Wittringhomologie

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat)
der Fakultät für Mathematik
der Universität Regensburg

vorgelegt von

Manfred Schmid
aus
Moosbach

1997

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Es sei im folgenden k ein Körper der Charakteristik $\neq 2$.
Es sei X ein integres, normales algebraisches $k-$Schema, und $k(X)$ sei der Funktionenkörper von X. Für jeden Punkt $x \in X$ der Kodimension 1 ist dann der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ein diskreter Bewertungsring und definiert daher auf $k(X)$ eine diskrete Bewertung v_x mit Restklassenkörper $\kappa(x)$.
Wählt man nun ein Primelement π_{v_x} zur Bewertung v_x, so hat man den sogenannten zweiten Randhomomorphismus $\delta_2^{\pi_{v_x}} : W(k(X)) \to W(\kappa(x))$ vom Wittring des Funktionenkörpers $k(X)$ in den Wittring des Restklassenkörpers $\kappa(x)$.
Es ist für fast alle 1-kodimensionalen Punkte $x \in X^{(1)}$ und alle $\alpha \in W(k(X))$ $\delta_2^{\pi_{v_x}}(\alpha) = 0$, und also erhält man eine Randabbildung

$$d = (\delta_2^{\pi_{v_x}}) : W(k(X)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} W(\kappa(x)).$$

Ein wichtiges Anliegen der geometrischen Theorie der quadratischen Formen ist nun die Bestimmung von $\mathrm{Ker}(d)$ und $\mathrm{Koker}(d)$ für gewisse Schemata X.
So haben dies A. Pfister (in [Pf]) und R. Parimala (in [Pa]) für bestimmte algebraische Kurven, z.B. Koniken und elliptische Kurven, getan.
Eine kanonische, d.h. unter anderem funktorielle, Beschreibung von $\mathrm{Ker}(d)$ und $\mathrm{Koker}(d)$ scheitert im allgemeinen aber daran, daß der zweite Randhomomorphismus von der Wahl des Primelements abhängt.
Die nachfolgende Arbeit stellt eine Wittringhomologietheorie bereit, mit der dies nun möglich ist.
Als Modell dient uns hierfür die von M. Rost in [Ro] entwickelte Homologietheorie für die Milnorsche $K-$Theorie.
Der Startpunkt und das Grundproblem einer solchen Homologietheorie für Wittringe ist es, den Wittring eines Körpers so zu modifizieren, daß dieser eine kanonische Randabbildung zuläßt.
Einer Idee von M. Rost folgend, gehen wir hierbei wie folgt vor:
Ist F ein Körper, dieser sei endlich erzeugt über dem Grundkörper k, so betrachten wir Isometrieklassen regulärer quadratischer Formen über F mit Werten in dem eindimensionalen Vektorraum $\omega_{F/k} := \bigwedge^{dim_F \Omega^1_{F/k}} \Omega^1_{F/k}$ über F.
Die Grothendieckgruppe der Isometrieklassen dieser quadratischen Formen modulo der Untergruppe hyperbolischer Formen

$$\tilde{W}(F) := W(F, \omega_{F/k})$$

ersetzt die Wittgruppe $W(F)$ des Körpers F. (Diese Gruppen besitzen im allgemeinen keine Ringstruktur mehr.)
Besitzt F eine diskrete Bewertung v, so existiert für diese Gruppen ein kanonisch definierter, vom üblichen zweiten Randhomomorphismus abgeleiteter, Randhomomorphismus

$$\delta_v : \tilde{W}(F) \to \tilde{W}(\kappa(x)),$$

welcher nun nicht mehr von der Wahl eines Primelements abhängt.
In den Kapiteln 1 und 2 präzisieren wir obige Definition, konstruieren den Randhomomorphismus δ_v und etablieren das funktorielle Verhalten dieser Wittgruppen bei Körpererweiterungen.
Es stellt sich heraus, daß man für endliche Körpererweiterungen E/F (jeweils endlich erzeugt über dem Grundkörper k) eine kanonische Korestriktion $c_{E/F} : \tilde{W}(E) \to \tilde{W}(F)$ und für separable (nicht notwendig endliche) Erweiterungen E/F eine Restriktion $r_{E/F}$ hat, wobei bei letzterer die Zielgruppe $\tilde{W}(E)$ noch etwas modifiziert werden muß.
Der abschließende Teil von Kapitel 2 ist dann dem Studium des Zusammenspiels von Restriktion, Korestriktion und Randhomomorphismus bei Bewertungsfortsetzungen gewidmet. Die hierbei erzielten Ergebnisse bilden die Grundlage für die geometrischen Anwendungen in den späteren Kapiteln.
In Kapitel 3 definieren wir (unter Benutzung des Hauptergebnisses in [Et]) das Objekt, welcher der Wittringhomologietheorie zu Grunde liegt:
In Verallgemeinerung der am Anfang unserer Ausführungen angesprochenen Konstruktion $d : W(k(X)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} W(\kappa(x))$, konstruieren wir mit Hilfe der Daten des Funktors $\tilde{W}$ auf einem beliebigen algebraischen $k-$Schema X einen Komplex der Form

$$0 \to \bigoplus_{x \in X_{(n)}} \tilde{W}(\kappa(x)) \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{x \in X_{(n-1)}} \tilde{W}(\kappa(x)) \xrightarrow{d_X} \ldots \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} \tilde{W}(\kappa(x)) \to 0,$$

$(n = \dim(X))$ den sogenannten **Wittkomplex** $C_*(X; \tilde{W})$ auf X.
In den beiden nachfolgenden Kapiteln untersuchen wir das funktorielle Verhalten dieses Komplexes. Dazu etablieren wir nach Vorgabe eines Morphismus $X \to Y$ von algebraischen $k-$Schemata gewisse Abbildungen zwischen den Wittkomplexen auf X und Y. Zum Beispiel hat man für einen Morphismus $f : X \to Y$ eine Push-forward-Abbildung

$$f_* : C_*(X; \tilde{W}) \to C_*(Y; \tilde{W}),$$

und ist f ein glatter Morphismus von der konstanten relativen Dimension n, so existiert eine Pull-back-Abbildung

$$f^* : C_*(Y; \tilde{W}) \to C_{*+n}(X; \tilde{W}, \Omega^n_{X/Y});$$

hierbei ist der Komplex $C_*(X; \tilde{W})$ auf X mit dem Geradenbündel $\Omega^n_{X/Y}$ 'getwistet.'

Die in Kapitel 2 erzielten Ergebnisse über das Verhalten des Randhomomorphismus bei Bewertungsfortsetzungen benutzen wir in Kapitel 5 um zu entscheiden, unter welchen Bedingungen an den Morphismus f die obigen Abbildungen Komplexmorphismen sind. Als Resultat erhalten wir zum Beispiel für die Homologiegruppen der jeweiligen Komplexe eigentliches Push-forward und glattes Pull-back.

Im abschließenden Kapitel beweisen wir eine wichtige Eigenschaft dieser Theorie, nämlich die Homotopieinvarianz der Homologiegruppen des Wittkomplexes.

Als Anwendung dieses Satzes erhalten wir eine vollständige Übersicht über die Homologiegruppen des Wittkomplexes aller affinen Räume von beliebiger Dimension über dem Körper k.

Mit Hilfe dieses Ergebnisses berechnen wir abschließend die Homologiegruppen des Wittkomplexes projektiver Räume über dem Körper k.

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei Herrn Dr.M. ROST für die Anregung zu dieser Arbeit und seine freundliche Unterstützung bedanken. Ferner bedanke ich mich bei Herrn A. ETTNER für zahlreiche hilfreiche Gespräche. Ich bedanke mich bei Prof.Dr.G. TAMME, Dr.R. HÜBL, Dr.Th. MOSER und M. BOCKES für viele Anregungen und nützliche Hinweise zu Detailfragen.

Notationen und Konventionen:

Ist A ein kommutativer Ring mit 1 und H ein freier $A-$Modul vom Rang 1, so bezeichnen wir mit H^0 die Menge der Basiselemente von H.
Für eine $A-$Algebra B derart, daß $\Omega^1_{B/A}$ ein freier $B-$ Modul von endlichem Rang ist, bezeichnen wir die maximale äußere Potenz von $\Omega^1_{B/A}$ immer mit $\omega_{B/A}$.

Ist E ein Körper der Charakteristik $p > 0$, so bezeichnen wir mit E^p das Bild von E unter dem absoluten Frobenius von E.

Ist F ein Körper der Charakteristik $\neq 2$ und ϕ eine reguläre quadratische Form über F, so bezeichnen wir mit $\langle\phi\rangle$ das von ϕ repräsentierte Element im Wittring $W(F)$ von F.
Ist E/F eine endliche Körpererweiterung und $s : E \to F$ eine von Null verschiedene $F-$lineare Abbildung, so bezeichnen wir den Scharlau- Transfer zum Funktional s mit $s_* : W(E) \to W(F)$.

Alle in dieser Arbeit auftretenden Körper haben, so weit nichts anderes gesagt wird, eine von 2 verschiedene Charakteristik.

Mit $(E/F)_{tr}$ bezeichnen wir den Transzendenzgrad einer Körpererweiterung E/F.

Unter einer Bewertung eines Körpers F verstehen wir immer eine diskrete Bewertung vom Rang 1. Ist v eine solche Bewertung, so bezeichnen wir mit $\mathcal{O}_v$ den Bewertungsring von v; mit $\mathfrak{m}_v$ bezeichnen wir sein maximales Ideal. π_v sei immer ein Primelement von v und $\kappa(v)$ sei der Restklassenkörper von $\mathcal{O}_v$.
Arbeiten wir über einem fixierten Grundkörper k, und ist F endlich erzeugt über k, so sei eine Bewertung v von F (soweit nichts ausdrücklich anderes gesagt wird) zusätzlich immer von geometrischem Typ über k; d.h. $\mathcal{O}_v$ ist die Lokalisierung einer endlich erzeugten, integren $k-$Algebra in einem regulären Punkt der Kodimension 1.

Ist X ein Schema und $p \geq 0$, so bezeichnen wir mit $X_{(p)}$ die Menge aller Punkte $x \in X$ der Dimension $\dim(\overline{\{x\}}) = p$. Entsprechend bezeichnen wir mit $X^{(d)}$ die Menge aller Punkte $x \in X$ der Kodimension $\operatorname{codim}(\overline{\{x\}}, X) = d$.

Ist $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X, so sei für einen Punkt $x \in X$ $\mathcal{L}(x)$ der eindimensionale $\kappa(x)-$Vektorraum $\mathcal{L}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$.
Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata und $y \in Y$, so bezeichnen wir mit $X_{\kappa(y)}$ oder X_y die Faser von f in y, d.h. $X_{\kappa(y)} = X_y$ ist das $\kappa(y)-$Schema $X \times_Y \mathrm{Spec}(\kappa(y))$.

Abschließend erinnern wir an dieser Stelle an die folgende Definition:
Eine endlich erzeugte Körpererweiterung E/F heißt *separabel*, falls E eine separierende Transzendenzbasis B über F besitzt, d.h. die Erweiterung $E/F(B)$ ist separabel algebraisch und $F(B)/F$ ist rein transzendent.

In der Arbeit machen wir freien Gebrauch von grundlegenden Tatsachen aus der kommutativen Algebra, der Theorie der Kähler-Differentiale (vgl. [Ku]), der Theorie der Schemata (vgl. EGA, [Ha]) und der quadratischen Formentheorie (vgl. [Sa]).

1 Wittgruppen und Randabbildungen

1.1 Die Randabbildung für den Wittring

(1.1.1) Es sei X ein integres algebraisches $k-$Schema und $k(X)$ der Funktionenkörper von X.
Wie in der Einleitung dieser Arbeit bereits angesprochen, ist ein Ziel dieser Arbeit eine kanonische Randabbildung

$$d : \tilde{W}(k(X)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \tilde{W}(\kappa(x))$$

zu etablieren; hierbei bezeichne $\tilde{W}(k(X))$ und $\tilde{W}(\kappa(x))$ die Wittgruppen der regulären quadratischen Formen über $k(X)$ bzw. $\kappa(x)$ mit Werten in den eindimensionalen Vektorräumen $\omega_{k(X)/k}$ bzw. $\omega_{\kappa(x)/k}$.

Um zu sehen, mit welchen Daten die Zuordnung $F \mapsto \tilde{W}(F)$ ausgestattet werden muß, um dies zu erreichen, rekapitulieren wir noch einmal im Detail die Konstruktion einer solchen Randabbildung für den üblichen Wittring.
Ist X regulär in der Kodimension 1, so definiert jeder Punkt $x \in X^{(1)}$ eine diskrete Bewertung v_x auf $k(X)$ mit Restklassenkörper $\kappa(x)$.

Allgemein hat man nun für den Wittring $W(F)$ eines diskret bewerteten Körpers F mit (nicht notwendig geometrischer) Bewertung v nach Wahl eines Primelements π_v einen Gruppenhomomorphismus

$$\delta_2^{\pi_v} : W(F) \longrightarrow W(\kappa(v))$$

$$\langle a \rangle \mapsto \begin{cases} \left\langle \overline{\dfrac{a}{\pi_v^{v(a)}}} \right\rangle, & \text{falls} \quad v(a) \equiv 1 \bmod 2 \\ 0, & \text{falls} \quad v(a) \equiv 0 \bmod 2 \end{cases}$$

($a \in F^*$), den sogenannten **2. Randhomomorphismus zum Primelement** π_v.

$\delta_2^{\pi_v}$ hängt aber offenbar von der Wahl des Primelements π_v ab.

(1.1.2) **Bemerkung:** Der Homomorphismus $s_v^{\pi_v}(\langle a \rangle) := \delta_2^{\pi_v}(\langle \pi_v \cdot a \rangle)$: $W(F) \to W(\kappa(v))$ hängt hingegen nicht von der Wahl des Primelements ab und wird auch mit δ_1^v bezeichnet; es ist der sogenannte 1. Randhomomorphismus zur Bewertung v.

Wählen wir also zu jedem $x \in X^{(1)}$ ein Primelement π_{v_x} der zugehörigen Bewertung auf $k(X)$, so erhalten wir eine Randabbildung

$$d := (\delta_2^{\pi_{v_x}}) : W(k(X)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} W(\kappa(x)).$$

(Beachte: Die entsprechende Konstruktion für den ersten Randhomomorphismus (vgl. (1.1.2)) führt ins direkte Produkt der $W(\kappa(x))$.)
Ist nun X nicht mehr regulär in der Kodimension 1, so hat man zur Definition von d die Normalisierung $\pi : \tilde{X} \to X$ zu betrachten.
Ist $x \in X^{(1)}$, so definiert jeder Punkt $y \in \pi^{-1}(x)$ eine diskrete Bewertung v_y auf $k(X)$ mit Restklassenkörper $\kappa(y)$. Nun ist aber i.a. $\kappa(y)$ eine endliche Erweiterung von $\kappa(x)$.
Um also einen Homomorphismus von $W(k(X)) \to W(\kappa(x))$ zu erhalten, ist es also von nöten $\delta_2^{\pi_{v_y}}$ mit einer Korestriktion $c_{\kappa(y)/\kappa(x)} : W(\kappa(y)) \to W(\kappa(x))$ zu komponieren.
Für den Wittring existiert eine solche Korestriktion i.a. aber nur nach Vorgabe eines von Null verschiedenen $\kappa(x)-$ linearen Funktionals $s : \kappa(y) \to \kappa(x)$. Die Wahl eines solchen Funktionals ist a priori nicht kanonisch gegeben.

Die Definition einer analogen, aber kanonischen Randabbildung

$$d : \tilde{W}(k(X)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} \tilde{W}(\kappa(x))$$

erfordert also die Zuordnung $F \mapsto \tilde{W}(F)$ für bewertete Körper mit einem kanonischen Randhomomorphismus auszustatten und für endliche Körpererweiterungen E/F eine kanonische Korestriktion $c_{E/F} : \tilde{W}(E) \to \tilde{W}(F)$ zu konstruieren.

(1.1.3) Bemerkung: Ist E/F eine endliche Körpererweiterung und bilden wir den separablen Abschluß F_s von F in E, so ist die kanonische Restriktionsabbildung $r_{E/F_s} : W(F_s) \to W(E)$ ein Isomorphismus. Mit Hilfe des Scharlau-Transfers zum Spurfunktional $(tr_{F_s/F})_* : W(F_s) \to W(F)$ erhält man dann eine Korestriktion $c_{E/F} : W(E) \to W(F)$ durch die Vorschrift

$$c_{E/F} := (tr_{F_s/F})_* \circ r_{E/F_s}^{-1}.$$

In [Mo], 3.4.1 ist gezeigt, daß diese Korestriktion kontravariant funktoriell für endliche Körpererweiterungen ist.
Dieser Vorgehensweise bedienen wir uns auch in Kapitel 2 bei der Konstruktion der Korestriktion für $F \mapsto \tilde{W}(F)$.

(1.1.4) Ist $\langle \Phi \cdot h \rangle \in \tilde{W}(k(X))$ mit $\langle \Phi \rangle \in W(k(X))$ und $h \in \omega^0_{k(X)/k}$, so ist $(\langle \Phi \rangle, h) \in W(k(X)) \times \omega^0_{k(X)/k}$ und offenbar identifiziert sich dann $\tilde{W}(k(X))$ mit dem Quotientenraum von $W(k(X)) \times \omega^0_{k(X)/k}$ modulo der Diagonalaktion von F^*.

Im nächsten Abschnitt stellen wir einige allgemeine Tatsachen über solche Quotientenräume zusammen, die uns schließlich einen schlagkräftigen Kalkül für quadratische Formen mit Werten in einem eindimensionalen Vektorraum liefern.
Hiermit ist die Realisierung unserer oben gesteckten Ziele dann in Kapitel 2 möglich.

1.2 Die Wittgruppe als homogener Raum

Wir beginnen zunächst ganz allgemein:
Sei G eine abelsche Gruppe. Wir betrachten die Kategorie der $G-$Mengen mit den $G-$Abbildungen als Morphismen.

Das für uns wichtigste Beispiel einer solchen Kategorie ist die Kategorie der F^*-Mengen für einen Körper F. So sind der Wittring $W(F)$ und $H - \{0\}$ für einen $F-$Vektorraum H Objekte dieser Kategorie.

Wir definieren im Hinblick auf (1.1.4):

(1.2.1) Definition: *Seien A und B $G-$Mengen.*
Dann sei $A \otimes_G B := A \times B/\sim$, mit $(a,b) \sim (a',b') :\Longleftrightarrow$ Es existiert ein Element $g \in G$ mit $(a',b') = (ga, g^{-1}b)$ für $a, a' \in A$ und $b, b' \in B$.

Bezeichnung: Die durch (a,b) in $A \otimes_G B$ repräsentierte Äquivalenzklasse bezeichnen wir mit $a \otimes b$.

Ist A eine $G-$Menge und $f : G \to G'$ ein Homomorphismus von abelschen Gruppen, so ist $A \otimes_G G'$ vermöge $g' \cdot (a \otimes h') := a \otimes g'h'$ eine $G'-$Menge.

Alle für uns nötigen Tatsachen über diese Bildungen sind in den nachfolgenden zwei Lemmata zusammengefaßt.

(1.2.2) Lemma:

1. *$A \otimes_G B$ wird durch $g(a \otimes b) := ga \otimes b = a \otimes gb$ für $g \in G, a \in A$ und $b \in B$ zu einer $G-$Menge.*

2. *(universelle Eigenschaft)*

   Sind A, B und C $G-$Mengen und ist $f : A \times B \to C$ eine Abbildung mit der Eigenschaft $g \cdot f(a,b) = f(ga,b) = f(a,gb)$ für alle $g \in G, a \in A$ und $b \in B$, so existiert genau eine $G-$Abbildung h, so daß

$$\begin{tikzcd} (a,b) \arrow[d, mapsto] & A \times B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "kan"] & C \\ a \otimes b & A \otimes_G B \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

   kommutiert.

3. *Man hat einen kanonischen Isomorphismus von $G-$Mengen*

$$G \otimes_G A \cong A.$$

4. *Sind G, H abelsche Gruppen, die auf C verträglich operieren (d.h. C ist $G-$ und $H-$Menge mit $g(hc) = h(gc)$ für alle $h \in H, g \in G, c \in C$) und ist A eine $G-$Menge und B eine $H-$Menge, so hat man einen kanonischen Isomorphismus von $G-$ und $H-$Mengen*

$$A \otimes_G (C \otimes_H B) \cong (A \otimes_G C) \otimes_H B.$$

(1.2.3) Lemma: *(Zusammenhang mit Tensorprodukten)*

1. *Es sei E/F eine Körpererweiterung und H ein $F-$Vektorraum der Dimension 1. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus von E^*-Mengen*
$$(E \otimes_F H)^0 \cong E^* \otimes_{F^*} H^0.$$

2. *Es sei $\mathcal{O}$ ein kommutativer Ring mit 1, F ein Körper, $\mathcal{O} \to F$ ein Ringhomomorphismus und H ein freier $\mathcal{O}-$ Modul vom Rang 1. Dann hat man einen kanonischen Isomorphismus von F^*-Mengen*
$$(H \otimes_{\mathcal{O}} F)^0 \cong H^0 \otimes_{\mathcal{O}^*} F^*.$$

Beachte: H^0 ist in kanonischer Weise eine $\mathcal{O}^*-$Menge.

(1.2.4) Definition: *(Wittgruppe mit Werten in H)*
Es sei F ein Körper und H ein eindimensionaler $F-$Vektorraum.
Dann sei $W(F,H) := W(F) \otimes_{F^*} H^0$.

(1.2.5) Notiz:

1. *$W(F,H)$ besitzt eine Gruppenstruktur in der folgenden Weise:*
$$\langle\phi\rangle \otimes h + \langle\psi\rangle \otimes h := (\langle\phi\rangle + \langle\psi\rangle) \otimes h;$$
dabei ist $h \in H^0$ und $\langle\psi\rangle, \langle\phi\rangle \in W(F)$.

2. *$W(F,H)$ ist ein freier $W(F)-$Modul vom Rang 1.*

$W(F,H)$ heißt die Wittgruppe von F mit Werten in H.

Bemerkung: Ist $\langle\Phi\rangle \otimes h \in W(F,H)$, so ist $\Phi \cdot h$ eine reguläre quadratische Form über F mit Werten in H. Daher identifiziert sich $W(F,H)$ mit der üblichen Grothendieckgruppe der regulären quadratischen Formen über F mit Werten in H modulo der Untergruppe der hyperbolischen Formen mit Werten in H.
Unser Zugang ermöglicht jedoch eine durchsichtigere Darstellung der funktoriellen Eigenschaften dieser Gruppen (vgl. 2.1).

Wir haben nun einen kanonischen Randhomomorphismus in der folgenden Weise:

(1.2.6) Definition: *Es sei F ein Körper mit Bewertung v (nicht notwendig geometrisch.)*
Dann setze

$$\overline{\delta}_v : W(F) \to W(\kappa(v), (\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2)^*)$$

$$\langle a \rangle \longmapsto \delta_2^{\pi_v}(\langle a \rangle) \otimes \overline{\pi}_v{}^*;$$

dabei sei $a \in F^*, \pi_v$ ein Primelement von v und $\overline{\pi}_v{}^*$ bezeichne die zu $\overline{\pi}_v$ duale Basis des eindimensionalen $\kappa(v)-$Vektorraums $\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$.

Es gilt:

(1.2.7) Lemma: *$\overline{\delta}_v$ hängt nicht von der Wahl des Primelements ab.*

(1.2.8) Ist F ein Körper, so operiert aufgrund der Wittrelation $\langle b^2 \cdot a \rangle = \langle a \rangle$ für alle $a, b \in F^*$ die Gruppe der Quadratklassen $Q(F) := F^*/F^{*2}$ auf $W(F)$.

Ist H ein 1-dimensionaler $F-$Vektorraum, so ist auch

$$Q(H) := H^0 \otimes_{F^*} Q(F)$$

eine $Q(F)-$Menge, und man stellt fest, daß $Q(F)$ auf $Q(H)$ frei und transitiv operiert. $Q(H)$ ist also ein sogenannter $Q(F)-$Torseur oder $Q(F)-$Modul. Wir definieren daher allgemein:

(1.2.9) Definition: *Es sei F ein Körper. Eine $Q(F)-$Menge A auf der $Q(F)$ frei und transitiv operiert heißt $Q(F)-$Modul.*

(1.2.10) Notiz: *Nach (1.2.2) 3) ist $W(F,H) = W(F) \otimes_{Q(F)} Q(H)$.*

Für manche Fälle (z.B. bei der Konstruktion der Korestriktion in (D$\tilde{W}$ 2) im nächsten Kapitel) ist diese Sichtweise von $W(F,H)$ nötig.

Es steht nun alles bereit um unsere, bereits in der Einleitung erwähnte, Zuordnung $F \mapsto \tilde{W}(F)$ exakt zu definieren und deren funktorielle Eigenschaften zu etablieren.
Dies geschieht jetzt in Kapitel 2.

2 Der Funktor $F \longmapsto \tilde{W}(F)$

2.1 Die Kategorien $(Sch/C_{fg}/k)$ und (C_{fg}/k)

Wir legen zunächst die Kategorien fest, in denen wir uns nun bewegen.

Es sei k ein vollkommener Körper der Charakteristik $\neq 2$.

(2.1.1) Die Kategorie (C_{fg}/k) der 'Körper' über k sei folgendermaßen erklärt:
Die Objekte der Kategorie (C_{fg}/k) sind endlich erzeugte Körpererweiterungen F von k.
Ein Morphismus $\phi : F \to E$ in (C_{fg}/k) ist ein $k-$Homomorphismus von Körpererweiterungen von k.

(2.1.2) Wir definieren nun die Kategorie $(Sch/C_{fg}/k)$.
Die Objekte von $(Sch/C_{fg}/k)$ sind Schemata X, zusammen mit einem Strukturmorphismus $\phi : X \to \mathrm{Spec}(F)$, wobei $F \in (C_{fg}/k)$ und ϕ von endlichem Typ ist.
Morphismen in $(Sch/C_{fg}/k)$ sind kommutative Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\phi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & \mathrm{Spec}(F), & \end{tikzcd}$$

dabei ist $F \in (C_{fg}/k)$ und ϕ, ψ sind von endlichem Typ.

