{N(v')} v') \overset{4.6\ 3.}{=} \mathrm{GSD}(v', w) \neq 0.$$

$\square$

**Notation 4.12.** *Für eine Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ über $F$, $v_1, v_2, v_3 \in V$ bezeichne $V_{v_1,v_2}$ den von $v_1$, $v_2$ und $v_1 \times v_2$ erzeugten Untervektorraum von $V$ und $V_{v_1,v_2,v_3}$ den von $v_1$, $v_2$, $v_3$, $v_1 \times v_2$, $v_2 \times v_3$, $v_3 \times v_1$ und $R_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)$ erzeugten Untervektorraum von $V$, d. h.*

$$\begin{aligned} V_{v_1,v_2} &:= \operatorname{span}_F\{v_1, v_2, v_1 \times v_2\}, \\ V_{v_1,v_2,v_3} &:= \operatorname{span}_F\{v_1, v_2, v_3, v_1 \times v_2, v_2 \times v_3, v_3 \times v_1, R_3(v_1 \otimes v_2 \otimes v_3)\}. \end{aligned}$$

**Satz 4.13.** *Sei $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ mit $P_2 \not\equiv 0$, $P_3 \equiv 0$. Dann existieren $v$, $w \in V$ mit $N(v) \neq 0$, $N(w) \neq 0$, $\langle v, w\rangle = 0$, so daß $V = V_{v,w}$ ist.*

Beweis. Da $P_2(v, w) \not\equiv 0$ ist, gibt es nach Lemma 4.11 $v$, $w \in V$ mit $N(v) \neq 0$, $N(w) \neq 0$, $\langle v, w\rangle = 0$ und $P_2(v, w) = \mathrm{GSD}(v, w) \neq 0$.

Dann ist $V_{v,w}$ eine Vektorprodukt-Unteralgebra von $V$, denn $V_{v,w}$ ist abgeschlossen bzgl. $\times$:

$$\begin{aligned} v \times v &= 0 \\ w \times w &= 0 \\ (v \times w) \times (v \times w) &= 0 \\ v \times w &= -w \times v \text{ (nach Proposition 1.17)} \\ (v \times w) \times v &= -v \times (v \times w) = N(v)w \\ w \times (v \times w) &= -(v \times w) \times w = N(w)v \end{aligned}$$

und $V_{v,w}$ ist regulär, denn nach Voraussetzung ist

$$N(v) \neq 0,\ N(w) \neq 0,\ N(v \times w) = P_2(v, w) \neq 0,\ \langle v, w\rangle = 0$$

und wegen (VPA 1′) gilt

$$\langle v, v \times w\rangle = 0,\ \langle w, v \times w\rangle = 0.$$

Daher ist $V_{v,w}$ eine Vektorprodukt-Unteralgebra von $V$ über $F$ mit der Multiplikationstabelle:

| $\times$ | $v$ | $w$ | $v \times w$ |
|---|---|---|---|
| $v$ | $0$ | $v \times w$ | $-aw$ |
| $w$ | $-v \times w$ | $0$ | $bv$ |
| $v \times w$ | $aw$ | $-bv$ | $0$ |

mit $a := N(v)$, $b := N(w) \in F^\times$.

Wähle nun $u \in {V_{v,w}}^\perp$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 = P_3(v, w, u) &= N\left((v \times w) \times u - w\langle v, u\rangle + v\langle w, u\rangle\right) \\ &= N\left((v \times w) \times u\right) \overset{\text{(VPA 2′)}}{=} N(v \times w)N(u) - \langle v \times w, u\rangle^2 \\ &= N(u)N(v \times w). \end{aligned}$$

Da $N(v \times w) = P_2(v, w) \neq 0$ ist, folgt also $N(u) = 0$ für beliebige $u \in {V_{v,w}}^\perp$, d. h. $N|_{{V_{v,w}}^\perp} = 0$, also ${V_{v,w}}^\perp = \{0\}$. Nach Lemma 1.6 ist $V = V_{v,w} \oplus {V_{v,w}}^\perp$, woraus sich $V = V_{v,w}$ ergibt. □

**Korollar 4.14.** *Für eine Vektorproduktalgebra* $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ *über* $F$ *mit* $P_2 \not\equiv 0$ *und* $P_3 \equiv 0$ *gilt* $R_3 \equiv 0$.