2.2 Der Funktor $F \mapsto \tilde{W}(F)$

Wir definieren nun den Funktor, den wir im folgenden studieren wollen.

Für ein $F \in (C_{fg}/k)$ ist der $F-$Vektorraum $\Omega^1_{F/k}$ endlichdimensional und daher haben wir zu jedem $F \in (C_{fg}/k)$ den eindimensionalen $F-$Vektorraum $\omega_{F/k}$.

(2.2.1) Definition: *Es sei für $F \in (C_{fg}/k)$ $\tilde{W}(F) := W(F, \omega_{F/k})$ (vgl. (1.2.5)), und ist zusätzlich H ein eindimensionaler $F-$ Vektorraum, so sei*

$$\tilde{W}(F, H) := (W(F) \otimes_{F^*} {\omega_{F/k}}^0) \otimes_{F^*} H^0.$$

Bemerkung: $\tilde{W}(F)$ interpretiert sich geometrisch als die Wittgruppe der regulären quadratischen Formen über F mit Werten in dem eindimensionalen $F-$Vektorraum $\omega_{F/k}$.

Man hat somit eine Zuordnung $F \mapsto \tilde{W}(F)$ von der Kategorie (C_{fg}/k) in die Kategorie der abelschen Gruppen.

Wir etablieren nun das funktorielle Verhalten von $\tilde{W}$.

(2.2.2) Es sei $\phi : F \to E$ ein separabler Morphismus in (C_{fg}/k).
Aufgrund der Separabilität von E/F hat man eine exakte Sequenz von endlichdimensionalen $E-$Vektorräumen

$$0 \to \Omega^1_{F/k} \otimes_F E \to \Omega^1_{E/k} \to \Omega^1_{E/F} \to 0.$$

Diese induziert durch Übergang zu den maximalen äußeren Potenzen einen kanonischen Isomorphismus von eindimensionalen $E-$Vektorräumen

$$\omega_{F/k} \otimes_F E \otimes_E \omega_{E/F} \xrightarrow{\cong} \omega_{E/k}.$$

Ist also $d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n$ eine $F-$Basis des $1-$dimensionalen Vektorraums $\omega_{F/k}$, und ist $d_{E/F}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/F}t_r$ eine $E-$Basis von $\omega_{E/F}$, so ist folglich

$$d_{E/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}s_n \wedge d_{E/k}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}t_r$$

eine $E-$Basis von $\omega_{E/k}$.
Ist nun $d_{E/F}t'_1 \wedge ... \wedge d_{E/F}t'_r$ eine weitere $E-$Basis von $\omega_{E/F}$, so gibt es ein $e \in E^*$ mit

$$d_{E/F}t'_1 \wedge ... \wedge d_{E/F}t'_r = e \cdot d_{E/F}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/F}t_r$$

und also gilt

$$e \cdot d_{E/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}s_n \wedge d_{E/k}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}t_r =$$

$d_{E/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}s_n \wedge d_{E/k}t'_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}t'_r$.

Diese Vorüberlegung liefert uns einen wohldefinierten Morphismus

$$Q(\phi_*) : Q(\omega_{F/k}) \to Q(\omega_{E/k}) \otimes_{Q(E)} Q(\omega_{E/F})$$

von Moduln über $Q(F) \to Q(E)$.
Weiter hat man einen kanonischen Pfeil $i : Q(H) \to Q(H \otimes_F E)$ von Moduln über $Q(F) \to Q(E)$.
Wir erhalten somit einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi_* : \tilde{W}(F, H) \longrightarrow \tilde{W}(E, \omega_{E/F} \otimes_F H)$$

durch

$$\phi_* := r_{E/F} \otimes Q(\phi_*) \otimes i,$$

wobei $r_{E/F}$ die natürliche Restriktionsabbildung der Wittringe bezeichnet.

Bezeichnung: Wir bezeichnen ϕ_* auch oft mit $r_{E/F}$ und nennen diese Abbildung **Restriktion.**

Beachte: Ist $\phi : F \to E$ endlich, separabel, so erhält man eine Restriktion $\phi_* : \tilde{W}(F, H) \to \tilde{W}(E, H \otimes_F E)$, da $\Omega^1_{E/F} = 0$ ist.
Für beliebige Körpererweiterungen hat man dagegen keine kanonische Restriktionsabbildung.

Nochmals zusammengefaßt haben wir also:

(D$\tilde{W}$ 1) Zu jedem separablen Morphismus $\phi : F \to E$ in (C_{fg}/k) und jedem eindimensionalen $F-$Vektorraum H gibt es einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi_* = r_{E/F} : \tilde{W}(F, H) \to \tilde{W}(E, \omega_{E/F} \otimes_F H).$$

Die Restriktion besitzt die folgende Funktorialitätseigenschaft.

(2.2.3) Proposition: *Es seien $\phi : F \to E$ und $\psi : E \to L$ separable Morphismen in (C_{fg}/k). Dann gilt:*

$$(\psi \circ \phi)_* = \psi_* \circ \phi_*$$

nach kanonischer Identifizierung der Zielgruppen.

Beweis: Definitionsgemäß ist $(\psi \circ \phi)_*$ durch die Abbildung

$$r_{L/F} \otimes Q((\psi \circ \phi)_*) \otimes i$$

gegeben.
Nun ist aber $r_{L/F} = r_{L/E} \circ r_{E/F}$ auf Wittringniveau und i faktorisiert sich offenbar in der Form

$$\begin{tikzcd} Q(H) = H^0 \otimes_{F^*} Q(F) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "i"'] & H^0 \otimes_{F^*} Q(E) \arrow[r] & Q(H \otimes_F L). \end{tikzcd}$$

Wegen der Separabilität von L/E hat man die exakte Sequenz

$$0 \to \Omega^1_{E/F} \otimes_E L \to \Omega^1_{L/F} \to \Omega^1_{L/E} \to 0.$$

Diese induziert einen kanonischen $L-$Vektorraumisomorphismus

$$\omega_{L/F} \xrightarrow{\cong} \omega_{E/F} \otimes_E L \otimes_L \omega_{L/E}.$$

Mit diesem erhält man für $Q((\psi \circ \phi)_*)$ eine Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} Q(\omega_{F/k}) \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "Q((\psi\circ\phi)_*)"'] & Q(\omega_{E/k}) \otimes Q(\omega_{E/F}) \arrow[r] & Q(\omega_{L/k}) \otimes Q(\omega_{L/E}) \otimes Q(\omega_{E/F}). \end{tikzcd}$$

Ersichtlich liefert dies die behauptete Formel. $\square$

(2.2.4) Es sei nun $\phi : F \to E$ ein endlicher Morphismus in (C_{fg}/k) und H ein eindimensionaler $F-$Vektorraum. Wir konstruieren eine Korestriktion

$$\phi^* = c_{E/F} : \tilde{W}(E, H \otimes_F E) \to \tilde{W}(F, H).$$

Für die Wittringe von E und F hat man gemäß (1.1.3) eine Korestriktion $c_{E/F} : W(E) \to W(F)$.
Ist E/F endlich, separabel, so ist $\omega_{E/k} = \omega_{F/k} \otimes_F E$ und nach (1.2.2) und (1.2.3) ist dann $\tilde{W}(E, H \otimes_F E) = W(E) \otimes_{F^*} \omega^0_{F/k} \otimes_{F^*} H^0$ und in diesem Fall definieren wir ϕ^* durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(E, H \otimes_F E) \arrow[r, dashed, "\phi^*"] \arrow[d, "\wr", "kan"'] & \tilde{W}(F, H) \arrow[d, "\wr", "kan"'] \\
W(E) \otimes_{F^*} \omega^0_{F/k} \otimes_{F^*} H^0 \arrow[r, "(tr_{E/F})_* \otimes id"] & W(F) \otimes_{F^*} \omega^0_{F/k} \otimes_{F^*} H^0.
\end{tikzcd}$$

Wir konstruieren nun eine Korestriktion für endliche, total inseparable Erweiterungen.
Es sei also $\phi : F \to E$ endlich, total inseparabel, und es gelte zunächst $E^p \subseteq F$. (Es ist dann $E = F(\sqrt[p]{a_1}, ..., \sqrt[p]{a_n})$ mit $a_1, ..., a_n \in F^*$.)

Aus Dimensionsgründen sind die beiden nachfolgenden ersten fundamentalen exakten Sequenzen auch links exakt, nämlich

$$0 \to \Omega^1_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} F \to \Omega^1_{F/F^p} \to \Omega^1_{F/E^p} \to 0$$

und

$$0 \to \Omega^1_{F/E^p} \otimes_F E \to \Omega^1_{E/E^p} \to \Omega^1_{E/F} \to 0;$$

hieraus erhält man die exakte Sequenz

$$(*) \qquad 0 \to \Omega^1_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} E \to \Omega^1_{F/F^p} \otimes_F E \to \Omega^1_{E/E^p} \to \Omega^1_{E/F} \to 0.$$

Der absolute Frobenius $Fr : E \to E$ induziert einen Isomorphismus von $Q(E)-$Moduln

$$Q(\omega_{E/F}) \to Q(\omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} E).$$

(Man beachte: Fr induziert **keinen** Isomorphismus der $E-$Vektorräume $\omega_{E/F}$ und $\omega_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} E$.)
Berücksichtigt man, daß in kanonischer Weise $\Omega^1_{F/k} = \Omega^1_{F/F^p}$ und $\Omega^1_{E/k} = \Omega^1_{E/E^p}$ gilt, so erhält man aus $(*)$ einen kanonischen Isomorphismus von $Q(E)-$Moduln

$$Q(Fr, \phi) : Q(\omega_{F/k} \otimes_F E) \xrightarrow{\cong} Q(\omega_{E/k}).$$

$c_{E/F} : \tilde{W}(E) \to \tilde{W}(F)$ erhält man dann durch das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(E) \arrow[rr, dashed, "c_{E/F}"] \arrow[dd, "\wr"] & & \tilde{W}(F) \\
& & W(E) \otimes_{Q(F)} Q(\omega_{F/k}) \arrow[u, "r_{E/F}^{-1} \otimes id"'] \\
W(E) \otimes_{Q(E)} Q(\omega_{E/k}) \arrow[r, "id \otimes Q(Fr,\phi)^{-1}"] & W(E) \otimes_{Q(E)} Q(\omega_{F/k} \otimes_F E). \arrow[ur, "\wr"'] &
\end{tikzcd}$$

(Man beachte wieder (1.2.10), (1.2.2) und (1.2.3).)

Man hat also einen Isomorphismus $c_{E/F} : \tilde{W}(E) \to \tilde{W}(F)$ und in ersichtlicher Weise dann auch einen, ebenso bezeichneten, Isomorphismus nach Tensorieren mit einem eindimensionalen Vektorraum H über F :

$$c_{E/F} : \tilde{W}(E, H \otimes_F E) \xrightarrow{\cong} \tilde{W}(F, H).$$

Ist nun E/F endlich, total inseparabel und gilt nicht notwendig $E^p \subseteq F$, so existiert wenigstens eine Filtrierung $F := F_0 \subseteq F_1 \subseteq ... \subseteq F_k =: E$, so daß F_i/F_{i-1} für $i = 1, ..., k$ jeweils endliche, total inseparable Körpererweiterungen sind, für die jeweils $F_i^p \subseteq F_{i-1}$ gilt $(i = 1, ..., k)$.
Es sei dann $c_{E/F} := c_{F_1/F_0} \circ ... \circ c_{F_k/F_{k-1}}$; hierbei sei $c_{F_i/F_{i-1}}$ die gerade definierte Korestriktion.
Mittels vollständiger Induktion nach dem Grad der Körpererweiterung überlegt man sich leicht, daß die so definierte Korestriktion für endliche, total inseparable Erweiterungen unabhängig von der Wahl einer solchen Filtrierung ist.

Allgemein für eine beliebige endliche Erweiterung $\phi : F \to E$ in (C_{fg}/k) bilden wir den separablen Abschluß F_s von F in E und erklären

$$\phi^* : \tilde{W}(E, H \otimes_F E) \to \tilde{W}(F, H)$$

als die Komposition der Korestriktion für E/F_s und F_s/F.

Wir haben also:

(D$\tilde{W}$ 2) Ist $\phi : F \to E$ ein endlicher Morphismus in (C_{fg}/k) und H ein eindimensionaler $F-$Vektorraum, so hat man einen Gruppenhomomorphismus

$$\phi^* = c_{E/F} : \tilde{W}(E, H \otimes_F E) \to \tilde{W}(F, H),$$

die sogenannte **Korestriktion.**

Diese besitzt die folgende Funktorialitätseigenschaft.

(2.2.5) Proposition: *Es seien $\phi : F \to E$ und $\psi : E \to L$ endliche Morphismen in (C_{fg}/k).*
Dann gilt: $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$.

Beweis: In [Mo], 3.4.1 ist die in Frage stehende Funktorialitätsaussage für den Wittring bewiesen. Daher genügt es nach Definition der Korestriktion die Funktorialitätsaussage für die entsprechenden Abbildungen der $Q-$Moduln zu beweisen. Dies geschieht schrittweise:

1. Schritt: Es seien ϕ, ψ endlich, separabel.
Hier ist die behauptete Funktorialitätsaussage offensichtlich.

2. Schritt: Es seien ϕ, ψ endlich, total inseparabel.
$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$ liest man sofort aus der Definition der Korestriktion für endliche, total inseparable Erweiterungen ab (vgl. (2.2.4)).

3. Schritt: Es sei $\phi : F \to E$ endlich, total inseparabel und $\psi : E \to L$ endlich, separabel.
Wegen Schritt 2 dürfen wir $[E : F] = p$ annehmen. Es sei weiterhin F_s der separable Abschluß von F in L.
Wir haben also die folgende Situation:

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, dash, "sep"'] \arrow[dd, dash, "\psi\circ\phi"'] \arrow[dr, dash, "t.ins"] & \\
E \arrow[dr, dash, "t.ins"'] & & F_s \arrow[dl, dash, "sep"] \\
 & F. &
\end{tikzcd}$$

Es ist $E = F(\sqrt[p]{a})$ mit $a \in F^*$, und dann ist aufgrund der Separabilität von F_s/F

$$F_s \otimes_F E = F_s(\sqrt[p]{a}) = L$$

und daher hat man die nachfolgenden kanonischen Identifizierungen

$$\Omega^1_{E/F} \otimes_E L = \Omega^1_{E/F} \otimes_E (F_s \otimes_F E) = \Omega^1_{L/F_s}$$

und alsdann ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen (vgl. Definition Korestriktion)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega^1_{L^p/F_s^p} \otimes_{L^p} L \arrow[r] & \Omega^1_{F_s/k} \otimes_{F_s} L \arrow[r] & \Omega^1_{L/k} \arrow[r] & \Omega^1_{L/F_s} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega^1_{E^p/F^p} \otimes_{E^p} L \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \Omega^1_{F/k} \otimes_F L \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \Omega^1_{E/k} \otimes_E L \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & \Omega^1_{E/F} \otimes_E L \arrow[r] \arrow[u, "\wr"] & 0.
\end{tikzcd}$$

Hieraus folgt durch Übergang zu den $Q-$Moduln die behauptete Funktorialität.

4. Schritt: Es seien $\phi : F \to E$ und $\psi : E \to L$ beliebige endliche Erweiterungen in (C_{fg}/k).

Es sei F_s der separable Abschluß von F in E, E_s der separable Abschluß von E in L und H_s der separable Abschluß von F_s in E_s. Dann ist H_s der separable Abschluß von F in L.

Zusammengefaßt haben wir also die Situation

$$\begin{tikzcd}
& L \arrow[d, dash, "t.ins"] & \\
& E_s \arrow[dl, dash, "t.ins"'] \arrow[dr, dash, "sep"] & \\
H_s \arrow[dr, dash, "sep"'] & & E \arrow[dl, dash, "t.ins"] \\
& F_s \arrow[d, dash, "sep"] & \\
& F. &
\end{tikzcd}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
c_{L/F} &\overset{Def.}{=} c_{H_s/F} \circ c_{L/H_s} \\
&= (c_{F_s/F} \circ c_{H_s/F_s}) \circ (c_{E_s/H_s} \circ c_{L/E_s}),
\end{aligned}$$

letzteres nach Schritt 1 und 2.
Jetzt ist aber nach Schritt 3

$$\begin{aligned}
c_{H_s/F_s} \circ c_{E_s/H_s} &\overset{Def.}{=} c_{E_s/F_s} \\
&= c_{E/F_s} \circ c_{E_s/E}
\end{aligned}$$

und damit erhält man abschließend

$$c_{L/F} = \underbrace{c_{F_s/F} \circ c_{E/F_s}}_{=c_{E/F}} \circ \underbrace{c_{E_s/E} \circ c_{L/E_s}}_{=c_{L/E}}.$$

Damit ist die Proposition bewiesen. □

(2.2.6) Wir konstruieren nun den Randhomomorphismus zu einem bewerteten Körper für den Funktor $\tilde{W}$. Dieser hängt im Gegensatz zum analogen Homomorphismus des Funktors Wittring nicht mehr von der Wahl eines Primelements ab.
Wir geben hier eine Konstruktion von Andreas Ettner wieder (vgl. [Et]).

Es sei also $F \in (C_{fg}/k)$ ein bewerteter Körper mit Bewertung v und H ein freier $\mathcal{O}_v$−Modul vom Rang 1.
Wir stellen zunächst fest:

(2.2.7) Lemma: $\Omega^1_{\mathcal{O}_v/k}$ *ist ein freier* $\mathcal{O}_v$*−Modul vom Rang* $(F/k)_{tr}$*; und zwar gilt genauer: Ist* π_v *ein Primelement der Bewertung* v *und ist* $d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1, ..., d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n$ *eine* $\kappa(v)$*−Basis von* $\Omega^1_{\kappa(v)/k}$*, so sind die Elemente* $d_{\mathcal{O}_v/k}\pi_v, d_{\mathcal{O}_v/k}s_1, ..., d_{\mathcal{O}_v/k}s_n$ *eine* $\mathcal{O}_v$*−Basis von* $\Omega^1_{\mathcal{O}_v/k}$*; dabei sind* $s_1, ..., s_n \in \mathcal{O}_v^*$ *Liftungen von* $\overline{s}_1, ..., \overline{s}_n \in \kappa(v)^*$*.*

Dann ist nach (1.2.2) und (1.2.3)

$$\tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F) := W(F) \otimes_{\mathcal{O}_v{}^*} {\omega_{\mathcal{O}_v/k}}^0 \otimes_{\mathcal{O}_v{}^*} H^0.$$

Mit $\overline{\delta}_v$ (vgl. (1.2.6)) erhalten wir dann den Gruppenhomomorphismus

$$W(F) \otimes_{\mathcal{O}_v{}^*} {\omega_{\mathcal{O}_v/k}}^0 \xrightarrow{\overline{\delta}_v \otimes id} (W(\kappa(v)) \otimes_{\kappa(v)^*} \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^{2*0}) \otimes_{\mathcal{O}_v{}^*} {\omega_{\mathcal{O}_v/k}}^0.$$

(H ist hier wieder weggelassen.)
Die zweite fundamentale exakte Sequenz der Differentialformen für die Situation $k \to \mathcal{O}_v \to \kappa(v)$ liefert dann den kanonischen Isomorphismus

$$\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2 \otimes_{\kappa(v)} \omega_{\kappa(v)/k} = \omega_{\mathcal{O}_v/k} \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v).$$

Damit erhalten wir wieder mit (1.2.2) und (1.2.3)

$$(W(\kappa(v)) \otimes_{\kappa(v)^*} \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^{2*0}) \otimes_{\mathcal{O}_v{}^*} {\omega_{\mathcal{O}_v/k}}^0 = W(\kappa(v)) \otimes_{\kappa(v)^*} {\omega_{\kappa(v)/k}}^0.$$

Zusammengenommen haben wir also einen Homomorphismus

$$\delta_v : \tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F) \to \tilde{W}(\kappa(v), H \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v)),$$

welcher offenbar folgende konkrete Beschreibung besitzt:

Ist π_v ein Primelement von v und sind $s_1, ..., s_n \in \mathcal{O}_v{}^*$ Elemente derart, daß die Elemente $d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1, ..., d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n$ eine $\kappa(v)$−Basis von $\Omega^1_{\kappa(v)/k}$ bilden, so gilt

$$\delta_v(\langle\phi\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n) = \delta_2^{\pi_v}(\langle\phi\rangle) \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n.$$

Diese Beschreibung werden wir im Laufe der Ausführungen immer wieder benutzen.

Wir haben also das dritte Datum:

(D$\tilde{W}$ 3) Ist $F \in (C_{fg}/k)$, v eine Bewertung auf F und H ein freier $\mathcal{O}_v-$Modul vom Rang 1, so hat man einen Gruppenhomomorphismus

$$\delta_v : \tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F) \to \tilde{W}(\kappa(v), H \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v)).$$

2.3 Der Randhomomorphismus und Bewertungsfortsetzungen

Wir studieren nun den Zusammenhang zwischen Restriktion, Korestriktion und Randhomomorphismus.

Wir beginnen mit der folgenden Linearitätseigenschaft des Randhomomorphismus:

(2.3.1) Lemma: *Es sei v eine Bewertung auf $F \in (C_{fg}/k)$, H ein freier $\mathcal{O}_v-$Modul vom Rang 1 und u eine $v-$Einheit.*
Dann gilt für alle $\alpha \in \tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F)$

$$\delta_v(u \cdot \alpha) = \overline{u} \cdot \delta_v(\alpha).$$

Beweis: Sei $\alpha = \langle a \rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \otimes h \in \tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F)$ gegeben. Dabei ist $\langle a \rangle \in W(F)$ eine eindimensionale Form, $a \in F^*, h \in H^0, \pi_v$ ein Primelement von v, und $s_1, ..., s_n \in \mathcal{O}_v^*$ sind Elemente mit der Eigenschaft, daß $d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1, ..., d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n$ eine Basis von $\Omega^1_{\kappa(v)/k}$ bilden.
Dann ist nach Konstruktion des Randhomomorphismus (vgl. (2.2.6))

$$\delta_v(u \cdot \alpha) = \delta_2^{\pi_v}(\langle ua \rangle) \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n \otimes h.$$

Es sei oE. $v(a) \equiv 1 \bmod 2$. (Sonst steht auf beiden Seiten der behaupteten Gleichheit Null.)
Nun ist $\delta_2^{\pi_v}(\langle ua \rangle) = \left\langle \overline{\frac{ua}{\pi_v^{v(ua)}}} \right\rangle = \left\langle \overline{\frac{ua}{\pi_v^{v(a)}}} \right\rangle = \overline{u} \left\langle \overline{\frac{a}{\pi_v^{v(a)}}} \right\rangle = \overline{u}\delta_2^{\pi_v}(\langle a \rangle)$
und also folgt das Lemma. □

Für Bewertungen auf einem Körper $E \in (C_{fg}/k)$, deren Einschränkungen auf gewisse Teilkörper von E trivial sind, hat man die folgenden Aussagen.

(2.3.2) Lemma:

1. *Sei $\phi : F \to E$ ein separabler Morphismus in (C_{fg}/k) und v eine Bewertung auf E, welche auf F trivial ist, und es sei H ein 1-dimensionaler $F-$Vektorraum. Weiterhin sei der induzierte Morphismus $\overline{\phi} : F \to \kappa(v)$ ebenfalls separabel.*

   Dann gilt:

$$\delta_v \circ \phi_* = 0.$$

2. *Es sei $F \in (C_{fg}/k)$ und $\mathbb{A}_F^k = Spec(F[u_1, ..., u_k])$ der $k-$dimensionale affine Raum über F, und es sei $\phi : F \to F(u_1, ..., u_k)$ der kanonische Morphismus und $x \in {\mathbb{A}_F^k}^{(1)}$. Es sei v die zu x gehörige Bewertung auf $F(u_1, ..., u_k)$. Es sei abschließend H ein 1-dimensionaler $F-$Vektorraum und $\overline{\phi} : F \to \kappa(v)$ der induzierte Morphismus ($\overline{\phi}$ sei nicht notwendig separabel). Dann gilt:*

$$\delta_v \circ \phi_* = 0.$$

Beweis: 1) Sei $\alpha \in \tilde{W}(F, H)$ gegeben. Wir können wieder annehmen, daß α die Gestalt $\langle a \rangle \otimes d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \otimes h$ hat; dabei ist $a \in F^*, h \in H^0$ und $s_1, ..., s_n$ eine separierende Transzendenzbasis von F/k.
Da die Bewertung v auf F trivial ist, so ist v auch eine geometrische Bewertung über F und also ist

$$\phi_*(\alpha) =$$

$$\langle (-1)^n \phi(a) \rangle \otimes d_{E/k}\pi_v \wedge d_{E/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}s_n \wedge d_{E/k}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}t_r$$

$$\otimes d_{E/F}\pi_v \wedge d_{E/F}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/F}t_r \otimes h,$$

dabei ist π_v ein Primelement von v und $t_1, ..., t_r \in \mathcal{O}_v^*$ eine Liftung einer separierenden Transzendenzbasis von $\kappa(v)/F$.
Nach Konstruktion von δ_v ist dann

$$\delta_v(\alpha) =$$

$$\delta_2^{\pi_v}(\langle (-1)^n \phi(a) \rangle) \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{t}_r$$

$$\otimes d_{\mathcal{O}_v/F}\pi_v \wedge d_{\mathcal{O}_v/F}t_1 \wedge ... \wedge d_{\mathcal{O}_v/F}t_r \otimes h.$$

Nun ist $\delta_2^{\pi_v}(\langle(-1)^n\phi(a)\rangle) = 0$, da $v((-1)^n\phi(a)) \equiv 0 \bmod 2$ gilt.