Beweis. Nach Satz 4.13 existieren $v$, $w \in V$, so daß $V = V_{v,w}$ ist. Nach Proposition 2.2 ist der Tensor $R_3$ alternierend und wegen (VPA 2) und (VPA 1′) gilt

$$R_3(v \otimes w \otimes v \times w) = (v \times w) \times (v \times w) - w\langle v, v \times w\rangle + v\langle w, v \times w\rangle = 0.$$

$R_3$ faktorisiert also über

$$\begin{array}{ccc} V^{\otimes 3} & \xrightarrow{R_3} & V \\ \downarrow & & \| \\ \bigwedge^3 V & \xrightarrow{\overline{R}_3} & V \end{array}$$

wobei $v \wedge w \wedge (v \times w)$ Erzeugendensystem von $\bigwedge^3 V$ ist und es gilt

$$\overline{R}_3\,(v \wedge w \wedge (v \times w)) = R_3(v \otimes w \otimes v \times w) = 0.$$

Daher ist $\ker(\overline{R}_3) = \bigwedge^3 V$, also $\overline{R}_3 \equiv 0$ und $R_3 \equiv 0$. □

**Lemma 4.15.** *Sei* $(V, \times, \langle\ ,\ \rangle)$ *eine Vektorproduktalgebra über* $F$ *mit* $P_3 \not\equiv 0$. *Dann existieren* $v$, $w$, $z \in V$ *mit* $N(v) \neq 0$, $N(w) \neq 0$, $N(z) \neq 0$, $\langle v, w\rangle = 0$, $z \perp V_{v,w}$ *und* $P_3(v, w, z) \neq 0$.

Beweis. Sei

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{\, (v_1, v_2, v_3) \in V^3 \mid P_3(v_1, v_2, v_3) \neq 0 \,\},\\
A_2 &:= \{\, (v_1, v_2, v_3) \in A_1 \mid N(v_1) \neq 0 \,\},\\
A_3 &:= \{\, (v_1, v_2, v_3) \in A_2 \mid \langle v_2, v_1\rangle = 0 \,\text{und}\, \langle v_3, v_1\rangle = 0 \,\},\\
A_4 &:= \{\, (v_1, v_2, v_3) \in A_3 \mid N(v_2) \neq 0 \,\},\\
A_5 &:= \{\, (v_1, v_2, v_3) \in A_4 \mid \langle v_3, v_2\rangle = 0 \,\},\\
A_6 &:= \{\, (v_1, v_2, v_3) \in A_5 \mid \langle v_3, v_1 \times v_2\rangle = 0 \,\}.
\end{aligned}$$

Gezeigt wird: Aus $A_i \neq \emptyset$ folgt $A_{i+1} \neq \emptyset$ für $i = 1, \ldots, 5$.

Dann erhält man für $(v_1, v_2, v_3) \in A_6$

$$\begin{aligned}
0 \neq P_3(v_1, v_2, v_3) &= N\left((v_1 \times v_2) \times v_3 - v_2\langle v_3, v_1\rangle + v_1\langle v_2, v_3\rangle\right)\\
&= N(v_1 \times v_2)N(v_3) - \langle v_1 \times v_2, v_3\rangle^2\\
&= N(v_1)N(v_2)N(v_3).
\end{aligned}$$

Aus $N(v_1) \neq 0$ und $N(v_2) \neq 0$ folgt $N(v_3) \neq 0$. Damit ist die Aussage gezeigt.

$A_1 \neq \emptyset \Rightarrow A_2 \neq \emptyset$:

Da $A_1 \neq \emptyset$ ist, existiert $(v_1, v_2, v_3) \in V^3$ mit $P_3(v_1, v_2, v_3) \neq 0$. Gilt hierfür bereits $N(v_i) \neq 0$ für ein $i \in \{1, 2, 3\}$, dann ist man nach Lemma 4.7 1. fertig.

Zwischenbehauptung: Ist $\langle v_i, v_j\rangle \neq 0$ für $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$, dann ist $(v_i + v_j, v_j, v_k) \in A_2$ für $k \in \{1, 2, 3\}$ mit $k \neq i, j$.