2) Sei $\alpha = \langle a\rangle \otimes d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \otimes h \in \tilde{W}(F,H)$ wie in 1) gegeben.
Es sei abkürzend $K := F(u_1, ..., u_k)$. Dann ist

$$\phi_*(\alpha) = \langle a\rangle \otimes d_{K/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{K/k}s_n \wedge d_{K/k}u_1 \wedge ... \wedge d_{K/k}u_k \otimes d_{K/F}u_1 \wedge ... \wedge d_{K/F}u_k \otimes h.$$

Da $\mathbb{A}_F^k$ glatt ist über F, so ist $d_{\mathcal{O}_v/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\mathcal{O}_v/k}s_n \wedge d_{\mathcal{O}_v/k}u_1 \wedge ... \wedge d_{\mathcal{O}_v/k}u_k$ eine $\mathcal{O}_v-$Basis des $\mathcal{O}_v-$Moduls $\omega_{\mathcal{O}_v/k}$. Folglich existiert eine $v-$Einheit $e \in \mathcal{O}_v^*$ mit

$d_{\mathcal{O}_v/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\mathcal{O}_v/k}s_n \wedge d_{\mathcal{O}_v/k}u_1 \wedge ... \wedge d_{\mathcal{O}_v/k}u_k =$

$e \cdot d_{\mathcal{O}_v/k}\pi_v \wedge d_{\mathcal{O}_v/k}t_1 \wedge ... \wedge d_{\mathcal{O}_v/k}t_{n+k-1},$

dabei ist π_v ein Primelement der Bewertung v und $t_1, ..., t_{n+k-1} \in \mathcal{O}_v^*$ sind Elemente derart, daß $\bar{t}_1, ..., \bar{t}_{n+k-1}$ eine separierende Transzendenzbasis von $\kappa(v)/k$ ist.
Daher ist

$$\phi_*(\alpha) = \langle e \cdot a\rangle \otimes d_{K/k}\pi_v \wedge d_{K/k}t_1 \wedge ... \wedge d_{K/k}t_{n+k-1} \otimes d_{K/F}u_1 \wedge ... \wedge d_{K/F}u_k \otimes h$$

und also nach Definition des Randhomomorphismus $\delta_v(\phi_*(\alpha)) = 0$.

□

(2.3.3) Definition: *Es sei $F \in (C_{fg}/k)$, v eine Bewertung von F, und H sei ein freier $\mathcal{O}_v-$Modul vom Rang 1. Es sei weiter π_v ein Primelement von v.*
Dann heißt $s_v^{\pi_v} : \tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F) \to \tilde{W}(\kappa(v), H \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v))$ mit

$$s_v^{\pi_v}(\alpha) := \delta_v(\pi_v \cdot \alpha)$$

für alle $\alpha \in \tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F)$ der **Spezialisierungshomomorphismus** *zum Primelement π_v von v.*

Für diesen Homomorphismus gilt:

(2.3.4) Lemma: *Sei $\phi : F \to E$ ein separabler Morphismus in (C_{fg}/k) und v eine Bewertung auf E, welche auf F trivial ist, und es sei H ein 1-dimensionaler $F-$ Vektorraum. Es sei der von ϕ induzierte Morphismus $\overline{\phi} : F \to \kappa(v)$ ebenfalls separabel.*
Dann gilt:

$$s_v^{\pi_v} \circ \phi_* = (-1)^n \cdot \overline{\phi}_*$$

für ein beliebiges Primelement π_v von v, nach Identifizierung mit dem durch π_v induzierten Isomorphismus der Zielgruppen; dabei ist n der Transzendenzgrad von F über k.

Beweis: Wir präzisieren zunächst die letzte Aussage:
Die Zielgruppe von $\overline{\phi}_*$ ist $\tilde{W}(\kappa(v), \omega_{\kappa(v)/F})$, während die Zielgruppe von $s_v^{\pi_v} \circ \phi_*$ aber $\tilde{W}(\kappa(v), \omega_{\mathcal{O}_v/F} \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v))$ ist.
Nun ist

$$\omega_{\mathcal{O}_v/F} \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v) = \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2 \otimes_{\kappa(v)} \omega_{\kappa(v)/F}. \qquad (*)$$

Das Primelement π_v induziert einen Isomorphismus $\kappa(v) \cong \mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$.
$(*)$ induziert vermöge dieser Isomorphie einen $\kappa(v)-$Isomorphismus $\omega_{\kappa(v)/F} \cong \omega_{\mathcal{O}_v/F} \otimes \kappa(v)$ und alsdann einen Isomorphismus der in Frage stehenden Zielgruppen.
Diesen Isomorphismus halten wir fest.
Sei nun $\alpha \in \tilde{W}(F, H)$ durch $\langle a \rangle \otimes d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \otimes h$ mit $a \in F^*, h \in H^0$ und $s_1, ..., s_n$ eine separierende Transzendenzbasis von F/k gegeben.
Dann ist wieder

$$\phi_*(\alpha) =$$

$$\langle (-1)^n \phi(a) \rangle \otimes d_{E/k}\pi_v \wedge d_{E/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}s_n \wedge d_{E/k}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}t_r$$

$$\otimes d_{E/F}\pi_v \wedge d_{E/F}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/F}t_r \otimes h;$$

dabei ist $t_1, ..., t_r$ eine separierende Transzendenzbasis von $\kappa(v)/F$.

Folglich ist

$$s_v^{\pi_v}(\phi_*(\alpha)) =$$

$$\delta_2^{\pi_v}(\langle (-1)^n \cdot \pi_v \cdot \phi(a) \rangle) \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{t}_r$$

$$\otimes d_{\mathcal{O}_v/F}\pi_v \wedge d_{\mathcal{O}_v/F}t_1 \wedge ... \wedge d_{\mathcal{O}_v/F}t_r \otimes h =$$

$$\delta_2^{\pi_v}(\langle(-1)^n \cdot \pi_v \cdot \phi(a)\rangle) \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{t}_r \otimes \overline{\pi}$$

$$\otimes d_{\kappa(v)/F}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/F}\overline{t}_r \otimes h.$$

Andererseits ist

$\overline{\phi}_*(\alpha) =$

$$\left\langle \overline{\phi(a)} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{t}_r$$

$$\otimes d_{\kappa(v)/F}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/F}\overline{t}_r \otimes h.$$

Nun ist

$$\delta_2^{\pi_v}(\langle(-1)^n \cdot \pi_v \cdot \phi(a)\rangle) = \left\langle \overline{(-1)^n \phi(a)} \right\rangle,$$

und beachtet man obige Identifizierung, so folgt dann die Behauptung. □

Wir untersuchen nun die Verträglichkeit von Restriktion und Korestriktion mit dem Randhomomorphismus. Die hierbei erzielten Ergebnisse sind fundamental für die geometrischen Anwendungen in den späteren Kapiteln.

(2.3.5) Satz: *Es sei $\phi : F \to E$ ein separabler Morphismus in (C_{fg}/k), und es sei v eine Bewertung auf F. w sei eine Bewertung auf E, welche v fortsetzt mit Verzweigungsindex 1. Es sei weiterhin H ein freier $\mathcal{O}_v-$Modul vom Rang 1 und $\overline{\phi} : \kappa(v) \to \kappa(w)$ sei der induzierte Homomorphismus der Restklassenkörper in (C_{fg}/k); dieser sei ebenfalls separabel.*
Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(E, \omega_{E/F} \otimes_{\mathcal{O}_v} H) \arrow[r, "\delta_w"] & \tilde{W}(\kappa(w), \omega_{\kappa(w)/\kappa(v)} \otimes_{\mathcal{O}_v} H) \\
\tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F) \arrow[u, "\phi_*"] \arrow[r, "\delta_v"] & \tilde{W}(\kappa(v), H \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v)) \arrow[u, "\overline{\phi}_*"']
\end{tikzcd}$$

d.h. es gilt:

$$\delta_w \circ \phi_* = \overline{\phi}_* \circ \delta_v.$$

Beweis: Es ist $\dim_E \Omega^1_{E/F} = (E/F)_{tr}$. Da w und v Bewertungen von geometrischem Typ auf E bzw. F sind, so erhält man $(E/F)_{tr} = (\kappa(w)/\kappa(v))_{tr}$ und somit $\dim_E \Omega^1_{E/F} = \dim_{\kappa(w)} \Omega^1_{\kappa(w)/\kappa(v)}$.
Nach [Ku], 6.5 hat man eine exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{m}_w/(\mathfrak{m}_w^2 + \mathfrak{m}_v \mathcal{O}_w) \to \Omega^1_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v} \otimes_{\mathcal{O}_w} \kappa(w) \to \Omega^1_{\kappa(w)/\kappa(v)} \to 0,$$

dabei bezeichnet $\mathfrak{m}_v$ bzw. $\mathfrak{m}_w$ das maximale Ideal von $\mathcal{O}_v$ bzw. $\mathcal{O}_w$. Aufgrund der Unverzweigtheit der Bewertungsfortsetzung liefert diese Sequenz einen Isomorphismus von $\kappa(w)-$Vektorräumen

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v} \otimes_{\mathcal{O}_w} \kappa(w) & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & \Omega^1_{\kappa(w)/\kappa(v)} \\ d_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v} t \otimes 1 & \longmapsto & d_{\kappa(w)/\kappa(v)} \overline{t}. \end{array}$$

Da außerdem $\Omega^1_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v} \otimes_{\mathcal{O}_w} E = \Omega^1_{E/F}$ gilt, so ist $\Omega^1_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v}$ ein freier Modul über $\mathcal{O}_w$ vom Rang $(\kappa(w)/\kappa(v))_{tr}$, denn ist $t_1, ..., t_r \in \mathcal{O}_w^*$ ein System von Elementen derart, daß $\overline{t}_1, ..., \overline{t}_r$ eine separierende Transzendenzbasis von $\kappa(w)/\kappa(v)$ bildet, so ist $d_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v} t_1, ..., d_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v} t_r$ eine $\mathcal{O}_w-$Basis von $\Omega^1_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v}$.
Also ist δ_w in obigem Diagramm wohldefiniert.
Wir rechnen nun die Kommutativität nach.
Es sei $\alpha \in \tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F)$ beliebig. Es seien $s_1, ..., s_n \in \mathcal{O}_v^*$ Elemente derart, daß $\overline{s}_1, ..., \overline{s}_n \in \kappa(v)$ eine separierende Transzendenzbasis von $\kappa(v)/k$ bilden. Es sei weiterhin π_v ein Primelement von v und h ein Basiselement von H.
Es ist dann $\alpha = \langle \phi \rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \otimes h$. Es sei oE. $\langle \phi \rangle = \langle a \rangle$ mit $a \in F^*$.
Zunächst sei $v(a) \equiv 1 \bmod 2$.
Dann ist

$$\overline{\phi}_* \circ \delta_v(\langle a \rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \otimes h) =$$

$$\overline{\phi}_*(\left\langle \overline{\frac{a}{\pi_v^{v(a)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n \otimes h) =$$

$$\left\langle \overline{\frac{\phi(a)}{\phi(\pi_v)^{v(a)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(w)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(w)/k}\overline{s}_n \wedge d_{\kappa(w)/k}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(w)/k}\overline{t}_r$$

$$\otimes d_{\kappa(w)/\kappa(v)}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(w)/\kappa(v)}\overline{t}_r \otimes h,$$

dabei sind $t_1, ..., t_r \in \mathcal{O}_w^*$ derart, daß die Elemente $\overline{t}_1, ..., \overline{t}_r \in \kappa(w)^*$ eine separierende Transzendenzbasis von $\kappa(w)/\kappa(v)$ bilden.
Andererseits ist

$$\delta_w \circ \phi_*(\langle a\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \otimes h) =$$

$$\delta_w(\langle \phi(a)\rangle \otimes d_{E/k}\pi_v \wedge d_{E/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}s_n \wedge d_{E/k}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}t_r \\ \otimes d_{E/F}t_1 \wedge ... \wedge d_{E/F}t_r \otimes h) =$$

$$\left\langle \overline{\frac{\phi(a)}{\pi_v^{w(\phi(a))}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(w)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(w)/k}\overline{s}_n \wedge d_{\kappa(w)/k}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(w)/k}\overline{t}_r \\ \otimes d_{\kappa(w)/\kappa(v)}\overline{t}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(w)/\kappa(v)}\overline{t}_r \otimes h.$$

Nun ist wegen $e(w \mid v) = 1$ π_v ebenfalls ein Primelement von w, und es gilt $w(\phi(a)) = v(a)$. Also kommutiert das Diagramm in diesem Fall.
Ist $v(a) \equiv 0 \bmod 2$, so ist $(\overline{\phi}_* \circ \delta_v)(\alpha) = (\delta_w \circ \phi_*)(\alpha) = 0$. Damit ist der Satz bewiesen. □

Korestriktion und Randhomomorphismus verbindet der folgende Satz.

(2.3.6) Satz: *Es sei $\phi : F \to E$ ein endlicher Morphismus in (C_{fg}/k) und es sei v eine Bewertung auf F. Es seien $w_1, ..., w_n$ die Fortsetzungen von v auf E und $\overline{\phi}_{w_i} : \kappa(v) \to \kappa(w_i)$ die induzierten Pfeile der Restekörpererweiterungen.*
Es sei weiterhin H ein freier $\mathcal{O}_v-$Modul vom Rang 1.
Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(E, H \otimes_{\mathcal{O}_v} E) \arrow[r, "(\delta_{w_i})"] \arrow[d, "\phi^*"] & \bigoplus_{i=1}^{n} \tilde{W}(\kappa(w_i), H \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(w_i)) \arrow[d, "\sum_{i=1}^{n} \overline{\phi}_{w_i}^*"] \\
\tilde{W}(F, H \otimes_{\mathcal{O}_v} F) \arrow[r, "\delta_v"] & \tilde{W}(\kappa(v), H \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v));
\end{tikzcd}$$

m.a.W.: Es gilt

$$\delta_v \circ \phi^* = \sum_{w_i|v} \overline{\phi}_{w_i}^* \circ \delta_{w_i}.$$

Dem Beweis dieses Satzes schicken wir zwei Tatsachen voraus. Zunächst das folgende, leicht zu sehende, Lemma über Spuren.

(2.3.7) Lemma:

1. *Es sei B eine endliche, freie $A-$Algebra über einem kommutativen Ring A mit 1 und $A \subset A'$ eine Ringerweiterung. Es sei $B' = B \otimes_A A'$ die Basiserweiterung. Dann kommutiert das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} b \otimes 1 & B' \arrow[r, "tr_{B'/A'}"] & A' \\ b \arrow[u, mapsto] & B \arrow[u] \arrow[r, "tr_{B/A}"] & A. \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

2. *Sind $B_1, ..., B_r$ endliche, freie $A-$Algebren und $B := \prod_{i=1}^{r} B_i$, so ist*

$$tr_{B/A}(b_1, ..., b_r) = \sum_{i=1}^{r} tr_{B_i/A}(b_i),$$

für $b_i \in B_i$ und $i = 1, ..., r$.

(2.3.8) Bemerkung: Es sei $K \in (C_{fg}/k)$ ein Körper, versehen mit einer geometrischen Bewertung v.
Es sei K_v die Henselisierung von K bezüglich v. K_v ist ein bewerteter Körper mit Bewertung $\hat{v}$ und es gilt $e(\hat{v} \mid v) = 1$.
$\hat{v}$ ist jedoch i.a. keine geometrische Bewertung, da K_v i.a. nicht endlich erzeugt über k ist.
Nach Definition der Henselisierung ist K_v/K separabel algebraisch, so daß wir die Beziehung

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_v/k} \otimes_{\mathcal{O}_v} K_v = \Omega^1_{K_v/k}$$

haben.
Wegen $\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2 = \mathfrak{m}_{\hat{v}}/\mathfrak{m}_{\hat{v}}^2$ gilt außerdem in kanonischer Weise

$$\mathfrak{m}_{\hat{v}}/\mathfrak{m}_{\hat{v}}^2 \otimes_{\kappa(v)} \omega_{\kappa(v)/k} = \omega_{\mathcal{O}_v/k} \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v).$$

Wir erhalten so analog zu (2.2.6) einen Randhomomorphismus

$$\delta_{\hat{v}} : \tilde{W}(K_v, H \otimes K_v) \to \tilde{W}(\kappa(v), H \otimes \kappa(v))$$

mit $\delta_{\hat{v}}(\langle a \rangle \otimes d_{K_v/k}\pi_v \wedge d_{K_v/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{K_v/k}s_n \otimes h) =$

$$\delta_2^{\pi_v}(\langle a \rangle) \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n \otimes h;$$

dabei ist π_v ein Primelement von v, $h \in H^0$, $a \in K_v^*$ und $s_1, ..., s_n \in {\mathcal{O}_v}^*$ sind Liftungen einer separierenden Transzendenzbasis von $\kappa(v)/k$.
Offenbar ist auch eine kanonische Restriktion $r_{K_v/K}$ definiert, so daß insbesondere (2.3.5) für den Morphismus $K \to K_v$ gilt.

Beweis von (2.3.6): Wir gehen in mehreren Schritten vor.

1. Schritt: Wir zeigen zunächst für jeden Zwischenkörper M von E/F: Ist der Satz für E/M und für M/F richtig, so ist er auch für E/F richtig.
Sei dazu v eine Bewertung wie im Satz. Seien $u_1, ..., u_l$ die Fortsetzungen von v auf M. Für $i = 1, ..., l$ seien $w_{i1}, ..., w_{in_i}$ die Fortsetzungen von u_i auf E. Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(E, H \otimes E) \arrow[r, "(\delta_{w_{ij}})"] \arrow[d, "c_{E/M}"] \arrow[dd, bend right=60, "c_{E/F}"'] & \bigoplus\limits_{i=1}^{l} \bigoplus\limits_{j=1}^{n_i} \tilde{W}(\kappa(w_{ij}), H \otimes \kappa(w_{ij})) \arrow[d, "\sum\limits_{j=1}^{n_i} c_{\kappa(w_{ij})/\kappa(u_i)}"] \arrow[dd, bend left=60, "\sum\limits_{i,j} c_{\kappa(w_{ij})/\kappa(v)}"] \\
\tilde{W}(M, H \otimes M) \arrow[r, "(\delta_{u_i})"] \arrow[d, "c_{M/F}"] & \bigoplus\limits_{i=1}^{l} \tilde{W}(\kappa(u_i), H \otimes \kappa(u_i)) \arrow[d, "\sum\limits_{i=1}^{l} c_{\kappa(u_i)/\kappa(v)}"] \\
\tilde{W}(F, H \otimes F) \arrow[r, "\delta_v"] & \tilde{W}(\kappa(v), H \otimes \kappa(v)).
\end{tikzcd}$$

Nimmt man an, daß der Satz für M/F gilt, so kommutiert das untere Rechteck des Diagramms. Nimmt man an, daß der Satz für E/M gilt, so kommutiert das obere Rechteck, weil es in jeder Komponente i kommutiert.

Da der linke bzw. rechte Bogen aufgrund der Funktorialitätseigenschaften der Korestriktion kommutiert (vgl. (2.2.5)) und da die w_{ij} offenbar genau die Fortsetzungen von v auf E sind, ist damit das Gewünschte gezeigt.

2. Schritt: Indem wir die Körpererweiterung E/F in eine separable und eine total inseparable Erweiterung zerlegen, so genügt es also nach dem 1. Schritt die Behauptung des Satzes für endlich, separable und endlich, total inseparable Körpererweiterungen E/F zu beweisen.
Sei also zunächst $\phi : F \to E$ endlich, total inseparabel und v eine Bewertung auf F.
Wiederum nach Schritt 1 dürfen wir $[E : F] = p$ annehmen.
Es existiert genau eine Bewertungsfortsetzung w von v auf E, und es gilt $e(w \mid v) = p$ oder $e(w \mid v) = 1$.
Außerdem ist die Restekörpererweiterung $\overline{\phi} : \kappa(v) \to \kappa(w)$ ebenfalls total inseparabel.
Es sei zunächst $e(w \mid v) = p$.
Da v eine geometrische Bewertung ist, so gilt die fundamentale Gleichung

$$[E : F] = p \cdot [\kappa(w) : \kappa(v)].$$

Daher ist $\kappa(w) = \kappa(v)$, und wir haben also die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(E) \arrow[dr, "\delta_w"] \arrow[dd, "c_{E/F}", "\wr"'] & \\
& \tilde{W}(\kappa(v)) \\
\tilde{W}(F) \arrow[ur, "\delta_v"'] &
\end{tikzcd}$$

zu beweisen.
(Da der Modul H beim Beweis des Satzes keine Rolle spielt, lassen wir ihn ab jetzt weg.)
Es genügt die Kommutativität des in Frage stehenden Diagramms auf Elementen der Form

$$\alpha = \langle a \rangle \otimes d_{E/k}\pi_w \wedge d_{E/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}s_n \in \tilde{W}(E)$$

zu beweisen; hierbei ist $a \in E^*$, π_w ein Primelement von w und $s_1, ..., s_n \in \mathcal{O}_w^*$ sind Liftungen einer separierenden Transzendenzbasis $\overline{s}_1, ..., \overline{s}_n \in \kappa(w)^*$ von $\kappa(w)/k$.
Ist $w(a) \equiv 0 \bmod 2$, so ist $\delta_w(\alpha) = 0$.
Ist $w(a) \equiv 1 \bmod 2$, so ist

$$\begin{aligned}\delta_w(\alpha) &= \left\langle \overline{\frac{a}{\pi_w^{w(a)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(w)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(w)/k}\overline{s}_n \\ &= \left\langle \overline{\frac{a^p}{\pi_w^{pw(a)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(w)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(w)/k}\overline{s}_n.\end{aligned}$$

Nach [Ku], 6.7 hat man einen kanonischen $\kappa(w)-$Vektorraumisomorphismus

$$\mathfrak{m}_w/\mathfrak{m}_w^2 \xrightarrow{\cong} \Omega^1_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v} \otimes_{\mathcal{O}_w} \kappa(w).$$

Daher ist $\Omega^1_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v}$ ein freier $\mathcal{O}_w-$Modul vom Rang 1 mit Basis $d_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v}\pi_w$.
Damit erhält man nach Definition von $c_{E/F}$ (vgl. (2.2.4)):

$$c_{E/F}(\alpha) = \langle a^p \rangle \otimes d_{F/k}\pi_w^p \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n.$$

(Beachte: $\kappa(w) = \kappa(v)$)
Da π_w^p ein Primelement von v ist, so ergibt sich:

$\delta_v(c_{E/F}(\alpha)) =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{für} \quad v(a^p) \equiv 0 \bmod 2 \\ \left\langle \overline{\frac{a^p}{\pi_w^{pv(a^p)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n, & \text{für} \quad v(a^p) \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

Wegen $v(a^p) = w(a)$ ist daher die Kommutativität des Diagramms in diesem Fall gezeigt.

Nun sei $e(w \mid v) = 1$.
Dann ist $[E : F] = [\kappa(w) : \kappa(v)] = p$ und also $\dim_{\kappa(w)}\Omega^1_{\kappa(w)/\kappa(v)} = 1$ und $\dim_E \Omega^1_{E/F} = 1$.
Nach [Ku], 6.7 hat man einen kanonischen Isomorphismus eindimensionaler $\kappa(w)-$Vektorräume

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v} \otimes_{\mathcal{O}_w} \kappa(w) \xrightarrow{\cong} \Omega^1_{\kappa(w)/\kappa(v)}.$$

$\Omega^1_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v}$ ist also wieder ein freier $\mathcal{O}_w-$Modul vom Rang 1 mit $\mathcal{O}_w-$Basis $d_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v}s$; hierbei ist $s \in \mathcal{O}_w^*$ eine Liftung eines Elements $\overline{s} \in \kappa(w)^*$ mit $d_{\kappa(w)/\kappa(v)}\overline{s} \neq 0$.
Dann gilt für ein Element

$$\alpha = \langle a \rangle \otimes d_{E/k}\pi_w \wedge d_{E/k}s \wedge d_{E/k}\overline{i}_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}\overline{i}_r \in \tilde{W}(E)$$

mit $a \in E^*$, $s \in \mathcal{O}_w^*$ mit $d_{\kappa(w)/\kappa(v)}\overline{s} \neq 0$ und $i_1, ..., i_r \in \mathcal{O}_v^*$ nach Definition von $c_{E/F}$

$$c_{E/F}(\alpha) = \langle a^p \rangle \otimes d_{F/k}\pi_w \wedge d_{F/k}s^p \wedge d_{F/k}i_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}i_r$$

und alsdann

$\delta_v(c_{E/F}(\alpha)) =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{für} \quad v(a^p) \equiv 0 \bmod 2 \\ \left\langle \overline{\dfrac{a^p}{\pi_w^{v(a^p)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}^p \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{i}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{i}_r, & \text{für} \quad v(a^p) \equiv 1 \bmod 2; \end{cases}$$

man beachte hierbei, daß π_w ebenfalls ein Primelement von v ist.

Weiter ist

$c_{\kappa(w)/\kappa(v)}(\delta_w(\alpha)) =$

$$= \begin{cases} 0, & \text{für} \quad w(a) \equiv 0 \bmod 2 \\ \left\langle \overline{\dfrac{a^p}{\pi_w^{pw(a)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}^p \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{i}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{i}_r, & \text{für} \quad w(a) \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}$$

Da $w(a)$ genau dann gerade ist, wenn dies auch $v(a^p)$ ist, so kommutiert das entsprechende Diagramm auch für den Fall $e(w \mid v) = 1$.

3. Schritt: Nun sei E/F endlich, separabel.
Es sei F_v die Henselisierung von F bezüglich v. F_v ist ein bewerteter Körper mit Bewertung $\hat{v}$, und es gilt $e(\hat{v} \mid v) = 1$ und $\kappa(\hat{v}) = \kappa(v)$.
Es seien weiterhin E_{w_i} die Henselisierungen von E bezüglich der Bewertungen w_i.