Beweis der Zwischenbehauptung: Es ist

$$P_3(v_i + v_j, v_j, v_k) \overset{4.7\ 2.}{=} P_3(v_i, v_j, v_k) \neq 0$$

und

$$N(v_i + v_j) = N(v_i) + N(v_j) + 2\langle v_i, v_j\rangle = 2\langle v_i, v_j\rangle \neq 0.$$

Damit ist die Zwischenbehauptung gezeigt.

Man kann also ohne Einschränkung $(v_1, v_2, v_3) \in A_1$ mit $N(v_i) = 0$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ annehmen. Dann erhält man

$$\begin{aligned} 0 \neq P_3(v_1, v_2, v_3) &= N((v_1 \times v_2) \times v_3) \\ &= N(v_1 \times v_2)N(v_3) - \langle v_1 \times v_2, v_3\rangle^2 = -\langle v_1 \times v_2, v_3\rangle^2, \end{aligned}$$

d. h. $\langle v_i \times v_j, v_k\rangle \neq 0$ für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschieden.

Dann ist $(v_i + (v_j \times v_k), v_j, v_k) \in A_2$ mit $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschieden, denn nach Lemma 4.7 3. ist

$$P_3(v_i + (v_j \times v_k), v_j, v_k) = P_3(v_i, v_j, v_k) \neq 0$$

und

$$\begin{aligned} N(v_i + (v_j \times v_k)) &= N(v_i) + N(v_j \times v_k) + 2\langle v_i, v_j \times v_k\rangle \\ &= 2\langle v_i, v_j \times v_k\rangle \neq 0 \end{aligned}$$

und deshalb ist $A_2 \neq \emptyset$.

$A_2 \neq \emptyset \Rightarrow A_3 \neq \emptyset$:

Für $(v_1, v_2, v_3) \in A_2$ mit $\langle v_2, v_1\rangle \neq 0$ ist $(v_1, v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{N(v_1)} v_1, v_3) \in A_2$, denn nach Lemma 4.7 4. ist

$$P_3(v_1, v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{N(v_1)} v_1, v_3) = P_3(v_1, v_2, v_3) \neq 0.$$

Ferner gilt

$$\langle v_2 - \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{N(v_1)} v_1, v_1\rangle = \langle v_2, v_1\rangle - \langle v_1, v_2\rangle = 0.$$

Für $(v_1, v_2, v_3) \in A_2$ mit $\langle v_2, v_1\rangle = 0$ und $\langle v_3, v_1\rangle \neq 0$ erhält man analog, daß $(v_1, v_2, v_3 - \frac{\langle v_1, v_3\rangle}{N(v_1)} v_1) \in A_3$ ist.

$A_3 \neq \emptyset \Rightarrow A_4 \neq \emptyset$:

Gilt für $(v_1, v_2, v_3) \in A_3$ bereits $N(v_2) \neq 0$ oder $N(v_3) \neq 0$, dann ist wegen Lemma 4.7 1. $A_4 \neq \emptyset$. Sei also $N(v_2) = 0$ und $N(v_3) = 0$. Ist $\langle v_3, v_2\rangle \neq 0$, dann erhält man wegen Lemma 4.7 2. $P_3(v_1, v_2, v_2 + v_3) \neq 0$ und

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 + v_3\rangle &= \langle v_1, v_2\rangle + \langle v_1, v_3\rangle = 0 \\ N(v_2 + v_3) &= N(v_2) + N(v_3) + 2\langle v_2, v_3\rangle = 2\langle v_2, v_3\rangle \neq 0. \end{aligned}$$

Also ist $(v_1, v_2, v_2 + v_3) \in A_4$.

Sei ohne Einschränkung $(v_1, v_2, v_3) \in A_3$ mit $N(v_2) = 0$, $N(v_3) = 0$ und $\langle v_2, v_3\rangle = 0$ vorausgesetzt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} 0 \neq P_3(v_1, v_2, v_3) = N((v_1 \times v_2) \times v_3) &= N(v_1 \times v_2)N(v_3) - \langle v_1 \times v_2, v_3\rangle^2 \\ &= -\langle v_1 \times v_2, v_3\rangle^2. \end{aligned}$$

Daraus erhält man wegen Lemma 4.7 1. $\langle v_i \times v_j, v_k\rangle \neq 0$ für $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ paarweise verschieden.

Dann ist $(v_1, v_2 + (v_1 \times v_3), v_3) \in A_4$, denn wegen Lemma 4.7 3. ist $P_3(v_1, v_2 + (v_1 \times v_3), v_3) = P_3(v_1, v_2, v_3) \neq 0$ und nach Voraussetzung ist $N(v_1) \neq 0$ und $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$. Außerdem ist $\langle v_1, v_2 + (v_1 \times v_3) \rangle = 0$ und

$$N(v_2 + (v_1 \times v_3)) = N(v_2) + N(v_1 \times v_3) + 2\langle v_2, v_1 \times v_3 \rangle = 2\langle v_2, v_1 \times v_3 \rangle \neq 0.$$

d. h. $A_4 \neq \emptyset$.

$A_4 \neq \emptyset \Rightarrow A_5 \neq \emptyset$:

Wähle $(v_1, v_2, v_3) \in A_4$ mit $\langle v_3, v_2 \rangle \neq 0$. Dann gilt wegen Lemma 4.7 4.

$$P_3(v_1, v_2, v_3 - \frac{\langle v_2, v_3 \rangle}{N(v_2)} v_2) = P_3(v_1, v_2, v_3) \neq 0.$$

Ferner erhält man

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_3 - \frac{\langle v_2, v_3 \rangle}{N(v_2)} v_2 \rangle &= \langle v_1, v_3 \rangle - \frac{\langle v_2, v_3 \rangle}{N(v_2)} \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \\ \langle v_2, v_3 - \frac{\langle v_2, v_3 \rangle}{N(v_2)} v_2 \rangle &= \langle v_2, v_3 \rangle - \langle v_2, v_3 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Also ist $(v_1, v_2, v_3 - \frac{\langle v_2, v_3 \rangle}{N(v_2)} v_2) \in A_5$.

$A_5 \neq \emptyset \Rightarrow A_6 \neq \emptyset$:

Für $(v_1, v_2, v_3) \in A_5$ mit $\langle v_3, v_1 \times v_2 \rangle \neq 0$ ist $(v_1, v_2, v_3 - \frac{\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle}{N(v_1 \times v_2)} (v_1 \times v_2)) \in A_6$, denn

$$\begin{aligned} P_3(v_1, v_2, v_3 - \frac{\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle}{N(v_1 \times v_2)} (v_1 \times v_2)) &= P_3(v_1, v_2, v_3) \neq 0, \\ \langle v_1, v_3 - \frac{\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle}{N(v_1 \times v_2)} (v_1 \times v_2) \rangle &= \langle v_1, v_3 \rangle - \frac{\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle}{N(v_1 \times v_2)} \langle v_1, v_1 \times v_2 \rangle = 0, \\ \langle v_2, v_3 - \frac{\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle}{N(v_1 \times v_2)} (v_1 \times v_2) \rangle &= \langle v_2, v_3 \rangle - \frac{\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle}{N(v_1 \times v_2)} \langle v_1, v_1 \times v_2 \rangle = 0, \end{aligned}$$

Dabei wurde die Regel (VPA 1′) benutzt. Außerdem gilt:

$$\langle v_1 \times v_2, v_3 - \frac{\langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle}{N(v_1 \times v_2)} (v_1 \times v_2) \rangle = \langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle - \langle v_1 \times v_2, v_3 \rangle = 0.$$

Also ist $A_6 \neq \emptyset$ und damit ist das Lemma bewiesen. □

**Lemma 4.16.** *Sei $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$. Für $v$, $w$, $z \in V$ mit $N(v) \neq 0$, $N(w) \neq 0$, $N(z) \neq 0$, $v \perp w$, $z \perp V_{v,w}$ ist dann $(V_{v,w,z}, \times, \langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorprodukt-Unteralgebra von $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ über $F$.*

Beweis. Um zu zeigen, daß $(V_{v,w,z}, \times, \langle\,,\,\rangle)$ eine Vektorprodukt-Unteralgebra von $(V, \times, \langle\,,\,\rangle)$ ist, wird zunächst die Orthogonalität von je zwei Vektoren nachgewiesen. Seien dazu

$$\begin{aligned} &v_1 := v, && v_2 := w, && v_3 := z, \\ &v_4 := v \times w, && v_5 := w \times z, && v_6 := z \times v, \\ &v_7 := R_3(v \otimes w \otimes z) = (v \times w) \times z. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\langle v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_3\rangle = \langle v_2, v_3\rangle = \langle v_3, v_4\rangle = 0$ und wegen (VPA 1′) ist $\langle v_1, v_4\rangle = \langle v_1, v_6\rangle = \langle v_2, v_4\rangle = \langle v_2, v_5\rangle = \langle v_3, v_5\rangle = \langle v_3, v_6\rangle = 0$. Außerdem erhält man