Dann sind die Erweiterungen E_{w_i}/F_v alle separabel, und es gilt

$$E \otimes_F F_v = \prod_{w_i | v} E_{w_i}.$$

Wir erhalten damit den folgenden Würfel:

$$\begin{tikzcd}
 & \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \tilde{W}(E_{w_i}, H \otimes E_{w_i}) \arrow[rr, "\delta_{\hat{w}_i}"] \arrow[dd, "\sum c_{E_{w_i}/F_v}"] & & \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \tilde{W}(\kappa(w_i), H \otimes \kappa(w_i)) \arrow[dd, "\sum c_{\kappa(w_i)/\kappa(v)}"] \\
\tilde{W}(E, H \otimes E) \arrow[ur, "r_{E_{w_i}/E}"] \arrow[rr, "(\delta_{w_i})"] \arrow[dd, "c_{E/F}"] & & \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \tilde{W}(\kappa(w_i), H \otimes \kappa(w_i)) \arrow[ur, equal] \arrow[dd, "\sum c_{\kappa(w_i)/\kappa(v)}"] & \\
 & \tilde{W}(F_v, H \otimes F_v) \arrow[rr, "\delta_{\hat{v}}"] & & \tilde{W}(\kappa(v), H \otimes \kappa(v)) \\
\tilde{W}(F, H \otimes F) \arrow[ur, "r_{F_v/F}"] \arrow[rr, "\delta_v"] & & \tilde{W}(\kappa(v), H \otimes \kappa(v)). \arrow[ur, equal] &
\end{tikzcd}$$

In diesem Würfel kommutiert die rechte Seitenfläche trivialerweise, Boden und Deckel kommutieren nach (2.3.5) und (2.3.8).
Wir zeigen nun die Kommutativität der linken Seitenfläche.
Wir haben dazu die Formel

$$(1) \quad r_{F_v/F} \circ c_{E/F} = \sum_{w_i | v} c_{E_{w_i}/F_v} \circ r_{E_{w_i}/E}$$

zu beweisen.
Im Hinblick auf die Gruppenstruktur von $\tilde{W}$ stellt man fest, daß (1) aus der folgenden Aussage (2) über das funktorielle Verhalten des Wittrings folgt:

$$(2) \quad r_{F_v/F} \circ c_{E/F} = \sum_{w_i | v} c_{E_{w_i}/F_v} \circ r_{E_{w_i}/E} : W(E) \to W(F_v);$$

dabei bezeichnet r die natürliche Restriktion und c den Scharlau-Transfer zum Spurfunktional.

Nach dem Spurlemma (2.3.7) 1) gilt $tr_{E\otimes_F F_v}(x\otimes 1) = tr_{E/F}(x)$ für alle $x \in E$ und also ist $tr_{E/F} \otimes id_{F_v} = tr_{E\otimes_F F_v/F_v}$.
Nun ist wie bereits festgestellt $E \otimes_F F_v = \prod E_{w_i}$ und wieder folgt aus dem Spurlemma (2.3.7) 2) $tr_{E_{w_i}/F_v} = tr_{E\otimes_F F_v/F_v} \mid E_{w_i}$.
Daher ist (2) gerade die Aussage des Satzes 2.2 in [Ar]. Somit kommutiert auch die linke Seitenfläche des Würfels.
Um also die Kommutativität der Vorderseite einzusehen, genügt es die Kommutativität der Rückseite zu beweisen.

Wir dürfen also F als henselsch mit Bewertung v und alsdann E als henselsch mit Bewertung w und E/F als separabel annehmen.
Wir beweisen nun die Aussage des Satzes für eine unverzweigte Erweiterung mit separabler Restekörpererweiterung und für eine total verzweigte Erweiterung, deren Verzweigungsindex nicht von $p = char(k)$ geteilt wird.
Dies wird in den beiden folgenden Schritten erledigt.

4. Schritt: Es sei nun $\phi : F \to E$ endlich, separabel und F henselsch mit Bewertung v. w sei die eindeutig bestimmte Fortsetzung von v auf E. $w \mid v$ sei unverzweigt.
Dann ist $[E : F] = [\kappa(w) : \kappa(v)]$.
Ist $\mathcal{O}_v$ der diskrete Bewertungsring von v, so ist der diskrete Bewertungsring $\mathcal{O}_w$ von w der ganze Abschluß von $\mathcal{O}_v$ in E.
Es gelten die folgenden Tatsachen:

1. $\mathcal{O}_w$ ist ein freier $\mathcal{O}_v$−Modul vom Rang $[E : F]$
2. $\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v) = \mathcal{O}_w/\mathfrak{m}_v\mathcal{O}_w = \kappa(w)$
3. $\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F = E$.

Es sei nun $s \in \mathcal{O}_w^*$ beliebig vorgegeben. Wir setzen

$$\Phi : \quad \mathcal{O}_w \longrightarrow \mathcal{O}_w$$
$$x \longmapsto sx^2$$

und

$$\tilde{\Phi} := tr_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v} \circ \Phi : \mathcal{O}_w \longrightarrow \mathcal{O}_v$$
$$x \mapsto tr_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v}(sx^2).$$

$\tilde{\Phi}$ ist eine reguläre quadratische Form über $\mathcal{O}_v$.
Φ und $\tilde{\Phi}$ induzieren reguläre Formen auf dem $E-$ bzw. $F-$Vektorraum E und auf dem $\kappa(w)-$ bzw. $\kappa(v)-$Vektorraum $\kappa(w)$, nämlich

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F} : \quad \mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F = E &\longrightarrow E \\ x \otimes y &\longmapsto sx^2 \otimes y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v)} : \mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v) = \kappa(w) &\to \kappa(w) \\ x \otimes \overline{y} &\longmapsto sx^2 \otimes \overline{y}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_F : \ \mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F = E &\longrightarrow \mathcal{O}_v \otimes_{\mathcal{O}_v} F = F \\ x \otimes y &\longmapsto tr_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v}(sx^2)y^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_{\kappa(v)} : \quad \mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v) = \kappa(w) &\longrightarrow \mathcal{O}_v \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v) = \kappa(v) \\ x \otimes \overline{y} &\longmapsto tr_{\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v}(sx^2)\overline{y}^2. \end{aligned}$$

Aus (2.3.7) erhält man über diese Formen folgende Aussagen:

1. $\tilde{\Phi}_F = tr_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F/F} \circ \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F}$

2. $\tilde{\Phi}_{\kappa(v)} = tr_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v)/\kappa(v)} \circ \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v)}$.

Mit diesen Aussagen zeigen wir die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd} \tilde{W}(E) \arrow[r, "\delta_w"] \arrow[d, "c_{E/F}"] & \tilde{W}(\kappa(w)) \arrow[d, "c_{\kappa(w)/\kappa(v)}"] \\ \tilde{W}(F) \arrow[r, "\delta_v"] & \tilde{W}(\kappa(v)). \end{tikzcd}$$

Es sei also $\alpha = \langle\phi\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \in \tilde{W}(E)$ beliebig vorgegeben. Es sind wie üblich hierbei $s_1, ..., s_n \in \mathcal{O}_v^*$ Elemente derart, daß $\overline{s}_1, ..., \overline{s}_n$ eine separierende Transzendenzbasis von $\kappa(v)/k$ bilden, und weiter sei π_v ein Primelement von v.
π_v ist dann auch ein Primelement von w.
Offenbar dürfen wir $\langle\phi\rangle = \langle s\rangle$ oder $\langle\phi\rangle = \langle s\pi_v\rangle$ mit $s \in \mathcal{O}_w^*$ annehmen.

Es sei zunächst $\langle\phi\rangle = \langle s\rangle$.

Es ist dann $\delta_w(\alpha) = 0$.
Mit obigen Bezeichnungen ist $\langle s\rangle = \left\langle \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F} \right\rangle$ und nach 1) geht diese Form unter $c_{E/F}$ auf $\tilde{\Phi}_F$.
Also ist insgesamt

$$\begin{aligned} c_{E/F}(\alpha) &= c_{E/F}(\left\langle \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F} \right\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n) \\ &= \left\langle \tilde{\Phi}_F \right\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n. \end{aligned}$$

Da aber nach Konstruktion $\tilde{\Phi}_F$ über $\mathcal{O}_v$ definiert ist, läßt $\tilde{\Phi}_F$ eine Diagonalisierung mit Elementen aus $\mathcal{O}_v^*$ zu. Also ist $\delta_v(c_{E/F}(\alpha)) = 0$.
Somit kommutiert das in Frage stehende Diagramm für $\langle\phi\rangle = \langle s\rangle$.

Nun sei $\langle\phi\rangle = \langle s\pi_v\rangle$.

Es ist $\langle s\pi_v\rangle = \left\langle \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F} \cdot \pi_v \right\rangle$. Nach 1) ist wieder $c_{E/F}(\left\langle \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F} \cdot \pi_v \right\rangle) = \left\langle \tilde{\Phi}_F \cdot \pi_v \right\rangle$.

Also ist

$$c_{E/F}(\left\langle \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F} \cdot \pi_v \right\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n) =$$

$$\left\langle \tilde{\Phi}_F \cdot \pi_v \right\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n.$$

Nun ist

$$\delta_v(\left\langle \tilde{\Phi}_F \cdot \pi_v \right\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n) = \left\langle \tilde{\Phi}_{\kappa(v)} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n.$$

Andererseits ist

$\delta_w(\left\langle \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} F} \cdot \pi_v \right\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n) =$

$\left\langle \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v)} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n.$

Nach 2) ist $c_{\kappa(w)/\kappa(v)}(\left\langle \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v)} \right\rangle) = \left\langle \tilde{\Phi}_{\kappa(v)} \right\rangle$.

Also hat man abschließend

$c_{\kappa(w)/\kappa(v)}(\left\langle \Phi_{\mathcal{O}_w \otimes_{\mathcal{O}_v} \kappa(v)} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n) =$

$\left\langle \tilde{\Phi}_{\kappa(v)} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n.$

Damit kommutiert das in Frage stehende Diagramm auch in diesem Fall, und also ist der 4. Schritt erledigt.

5. Schritt: Es sei nun $\phi : F \to E$ endlich, separabel (F wie üblich henselsch) mit Bewertung v und w die eindeutige Fortsetzung von v auf E. Die Erweiterung sei totalverzweigt, d.h. es gelte $e(w \mid v) = [E : F]$.
Dann ist $\kappa(w) = \kappa(v)$, und wir haben die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(E) \arrow[dr, "\delta_w"] \arrow[dd, "c_{E/F}"] & \\
& \tilde{W}(\kappa(v)) \\
\tilde{W}(F) \arrow[ur, "\delta_v"] &
\end{tikzcd}$$

zu beweisen.
Wir betrachten in diesem Schritt den Fall $char(k) \nmid e(w \mid v)$.
Es sei π_w ein Primelement von w und π_v ein Primelement von v. Dann gibt es ein $\epsilon \in \mathcal{O}_w^*$ mit $\epsilon {\pi_w}^e = \pi_v$. Durch Multiplikation von π_v mit einer Einheit in F, welche zu ϵ^{-1} kongruent ist, kann man annehmen, daß $\overline{\epsilon} = 1$ ist. Das Polynom $T^e - \epsilon$ hat nach dem Henselschen Lemma eine Nullstelle ϵ' in E. Es

ist dann $\pi_v = (\pi_w \epsilon')^e$. Ersetzen wir π_w durch $\pi_w \epsilon'$, so können wir annehmen, daß $\pi_w^e = \pi_v$ gilt.
Aufgrund von $\kappa(w) = \kappa(v)$ und dem Henselschen Lemma gilt für jede Form $\langle s \rangle \in W(E)$ mit $s \in \mathcal{O}_w^*$ $\langle s \rangle = \langle t \rangle$ in $W(E)$ mit einer Einheit $t \in \mathcal{O}_v^*$.
Weiter ist $E = F(\pi_w)$ und also ist $1, \pi_w, ..., \pi_w^{e-1}$ eine $F-$Basis von E.
Es sei $s : E \to F$ das durch $s(1) = 1$ und $s(\pi_w^i) = 0$ für $1 \leq i \leq e-1$ definierte, von Null verschiedene, lineare Funktional.
Für das Spurfunktional $tr_{E/F} : E \to F$ gilt definitionsgemäß $tr_{E/F}(1) = e$ und $tr_{E/F}(\pi^i) = 0$ für $1 \leq i \leq e-1$.
Also gilt $s(e \cdot x) = tr_{E/F}(x)$ für alle $x \in E$.
Beachte: $char(k)$ ist kein Teiler von e.
Somit gilt für den Scharlau-Transfer zu diesen beiden Funktionalen

$$s_*(e \cdot \langle \phi \rangle) = tr_{E/F_*}(\langle \phi \rangle)$$

für alle Elemente $\langle \phi \rangle \in W(E)$.
Mit Hilfe dieser Vorüberlegungen beweisen wir jetzt die Kommutativität des in Frage stehenden Diagramms.

1. Fall: $e(w \mid v) \equiv 1 \bmod 2$.

Nach [Sa], 2, 5.8 gilt dann $s_*(\langle 1 \rangle) = \langle 1 \rangle$ und also $tr_{E/F_*}(\langle 1 \rangle) = \langle e \rangle$.
Es sei $\alpha = \langle \phi \rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \in \tilde{W}(E)$ beliebig vorgegeben.
Es sind wie üblich hierbei $s_1, ..., s_n \in \mathcal{O}_v^*$ Elemente derart, daß $\overline{s}_1, ..., \overline{s}_n$ eine separierende Transzendenzbasis von $\kappa(v)/k$ bilden.
Aufgrund obiger Vorüberlegungen genügt es zum Beweis der Kommutativität die Fälle $\langle \phi \rangle = \langle s \rangle$ mit $s \in \mathcal{O}_v^*$ und $\langle \phi \rangle = \langle s\pi_v \rangle$ mit $s \in \mathcal{O}_v^*$ und π_v wie oben zu betrachten.

Es sei zunächst $\langle \phi \rangle = \langle s \rangle$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
\delta_w(\alpha) &= \delta_w(\langle s \rangle \otimes d_{E/k}\pi_w^e \wedge d_{E/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}s_n) \\
&= \delta_w(\langle es \rangle \otimes d_{E/k}\pi_w \wedge d_{E/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{E/k}s_n) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad w(es) \equiv 0 \bmod 2 \\ \left\langle \overline{\dfrac{es}{\pi_v^{v(es)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n, & \text{falls} \quad w(es) \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}
\end{aligned}$$

(Beachte auch hier $p \nmid e$.)
Andererseits ist

$$\begin{aligned}\delta_v(c_{E/F}(\alpha)) &= \delta_v(((\langle s\rangle \otimes tr_{E/F_*}(\langle 1\rangle)) \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge \dots \wedge d_{F/k}s_n) \\ &= \delta_v(\langle es\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge \dots \wedge d_{F/k}s_n) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{für} \quad v(es) \equiv 0 \bmod 2 \\ \left\langle \overline{\frac{es}{\pi_v^{v(es)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge \dots \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n, & \text{für} \quad v(es) \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Da nun $v(es) \equiv x \bmod 2 \Leftrightarrow w(es) \equiv x \bmod 2$ $(x = 0, 1)$ gilt, so kommutiert das Diagramm in diesem Fall.

Nun sei $\langle \phi\rangle = \langle s\pi_v\rangle$.
Es ist

$$\begin{aligned}\delta_w(\alpha) &= \delta_w(\langle s\pi_v\rangle \otimes d_{E/k}\pi_w^e \wedge d_{E/k}s_1 \wedge \dots \wedge d_{E/k}s_n) \\ &= \delta_w(\langle es\pi_v\rangle \otimes d_{E/k}\pi_w \wedge d_{E/k}s_1 \wedge d_{E/k}s_n) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls} \quad w(es\pi_v) \equiv 0 \bmod 2 \\ \left\langle \overline{\frac{es\pi_v}{\pi_v^{v(es\pi_v)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge \dots \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n, & \text{falls} \quad w(es\pi_v) \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\delta_v(c_{E/F}(\alpha)) &= \delta_v(((\langle s\pi_v\rangle \otimes tr_{E/F_*}(\langle 1\rangle)) \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge \dots \wedge d_{F/k}s_n) \\ &= \delta_v(\langle es\pi_v\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge \dots \wedge d_{F/k}s_n) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{f.} \quad v(es\pi_v) \equiv 0 \bmod 2 \\ \left\langle \overline{\frac{es\pi_v}{\pi_v^{v(es\pi_v)}}} \right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge \dots \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n, & \text{f.} \quad v(es\pi_v) \equiv 1 \bmod 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Auch in diesem Fall kommutiert das Diagramm.

2. Fall: Nun sei $e(w \mid v) \equiv 0 \bmod 2$.

Nach [Sa], 2, 5.8 gilt in diesem Fall

$$tr_{E/F_*}(\langle 1\rangle) = es_*(\langle 1\rangle) = \langle e, e\pi_v\rangle$$

und

$$tr_{E/F_*}(\langle \pi_w\rangle) = 0.$$

Wir haben die beiden Fälle $\langle\phi\rangle = \langle s\rangle$ mit $s \in \mathcal{O}_v^*$ und $\langle\phi\rangle = \langle s\pi_w\rangle$ zu betrachten.
Sei zunächst $\langle\phi\rangle = \langle s\rangle$.
Es ist

$$\begin{aligned}\delta_w(\alpha) &= \delta_w(\langle es\pi_w\rangle \otimes d_{E/k}\pi_w \wedge d_{E/k}s_1 \wedge \ldots \wedge d_{E/k}s_n)\\ &= \left\langle \overline{\frac{es}{\pi_v^{v(es)}}}\right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge \ldots \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n,\end{aligned}$$

da $w(es\pi_w) \equiv 1 \bmod 2$ ist.
Andererseits ist

$$\begin{aligned}\delta_v(c_{E/F}(\alpha)) &= \delta_v(\langle es, es\pi_v\rangle \otimes d_{F/k}\pi_v \wedge d_{F/k}s_1 \wedge \ldots \wedge d_{F/k}s_n)\\ &= \left\langle \overline{\frac{es}{\pi_v^{v(es)}}}\right\rangle \otimes d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_1 \wedge \ldots \wedge d_{\kappa(v)/k}\overline{s}_n.\end{aligned}$$

Nun sei $\langle\phi\rangle = \langle s\pi_w\rangle$.
Es ist

$$\begin{aligned}\delta_w(\alpha) &= \delta_w(\langle es\rangle \otimes d_{E/k}\pi_w \wedge d_{E/k}s_1 \wedge \ldots \wedge d_{E/k}s_n)\\ &= 0,\end{aligned}$$

da $w(es) \equiv 0 \bmod 2$.

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\delta_v(c_{E/F}(\alpha)) &= \delta_v(0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Damit kommutiert das Diagramm auch in diesem Fall.

Der 5. Schritt ist jetzt erledigt.

6. Schritt: Im Fall $char(k) = p > 0$ ist zum Beweis des Satzes noch der Fall einer separablen Erweiterung E/F mit Verzweigungsindex p^k ($k \in \mathbb{N}$) und total inseparabler Restekörpererweiterung $\kappa(w)/\kappa(v)$ zu betrachten.
Nach eventueller Adjunktion von Elementen $s_1, ..., s_n \in \mathcal{O}_v^*$, deren Bilder in $\kappa(v)$ eine separierende Transzendenzbasis von $\kappa(v)/k$ bilden, zu k und nach Übergang zu einem vollkommenem Abschluß von $k(s_1, ..., s_n)$, dürfen wir $\kappa(w) = \kappa(v)$ und $\kappa(v)/k$ als endlich annehmen.
Alsdann ist $[E : F] = e(w \mid v) = p^k$. Ist π_w ein Primelement von w, so ist $E = F(\pi_w)$ und das Minimalpolynom $P(t)$ von π_w über F ist ein Eisenstein-Polynom.
Nun ist $\pi_v := -N_{E/F}(-\pi_w)$ ein Primelement von v und es gilt $\pi_w^e = \pi_v u'$ mit $u' \in \mathcal{O}_w^*$ und $\overline{u'} = 1$.
Die Identität $d_{E/k}P(\pi_w) = 0$ liefert die Gleichheit

$$d_{E/k}\pi_w = uP'(\pi_w)^{-1}d_{E/k}\pi_v$$

mit $u \in \mathcal{O}_w^*$ und $\overline{u} = 1$.
Zum Beweis der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(E) \arrow[dr, "\delta_w"] \arrow[dd, "c_{E/F}"] & \\
& \tilde{W}(\kappa(v)) \\
\tilde{W}(F) \arrow[ur, "\delta_v"] &
\end{tikzcd}$$

betrachten wir Formen $\langle s \rangle$ und $\langle s\pi_w \rangle$ in $W(E)$ mit $s \in \mathcal{O}_w^*$.
Es ist wieder $\langle s \rangle = \langle t \rangle$ in $W(E)$ mit einer Einheit $t \in \mathcal{O}_v^*$.
Dann ist $\alpha = \langle s \rangle \otimes d_{E/k}\pi_w = \langle t \rangle \otimes d_{E/k}\pi_w = \langle t \cdot P'(\pi_w)^{-1} \cdot u \rangle \otimes d_{E/k}\pi_v = \langle t \cdot P'(\pi_w)^{-1} \rangle \otimes d_{E/k}\pi_v$.
Es ist $\delta_w(\langle s \rangle \otimes d_{E/k}\pi_w) = 0$.
Wegen $tr_{E/F_*}(\langle P'(\pi_w)^{-1} \rangle) = \langle 1 \rangle$ ist aber auch $\delta_v(c_{E/F}(\alpha)) = 0$.
Damit kommutiert das in Frage stehende Diagramm in diesem Fall.
Analog verfährt man mit der Form $\langle s\pi_w \rangle$.
Damit ist der 6. Schritt beendet und (2.3.6) bewiesen.

$\square$

2.4 Die Homotopie-und die Reziprozitätseigenschaft

(2.4.1) Es sei $F \in (C_{fg}/k)$ und $\mathbb{A}^1_F = \operatorname{Spec}(F[u])$ der eindimensionale affine Raum über F. Weiter sei H ein 1-dimensionaler $F-$Vektorraum.
Nach (D$\tilde{W}$ 2) hat man für die Körpererweiterung $F(u)/F$ die Restriktion

$$r_{F(u)/F} : \tilde{W}(F, H) \to \tilde{W}(F(u), \Omega^1_{F(u)/F} \otimes_F H).$$

Jeder Punkt $x \in \mathbb{A}^1_{F(0)}$ definiert eine Bewertung v_x auf $F(u)$. Nach (D$\tilde{W}$ 3) hat man daher den Homomorphismus

$$\delta_x := \delta_{v_x} : \tilde{W}(F(u), \Omega^1_{F(u)/F} \otimes_F H) \to \tilde{W}(\kappa(x), \Omega^1_{\mathcal{O}_x/F} \otimes_F H \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x));$$

$\mathcal{O}_x$ ist dabei eine abkürzende Schreibweise für den diskreten Bewertungsring $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_F,x}$.
Nun ist $\delta_x(\alpha) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{A}^1_{F(0)}$ und beliebige Elemente α aus $\tilde{W}(F(u), \Omega^1_{F(u)/F} \otimes_F H)$ (vgl. (3.1.2)), so daß wir also einen Homomorphismus

$$d := (\delta_x) : \tilde{W}(F(u), \Omega^1_{F(u)/F} \otimes_F H) \to \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1_{F(0)}} \tilde{W}(\kappa(x), \Omega^1_{\mathcal{O}_x/F} \otimes_F H \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x))$$

erhalten.

Wir beweisen nun den folgenden fundamentalen Satz:

(2.4.2) Satz: *(Homotopieeigenschaft des $\mathbb{A}^1$)*

Unter den Voraussetzungen von (2.4.1) ist die Sequenz

$$0 \to \tilde{W}(F) \xrightarrow{r_{F(u)/F}} \tilde{W}(F(u), \Omega^1_{F(u)/F}) \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1_{F(0)}} \tilde{W}(\kappa(x), \Omega^1_{\mathcal{O}_x/F}(x)) \to 0$$

exakt und spaltet.
(Wir haben hier den Vektorraum H weggelassen und wir setzen $\Omega^1_{\mathcal{O}_x/F}(x) := \Omega^1_{\mathcal{O}_x/F} \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x)$.)

Beweis: Wir führen (2.4.2) durch Wahl geeigneter Isomorphismen auf einen entsprechenden Satz von Milnor für Wittringe zurück.

Es sei $s_1, ..., s_n$ eine separierende Transzendenzbasis von F/k und $h \neq 0$ ein Element aus H. Dann induziert die Wahl der $F-$Basis $d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n$ von $\omega_{F/k}$ und h von H einen Isomorphismus

$$i_1 : W(F) \xrightarrow{\cong} \tilde{W}(F, H).$$

Nun ist $d_{F(u)/F}u$ eine $F(u)-$Basis von $\Omega^1_{F(u)/F}$ und also ist

$$d_{F(u)/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F(u)/k}s_n \wedge d_{F(u)/k}u$$

eine $F(u)-$Basis von $\omega_{F(u)/k}$.
Durch diese Basiswahlen erhält man einen Isomorphismus

$$i_2 : W(F(u)) \xrightarrow{\cong} \tilde{W}(F(u), \Omega^1_{F(u)/F} \otimes_F H).$$

Aufgrund dieser Wahlen kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{W}(F, H) & \xrightarrow{r_{F(u)/F}} & \tilde{W}(F(u), \Omega^1_{F(u)/F} \otimes_F H) \\ \Big\uparrow{\scriptstyle i_1 \wr} & & \Big\uparrow{\scriptstyle i_2 \wr} \\ W(F) & \xrightarrow{r_{F(u)/F}} & W(F(u)). \end{array}$$

Da $\mathbb{A}^1_F$ glatt ist über F, so ist für jedes $x \in \mathbb{A}^1_{F(0)}$ $d_{\mathcal{O}_x/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\mathcal{O}_x/k}s_n \wedge d_{\mathcal{O}_x/k}u$ eine Basis des freien $\mathcal{O}_x-$Moduls $\omega_{\mathcal{O}_x/k}$.
Ist nun $\overline{t}_{x1}, ..., \overline{t}_{xn}$ eine separierende Transzendenzbasis von $\kappa(x)/k$ und π_x ein Primelement der Bewertung v_x, so ist $d_{\mathcal{O}_x/k}\pi_x \wedge d_{\mathcal{O}_x/k}t_{x1} \wedge ... \wedge t_{xn}$ ebenfalls eine $\mathcal{O}_x-$Basis von $\omega_{\mathcal{O}_x/k}$; hierbei sind $t_{x1}, ..., t_{xn} \in \mathcal{O}^*_x$ Liftungen von $\overline{t}_{x1}, ..., \overline{t}_{xn}$.
Folglich existiert eine Einheit $e_x \in \mathcal{O}^*_x$ mit

$$e_x \cdot d_{\mathcal{O}_x/k}\pi_x \wedge d_{\mathcal{O}_x/k}t_{x1} \wedge ... \wedge t_{xn} = d_{\mathcal{O}_x/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\mathcal{O}_x/k}s_n \wedge d_{\mathcal{O}_x/k}u$$

Die Wahl der $\kappa(x)-$Basis $\overline{e}_x \cdot d_{\kappa(x)/k}\overline{t}_{x1} \wedge ... \wedge \overline{t}_{xn}$ von $\omega_{\kappa(x)/k}$ induziert dann einen Isomorphismus

$$i_x : W(\kappa(x)) \xrightarrow{\cong} \tilde{W}(\kappa(x), \Omega^1_{\mathcal{O}_x/F} \otimes_F H \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x)).$$

Da $\delta_2^{\pi_x} : W(F(u)) \to W(\kappa(x))$ $\mathcal{O}^*_x-$linear ist, so kommutiert dann das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(F(u), \Omega^1_{F(u)/F} \otimes_F H) \arrow[r, "\delta_x"] & \tilde{W}(\kappa(x), \Omega^1_{\mathcal{O}_x/F} \otimes_F H \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x)) \\
W(F(u)) \arrow[u, "i_2", "\wr"'] \arrow[r, "\delta_2^{\pi x}"] & W(\kappa(x)). \arrow[u, "i_x", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Zusammengenommen hat man also das kommutative Diagramm (wir lassen dabei H wieder weg und bezeichnen $\Omega^1_{\mathcal{O}_x/F} \otimes_{\mathcal{O}_x} \kappa(x)$ mit $\Omega^1_{\mathcal{O}_x/F}(x)$)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \tilde{W}(F) \arrow[r, "r_{F(u)/F}"] & \tilde{W}(F(u), \Omega^1_{F(u)/F}) \arrow[r, "d"] & \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1_{F(0)}} \tilde{W}(\kappa(x), \Omega^1_{\mathcal{O}_x/F}(x)) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & W(F) \arrow[u, "i_1", "\wr"'] \arrow[r, "r_{F(u)/F}"] & W(F(u)) \arrow[u, "i_2", "\wr"'] \arrow[r, "(\delta_2^{\pi x})"] & \bigoplus_{x \in \mathbb{A}^1_{F(0)}} W(\kappa(x)) \arrow[u, "(i_x)", "\wr"'] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Nach [Mi], Th. 5.3 ist die untere Zeile exakt und spaltet, also tut dies auch die obere. $\square$

(2.4.3) Es sei weiterhin $F \in (C_{fg}/k)$ und es sei $\mathbb{A}^1_F = \mathrm{Spec}(F[u]) =: X$. Es sei $\mathcal{L}$ ein beliebiges Geradenbündel auf X.
Wir betrachten den Homomorphismus

$$\tilde{W}(\kappa(\eta), \mathcal{L}(\eta)) \xrightarrow{d:=(\delta_x)} \bigoplus_{x \in X_{(0)}} \tilde{W}(\kappa(x), \mathcal{L}(x));$$

dabei ist η der generische Punkt von X.
Es ist $\mathrm{Pic}(X) = 0$ und also hat man für ein beliebiges Geradenbündel $\mathcal{L}$ einen **globalen** $\mathcal{O}_X-$Isomorphismus $\mathcal{L} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X$.
Dieser induziert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}\tilde{W}(\kappa(\eta),\mathcal{L}(\eta)) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{x\in X_{(0)}} \tilde{W}(\kappa(x),\mathcal{L}(x)) \\ \uparrow \wr & & \uparrow \wr \\ \tilde{W}(\kappa(\eta),\Omega^1_{\kappa(\eta)/F}) & \xrightarrow{d} & \bigoplus_{x\in X_{(0)}} \tilde{W}(\kappa(x),\Omega^1_{\mathcal{O}_x/F}(x)).\end{array}$$

Nach dem vorhergehenden Satz ist daher der Kern der oberen Randabbildung isomorph zu $\tilde{W}(F)$. Diese Isomorphie ist i. a. **nicht** kanonisch, sondern hängt vom Geradenbündel und der Wahl des trivialisierenden Isomorphismus ab. (Für eine präzisere Aussage vgl. (3.4.3).)

(2.4.4) Nun sei X ein integres Schema aus $(Sch/C_{fg}/k)$, η der generische Punkt von X und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X.
Ist X außerdem normal, so ist für jeden Punkt $x \in X^{(1)}$ der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ein diskreter Bewertungsring und definiert somit eine (geometrische) Bewertung auf dem Körper $\kappa(\eta)$.
Nach (D$\tilde{W}$ 3) haben wir somit den Gruppenhomomorphismus

$$\delta_x : \tilde{W}(\kappa(\eta),\mathcal{L}(\eta)) \to \tilde{W}(\kappa(x),\mathcal{L}(x)).$$

Wir betrachten nun die Gesamtheit der Homomorphismen δ_x für alle $x \in X^{(1)}$.
Es gilt, wie schon an der entsprechenden Stelle in (2.4.1) erwähnt, $\delta_x(\alpha) = 0$ für ein beliebiges Element $\alpha \in \tilde{W}(\kappa(\eta),\mathcal{L}(\eta))$ und fast alle $x \in X^{(1)}$ (vgl. (3.1.2)).

Ist nun speziell X eine eigentliche Kurve, so erhalten wir die folgende Reziprozitätseigenschaft:

(2.4.5) Satz: *Es sei $X \in (Sch/C_{fg}/k)$ eine integre, eigentliche und normale Kurve über Spec(F), und η sei der generische Punkt von X. Außerdem sei H ein 1-dimensionaler $F-$Vektorraum. Dann ist die kanonische Sequenz*

$$\tilde{W}(\kappa(\eta),H(\eta)) \xrightarrow{(\delta_x)} \bigoplus_{x\in X_{(0)}} \tilde{W}(\kappa(x),H(x)) \xrightarrow{\sum c_{\kappa(x)/F}} \tilde{W}(F,H)$$

ein Komplex; hierbei ist $H(x) := H \otimes_F \kappa(x)$.

Beweis: Wir lassen im Fortgang des Beweises den Vektorraum H weg.
Nach dem Satz von Riemann-Roch ist X projektiv, daher gibt es nach dem projektiven Noetherschen Normalisierungslemma (vgl. [Li], App.A, A.1) einen endlichen Morphismus $\pi : X \to \mathbb{P}^1_F$.
Dieser induziert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(\kappa(\eta)) \arrow[r, "(\delta_x)"] \arrow[d, "c_{\kappa(\eta)/\kappa(\xi)}"] & \bigoplus\limits_{x \in X_{(0)}} \tilde{W}(\kappa(x)) \arrow[r, "\sum c_{\kappa(x)/F}"] \arrow[d, "\bigoplus\limits_{y \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} \sum\limits_{x|y} c_{\kappa(x)/\kappa(y)}"] & \tilde{W}(F) \arrow[d, equal] \\
\tilde{W}(\kappa(\xi)) \arrow[r, "(\delta_y)"] & \bigoplus\limits_{y \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} \tilde{W}(\kappa(y)) \arrow[r, "\sum c_{\kappa(y)/F}"] & \tilde{W}(F);
\end{tikzcd}$$

ξ bezeichnet dabei den generischen Punkt von $\mathbb{P}^1_F$.
Ist nun $y \in \mathbb{P}^1_{F(0)}$ und v_y die zugehörige Bewertung auf $\kappa(\xi)$, so durchlaufen die Bewertungen v_x für alle $x \in \pi^{-1}(y)$ die gesamten Fortsetzungen von v_y auf $\kappa(\eta)$, da π als endlicher Morphismus insbesondere eigentlich ist.
Daher kommutiert das linke Viereck nach (2.3.6).
Das rechte Viereck kommutiert aufgrund der Funktorialität der Korestriktion.
Somit genügt es die Aussage des Satzes für $X = \mathbb{P}^1_F$ zu beweisen.
Zum Beweis der Gleichheit

$$\sum_{y \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} c_{\kappa(y)/F} \circ \delta_y = 0$$

definieren wir für jedes $x \in \mathbb{P}^1_{F(0)} - \{\infty\}$ die Abbildung

$$\Phi^x : \tilde{W}(\kappa(x)) \to \tilde{W}(\kappa(\xi))$$

wie folgt:
Es sei $u \in \kappa(\xi)^*$ eine Transzendenzbasis von $\kappa(\xi) = F(u)$ über F.
Dann induziert die $\kappa(x)(u)-$Basis $d_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}u$ einen Isomorphismus

$$i : \tilde{W}(\kappa(x)(u), \Omega^1_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}) \xrightarrow{\cong} \tilde{W}(\kappa(x)(u))$$

und dann sei

$$\Phi^x(\mu) = c_{\kappa(x)(u)/F(u)}(\langle u - u(x)\rangle \cdot i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu)))$$

für alle $\mu \in \tilde{W}(\kappa(x))$.

Sei nun $x' \in \mathbb{P}^1_{F(0)} - \{\infty\}$ und $x' \neq x$ gegeben.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} \delta_{x'} \circ \Phi^x(\mu) &= \delta_{x'}(c_{\kappa(x)(u)/F(u)}(\langle u - u(x)\rangle \cdot i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu)))) \\ &\overset{(2.3.6)}{=} \sum_{w|v_{x'}} c_{\kappa(w)/\kappa(x')}(\delta_w(\langle u - u(x)\rangle\, i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu)))). \end{aligned}$$

Für jede Bewertung w über $v_{x'}$ ist $u - u(x)$ eine $w-$Einheit; daher ist jeder Summand nach (2.3.1) von der Form

$$c_{\kappa(w)/\kappa(x')}(\left\langle \overline{u - u(x)} \right\rangle \delta_w(i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu)))).$$

Jede Bewertung w über $v_{x'}$ ist aber auf $\kappa(x)$ trivial, so daß also

$$\delta_w(i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu))) = 0$$

gilt.
Insgesamt ist also $\delta_{x'} \circ \Phi^x = 0$.
Weiter ist

$$\begin{aligned} \delta_x \circ \Phi^x(\mu) &= \delta_x(c_{\kappa(x)(u)/F(u)}(\langle u - u(x)\rangle \cdot i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu)))) \\ &= \sum_{w|v_x} c_{\kappa(w)/\kappa(x)}(\delta_w(\langle u - u(x)\rangle\, i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu)))) \\ &= \delta_{w_0}(\langle u - u(x)\rangle\, i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu))), \end{aligned}$$

dabei ist w_0 die Fortsetzung von v_x zum Primelement $u - u(x) \in \kappa(x)[u]$.
(Beachte dabei: $\kappa(w_0) = \kappa(x)$)
Nun ist

$$\begin{aligned} \delta_{w_0}(\langle u - u(x)\rangle\, i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu))) &= s_{w_0}^{u-u(x)}(i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu))) \\ &= (-1)^n \cdot \mu, \end{aligned}$$

letzteres wegen $d_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(u-u(x)) = d_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}u$; dabei ist $n = (\kappa(x)/k)_{tr}$ (vgl. dazu (2.3.4)).
Insgesamt haben wir also

$$\delta_x \circ \Phi^x = (-1)^n \cdot id.$$

Folglich genügt es

$$\sum_{y \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} c_{\kappa(y)/F} \circ \delta_y \circ \Phi^x = 0$$

für alle $x \in \mathbb{P}^1_{F(0)} - \{\infty\}$ zu beweisen.
Es ist

$$\sum_{y \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} c_{\kappa(y)/F} \circ \delta_y \circ \Phi^x = (-1)^n c_{\kappa(x)/F} + \delta_\infty \circ \Phi^x$$

$(n = (\kappa(x)/k)_{tr})$ und wir berechnen

$$\begin{aligned}
\delta_\infty \circ \Phi^x(\mu) &= \delta_\infty(c_{\kappa(x)(u)/F(u)}(\langle u - u(x)\rangle \cdot i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu)))) \\
&= \sum_{w|\infty} c_{\kappa(w)/F}(\delta_w(\langle u - u(x)\rangle\, i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu)))) \\
&= c_{\kappa(\infty)/F}(\delta_\infty(\langle u - u(x)\rangle\, i(r_{\kappa(x)(u)/\kappa(x)}(\mu)))) \\
&= (-1)^{n+1} c_{\kappa(x)/F}(\mu).
\end{aligned}$$

Damit ist der Satz bewiesen. □

Bemerkung: (2.4.5) steht in Parallele zu einem von Geyer, Harder, Knebusch und Scharlau im Jahre 1970 bewiesenen Residuensatz für quadratische Formen über einem algebraischen Funktionenkörper (vgl. [GH], 2).
Ist F ein algebraischer Funktionenkörper in einer Variablen mit vollkommenem Konstantenkörper K, so betrachten sie ebenfalls die Wittgruppe $W(F, \Omega^1_{F/K})$ der regulären quadratischen Formen über F mit Werten in $\Omega^1_{F/K}$. Ist $\mathfrak{p}$ eine Primstelle von F/K, so definieren sie eine *kanonische*, vom üblichen zweiten Randhomomorphismus abgeleitete, Residuenabbildung

$$res_{\mathfrak{p}} : W(F, \Omega^1_{F/K}) \to W(\kappa(\mathfrak{p}))$$

und zeigen dann

$$\sum_{\mathfrak{p}} (tr_{\kappa(\mathfrak{p})/K})_*(res_{\mathfrak{p}}(b)) = 0$$

für alle $b \in W(F, \Omega^1_{F/K})$. Hierbei durchläuft $\mathfrak{p}$ alle Primstellen von F/K und $\kappa(\mathfrak{p})$ bezeichnet, wie üblich, den Restklassenkörper der Primstelle $\mathfrak{p}$.

3 Der Wittkomplex $C_*(X;\tilde{W},\mathcal{L})$

3.1 Der allgemeine Randhomomorphismus

Es sei X ein Objekt aus $(Sch/C_{fg}/k)$. Weiterhin sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X.

Ist $x \in X$ ein Punkt, so schreiben wir abkürzend $\tilde{W}(x,\mathcal{L})$ für $\tilde{W}(\kappa(x),\mathcal{L}(x))$ bzw. $\tilde{W}(x)$ für $\tilde{W}(\kappa(x))$.

Ist X ein integres Schema, so bezeichnen wir mit ξ oder ξ_X den generischen Punkt von X.
Ist X zusätzlich normal, so ist für jeden 1-kodimensionalen Punkt x, d.h. $x \in X^{(1)}$, der lokale Ring $\mathcal{O}_{X,x}$ ein diskreter Bewertungsring und definiert folglich eine Bewertung auf $\mathcal{O}_{X,\xi}$.

(3.1.1) Definition: *Es sei $\delta_x : \tilde{W}(\xi,\mathcal{L}) \to \tilde{W}(x,\mathcal{L})$ für $x \in X^{(1)}$ der zugehörige Randhomomorphismus gemäß* **(D$\tilde{W}$ 3)** *(vgl. (2.2.6)).*

Es gilt nun der folgende Satz.

(3.1.2) Satz: *Ist $X \in (Sch/C_{fg}/k)$ normal und integer, $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X und $\alpha \in \tilde{W}(\xi,\mathcal{L})$ beliebig, so ist*

$$\delta_z(\alpha) = 0$$

für fast alle $z \in X^{(1)}$.

Beweis: Dies ist eine einfache Konsequenz der analogen Aussage für die Divisorabbildung auf X (vgl. [Ha], 6.1). Die Details sind in [Et] ausgeführt. □

(3.1.3) Für $x, y \in X$ definieren wir nun

$$\delta_y^x : \tilde{W}(x,\mathcal{L}) \to \tilde{W}(y,\mathcal{L})$$

wie folgt: Es sei $Z := \overline{\{x\}}$ mit der reduzierten Unterschemastruktur versehen. Wir setzen $\delta_y^x = 0$, falls $y \notin Z^{(1)}$ ist. Sonst sei $\pi : \tilde{Z} \to Z$ die Normalisierung von Z; π ist ein endlicher Morphismus (EGA IV, 2, 7.8.6, ii)). Jeder Punkt y'

aus der Faser $\pi^{-1}(y)$ definiert eine Bewertung von $\kappa(x)$. Die Komposition des zugehörigen Randhomomorphismus (3.1.1) mit der Korestriktion $c_{\kappa(y')/\kappa(y)}$ (D$\tilde{W}$ 2) liefert einen Homomorphismus $\tilde{W}(x, \mathcal{L}) \to \tilde{W}(y, \mathcal{L})$. Summiert man über alle Punkte y' der Faser $\pi^{-1}(y)$, so erhält man den gewünschten Homomorphismus δ_y^x, also

$$\delta_y^x := \sum_{y'|y} c_{\kappa(y')/\kappa(y)} \circ \delta_{y'}.$$

Aus (3.1.2) folgt:

(3.1.4) Lemma: *Für jedes $x \in X$ und $\alpha \in \tilde{W}(x, \mathcal{L})$ gilt $\delta_y^x(\alpha) = 0$ für fast alle $y \in X$; dabei ist $X \in (Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X.*

Bemerkung: Wollen wir das Schema besonders betonen, auf dem der allgemeine Randhomomorphismus berechnet wird, so schreiben wir auch ausführlicher $\delta_X \mid_y^x$ an Stelle von δ_y^x.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des allgemeinen Randhomomorphismus δ_y^x ist die folgende Geschlossenheitsrelation.

(3.1.5) Satz: *Es sei X ein integres Schema aus $(Sch/C_{fg}/k)$ und Z die Lokalisierung von X in einem Punkt der Kodimension 2. $\mathcal{L}$ sei ein Geradenbündel auf X.*
Dann gilt:

$$0 = \sum_{z \in Z^{(1)}} \delta_{z_0}^z \circ \delta_z^\xi : \tilde{W}(\xi, \mathcal{L}) \to \tilde{W}(z_0, \mathcal{L});$$

dabei ist ξ der generische und z_0 der abgeschlossene Punkt von Z.

Beweis: vgl. [Et]. □

3.2 Der allgemeine Randhomomorphismus, Unterschemata und Lokalisierungen

Es sei X ein Schema in $(Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X.
In diesem Abschnitt stellen wir einige nützliche Beobachtungen über das Verhalten des allgemeinen Randhomomorphismus beim Übergang zu offenen Teilmengen, Lokalisierungen und Fasern zusammen.

(3.2.1) Sind $x, y \in X$ Punkte, so hat man nach (3.1.3) den Gruppenhomomorphismus

$$\delta_y^x : \tilde{W}(x, \mathcal{L}) \to \tilde{W}(y, \mathcal{L}).$$

Es sei $Z := \overline{\{x\}}$. Z sei mit der reduzierten Unterschemastruktur von X versehen.
Es sei weiterhin $y \in Z^{(1)}$. Wir setzen $Y := \operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Z,y})$ und betrachten den kanonischen Morphismus $Y \to Z$. Y ist ein eindimensionales, integres Schema mit den Punkten y und x.
Aus der Konstruktion des allgemeinen Randhomomorphismus entnimmt man dann die Gleichheit

$$\delta_X \mid_y^x = \delta_Y \mid_y^x .$$

Zur Berechnung von δ_y^x dürfen wir also zur Lokalisierung $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{Z,y})$ übergehen.

(3.2.2) Nun sei $\pi : Y \to X$ ein Morphismus in $(Sch/C_{fg}/k)$. Es seien $x, y \in Y$ Punkte mit $\pi(x) = \pi(y) =: z$; x und y liegen also in derselben Faser $Y_{\kappa(z)} = Y \times_X \operatorname{Spec}(\kappa(z)) \to \operatorname{Spec}(\kappa(z))$.
Bezeichnet Z' den Abschluß von x in $Y_{\kappa(z)}$ und Z den Abschluß von x in Y, so gilt nach EGA IV, 2, 5.6.1.1

$$y \in Z'^{(1)} \Longleftrightarrow y \in Z^{(1)},$$

und alsdann folgt wieder $\delta_{Y_{\kappa(z)}} \mid_y^x = \delta_Y \mid_y^x$.
Der allgemeine Randhomomorphismus ist damit verträglich mit der Einschränkung auf Fasern.

(3.2.3) Es sei abschließend $X \in (Sch/C_{fg}/k)$ und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, versehen mit der induzierten Unterschemastruktur. Es seien weiter $x, y \in U \subseteq X$.
Bezeichnet wiederum Z' den Abschluß von $x \in U$, und Z den von x in X, so gilt diesmal klarerweise

$$y \in Z'^{(1)} \Longleftrightarrow y \in Z^{(1)}.$$

Daher gilt

$$\delta_U \mid_y^x = \delta_X \mid_y^x .$$

Der allgemeine Randhomomorphismus ist damit verträglich mit der Einschränkung auf offene Teilmengen.

3.3 Der Komplex

Es sei X aus $(Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X.

(3.3.1) Definition: *Für ein $p \in \mathbb{Z}$ setze*

$$C_p(X;\tilde{W},\mathcal{L}) := \bigoplus_{x \in X_{(p)}} \tilde{W}(x,\mathcal{L});$$

(ist $X_{(p)} = \emptyset$, so sei $C_p(X;\tilde{W},\mathcal{L}) = 0$.)
Ist $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, so schreiben wir für $C_p(X;\tilde{W},\mathcal{O}_X)$ auch einfach $C_p(X;\tilde{W})$.
$d = d_X : C_p(X;\tilde{W},\mathcal{L}) \to C_{p-1}(X;\tilde{W},\mathcal{L})$ sei komponentenweise durch $d_y^x := \delta_y^x$ (vgl. (3.1.3)) definiert.

Bemerkungen:

1. Die Definition von d_X ist wegen (3.1.4) sinnvoll.
2. Es ist $\dim(x,X) = \dim(\overline{\{x\}}) = (\kappa(x)/F)_{tr}$, falls X von endlichem Typ über $\mathrm{Spec}(F)$ ist.
3. Nach kanonischer Identifizierung ist $C_p(X;\tilde{W}) = \bigoplus_{x \in X_{(p)}} \tilde{W}(x)$.
4. Wollen wir die Stelle des Komplexes genauer spezifizieren, an der d_X gebildet wird, so schreiben wir manchmal auch $d_{X,n}$.

(3.1.6) hat nun folgende wichtige Konsequenz.

(3.3.2) Satz: *Es gilt $d_X \circ d_X = 0$.*

Beweis: (vgl. [Ro], 3.3)
Wir betrachten die Folge

$$\ldots \to \bigoplus_{x \in X_{(p+1)}} \tilde{W}(x,\mathcal{L}) \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{x \in X_{(p)}} \tilde{W}(x,\mathcal{L}) \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{x \in X_{(p-1)}} \tilde{W}(x,\mathcal{L}) \to \ldots$$

Für beliebige p haben wir $d_X \circ d_X |_z^x = 0$ für alle $x \in X_{(p+1)}$ und $z \in X_{(p-1)}$ zu zeigen.

Sei $x \in X_{(p+1)}$ und $z \in X_{(p-1)}$ beliebig, aber fest.
Nach Definition von d_X haben wir nun

$$\sum_{y\in X_{(p)}} \delta_z^y \circ \delta_y^x = 0$$

zu beweisen.
Um $\sum_{y\in X_{(p)}} \delta_z^y \circ \delta_y^x = 0$ zu beweisen, brauchen wir nur über solche Punkte $y \in X_{(p)}$ zu summieren, für die $z \in \overline{\{y\}}$ und $y \in \overline{\{x\}}$ gilt.
Es sei $Y = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{\overline{\{x\}},z})$. Y ist integer und lokal.
Da alle Schemata aus $(Sch/C_{fg}/k)$ katenarisch sind, so folgt

$$\mathrm{codim}(z,x) = \mathrm{codim}(z,y) + \mathrm{codim}(y,x)$$

und also ist $\dim(Y) = 2$. Weiter gilt $X_{(p)} \cap Y = Y_{(1)}$.
Aufgrund der Verträglichkeit des allgemeinen Randhomomorphismus mit Lokalisierungen, vgl. (3.2.1), und (3.1.5) gilt dann

$$\sum_{y\in X_{(p)}} \delta_z^y \circ \delta_y^x = \sum_{y\in Y_{(1)}} \delta_z^y \circ \delta_y^x = 0$$

und damit ist der Satz bewiesen. □

(3.3.3) Der Komplex

$$C_*(X;\tilde{W},\mathcal{L}) = (C_p(X;\tilde{W},\mathcal{L}), d_X)_{p\in\mathbb{Z}}$$

heißt **Wittkomplex auf X mit Werten in $\mathcal{L}$.**

(3.3.4) Ist $\dim(X) = d$ und wollen wir den Kodimensionsindex benutzen, dann setzen wir

$$C^p(X;\tilde{W},\mathcal{L}) := \bigoplus_{x\in X^{(p)}} \tilde{W}(x,\mathcal{L}) = \bigoplus_{x\in X_{(d-p)}} \tilde{W}(x,\mathcal{L}) = C_{d-p}(X;\tilde{W},\mathcal{L})$$

und

$$d_X : C^p(X;\tilde{W},\mathcal{L}) = C_{d-p}(X;\tilde{W},\mathcal{L}) \to C_{d-p-1}(X;\tilde{W},\mathcal{L}) = C^{p+1}(X;\tilde{W},\mathcal{L}).$$

Wir bezeichnen diesen Komplex mit $C^*(X;\tilde{W},\mathcal{L})$.