$$\langle v_1, v_5\rangle = \langle v, w \times z\rangle \overset{\text{(VPA 1)}}{=} \langle v \times w, z\rangle = 0$$

und

$$\langle v_2, v_6\rangle = \langle w, z \times v\rangle = \langle z \times v, w\rangle \overset{\text{(VPA 1)}}{=} \langle z, v \times w\rangle = 0,$$

da $z \perp V_{v,w}$vorausgesetzt war.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\langle v_4, v_5\rangle = \langle v \times w, w \times z\rangle &\overset{\text{(VPA 1)}}{=} \langle (v \times w) \times w, z\rangle \overset{1.17}{=} -\langle w \times (v \times w), z\rangle \\ &\overset{\text{(VPA 3)}}{=} -N(w)\langle v, z\rangle = 0\end{aligned}$$

und analog folgt $\langle v_5, v_6\rangle = -N(z)\langle v, z\rangle = 0$ und $\langle v_6, v_4\rangle = -N(v)\langle z, w\rangle = 0$. Zu zeigen bleibt noch die Orthogonalität von $v_7$ mit $v_i$ für $i \in \{4, 5, 6\}$. Es ist

$$\langle v_4, v_7\rangle = \langle v \times w, R_3(v \otimes w \otimes z)\rangle \overset{\text{(VPA 1)}}{=} \langle (v \times w) \times (v \times w), z\rangle \overset{\text{(VPA 2)}}{=} 0$$

und, da $R_3$ alternierend ist (vgl. 2.2), folgt $\langle v_5, v_7\rangle = \langle v_6, v_7\rangle = 0$. Also sind die 7 Vektoren paarweise orthogonal.

Da nach Voraussetzung $N(v_i) \neq 0$ für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ für $i \neq j$ mit $i$, $j \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, gilt auch $N(v_i) \neq 0$ für $i \in \{4, \ldots, 7\}$.

Insgesamt ist also $V_{v,w,z}$ ein regulärer Untervektorraum von $V$.

Zu zeigen bleibt noch die multiplikative Abgeschlossenheit von $V_{v,w,z}$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
v_1 \times v_1 &= v \times v = 0,\\
v_1 \times v_2 &= v \times w = v_4,\\
v_1 \times v_3 &= v \times z = -z \times v = -v_6,\\
v_1 \times v_4 &= v \times (v \times w) = -(v \times w) \times v = -N(v)w = -N(v)v_2,\\
v_1 \times v_6 &= v \times (z \times v) = N(v)z = N(v)v_3.
\end{aligned}$$

Da $R_3$ alternierend ist (vgl. 2.2), folgt:

$$\begin{aligned}
v_1 \times v_5 &= v \times (w \times z) = -(w \times z) \times v = -R_3(w \otimes z \otimes v) = \\
&= -R_3(v \otimes w \otimes z) = -v_7,\\
v_1 \times v_7 &= v \times R_3(v \otimes w \otimes z) = v \times R_3(w \otimes z \otimes v)\\
&= v \times ((w \times z) \times v) = N(v)w \times z = N(v)v_5.
\end{aligned}$$

Durch Permutation erhält man $v_i \times v_j \in V_{v,w,z}$ für $i \in \{2, 3\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, 7\}$.

Für $v_4$ gilt mit Proposition 2.2:

$$\begin{aligned}
v_4 \times v_5 &= (v \times w) \times (w \times z) = R_3(v \otimes w \otimes (w \times z)) \\
&= -R_3((w \times z) \otimes w \otimes v) = -((w \times z) \times w) \times v \\
&= -N(w) z \times v = -N(w) v_6, \\
v_4 \times v_6 &= (v \times w) \times (z \times v) = R_3(v \otimes w \otimes (z \times v)) \\
&= -R_3(v \otimes (z \times v) \otimes w) = -(v \times (z \times v)) \times w = -N(v) z \times w \\
&= N(v) w \times z = N(v) v_5, \\
v_4 \times v_7 &= (v \times w) \times ((v \times w) \times z) = -((v \times w) \times z) \times (v \times w) = \\
&= -N(v \times w) z = -N(v) N(w) v_3
\end{aligned}$$

und die restlichen Produkte ergeben sich durch Permutation.