(3.3.5) Es sei nun k für einen Augenblick nicht mehr vollkommen. (Es sei aber weiterhin $char(k) \neq 2$.) Es sei F eine endlich erzeugte Körpererweiterung von k, X ein algebraisches $F-$Schema und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X.
Wir wollen nun in Verallgemeinerung von (3.3.1) den Wittkomplex auf X mit Werten in $\mathcal{L}$ erklären. Dies geschieht wie folgt:
Es sei k' ein vollkommener Abschluß von k und F' das eindeutig bestimmte Kompositum von F und k' über k. F' ist eine endlich erzeugte Körpererweiterung von k' und wir bilden die Basiserweiterung $X' = X \otimes_F F'$; die Projektion $p : X \otimes_F F' \to X$ ist ein radizieller Morphismus, also insbesondere injektiv und damit auch bijektiv. Darüberhinaus gilt $p({X'}_{(q)}) = X_{(q)}$.
Es sei nun

$$C_*(X; \tilde{W}, \mathcal{L}) := C_*(X'; \tilde{W}, p^*\mathcal{L}).$$

Studieren wir im folgenden Wittkomplexe auf beliebigen algebraischen $F-$ Schemata, und ist F endlich erzeugt über einem Grundkörper k, so können wir im Sinne von (3.3.5) k immer als vollkommen annehmen.

3.4 Die Homologie des Wittkomplexes

Ist X ein Schema aus $(Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X, so haben wir also auf X den Wittkomplex $C_*(X; \tilde{W}, \mathcal{L})$ mit Werten in $\mathcal{L}$,

$$\ldots \to \bigoplus_{x \in X_{(p+1)}} \tilde{W}(x, \mathcal{L}) \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{x \in X_{(p)}} \tilde{W}(x, \mathcal{L}) \xrightarrow{d_X} \bigoplus_{x \in X_{(p-1)}} \tilde{W}(x, \mathcal{L}) \to \ldots$$

(3.4.1) Definition: *Für alle $p \in \mathbb{Z}$ sei $HW_p(X; \tilde{W}, \mathcal{L})$:=p-te Homologiegruppe des Wittkomplexes $C_*(X; \tilde{W}, \mathcal{L})$ mit Werten in $\mathcal{L}$.*
Ferner sei $HW^p(X; \tilde{W}, \mathcal{L})$:=p-te Kohomologiegruppe von $C^*(X; \tilde{W}, \mathcal{L})$.

(3.4.2) Notiz: *Ist $dim(X) = d$, so ist $HW_p(X; \tilde{W}, \mathcal{L}) = HW^{d-p}(X; \tilde{W}, \mathcal{L})$.*

Nun ist also der Wittkomplex etabliert, und in der weiteren Arbeit wird es nun darum gehen die funktoriellen Eigenschaften des Komplexes und seiner Homologiegruppen zu studieren und den Komplex für gewisse Schemata zu verstehen.

Einen speziellen Wittkomplex haben wir nebenbei schon studiert, nämlich den der affinen Geraden.

(3.4.3) Es sei $\mathbb{A}^1_F = \mathrm{Spec}(F[u]) \in (Sch/C_{fg}/k)$ der 1-dimensionale affine Raum über einem Körper F. Betrachten wir den Wittkomplex auf $\mathbb{A}^1_F$ mit Werten in dem Geradenbündel $\Omega^1_{\mathbb{A}^1_F/F}$, so liefert die exakte Sequenz in (2.4.2) eine vollständige Beschreibung der Homologie von $C_*(\mathbb{A}^1_F;\tilde{W},\Omega^1_{\mathbb{A}^1_F/F})$, nämlich

$$HW_i(\mathbb{A}^1_F;\tilde{W},\Omega^1_{\mathbb{A}^1_F/F}) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i=0 \\ \tilde{W}(F) & \text{für} \quad i=1. \end{cases}$$

Gemäß (2.4.3) bleibt obiges Ergebnis auch richtig, wenn wir $\Omega^1_{\mathbb{A}^1_F/F}$ durch ein beliebiges anderes Geradenbündel $\mathcal{L}$ auf $\mathbb{A}^1_F$ ersetzen, d.h. es gilt

$$HW_0(\mathbb{A}^1_F;\tilde{W},\mathcal{L}) = 0$$

und

$$HW_1(\mathbb{A}^1_F;\tilde{W},\mathcal{L}) \cong \tilde{W}(F).$$

Allerdings ist letztere Isomorphie **nicht** kanonisch, sondern hängt vom Geradenbündel und dem gewählten, $\mathcal{L}$ trivialisierenden, Isomorphismus ab.
Präziser heißt das:
Fixiert man eine Trivialisierung $t : \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_F} \xrightarrow{\cong} \mathcal{L}$, so induziert diese, wie in (2.4.3) beschrieben, einen Isomorphismus $j : \tilde{W}(F) \xrightarrow{\cong} HW_1(\mathbb{A}^1_F;\tilde{W},\mathcal{L})$. t induziert aber auch in offensichtlicher Weise einen Isomorphismus $m : \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_F}}(\mathcal{L}) \xrightarrow{\cong} F^*$.
$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_F}}(\mathcal{L})$ operiert dann vermöge j auf $\tilde{W}(F)$ in der folgenden Weise:
Ist $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_F}}(\mathcal{L})$, und bezeichnet $\overline{f}$ den induzierten Automorphismus von $HW_1(\mathbb{A}^1_F;\tilde{W},\mathcal{L})$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(F) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "m(f)"] & HW_1(\mathbb{A}^1_F;\tilde{W},\mathcal{L}) \arrow[d, "\overline{f}"] \\
\tilde{W}(F) \arrow[r, "j"] & HW_1(\mathbb{A}^1_F;\tilde{W},\mathcal{L});
\end{tikzcd}$$

dabei ist der linke vertikale Pfeil die Multiplikation mit $m(f) \in F^*$.

4 Push-forward und Pull-back

In diesem Kapitel etablieren wir alle Typen von Operationen, die wir beim Studium des Wittkomplexes immer wieder brauchen werden.

4.1 Push-forward

Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus in $(Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf Y.
Wir definieren für alle $p \in \mathbb{Z}$

$$f_* : C_p(X; \tilde{W}, f^*\mathcal{L}) \to C_p(Y; \tilde{W}, \mathcal{L})$$

komponentenweise wie folgt:

$$(f_*)_y^x = \begin{cases} c_{\kappa(x)/\kappa(y)}, & \text{falls} \quad y = f(x) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachte: Für $y = f(x)$ und $\dim(x, X) = \dim(y, Y)$ ist $\kappa(x)/\kappa(y)$ automatisch endlich, und wir haben also die Korestriktion $c_{\kappa(x)/\kappa(y)}$ gemäß (D$\tilde{W}$ 2) (vgl. (2.2.4)).

Push-forward besitzt die folgende Funktorialitätseigenschaft:

(4.1.1) Satz: *Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen in $(Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf Z. Dann gilt:*

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Beweis: Da Push-forward komponentenweise durch die Korestriktion gegeben ist, so folgt die behauptete Funktorialität aus der Funktorialität der Korestriktion (vgl. (2.2.5)). □

4.2 Pull-back

In diesem Abschnitt etablieren wir zu einem gegebenem glatten Morphismus von Schemata aus $(Sch/C_{fg}/k)$ von konstanter relativer Dimension eine Pull-back- Abbildungen zwischen den entsprechenden Wittkomplexen. Dies erfordert etwas mehr Anstrengung.

Es sei also $f : X \to Y$ ein Morphismus in $(Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $Y.f$ sei nun glatt von der relativen Dimension n. Dann ist $\Omega^1_{X/Y}$ ein lokalfreier $\mathcal{O}_X-$Modul vom Rang n.
Folglich ist für $x \in X$

$$\begin{aligned} \dim_{\kappa(x)} \Omega^1_{X/Y}(x) &= \dim_{\kappa(x)} \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,f(x)}} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x) \\ &= n. \end{aligned}$$

Sei $y := f(x) \in Y$. Dann hat man die Körpererweiterung $\kappa(y) \to \kappa(x)$.
Ist nun $y \in Y_{(p)}$ und $x \in X_{(p+n)}$, so ist wegen der Glattheit von f die Körpererweiterung $\kappa(x)/\kappa(y)$ separabel.
Nach (D$\tilde{W}$ 1) (vgl. (2.2.2)) hat man für solche Erweiterungen eine Restriktion

$$r_{\kappa(x)/\kappa(y)} : \tilde{W}(y, \mathcal{L}(y)) \to \tilde{W}(x, \omega_{\kappa(x)/\kappa(y)} \otimes (f^*\mathcal{L})(x)).$$

Wir suchen nun ein Geradenbündel Ω auf X, so daß $\Omega(x)$ gerade $\omega_{\kappa(x)/\kappa(y)}$ ist.

Dazu stellen wir einen Zusammenhang zwischen $\Omega^1_{X/Y}(x)$ und $\Omega^1_{\kappa(x)/\kappa(y)}$ her.

Für $y = f(x)$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[d] \\ \kappa(y) \arrow[r] & \kappa(x) \end{tikzcd}$$

und in dieser Situation gilt die folgende allgemeine Tatsache:

(4.2.1) Lemma: *Sei* $(A, \mathfrak{m}) \xrightarrow{f} (B, \mathfrak{n})$ *ein lokaler Homomorphismus lokaler Ringe* A *und* B *mit den maximalen Idealen* $\mathfrak{m}$ *bzw.* $\mathfrak{n}$.
Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads] & B \arrow[d, two heads] \\ k := A/\mathfrak{m} \arrow[r, "\overline{f}"] & l := B/\mathfrak{n}. \end{tikzcd}$$

Dann hat man eine $k-$Derivation

$$\begin{aligned} l &\xrightarrow{\quad d \quad} \Omega^1_{B/A}/(\mathfrak{n}\Omega^1_{B/A} + Bd_{B/A}(\mathfrak{n})) \\ \overline{b} &\longmapsto d_{B/A}(b) \bmod (\mathfrak{n}\Omega^1_{B/A} + Bd_{B/A}(\mathfrak{n})) \end{aligned}$$

(b ist dabei ein Repräsentant von $\overline{b}$ in B)
und einen kanonischen Isomorphismus von $l-$ Vektorräumen

$$\Omega^1_{B/A}/(\mathfrak{n}\Omega^1_{B/A} + Bd_{B/A}(\mathfrak{n})) \xrightarrow{\quad \sim \quad} \Omega^1_{l/k},$$

welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \Omega^1_{B/A}/(\mathfrak{n}\Omega^1_{B/A} + Bd_{B/A}(\mathfrak{n})) \arrow[dd, "\wr"] \\ l \arrow[ur, "d"] \arrow[dr, "d_{l/k}"'] & \\ & \Omega^1_{l/k} \end{tikzcd}$$

kommutativ macht.
M.a.W.: $\Omega^1_{B/A}/(\mathfrak{n}\Omega^1_{B/A} + Bd_{B/A}(\mathfrak{n}))$ ist der Differentialmodul von l/k.

Beweis: Es sei $\Omega' := \mathfrak{n}\Omega^1_{B/A} + Bd_{B/A}(\mathfrak{n})$ und $\Omega := \Omega^1_{B/A}/\Omega'$.
Weiter sei

$$\begin{aligned} l &\xrightarrow{\quad d \quad} \Omega^1_{B/A}/(\mathfrak{n}\Omega^1_{B/A} + Bd_{B/A}(\mathfrak{n})) \\ \overline{b} &\longmapsto d_{B/A}(b) \bmod (\mathfrak{n}\Omega^1_{B/A} + Bd_{B/A}(\mathfrak{n})); \end{aligned}$$

dabei ist b ein Repräsentant von $\overline{b}$ in B. Man überzeugt sich nun, daß der Reihe nach gilt:

1. d ist wohldefiniert
2. d ist $k-$linear
3. d erfüllt die Produktregel.

d ist somit eine $k-$Derivation.

Es sei nun $d_{l/k} \in \mathrm{Der}_k(l, \Omega^1_{l/k})$ die universelle Derivation.
Aufgrund der universellen Eigenschaft von $\Omega^1_{l/k}$ hat man einen eindeutig bestimmten $l-$Vektorraummorphismus

$$v : \Omega^1_{l/k} \to \Omega^1_{B/A}/(\mathfrak{n}\Omega^1_{B/A} + Bd_{B/A}(\mathfrak{n})),$$

so daß $v \circ d_{l/k} = d$ gilt.

Wir betrachten die Komposition

$$z : B \to l \xrightarrow{d_{l/k}} \Omega^1_{l/k}$$

und ersichtlicherweise gilt $z \in \mathrm{Der}_A(B, \Omega^1_{l/k})$; hierbei ist $\Omega^1_{l/k}$ mit der kanonischen $B-$Modulstruktur versehen. Folglich existiert ein Morphismus von $B-$Moduln

$$w : \Omega^1_{B/A} \to \Omega^1_{l/k}$$

mit $w \circ d_{B/A} = z$. Man hat dann das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Omega^1_{B/A} \arrow[ddr, "w"] & B \arrow[l, "d_{B/A}"'] \arrow[d, two heads] & A \arrow[l, "f"'] \arrow[d, two heads] \\
 & l \arrow[d, "d_{l/k}"] & k. \arrow[l, "\overline{f}"'] \\
 & \Omega^1_{l/k} &
\end{tikzcd}$$

Es gilt nun $\Omega' \subseteq \mathrm{Ker}(w)$ und also induziert w einen Morphismus

$$\overline{w} : \Omega \to \Omega^1_{l/k}$$

von $l-$Vektorräumen mit $d_{l/k} = \overline{w} \circ d$.
Mit Hilfe der Tatsache, daß Ω als $l-$Vektorraum von $d(l)$ erzeugt wird, stellt man fest, daß v und $\overline{w}$ zueinander invers sind.
$\overline{w}$ macht offenbar das Diagramm in der Behauptung des Lemmas kommutativ. $\square$

(4.2.1) liefert also für unsere Situation

$$\Omega^1_{\kappa(x)/\kappa(y)} = \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,y}}/\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}}\Omega^1_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,y}} + \mathcal{O}_{X,x}d_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathfrak{m}_{\mathcal{O}_{X,x}}).$$

Folglich hat man eine kanonische **Surjektion**

$$\Omega^1_{X/Y}(x) \to \Omega^1_{\kappa(x)/\kappa(y)}.$$

Ist nun y ein Punkt der Dimension p und x ein Punkt der Dimension $p+n$, so gilt $(\kappa(x)/\kappa(y))_{tr} = n$.
Da $\kappa(x)/\kappa(y)$ eine separable Körpererweiterung ist, so gilt nach [Ku], 5.8 $\dim_{\kappa(x)}\Omega^1_{\kappa(x)/\kappa(y)} = (\kappa(x)/\kappa(y))_{tr}$.
Daher ist $\dim_{\kappa(x)}\Omega^1_{\kappa(x)/\kappa(y)} = n$ und also obiger Pfeil ein Isomorphismus.
Für solche Punkte lautet die Restriktion also

$$r_{\kappa(x)/\kappa(y)} : \tilde{W}(y, \mathcal{L}(y)) \to \tilde{W}(x, (\Omega^n_{X/Y} \otimes f^*\mathcal{L})(x)).$$

Wir definieren nun $f^* : C_p(Y; \tilde{W}, \mathcal{L}) \to C_{p+n}(X; \tilde{W}, (\Omega^n_{X/Y} \otimes f^*\mathcal{L}))$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ komponentenweise durch

$$(f^*)^y_x = \begin{cases} r_{\kappa(x)/\kappa(y)}, & \text{falls} \quad f(x) = y \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(4.2.2) Sei $f : X \to Y$ ein taler Morphismus in $(Sch/C_{fg}/k)$. Dann ist f glatt von der relativen Dimension 0 (EGA IV, 4, 17.11.1). Insbesondere ist $\Omega^1_{X/Y} = 0$. Ist $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf Y, dann hat man nach dem gerade Gesagten das Pull-back

$$f^* : C_p(Y; \tilde{W}, \mathcal{L}) \to C_p(X; \tilde{W}, f^*\mathcal{L}).$$

Pull-back ist in der folgenden Weise funktoriell:

(4.2.3) Satz: *Es seien $g : Y \to X$ und $f : Z \to Y$ Morphismen in $(Sch/C_{fg}/k)$. g sei glatt von der relativen Dimension n und f sei glatt von der relativen Dimension m.*
Dann ist $g \circ f$ glatt von der relativen Dimension $n + m$ und es gilt:

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Beweis: Es gilt kanonisch $f^*\Omega^n_{Y/X} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \Omega^m_{Z/Y} = \Omega^{n+m}_{Z/X}$ (vgl. [AK], ch.VII, 3.12); daher folgt die Behauptung aus der Funktorialität der Restriktion (vgl. (2.2.3)). $\square$

5 Funktorielle Eigenschaften von $C_*(X;\tilde{W},\mathcal{L})$

Dieses Kapitel beinhaltet die zentralen technischen Resultate dieser Theorie, nämlich das Verhalten von Push-forward und Pull-back bei kartesischen Quadraten und die Verträglichkeit dieser Morphismen mit den Differentialen des Wittkomplexes.

5.1 Pull-back und Push-forward als Komplexmorphismen

Das folgende Resultat über kartesische Quadrate ist in Zykeltheorien wohlbekannt (vgl. [Fu], 1.7 und [Ro], 4.1).

(5.1.1) Satz: *Es sei*

$$\begin{tikzcd}
Y \times_X Z = U \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"] & X
\end{tikzcd}$$

ein kartesisches Quadrat in $(Sch/C_{fg}/k)$*; dabei sei* g *glatt von der relativen Dimension* n *und* f *sei ein beliebiger Morphismus in* $(Sch/C_{fg}/k)$*. Weiterhin sei* $\mathcal{L}$ *ein Geradenbündel auf* X*.*
Dann kommutiert für jedes $p \in \mathbb{Z}$ *das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
C_{p+n}(U;\tilde{W},\Omega^n_{U/Z} \otimes (fg')^*\mathcal{L}) \arrow[d, "{f'}_*"] & C_p(Z;\tilde{W},f^*\mathcal{L}) \arrow[l, "{g'}^*"'] \arrow[d, "f_*"] \\
C_{p+n}(Y;\tilde{W},\Omega^n_{Y/X} \otimes g^*\mathcal{L}) & C_p(X;\tilde{W},\mathcal{L}), \arrow[l, "g^*"']
\end{tikzcd}$$

d.h. es gilt:

$$g^* \circ f_* = {f'}_* \circ {g'}^*.$$

Beweis: Es sei $\delta := g^* \circ f_* - {f'}_* \circ {g'}^*$.
Wir haben $\delta_y^z = 0$ für alle $z \in Z_{(p)}$ und $y \in Y_{(p+n)}$ zu zeigen.

1. Fall: Es sei $f(z) \neq g(y)$.
Dann ist $g^* \mid_y^{f(z)} \circ f_* \mid_{f(z)}^z = 0$, da $g^* \mid_y^{f(z)} = 0$ nach Definition von g^* gilt.
Weiterhin ist ${f'}_* \mid_y^u \circ {g'}^* \mid_u^z = 0$ für alle $u \in U_z$, da $f'(u) \neq y$ gilt.

2. Fall: Nun sei $x := f(z) = g(y)$.
Es gilt $\dim(x, X) \leq \dim(z, Z) = p$.
Nun ist g von der relativen Dimension n und also ist $\dim(y, Y) \leq \dim(x, X) + n$, so daß auch $\dim(x, X) \geq p$ ist, so daß wir schließlich $p = \dim(x, X) = \dim(z, Z)$ erhalten. Somit ist $\kappa(z)$ endlich über $\kappa(x)$.
Da Push-forward und Pull-back lokale Konstruktionen sind, können wir offenbar $Z = \mathrm{Spec}(\kappa(z))$ und $X = \mathrm{Spec}(\kappa(x))$ annehmen. Dann ist $f : Z \to X$ flach und endlich.
Nach Konstruktion von g^* können wir auch Y durch $\mathrm{Spec}(\kappa(y))$ ersetzen, so daß wir $Y = \mathrm{Spec}(\kappa(y))$ annehmen.
Alsdann genügt es nach EGA I*, 3.2.7.1 das folgende kartesische Quadrat zu betrachten

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(\kappa(y) \otimes_{\kappa(x)} \kappa(z)) \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "f'"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathrm{Spec}(\kappa(z)) \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{Spec}(\kappa(y)) \arrow[r, "g"] & \mathrm{Spec}(\kappa(x)).
\end{tikzcd}$$

Wir setzen zur Abkürzung $K := \kappa(x), K' := \kappa(y), L := \kappa(z)$.
Bezeichnen wir des weiteren die Körper $K' \otimes_K L/\mathfrak{m}_i$ ($\mathfrak{m}_i$ durchläuft hierbei die endlich vielen maximalen Ideale von $K' \otimes_K L$) mit L_i, so haben wir die Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_i \tilde W(L_i,\omega_{L_i/L}) \arrow[d, "\sum_i c_{L_i/K'}"] & \tilde W(L) \arrow[l, "r_{L_i/L}"'] \arrow[d, "c_{L/K}"] \\
\tilde W(K',\omega_{K'/K}) & \tilde W(K) \arrow[l, "r_{K'/K}"']
\end{tikzcd}$$

nachzuweisen. (Wir haben die von dem Geradenbündel $\mathcal{L}$ stammenden Vektorräume in diesem Diagramm weggelassen.)
Dies geschieht in mehreren Schritten.

1. Schritt: Es sei L separabel über K.
Dann ist $R := K' \otimes_K L$ eine endliche, separable Algebra über K' und nach dem chinesischen Restsatz gilt

$$R = \prod_i R/\mathfrak{m}_i = \prod_i L_i,$$

wobei $\mathfrak{m}_i$ die endlich vielen maximalen Ideale von R durchläuft.
Wir haben die Formel

$$(*) \quad r_{K'/K} \circ c_{L/K} = \sum_{L_i|K'} c_{L_i/K'} \circ r_{L_i/L}$$

zu beweisen.
Dazu betrachten wir die Körperdiagramme

$$\begin{tikzcd}
L_i & L \arrow[l] \\
K' \arrow[u] & K. \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Im Hinblick auf die Gruppenstruktur von $\tilde W$, stellt man (wie im dritten Beweisschritt von (2.3.6)) fest, daß sich $(*)$ aus der folgenden Aussage $(**)$ über das funktorielle Verhalten des Wittrings ergibt:

$$(**) \quad r_{K'/K} \circ c_{L/K} = \sum_{L_i|K'} c_{L_i/K'} \circ r_{L_i/L} : W(L) \to W(K').$$

r ist dabei die natürliche Restriktion und c der Scharlau-Transfer zum Spurfunktional.
Nach dem Spurlemma (2.3.7) gilt $tr_{R/K'}(x \otimes 1) = tr_{L/K}(x)$ für alle $x \in L$ und also ist $tr_{L/K} \otimes id_{K'} = tr_{R/K'}$.
Nun ist wie bereits festgestellt $R = \prod L_i$ und wieder folgt aus dem Spurlemma (2.3.7) $tr_{L_i/K'} = tr_{R/K'} \mid L_i$.
Daher ist $(**)$ gerade die Aussage des Satzes 2.2 in [Ar].

2. Schritt: Es sei L/K eine total inseparable Körpererweiterung vom Grad $p := char(k)$. Es ist also $L = K(\sqrt[p]{a})$ mit einem $a \in K$.
Da K'/K separabel ist, so ist $L' := L \otimes_K K' = K'(\sqrt[p]{a})$ ein Körper.
Die Verträglichkeit von Differentialmoduln mit Basiserweiterungen liefert einen kanonischen Isomorphismus von eindimensionalen L'−Vektorräumen

$$\Omega^1_{L/K} \otimes_L L' \xrightarrow{\cong} \Omega^1_{L'/K'}.$$

Mit Hilfe dieser Vorüberlegungen überprüft man nun anhand der Definition von $c_{L/K}$ für total inseparable Erweiterungen (vgl. (2.2.4)) und der Restriktion $r_{K'/K}$ für separable Erweiterungen die Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(L', \omega_{L'/L}) \arrow[d, "c_{L'/L}"] & \tilde{W}(L) \arrow[l, "r_{L'/L}"'] \arrow[d, "c_{L/K}"] \\
\tilde{W}(K', \omega_{K'/K}) & \tilde{W}(K) \arrow[l, "r_{K'/K}"']
\end{tikzcd}$$

(vgl. dazu auch den zweiten Beweisschritt von (2.3.6)).

3. Schritt: Es sei nun L/K eine beliebige endliche Erweiterung. Wir bilden den separablen Abschluß K_s von K in L. Dann ist K_s/K endlich, separabel und L/K_s endlich, total inseparabel.
Ist $K_s \neq L$, so zerlegen wir L/K_s in eine Folge von total inseparablen Erweiterungen $\mathrm{K}_s =: K_0 \underset{\neq}{\subseteq} K_1 \underset{\neq}{\subseteq} ... \underset{\neq}{\subseteq} K_n := L$, wobei für alle $i = 1, ..., n$ $[K_i : K_{i-1}] = p$ gilt.
Für die Tensorprodukte $K' \otimes_K L_i$ und $K' \otimes_K L_{i-1}$ ist die induzierte Abbildung auf den Spektren

$$\mathrm{Spec}(K' \otimes_K L_i) \to \mathrm{Spec}(K' \otimes_K L_{i-1})$$

bijektiv.
Beachtet man außerdem, daß für eine beliebige separable Erweiterung Z/F und eine Erweiterung M/F, welche endlich, separabel oder total inseparabel vom Grad p ist, alle Komposita von Z und M über F separable Erweiterungen von M sind, so folgt die Kommutativität des in Frage stehenden Diagramms aus den beiden vorhergehenden Schritten.
Damit ist der Satz bewiesen. □

Dieser Satz ist ein entscheidendes Hilfsmittel beim Beweis der Verträglichkeit von Pull-back mit dem Differential des Wittkomplexes.

Wir kommen nun zur Verträglichkeit von Push-forward mit dem Differential des Wittkomplexes.

(5.1.2) Satz: *Es sei $f : X \to Y$ ein eigentlicher Morphismus in der Kategorie $(Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf Y.*
Dann kommutiert für alle $p \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_p(X;\tilde{W},f^*\mathcal{L}) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "d_X"] & C_p(Y;\tilde{W},\mathcal{L}) \arrow[d, "d_Y"] \\
C_{p-1}(X;\tilde{W},f^*\mathcal{L}) \arrow[r, "f_*"] & C_{p-1}(Y;\tilde{W},\mathcal{L}),
\end{tikzcd}$$

d.h. es gilt: $d_Y \circ f_* = f_* \circ d_X$.

Beweis: Es sei $\delta(f_*) = d_Y \circ f_* - f_* \circ d_X$.
Wir haben $\delta(f_*)^x_y = 0$ für alle $x \in X_{(p)}$ und $y \in Y_{(p-1)}$ zu zeigen.
Es sei $z := f(x)$ und $\dim(z, Y) =: q$.

1. Fall: Es sei $y \notin \overline{\{z\}}$.
Dann ist $d_Y \circ f_* \mid^x_y = 0$ nach Definition von d_Y.

Außerdem ist auch $f_* \circ d_X \mid^x_y = 0$, denn für $x' \in \overline{\{x\}}^{(1)}$ gilt $f(x') \neq y$, denn sonst wäre $f(x') = y \in \overline{\{f(x)\}} = \overline{\{z\}}$.

2. Fall: Nun sei $y = z = f(x)$.
Dann ist $d_Y \circ f_* \mid^x_y = 0$.
Zum Beweis von $f_* \circ d_X \mid^x_y = 0$ betrachten wir nun die Komposition

$$\overline{\{x\}} \to X \xrightarrow{f} Y.$$

Es ist $f(\overline{\{x\}}) \subseteq \overline{\{z\}}$. Versehen wir $\overline{\{x\}}$ und $\overline{\{z\}}$ jeweils mit der reduzierten Unterschemastruktur, so hat man nach EGA I, 4.1.9 das kommutative Diagramm von Morphismen von Schemata

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ \overline{\{x\}} \arrow[u] \arrow[r] & \overline{\{z\}}, \arrow[u] \end{tikzcd}$$

und wir bezeichnen den unteren horizontalen Pfeil wieder mit f. Nach EGA II, 5.4.3 ist $f : \overline{\{x\}} \to \overline{\{z\}}$ eigentlich.
Wir dürfen also $Y = \overline{\{z\}}$ und $X = \overline{\{x\}}$ annehmen.
Da sich das Differential des Wittkomplexes auf Fasern einschränkt (vgl. (3.2.2)), so dürfen wir $X = \overline{\{x\}}$ durch $X_{\kappa(y)}$ und Y durch $\mathrm{Spec}(\kappa(y))$ ersetzen. Dann ist aber die Normalisierung des Abschlusses von x in $X_{\kappa(y)}$ eine integre, eigentliche und normale Kurve über $\kappa(y)$ und alsdann folgt $f_* \circ d_X \mid^x_y = 0$ aus der Reziprozitätseigenschaft für Kurven (vgl. (2.4.4)).

3. Fall: Nun sei $y \in \overline{\{z\}}$ und $y \neq z, q = \dim(z, Y), p = \dim(x, X)$. Es ist $p \geq q$ und dann $p = q$, wegen $y \in \overline{\{z\}}$ und $y \neq z$. Folglich ist $\kappa(x)/\kappa(z)$ endlich.
Wir dürfen wieder $Y = \overline{\{z\}}$ und $X = \overline{\{x\}}$ annehmen.
Wir betrachten das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\tilde{f}"] & X \arrow[d, "f"] \\ \tilde{Y} \arrow[r, "h"] & Y, \end{tikzcd}$$

dabei sind g und h die Normalisierungen von X und Y.
Es seien $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $\tilde{z} \in \tilde{Y}$ die generischen Punkte (welche dann über $x \in X$ bzw. $z \in Y$ liegen).
Wir betrachten

$$\delta(g_*) = d_X \circ g_* - g_* \circ d_{\tilde{X}}$$

und behaupten

$$(1) \quad \delta(g_*) \mid \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L}) = 0.$$

Es gilt nämlich für alle $\alpha \in \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L})$

$$\begin{aligned} \delta(g_*)(\alpha) &= d_X \circ g_*(\alpha) - g_* \circ d_{\tilde{X}}(\alpha) \\ &= d_X(g_*(\alpha)) - g_* \circ (\sum_{x \in \tilde{X}^{(1)}} \delta_x(\alpha)) \\ &= d_X(g_*(\alpha)) - \sum_{w \in X^{(1)}} c_{\kappa(x)/\kappa(w)}(\delta_x(\alpha)); \end{aligned}$$

hierbei sind die $w \in X^{(1)}$ mit $g(x) = w$ und $x \in \tilde{X}^{(1)}$.
Weiter haben wir dann

$$\begin{aligned} \delta(g_*)(\alpha) &= d_X(g_*(\alpha)) - \sum_{w \in X^{(1)}} c_{\kappa(x)/\kappa(w)}(\delta_x(\alpha)) \\ &= d_X(\alpha) - \sum_{w \in X^{(1)}} c_{\kappa(x)/\kappa(w)}(\delta_x(\alpha)) \\ &= 0, \end{aligned}$$

letzteres nach Definition von d_X.

Analog erhält man für

$$\delta(h_*) = d_Y \circ h_* - h_* \circ d_{\tilde{Y}}$$

$$(2) \quad \delta(h_*) \mid \tilde{W}(\tilde{z}, h^*\mathcal{L}) = 0.$$

Die Funktorialität von Push-forward zusammen mit (1) und (2) liefert dann

$$\begin{array}{rcl}
\delta(f_*) \circ g_* \mid \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L}) & = & (d_Y \circ f_* - f_* \circ d_X) \circ g_* \mid \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L}) \\
& = & (d_Y \circ f_* \circ g_* - f_* \circ d_X \circ g_*) \mid \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L}) \\
& = & (d_Y \circ (h \circ \tilde{f})_* - f_* \circ d_X \circ g_*) \mid \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L}) \\
& = & (d_Y \circ h_* \circ \tilde{f}_* - f_* \circ d_X \circ g_*) \mid \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L}) \\
& \overset{(1),(2)}{=} & (h_* \circ d_{\tilde{Y}} \circ \tilde{f}_* - h_* \circ \tilde{f}_* \circ d_{\tilde{X}}) \mid \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L}) \\
& = & h_* \circ \delta(\tilde{f}_*) \mid \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L})
\end{array}$$

Nun ist $g_* \mid \tilde{W}(\tilde{x}, (fg)^*\mathcal{L})$ ein Isomorphismus auf $\tilde{W}(x, f^*\mathcal{L})$, so daß es also genügt

$$\delta(\tilde{f})_{\tilde{y}}^{\tilde{x}} = 0$$

für $\tilde{y} \in \tilde{Y}_{(p-1)}$ zu zeigen.
Es sei nun $\tilde{u} \in \tilde{X}$ ein Punkt über $\tilde{y}$. Es ist $\tilde{u} \in \tilde{X}^{(1)}$. Der lokale Ring in $\tilde{y}$ und alle Urbilder $\tilde{u}$ sind diskrete Bewertungsringe, da $\tilde{X}$ und $\tilde{Y}$ normal sind.
Da $\tilde{f}$ eigentlich ist, so besteht $\tilde{f}^{-1}(\tilde{y})$ aus allen Bewertungsfortsetzungen von $\mathcal{O}_{\tilde{Y},\tilde{y}}$ auf $\mathcal{O}_{\tilde{X},\tilde{x}}$.

Dann ist

$$\begin{array}{rcl}
\delta(\tilde{f})_{\tilde{y}}^{\tilde{x}} & = & d_{\tilde{Y}} \circ \tilde{f}_* - \tilde{f}_* \circ d_{\tilde{X}} \,\big|_{\tilde{y}}^{\tilde{x}} \\
& = & \delta_{\tilde{y}} \circ c_{\kappa(\tilde{x})/\kappa(\tilde{z})} - \sum\limits_{\tilde{u}} c_{\kappa(\tilde{u})/\kappa(\tilde{y})} \circ \delta_{\tilde{u}} \\
& = & 0,
\end{array}$$

dabei gilt die letzte Gleichheit nach (2.3.6).
Damit ist der Satz bewiesen. □

Wir kommen nun zur Verträglichkeit von Pull-back mit dem Differential des Wittkomplexes.
Dies behandelt das folgende Resultat.

(5.1.3) Satz: *Sei $g : Y \to X$ glatt von der relativen Dimension n in $(Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X.*
Dann kommutiert für jedes $p \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
C_p(X;\tilde{W},\mathcal{L}) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "d_X"] & C_{p+n}(Y;\tilde{W},\Omega^n_{Y/X}\otimes g^*\mathcal{L}) \arrow[d, "d_Y"] \\
C_{p-1}(X;\tilde{W},\mathcal{L}) \arrow[r, "g^*"] & C_{p-1+n}(Y;\tilde{W},\Omega^n_{Y/X}\otimes g^*\mathcal{L}),
\end{tikzcd}$$

also gilt: $g^* \circ d_X = d_Y \circ g^*$.

Ist g zusätzlich noch unverzweigt (von der relativen Dimension 0), so ist g tale (vgl. EGA IV, 4, 17.6.1) und wir erhalten in diesem Spezialfall:

(5.1.4) Satz: *Sei $g : Y \to X$ ein taler Morphismus in $(Sch/C_{fg}/k)$ und sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X.*
Dann kommutiert für jedes $p \in \mathbb{Z}$

$$\begin{tikzcd}
C_p(X;\tilde{W},\mathcal{L}) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "d_X"] & C_p(Y;\tilde{W},g^*\mathcal{L}) \arrow[d, "d_Y"] \\
C_{p-1}(X;\tilde{W},\mathcal{L}) \arrow[r, "g^*"] & C_{p-1}(Y;\tilde{W},g^*\mathcal{L}).
\end{tikzcd}$$

(5.1.3) ergibt sich u.a. aus (5.1.4), so daß wir beide Sätze ein Stück weit simultan beweisen.

Beweis von (5.1.3) und (5.1.4):

1. Schritt: Es sei $\delta(g^*) := d_Y \circ g^* - g^* \circ d_X$.
Wir haben $\delta(g^*)^x_y = 0$ für $x \in X_{(p)}$ und $y \in Y_{(p+n-1)}$ zu zeigen.
Ist g glatt von der relativen Dimension n, so existiert eine endliche, offene Überdeckung $(U_i)_{1\leq i\leq k}$ von Y, so daß sich die Einschränkungen $g \mid U_i : U_i \to X$ in der Form $U_i \xrightarrow{g'_i} \mathbb{A}^n_X \xrightarrow{p} X$ faktorisieren; hierbei ist p jeweils der Projektionsmorphismus, und die g'_i sind tale Morphismen (vgl. [AK], ch.VII, 1.1).
Gilt nun $g'^*_i \circ d_{\mathbb{A}^n_X} = d_{U_i} \circ g'^*_i$ für ein i und $p^* \circ d_X = d_{\mathbb{A}^n_X} \circ p^*$, so folgt aus der Funktorialität von Pull-back (vgl. (4.2.3)) $(g \mid U_i)^* \circ d_X = d_{U_i} \circ (g \mid U_i)^*$.
Gilt $(g \mid U_i)^* \circ d_X = d_{U_i} \circ (g \mid U_i)^*$ für alle i, so gilt auch $d_Y \circ g^* = g^* \circ d_X$.

Dies folgt so: Wie gesagt haben wir dazu $\delta(g^*)^x_y = 0$ für $x \in X_{(p)}$ und $y \in Y_{(p+n-1)}$ zu zeigen. Nun ist $y \in U_{i(p+n-1)}$ für mindestens ein i und dann ist $g^* \circ d_X \mid^x_y = (g \mid U_i)^* \circ d_X \mid^x_y$. Weiter gilt für Elemente $u \in Y_x$ mit $d_Y \mid^u_y \neq 0$ notwendig $u \in U_i$, so daß nach (3.2.3) $d_Y \mid^u_y = d_{U_i} \mid^u_y$ ist. Also ist $d_Y \circ g^* \mid^x_y = d_{U_i} \circ (g \mid U_i)^* \mid^x_y$. Damit folgt $\delta(g^*)^x_y = 0$.

Um sich von der Richtigkeit von (5.1.3) zu überzeugen, genügt es also (5.1.4) zu beweisen und die Aussage von (5.1.3) für den (glatten) Projektionsmorphismus $p : \mathbb{A}^n_X \to X$ zu verifizieren.

2. Schritt: Es sei nun $g : Y \to X$ tale.
Wir zeigen $\delta(g^*)^x_y = 0$ für $x \in X_{(p)}$ und $y \in Y_{(p-1)}$.
Es sei $z := g(y)$.

1. Fall: Es gelte zunächst $z \notin \overline{\{x\}}$.
Dann ist $g^* \circ d_X \mid^x_y = 0$ nach Definition von d_X und $d_Y \circ g^* \mid^x_y = 0$, da für alle $y' \in Y_x$ $y \notin \overline{\{y'\}}$ gilt.

2. Fall: Es sei nun $z \in \overline{\{x\}}$.
Es ist $\dim(z, X) = \dim(y, Y) = p - 1$. Folglich ist $z \neq x$ und $z \in \overline{\{x\}}^{(1)}$.
Wir können als nächstes $X = \overline{\{x\}}$ annehmen und alsdann Y durch $Y_{\overline{\{x\}}} = Y \times_X \overline{\{x\}} = g^{-1}(\overline{\{x\}})$ ersetzen (vgl. (3.1.2)).

Nun sei $\tilde X \xrightarrow{\tilde f} X$ die Normalisierung von X. Wir betrachten das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z := Y \times_X \tilde X \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\tilde f'"] & \tilde X \arrow[d, "\tilde f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & X. \end{tikzcd}$$

Dann gilt nach dem Satz über kartesische Quadrate (vgl. (5.1.1)):

$$\tilde f'_* \circ g'^* = g^* \circ \tilde f_*.$$

Setzen wir nun $\delta(g'^*) := d_Z \circ g'^* - g'^* \circ d_{\tilde X}$ und beachten wir, daß $\tilde f$ eigentlich ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde f'_* \circ \delta(g'^*) &= \tilde f'_* \circ d_Z \circ g'^* - \tilde f'_* \circ g'^* \circ d_{\tilde X} \\ &\overset{(5.1.2)}{=} d_Y \circ \tilde f'_* \circ g'^* - \tilde f'_* \circ g'^* \circ d_{\tilde X} \\ &\overset{(5.1.1)}{=} d_Y \circ g^* \circ \tilde f_* - g^* \circ \tilde f_* \circ d_{\tilde X} \\ &\overset{(5.1.2)}{=} d_Y \circ g^* \circ \tilde f_* - g^* \circ d_X \circ \tilde f_* \\ &= \delta(g^*) \circ \tilde f_*. \end{aligned}$$

Ist $\tilde x, \tilde y \in \tilde X$ mit $\tilde f(\tilde x) = x$ und $\tilde f(\tilde y) = y$, so induziert $\tilde f_*$ einen Isomorphismus von $\tilde W(\kappa(\tilde x))$ auf $\tilde W(\kappa(x))$. (Das Geradenbündel ist hier weggelassen.) Es genügt also $\delta(g'^*)_{\tilde y}^{\tilde x} = 0$ zu zeigen.
Wir dürfen somit X als normal annehmen.
Es sei $U := \{u \in Y_x^{(0)} \mid y \in \overline{\{u\}}\}$. U ist endlich, und es ist notwendig $y \in \overline{\{u\}}^{(1)}$. Dann ist

$$\delta(g^*)_y^x = \sum_{u \in U} \delta_y^u \circ g^* \mid_u^x - g^* \mid_y^z \circ \delta_z^x.$$

Wir dürfen nun wie üblich X durch $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{X,z})$ und Y durch $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{Y,y})$ ersetzen (vgl. (3.2.1)). Da X normal ist, so ist $R := \mathcal{O}_{X,z}$ ein diskreter Bewertungsring und dann $S := \mathcal{O}_{Y,y}$ ein lokaler Ring der Dimension ≤ 1.

Es sei $\overline{g} : \overline{Y} := \mathrm{Spec}(S) \to \overline{X} := \mathrm{Spec}(R)$ der von g induzierte lokale Homomorphismus.
Da g tale ist, so ist $\overline{g}$ flach und unverzweigt, so daß nach EGA IV, 1, 17.3.3 S ebenfalls ein diskreter Bewertungsring ist.
Es sei $\kappa(u)$ der Funktionenkörper von $\overline{Y}$ und $\kappa(x)$ der Funktionenkörper von $\overline{X}$; des weiteren seien $\kappa(y)$ bzw. $\kappa(z)$ die Restekörper von S bzw. R.
$\delta(g^*)^x_y$ ist dann definitionsgemäß gleich

$$\delta_u \circ r_{\kappa(u)/\kappa(x)} - r_{\kappa(y)/\kappa(z)} \circ \delta_z.$$

Da $\overline{g}$ wie schon gesagt unverzweigt ist, so besagt (2.3.5) gerade $\delta(g^*)^x_y = 0$.
Mithin ist (5.1.4) bewiesen.

3. Schritt: Nun sei $p : \mathbb{A}^n_X \to X$ die Projektion. p ist glatt von der relativen Dimension n.
Wegen der Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n_X \arrow[r] \arrow[rrrr, bend right, "p"'] & \mathbb{A}^{n-1}_X \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & \mathbb{A}^1_X \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

der Funktorialität von Pull-back und $\mathbb{A}^k_X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^{k-1}_X}$ dürfen wir zum Beweis der Aussage $d_{\mathbb{A}^n_X} \circ p^* = p^* \circ d_X$ annehmen, daß $n = 1$ ist.
Es sei nun $Y := \mathbb{A}^1_X$. Wir betrachten wieder $\delta(p^*) := d_Y \circ p^* - p^* \circ d_X$ und wollen $\delta(p^*)^x_y = 0$ für alle $x \in X_{(p)}$ und $y \in Y_{(p)}$ nachweisen.
Es sei $z := p(y)$.

1. Fall: Es gelte $z \notin \overline{\{x\}}$.
Hier gilt $\delta(p^*)^x_y = 0$ nach denselben Überlegungen, wie an der entsprechenden Stelle im 2. Schritt.

2. Fall: Es sei $z = x$.
Dann ist $p^* \circ d_X \mid^x_y = 0$ und

$$\begin{aligned} d_Y \circ p^* \mid^x_y &= \sum_{y' \in Y_x} d_Y \mid^{y'}_y \circ p^* \mid^x_{y'} \\ &= \sum_{y' \in Y_x} d_Y \mid^{y'}_y \circ r_{\kappa(y')/\kappa(x)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

letzteres, da jeder Summand nach (2.3.2 (2)) gleich Null ist, weil für sämtliche $y' \in Y_x$ alle Bewertungen auf $\kappa(y')$ mit Zentrum y auf $\kappa(x)$ trivial sind.

3. Fall: Es sei $z \in \overline{\{x\}}$ und $z \neq x$.
Es ist dann $z \in \overline{\{x\}}^{(1)}$. Wie im zweiten Schritt überzeugt man sich dann davon, daß man $X = \overline{\{x\}}$ und alsdann X als normal annehmen kann.
Es ist dann $R := \mathcal{O}_{X,z}$ ein diskreter Bewertungsring. Mit dem kanonischen Morphismus $f : \mathrm{Spec}(R) \to X$ bilden wir das kartesische Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^1_R \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "f'"] & \mathrm{Spec}(R) \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{A}^1_X \arrow[r, "p"] & X. \end{tikzcd}$$

Nach EGA I*, 3.2.7 gilt $f'(\mathbb{A}^1_R) = p^{-1}(f(\mathrm{Spec}(R)))$ und für $u \in \mathbb{A}^1_R$ induziert f' einen kanonischen Isomorphismus der Halme $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_X, f'(u)} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_R, u}$, und a fortiori einen kanonischen Isomorphismus der Wittgruppen

$$\tilde{W}(\kappa(u), ((pf')^*\mathcal{L})(u)) \xrightarrow{\cong} \tilde{W}(\kappa(f'(u)), (p^*\mathcal{L})(f'(u))).$$

Modulo dieser kanonischen Identifizierungen gilt dann für alle $u \in p'^{-1}(x)$

$$d_{\mathbb{A}^1_X} |^u_y = d_{\mathbb{A}^1_R} |^u_y$$

(vgl. auch (3.2.3)),
und wir erhalten schließlich

$$\begin{aligned} \delta(p^*) |^x_y &= d_{\mathbb{A}^1_X} \circ p^* - p^* \circ d_X |^x_y \\ &= d_{\mathbb{A}^1_R} \circ p'^* - p'^* \circ d_R |^x_y . \end{aligned}$$

Man beachte hierbei: Obwohl $\mathrm{Spec}(R)$ und dann auch $\mathbb{A}^1_R$ i.a. nicht aus $(Sch/C_{fg}/k)$ sind, so sind in diesem Fall offenbar die Wittkomplexe auf $\mathrm{Spec}(R)$ und $\mathbb{A}^1_R$ gemäß Kapitel 3 erklärt. Ebenfalls ist das Pull-back für den glatten Morphismus p' wie in (4.2) erklärt.

Es genügt somit die Aussage von (5.1.3) für die Projektion $p : \mathbb{A}^1_R \to \mathrm{Spec}(R)$ zu beweisen.

4. Schritt: Wir betrachten nun den glatten Morphismus

$$p : \mathbb{A}^1_R := \mathrm{Spec}(R[t]) \to X := \mathrm{Spec}(R),$$

dabei sei R ein diskreter Bewertungsring. (Alle Restklassenkörper von R und $\mathbb{A}^1_R$ seien endlich erzeugt über k.)
Wir haben $d_{\mathbb{A}^1_R} \circ p^* = p^* \circ d_R$ zu beweisen.Wir betrachten dazu die Wittkomplexe

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(K(t)) \arrow[d, "d_{\mathbb{A}^1_R}"] & \\
\bigoplus_{x\in\mathbb{A}^1_{R(1)}} \tilde{W}(\kappa(x)) \arrow[d] & \\
\bigoplus_{x\in\mathbb{A}^1_{R(0)}} \tilde{W}(\kappa(x)) \arrow[d] & \tilde{W}(K) \arrow[d, "\delta_z"] \arrow[uul, "p^*"'] \\
0 & \tilde{W}(\kappa(z)) \arrow[d] \arrow[uul, "p^*"] \\
 & 0,
\end{tikzcd}$$

dabei ist $K = \mathrm{Quot}(R)$ und z der abgeschlossene Punkt von $\mathrm{Spec}(R)$. (Die Geradenbündel sind wie üblich weggelassen.)
Es ist

$$\begin{aligned} p^{-1}(z) &= \mathrm{Spec}(R[t] \otimes_R \kappa(z)) \\ &= \mathrm{Spec}(\kappa(z)[t]). \end{aligned}$$

$p^{-1}(z)$ enthält also genau einen $1-$dimensionalen Punkt η, nämlich den generischen Punkt von $p^{-1}(z)$.

Es ist $\dim(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_R,\eta}) = 1$, folglich ist $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_R,\eta}$ ein diskreter Bewertungsring und $R \to \mathcal{O}_{\mathbb{A}^1_R,\eta}$ ist gerade unverzweigt. Daher folgt $d_{\mathbb{A}^1_R} \circ p^* = p^* \circ d_R$ wie im 2. Schritt wieder aus (2.3.5). Damit ist (5.1.3) vollständig bewiesen. □

5.2 Die lange exakte Homologiesequenz

Ist $X \in (Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X, so haben wir auf X den Wittkomplex $C_*(X;\tilde{W},\mathcal{L})$ mit Werten in $\mathcal{L}$ (vgl. dazu Kapitel 3).
Wir haben mit $HW_p(X;\tilde{W},\mathcal{L})$ seine $p-$te Homologiegruppe bezeichnet (vgl. (3.4.1)).

(5.2.1) Nun sei $i : Y \to X$ eine abgeschlossene Immersion in der Kategorie $(Sch/C_{fg}/k)$. Weiter sei $j : U := X - Y \to X$ die offene Immersion des offenen Komplements von $i(Y)$ in X.
Wir bezeichnen (Y, i, X, j, U) als das **Rand-Tripel** zur abgeschlossenen Immersion $i : Y \to X$.

Ist nun $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X, so haben wir in kanonischer Weise die Wittkomplexe $C_*(X;\tilde{W},\mathcal{L})$, $C_*(Y;\tilde{W},i^*\mathcal{L})$ und $C_*(U;\tilde{W},j^*\mathcal{L})$.
Die mengentheoretische Zerlegung

$$X_{(p)} = i(Y_{(p)}) \cup U_{(p)}$$

der $p-$dimensionalen Punkte von X induziert **offenbar** eine exakte Sequenz

$$0 \to C_p(Y;\tilde{W},\mathcal{L} \mid Y) \xrightarrow{i_*} C_p(X;\tilde{W},\mathcal{L}) \xrightarrow{j^*} C_p(U;\tilde{W},\mathcal{L} \mid U) \to 0$$

von abelschen Gruppen für jedes $p \in \mathbb{Z}$.

Da i_* und j^* nach den Sätzen (5.1.2) und (5.1.4) mit den Differentialen der jeweiligen Komplexe kommutieren, so erhält man folgenden fundamentalen Satz.

(5.2.2) Satz: *Es sei $X \in (Sch/C_{fg}/k)$, $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X und (Y, i, X, j, U) das Rand-Tripel zur abgeschlossenen Immersion $i : Y \to X$. Dann hat man eine kurze exakte Sequenz von Komplexen*

$$0 \to C_*(Y;\tilde{W},\mathcal{L} \mid Y) \xrightarrow{i_*} C_*(X;\tilde{W},\mathcal{L}) \xrightarrow{j^*} C_*(U;\tilde{W},\mathcal{L} \mid U) \to 0$$

und folglich eine lange exakte Sequenz der Homologiegruppen

$$\ldots \to HW_p(Y;\tilde{W}) \xrightarrow{i_*} HW_p(X;\tilde{W}) \xrightarrow{j^*} HW_p(U;\tilde{W}) \xrightarrow{\delta} HW_{p-1}(Y;\tilde{W}) \to \ldots$$

(Wir haben dabei die jeweiligen Geradenbündel weggelassen.)