Die vollständige Multiplikationstabelle lautet also für $a := N(v)$, $b := N(w)$, $c := N(z)$ mit $a$, $b$, $c \in F^{\times}$:

| $\times$ | $v$ | $w$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $v$ | $0$ | $v \times w$ | $-z \times v$ |
| $w$ | $-v \times w$ | $0$ | $w \times z$ |
| $z$ | $z \times v$ | $-w \times z$ | $0$ |
| $v \times w$ | $aw$ | $-bv$ | $R_3(v \otimes w \otimes z)$ |
| $w \times z$ | $R_3(v \otimes w \otimes z)$ | $bz$ | $-cw$ |
| $z \times v$ | $-az$ | $R_3(v \otimes w \otimes z)$ | $cv$ |
| $R_3(v \otimes w \otimes z)$ | $-aw \times z$ | $-bz \times v$ | $-cv \times w$ |

| $\times$ | $v \times w$ | $w \times z$ | $z \times v$ | $R_3(v \otimes w \otimes z)$ |
|---|---|---|---|---|
| $v$ | $-aw$ | $-R_3(v \otimes w \otimes z)$ | $az$ | $aw \times z$ |
| $w$ | $bv$ | $-bz$ | $-R_3(v \otimes w \otimes z)$ | $bz \times v$ |
| $z$ | $-R_3(v \otimes w \otimes z)$ | $cw$ | $-cv$ | $cv \times w$ |
| $v \times w$ | $0$ | $-bz \times v$ | $aw \times z$ | $-abz$ |
| $w \times z$ | $bz \times v$ | $0$ | $-cv \times w$ | $-bcv$ |
| $z \times v$ | $-aw \times z$ | $cv \times w$ | $0$ | $-acw$ |
| $R_3(v \otimes w \otimes z)$ | $abz$ | $bcv$ | $acw$ | $0$ |

Damit wurde gezeigt, daß $(V_{v,w,z}, \times|_{V_{v,w,z}}, \langle\, , \rangle|_{V_{v,w,z} \times V_{v,w,z}})$ eine Vektorprodukt-Unteralgebra der Vektorproduktalgebra $(V, \times, \langle\, , \rangle)$ ist. □

**Satz 4.17.** *Sei $(V, \times, \langle\, , \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra über $F$ mit $P_3 \not\equiv 0$. Dann existieren $v$, $w$, $z \in V$ mit $N(v) \neq 0$, $N(w) \neq 0$, $N(z) \neq 0$, $\langle v, w\rangle = 0$ und $z \perp V_{v,w}$, so daß $V = V_{v,w,z}$ ist.*

Beweis. Nach Lemma 4.15 existieren $v$, $w$, $z \in V$ mit $N(v) \neq 0$, $N(w) \neq 0$, $N(z) \neq 0$, $v \perp w$, $z \perp V_{v,w}$ und $P_3(v, w, z) \neq 0$.

Also ist auch $R_3(v \otimes w \otimes z) \neq 0$. Nach Lemma 4.16 ist $(V_{v,w,z}, \times, \langle\, , \rangle)$ eine Vektorproduktalgebra.

Da $R_4 \equiv 0$ ist (vgl. Satz 2.4 3.), ist auch $P_4 = N(R_4) \equiv 0$. Wähle $t \in {V_{v,w,z}}^{\perp}$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
0 = P_4(v,w,z,t) &= N\left(R_4(v \otimes w \otimes z \otimes t)\right) = N\left(R_3(v \otimes w \otimes z) \times t\right) \\
&= P_3(v,w,z)N(t) - \langle R_3(v \otimes w \otimes z), t\rangle^2 \\
&= P_3(v,w,z)N(t).
\end{aligned}
$$

Da $P_3(v,w,z) \neq 0$ ist, folgt also $N(t) = 0$, d. h. $N\,|_{{V_{v,w,z}}^{\perp}} \equiv 0$, also $V_{v,w,z} = \{0\}$. Da nach Lemma 1.6 $V = V_{v,w,z} \oplus {V_{v,w,z}}^{\perp}$ ist, folgt also $V = V_{v,w,z}$. □

Die Multiplikationstabellen für Kompositionsalgebren erhält man dann direkt aus den in diesem Kapitel gezeigten Aussagen:

Die Multiplikationstabelle für Quaternionenalgebren $(C, \cdot, N)$ mit der Standarbasis $e$, $i$, $j$, $k$ und $\alpha := N(i)$, $\beta := N(j)$ lautet:

| $\cdot$ | $e$ | $i$ | $j$ | $k$ |
|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $i$ | $j$ | $k$ |
| $i$ | $i$ | $-\alpha e$ | $k$ | $-\alpha j$ |
| $j$ | $j$ | $-k$ | $-\beta e$ | $\beta i$ |
| $k$ | $k$ | $\alpha j$ | $-\beta i$ | $-\alpha\beta e$ |

und die Multiplikationstabelle für Cayley-Algebren $(C, \cdot, N)$ mit der Standarbasis $e$, $e_1$, $\ldots$, $e_7$ und $\alpha := N(e_1)$, $\beta := N(e_2)$, $\gamma := N(e_3)$ ist:

| $\cdot$ | $e$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e$ | $e$ | $e_1$ | $e_2$ | $e_3$ | $e_4$ | $e_5$ | $e_6$ | $e_7$ |
| $e_1$ | $e_1$ | $-\alpha e$ | $e_4$ | $-e_6$ | $-\alpha e_2$ | $-e_7$ | $\alpha e_3$ | $\alpha e_5$ |
| $e_2$ | $e_2$ | $-e_4$ | $-\beta e$ | $e_5$ | $\beta e_1$ | $-\beta e_3$ | $-e_7$ | $\beta e_6$ |
| $e_3$ | $e_3$ | $e_6$ | $-e_5$ | $-\gamma e$ | $-e_7$ | $\gamma e_2$ | $-\gamma e_1$ | $\gamma e_4$ |
| $e_4$ | $e_4$ | $\alpha e_2$ | $\beta e_1$ | $e_7$ | $-\alpha\beta e$ | $-\beta e_6$ | $\alpha e_5$ | $-\alpha\beta e_3$ |
| $e_5$ | $e_5$ | $e_7$ | $\beta e_3$ | $-\gamma e_2$ | $\beta e_6$ | $-\beta\gamma e$ | $-\gamma e_4$ | $-\beta\gamma e_1$ |
| $e_6$ | $e_6$ | $-\alpha e_3$ | $e_7$ | $\gamma e_1$ | $-\alpha e_5$ | $\gamma e_4$ | $-\alpha\gamma e$ | $-\alpha\gamma e_2$ |
| $e_7$ | $e_7$ | $-\alpha e_5$ | $-\beta e_6$ | $-\gamma e_4$ | $\alpha\beta e_3$ | $\beta\gamma e_1$ | $\alpha\gamma e_2$ | $-\alpha\beta\gamma e$ |

# Literaturverzeichnis


[1] F. van der Blij und T. A. Springer, *The arithmetics of octaves and the group $G_2$*, Indag. Math. 21 (1959), 406–418.

[2] C. Chevalley, *The algebraic theory of spinors*, Columbia University Press, New York, 1954, auch: Collected Works, vol. 2, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1996.

[3] H.-D. Ebbinghaus et al., *Zahlen*, Grundwissen Mathematik, vol. 1. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983.

[4] B. Eckmann, *Gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon ueber die Komposition quadratischer Formen*, Comment. Math. Helv. 15 (1943), 358–366.

[5] A. Hurwitz, *Über die Komposition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen*, Gött. Nachrichten (1898), 309–316.

[6] N. Jacobson, *Composition algebras and their automorphims*, Circ. Math. Palermo Rend. Serie 2, 7 (1958), 55–80.

[7] A. S. Merkurjev, M.-A. Knus, M. Rost, and J.-P. Tignol, *The book of involutions*, AMS Coll. Pub., ca. 600 S., in Vorbereitung.

[8] J. Milnor, D. Husemoller, *Symmetric Bilinear Forms*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973.

[9] M. Rost, *On the dimension of a composition algebra*, Doc. Math. 1 (1996), 209–214.

[10] W. Scharlau, *Quadratic and hermitian forms*, Grundlehren math. Wiss, vol. 270, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1985.

[11] T. A. Springer, *Oktaven, Jordan-Algebren und Ausnahmegruppen*, Mathematisches Institut der Universität Göttingen, 1963.