6 Die Wittringhomologie affiner und projektiver Räume

6.1 Die Homotopieeigenschaft

Es sei X ein Objekt aus $(Sch/C_{fg}/k)$, $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X und $\mathcal{E}$ ein lokalfreier $\mathcal{O}_X-$Modul vom Rang n.
Wir bilden das zu $\mathcal{E}$ assoziierte lineare Faserbündel $\mathbb{V}(\mathcal{E})$. $\mathbb{V}(\mathcal{E})$ ist ein über X affines Schema, und der Strukturmorphismus $\pi : \mathbb{V}(\mathcal{E}) \to X$ ist glatt (EGA IV, 4, 17.3.8) von der relativen Dimension n.
Nach (4.2) hat man dann das Pull-back

$$\pi^* : C_p(X; \tilde{W}, \mathcal{L}) \to C_{p+n}(\mathbb{V}(\mathcal{E}); \tilde{W}, \Omega^n_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/X} \otimes \pi^*\mathcal{L})$$

für jedes $p \in \mathbb{Z}$.
Da π^* nach (5.1.3) mit den Differentialen der jeweiligen Wittkomplexe kommutiert, so induziert dieser einen, ebenfalls mit π^* bezeichneten, Homomorphismus der Homologiegruppen

$$\pi^* : HW_p(X; \tilde{W}, \mathcal{L}) \to HW_{p+n}(\mathbb{V}(\mathcal{E}); \tilde{W}, \Omega^n_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/X} \otimes \pi^*\mathcal{L})$$

für jedes $p \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung: Da $\mathcal{E}$ ein lokalfreier $\mathcal{O}_X-$Modul von endlichem Rang ist, so hat man einen kanonischen $\mathcal{O}_{\mathbb{V}(\mathcal{E})}-$Modulisomorphismus $\pi^*\mathcal{E} \xrightarrow{\cong} \Omega^1_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/X}$. Daher ist kanonisch $\Omega^n_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/X} \otimes \pi^*\mathcal{L} = \pi^*((\bigwedge^n \mathcal{E}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L})$.

Unser Hauptergebnis in diesem Abschnitt ist:

(6.1.1) Satz: *(Homotopieinvarianz)*
Es sei $X \in (Sch/C_{fg}/k)$, $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X und $\mathcal{E}$ ein lokalfreier $\mathcal{O}_X-$Modul vom Rang n. Dann ist

$$\pi^* : HW_p(X; \tilde{W}, \mathcal{L}) \to HW_{p+n}(\mathbb{V}(\mathcal{E}); \tilde{W}, \Omega^n_{\mathbb{V}(\mathcal{E})/X} \otimes \pi^*\mathcal{L})$$

ein Isomorphismus für jedes $p \in \mathbb{Z}$.

Speziell erhält man dann:

(6.1.2) Korollar: *Es sei $X \in (Sch/C_{fg}/k)$ und $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf X. Dann ist*

$$\pi^* : HW_p(X; \tilde{W}, \mathcal{L}) \to HW_{p+n}(\mathbb{A}^n_X; \tilde{W}, \Omega^n_{\mathbb{A}^n_X/X} \otimes \pi^*\mathcal{L})$$

ein Isomorphismus für jedes $p \in \mathbb{Z}$.

Beweis von (6.1.2): Die Aussage folgt aus (6.1.1) mit $\mathcal{E} = \mathcal{O}^n_X$. □

Beweis von (6.1.1): Für jede abgeschlossene Teilmenge Z von X, versehen mit der reduzierten Unterschemastruktur von X, ist die Einschränkung

$$\pi^{-1}(Z) = \mathbb{V}(\mathcal{E}) \times_X Z = \mathbb{V}(\mathcal{E} \mid Z) \longrightarrow Z$$

glatt von der relativen Dimension n. Zum Beweis des Satzes können wir mittels noetherscher Induktion annehmen, daß der Satz für alle abgeschlossenen $Z \subsetneqq X$ richtig ist, denn sei nämlich E die Menge aller abgeschlossenen $Z \subsetneqq X$, für welche der Satz nicht gilt. Angenommen es gelte $E \neq \emptyset$; dann enthält E ein (bzgl. Inklusion) minimales Element Z_0. Dann gilt der Satz für alle abgeschlossenen $Y \subsetneqq Z_0$ und daher auch für Z_0; dies ist aber ein Widerspruch.

Es sei U eine $\mathcal{E}$ trivialisierende offene Menge von X und $Y = X - U$ das abgeschlossene Komplement, versehen mit der reduzierten Unterschemastruktur. Für jedes $p \in \mathbb{Z}$ haben wir dann nach (5.2.2) ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & HW_p(Z;\tilde{W}) \arrow[r] \arrow[d, "(\pi|Z)^*", "\wr"'] & HW_p(X;\tilde{W}) \arrow[r] \arrow[d, "\pi^*"] & HW_p(U;\tilde{W}) \arrow[r] \arrow[d, "(\pi|U)^*"] & {} \\
{} & HW_{p+n}(\mathbb{V}(\mathcal{E} \mid Z);\tilde{W}) \arrow[r] & HW_{p+n}(\mathbb{V}(\mathcal{E});\tilde{W}) \arrow[r] & HW_{p+n}(\mathbb{V}(\mathcal{E} \mid U);\tilde{W}) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

(Wir haben in diesem Diagramm die jeweiligen Geradenbündel aus Notationsgründen weggelassen. Wir tun dies für die Dauer des Beweises auch weiterhin.)

Nun ist $\mathbb{V}(\mathcal{E} \mid U) \cong \mathbb{V}(\mathcal{O}^n_X) = \mathbb{A}^n_X$. Folglich genügt es nach dem 5-Lemma (6.1.2) zu beweisen.

Wegen der Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n_X \arrow[r] \arrow[rrrr, bend right, "\pi"'] & \mathbb{A}^{n-1}_X \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & \mathbb{A}^1_X \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

der Funktorialität von Pull-back und $\mathbb{A}^k_X = \mathbb{A}^1_{\mathbb{A}^{k-1}_X}$ sieht man iterativ, daß es genügt die Aussage für

$$\pi : \mathbb{A}^1_X \to X$$

zu beweisen.

Es ist $\pi^{-1}(x) = \mathbb{A}^1_X \times_X \operatorname{Spec}(\kappa(x)) = \mathbb{A}^1_{\kappa(x)}$ für alle $x \in X$, und hieraus liest man für die Menge der $p-$dimensionalen Punkte von $\mathbb{A}^1_X$ die Zerlegung

$$\mathbb{A}^1_{X(p)} = \bigcup_{x \in X_{(p)}} \mathbb{A}^1_{\kappa(x)(0)} \cup \bigcup_{x \in X_{(p-1)}} \mathbb{A}^1_{\kappa(x)(1)}$$

ab.
Es ist definitionsgemäß

$$C_p(\mathbb{A}^1_X; \tilde{W}) := \bigoplus_{x' \in \mathbb{A}^1_{X\,(p)}} \tilde{W}(x').$$

Obige Zerlegung von $\mathbb{A}^1_{X(p)}$ induziert dann offenbar eine Zerlegung

$$\begin{aligned} C_p(\mathbb{A}^1_X; \tilde{W}) &= \bigoplus_{x \in X_{(p)}} \Big(\bigoplus_{x' \in \mathbb{A}^1_{\kappa(x)(0)}} \tilde{W}(x') \Big) \oplus \bigoplus_{x \in X_{(p-1)}} \Big(\bigoplus_{x' \in \mathbb{A}^1_{\kappa(x)(1)}} \tilde{W}(x') \Big) \\ &= \bigoplus_{x \in X_{(p)}} C_0(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W}) \oplus \bigoplus_{x \in X_{(p-1)}} C_1(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W}). \quad (*) \end{aligned}$$

Diese Situation stellt sich nun in folgendem Diagramm dar:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{x \in X_{(p)}} C_1(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W}) \arrow[r, dashed, "d'"] \arrow[drr, dashed, "d''"] & \bigoplus_{x \in X_{(p-1)}} C_1(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W}) \arrow[r, dashed, "d'"] \arrow[drr, dashed, "d''"] & \bigoplus_{x \in X_{(p-2)}} C_1(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W}) \\ \bigoplus & \bigoplus & \bigoplus \\ \bigoplus_{x \in X_{(p+1)}} C_0(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W}) & \bigoplus_{x \in X_{(p)}} C_0(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W}) & \bigoplus_{x \in X_{(p-1)}} C_0(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W}) \\ \bigoplus_{x \in X_{(p)}} \tilde{W}(x) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[r, "d_X"] & \bigoplus_{x \in X_{(p-1)}} \tilde{W}(x) \arrow[u, "\pi^*"] \arrow[r, "d_X"] & \bigoplus_{x \in X_{(p-2)}} \tilde{W}(x); \arrow[u, "\pi^*"] \end{tikzcd}$$

dabei sei $d_{\mathbb{A}^1_X} \mid \bigoplus_{x \in X_{(p)}} C_1(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W}) = d' + d''$ für jedes p.

Nach (3.2.2) gilt $d'' = \bigoplus_{x \in X_{(p)}} d_{\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}}$ für jedes p und nach Definition von π^*, (5.1.3) und (2.4.2) gilt

$$\begin{array}{rrcl} (1) & \pi^* \circ d_X & = & d_{\mathbb{A}^1_X} \circ \pi^* \\ & & = & d' \circ \pi^*. \end{array}$$

(2) Aufgrund der Definition von π^* und nach (2.4.2) ist π^* an jeder Stelle von $C_*(X; \tilde{W})$ injektiv, so daß wir

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Ker}(d_X) & = & \operatorname{Ker}(\pi^* \circ d_X) \\ & \overset{(1)}{=} & \operatorname{Ker}(d' \circ \pi^*) \end{array}$$

erhalten.
Außerdem induziert π^* einen Isomorphismus $\operatorname{Ker}(d_X) \cong \pi^*(\operatorname{Ker}(d_X))$.

(3) Aus (1) erhält man weiterhin

$$\begin{array}{rcl} \pi^*(\operatorname{Im}(d_X)) & = & \operatorname{Im}(\pi^* \circ d_X) \\ & = & \operatorname{Im}(d' \circ \pi^*). \end{array}$$

Aufgrund von (2) und (3) hat man also zum Beweis des Satzes die Isomorphie des kanonischen Morphismus

$$i : \pi^*(\operatorname{Ker}(d' \circ \pi^*))/\operatorname{Im}(d' \circ \pi^*) \to \operatorname{Ker}(d_{\mathbb{A}^1_X})/\operatorname{Im}(d_{\mathbb{A}^1_X})$$

an jeder Stelle p zu zeigen.

(4) Wir zeigen zunächst die Surjektivität von i :
Sei also $\overline{\alpha} \in HW_p(\mathbb{A}^1_X; \tilde{W})$ beliebig vorgegeben. Es sei $\alpha \in C_p(\mathbb{A}^1_X; \tilde{W})$ ein Repräsentant dieses Elements.
Es ist $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ gemäß obiger Zerlegung $(*)$.
Da nach (2.4.2) d'' surjektiv ist, so gibt es ein $\gamma \in C_{(p+1)}(\mathbb{A}^1_X; \tilde{W})$ mit $d_{\mathbb{A}^1_X}(\gamma) = \delta + \alpha_2$.

Dann gilt:

$$\rho := \alpha - d_{\mathbb{A}^1_X}(\gamma) \in \bigoplus_{x \in X_{(p-1)}} C_1(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W})$$

im Sinne der Zerlegung $(*)$ und weiter gilt

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{A}^1_X}(\rho) &= d_{\mathbb{A}^1_X}(\alpha - d_{\mathbb{A}^1_X}(\gamma)) \\ &= d_{\mathbb{A}^1_X}(\alpha) - d_{\mathbb{A}^1_X}(d_{\mathbb{A}^1_X}(\gamma)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Folglich ist $\rho \in \mathrm{Ker}(d'')$ und also nach (2.4.2) $\rho \in \pi^*(\mathrm{Ker}(d' \circ \pi^*))$.
Nun ist $i(\rho) = \overline{\alpha}$ nach Definition von ρ, so daß i surjektiv ist.

Nun zur Injektivität von i :
Sei $\overline{\alpha} \in \pi^*(\mathrm{Ker}(d' \circ \pi^*))/\mathrm{Im}(d' \circ \pi^*)$ repräsentiert durch $\alpha = \alpha_1 + 0 \in C_p(\mathbb{A}^1_X; \tilde{W})$. (Man beachte wieder obige Zerlegung.)
Es sei nun $\alpha \in \mathrm{Im}(d_{\mathbb{A}^1_X})$. Also existiert ein $\gamma \in C_{(p+1)}(\mathbb{A}^1_X; \tilde{W})$ mit $d_{\mathbb{A}^1_X}(\gamma) = \alpha$.
Wir schreiben wieder $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ gemäß $(*)$.
Aufgrund der Surjektivität von d'' existiert somit ein $\epsilon \in C_{(p+2)}(\mathbb{A}^1_X; \tilde{W})$ mit $d_{\mathbb{A}^1_X}(\epsilon) = \delta + \gamma_2$.
Dann ist $\gamma - d_{\mathbb{A}^1_X}(\epsilon) \in \bigoplus_{x \in X_{(p)}} C_1(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W})$ und es gilt $d_{\mathbb{A}^1_X}(\gamma - d_{\mathbb{A}^1_X}(\epsilon)) = \alpha$.
Nun ist $\alpha \in \bigoplus_{x \in X_{(p-1)}} C_1(\mathbb{A}^1_{\kappa(x)}; \tilde{W})$, so daß notwendig $\gamma - d_{\mathbb{A}^1_X}(\epsilon) \in \mathrm{Ker}(d'')$ ist.
Nach (2.4.2) ist dann $\gamma - d_{\mathbb{A}^1_X}(\epsilon) \in \mathrm{Im}(\pi^*)$ und damit also $\alpha \in \mathrm{Im}(d' \circ \pi^*)$.
Damit ist i injektiv, insgesamt also ein Isomorphismus.
Somit ist (6.1.1) vollständig bewiesen. □

(6.1.3) Korollar: *(Wittringhomologie des affinen Raums)*
Es sei $F \in (C_{fg}/k)$ und $\mathbb{A}^n_F = Spec(F[t_1, ..., t_n])$ der $n-$dimensionale affine Raum über F. Es sei $\mathcal{L}$ ein Geradenbündel auf $\mathbb{A}^n_F$. Wir betrachten den Wittkomplex $C_*(\mathbb{A}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{L})$ auf $\mathbb{A}^n_F$.
Dann gilt:

$$HW_p(\mathbb{A}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{L}) \cong \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad p \neq n \\ \tilde{W}(F) & \textit{für} \quad p = n. \end{cases}$$

Beweis: Da $\mathrm{Pic}(\mathbb{A}^n_F) = 0$ ist, und jeder 'globale' $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_F}$ −Modulmorphismus $\mathcal{L} \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_F}$ einen Komplexisomorphismus $C_*(\mathbb{A}^n_F; \tilde{W}) \xrightarrow{\cong} C_*(\mathbb{A}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{L})$ induziert, so dürfen wir $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^n_F}$ annehmen.
Dann folgt das Korollar mit (6.1.2) iterativ aus der Homotopieeigenschaft des $\mathbb{A}^1_F$ (vgl. (2.4.2)). □

Bemerkung: Man beachte, daß die Isomorphie in (6.1.3) i.a. nicht kanonisch ist, sondern von der Wahl des Geradenbündels und der Wahl des trivialisierenden Isomorphismus abhängt.
Über die Operation von $\mathrm{Aut}_{\mathbb{A}^n_F}(\mathcal{L})$ auf $\tilde{W}(F)$ gilt das gleiche wie für den eindimensionalen affinen Raum (vgl. (3.4.3)).

6.2 Die Wittringhomologie projektiver Räume

Wir studieren in diesem Abschnitt den Wittkomplex projektiver Räume über einem Körper.
(6.2.1) Sei also $F \in (C_{fg}/k)$ und $\mathbb{P}^1_F = \mathrm{Proj}(F[x_0, x_1])$ der 1-dimensionale projektive Raum über F.
Wir studieren nun Randabbildungen auf dem Funktionenkörper $\kappa(\eta) = F(\frac{x_1}{x_0})$ von $\mathbb{P}^1_F = D_+(x_0) \cup \{\infty\}$; dabei ist η der generische Punkt von $\mathbb{P}^1_F$.

Wir betrachten die beiden Gruppenhomomorphismen

$$d : \tilde{W}(\kappa(\eta)) \to \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} \tilde{W}(\kappa(x))$$

mit

$$d_x = \delta_x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{P}^1_{F(0)},$$

und

$$d' : \tilde{W}(\kappa(\eta)) \to \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} \tilde{W}(\kappa(x))$$

mit

$$d' = \begin{cases} \delta_x & \text{für} \quad x \in \mathbb{P}^1_{F(0)} - \{\infty\} \\ s^{\frac{x_0}{x_1}} & \text{für} \quad x = \infty. \end{cases}$$

Es ist $s^{\frac{x_0}{x_1}}(\alpha) = \delta_\infty(\frac{x_0}{x_1} \cdot \alpha)$ für alle $\alpha \in \tilde{W}(\kappa(\eta))$ und $s^{\frac{x_0}{x_1}}(\alpha) = \delta_1^\infty(\alpha)$ für alle $\alpha \in W(\kappa(\eta))$.
Definitionsgemäß ist d das Differential des Wittkomplexes auf $\mathbb{P}^1_F$ mit Werten in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}$.

Es gilt nun:

(6.2.2) Proposition:

1. *Ker*$(d) \cong \tilde{W}(F)$
2. *Koker*$(d) = \tilde{W}(F)$
3. *d' ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Wir gehen aus von der exakten Sequenz (vgl. 2.4.3)

$$0 \to \tilde{W}(F) \xrightarrow{i} \tilde{W}(\kappa(\eta)) \xrightarrow{(\delta_x)} \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1_{F(0)} - \{\infty\}} \tilde{W}(\kappa(x)) \to 0,$$

dabei ist i die Komposition

$$\tilde{W}(F) \xrightarrow{r_{\kappa(\eta)/F}} \tilde{W}(\kappa(\eta), \Omega^1_{\kappa(\eta)/F}) \xrightarrow{\cong} \tilde{W}(\kappa(\eta)),$$

wobei der letzte Isomorphismus durch den $F[\frac{x_1}{x_0}]-$Modulisomorphismus

$$\begin{array}{ccc} F[\frac{x_1}{x_0}] & \xrightarrow{\sim} & \Omega^1_{F[\frac{x_1}{x_0}]/F} \\ 1 & \longmapsto & d(\frac{x_1}{x_0}) \end{array}$$

induziert ist.
Im folgenden bezeichne $\alpha : \tilde{W}(\kappa(\eta)) \to \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} \tilde{W}(\kappa(x))$ entweder d oder d'.

Mit obiger kurzer exakter Sequenz erhalten wir dann das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(\alpha) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{W}(F) \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{W}(\kappa(\eta)) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\alpha"] & \tilde{W}(\kappa(\eta)) \arrow[r] \arrow[d, "(\delta_x)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tilde{W}(\kappa(\infty)) \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & \bigoplus\limits_{x\in\mathbb{P}^1_{F(0)}} \tilde{W}(\kappa(x)) \arrow[r, "pr"] \arrow[d] & \bigoplus\limits_{\substack{x\in\mathbb{P}^1_{F(0)}\\ x\neq\infty}} \tilde{W}(\kappa(x)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \tilde{W}(\kappa(\infty)) \arrow[r] & \mathrm{Koker}(\alpha) \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

mit exakter zweiter und dritter Zeile und exakter dritter Spalte.
Das Schlangenlemma liefert dann die exakte Sequenz

$$0 \to \mathrm{Ker}(\alpha) \to \tilde{W}(F) \xrightarrow{\delta} \tilde{W}(\kappa(\infty)) \to \mathrm{Koker}(\alpha) \to 0.$$

Wir berechnen nun δ für $\alpha = d$ oder $\alpha = d'$.

Es sei $\beta = \langle a\rangle \otimes d_{F/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{F/k}s_n \in \tilde{W}(F)$ mit $a \in F^*$, und $s_1, ..., s_n$ sei eine separierende Transzendenzbasis von F/k.
Dann ist

$$\begin{aligned}
i(\beta) &= \langle (-1)^n a\rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}\frac{x_1}{x_0} \wedge d_{\kappa(\eta)/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}s_n \\
&= \left\langle (-1)^{n+1}\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 a \right\rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}\frac{x_0}{x_1} \wedge d_{\kappa(\eta)/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}s_n
\end{aligned}$$

$$= \left\langle (-1)^{n+1} a \right\rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k} \frac{x_0}{x_1} \wedge d_{\kappa(\eta)/k} s_1 \wedge \ldots \wedge d_{\kappa(\eta)/k} s_n,$$

also folgt $\delta_\infty(i(\tilde{W}(F))) = 0$.

Außerdem ist nach (2.4.3) $\delta_x(i(\tilde{W}(F))) = 0$ für alle $x \in \mathbb{P}^1{}_{F(0)} - \{\infty\}$.

Weiter ist kanonisch $\kappa(\infty) \cong F$. Vermöge dieser Isomorphie gilt für $i(\beta) = \left\langle (-1)^{n+1} a \right\rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k} \frac{x_0}{x_1} \wedge d_{\kappa(\eta)/k} s_1 \wedge \ldots \wedge d_{\kappa(\eta)/k} s_n \in \tilde{W}(\kappa(\eta))$ mit $a \in F^*$:

$$\begin{aligned} s^{\frac{x_0}{x_1}}(i(\beta)) &= \delta_2^{\frac{x_0}{x_1}}(\left\langle (-1)^{n+1} \frac{x_0}{x_1} a \right\rangle) \otimes d_{\kappa(\infty)/k} \overline{s}_1 \wedge \ldots \wedge d_{\kappa(\infty)/k} \overline{s}_n \\ &= \delta_1^\infty(\left\langle (-1)^{n+1} a \right\rangle) \otimes d_{\kappa(\infty)/k} \overline{s}_1 \wedge \ldots . \wedge d_{\kappa(\infty)/k} \overline{s}_n \\ &= (-1)^{n+1} \left\langle a \right\rangle \otimes d_{F/k} s_1 \wedge \ldots \wedge d_{F/k} s_n \\ &= (-1)^{n+1} \cdot \beta. \end{aligned}$$

Also ist

$$\delta = \begin{cases} (-1)^{n+1} \cdot id & \text{für} \quad \alpha = d' \\ 0 & \text{für} \quad \alpha = d. \end{cases}$$

Die exakte Sequenz aus dem Schlangenlemma liefert dann die Behauptung.

□

(6.2.3) **Bemerkung:** (6.2.2) besagt also

$$HW_0(\mathbb{P}^1_F; \tilde{W}) \cong HW_1(\mathbb{P}^1_F; \tilde{W}) \cong \tilde{W}(F).$$

Dieses Ergebnis gliedert sich in die Aussage des nachfolgenden Satzes ein, der die Homologie des Wittkomplexes auf $\mathbb{P}^1_F$ mit Werten in einem **beliebigen** Geradenbündel angibt.

(6.2.4) Ist $\mathcal{L}$ ein beliebiger invertierbarer Modul auf $\mathbb{P}^n_F$, so ist $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ (vgl. [Ha], II, 6.16).
Daher liefert der folgende Satz eine vollständige Übersicht über die Homologie des Wittkomplexes auf $\mathbb{P}^1_F$ mit Werten in einem beliebigen Geradenbündel auf $\mathbb{P}^1_F$.

Offenbar ist von vornherein für die Homologie des Wittkomplexes auf dem projektiven Raum $\mathbb{P}^n_F$ lediglich eine Abhängigkeit von $\mathrm{Pic}(\mathbb{P}^n_F)/2$ zu erwarten.

(6.2.5) Satz: *Sei $F \in (C_{fg}/k)$ und $\mathbb{P}^1_F = Proj(F[x_0, x_1])$. Wir betrachten für jedes $n \in \mathbb{Z}$ den Wittkomplex $C_*(\mathbb{P}^1_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n))$ auf $\mathbb{P}^1_F$ mit Werten in dem invertierbaren Modul $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)$.*
Dann gilt:

$$\begin{aligned} HW_0(\mathbb{P}^1_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)) &\cong HW_1(\mathbb{P}^1_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)) \\ &\cong \begin{cases} \tilde{W}(F), & \textit{falls} \quad n \equiv 0 \mod 2 \\ 0, & \textit{falls} \quad n \equiv 1 \mod 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Dieser Satz ergibt sich aus (6.2.2) zusammen mit der folgenden einfachen Beobachtung über den zweiten Randhomomorphismus des Wittrings eines bewerteten Körpers. Obwohl einfach zu sehen, ist sie fundamental für die Wittringhomologie projektiver Räume.

(6.2.6) Lemma: *Es sei F ein Körper mit Bewertung v (v sei nicht notwendig geometrisch) und Primelement π_v. Dann gilt in $W(\kappa(v))$ für alle $a \in F^*$*

$$\delta_2^{\pi_v}(\langle \pi_v^n \cdot a \rangle) = \delta_2^{\pi_v}(\langle a \rangle), \quad \textit{falls} \quad n \equiv 0 \mod 2$$

und

$$\delta_2^{\pi_v}(\langle \pi_v^n \cdot a \rangle) = s_v^{\pi_v}(\langle a \rangle) = \delta_1^v(\langle a \rangle), \quad \textit{falls} \quad n \equiv 1 \mod 2$$

ist.

Beweis von (6.2.5): Es ist

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^1_F &= D_+(x_0) \cup V_+((x_0)) \\ &= D_+(x_0) \cup \{\infty\} \\ &= \mathrm{Spec}(F[\frac{x_1}{x_0}]) \cup \{\infty\}. \end{aligned}$$

Das homogene Primideal (x_0) von $F[x_0, x_1]$ sei also der unendlich ferne Punkt von $\mathbb{P}^1_F$.
Die Multiplikation mit x_0^n liefert für jedes $n \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in D_+(x_0)$ $\kappa(z)-$Vektorraumisomorphismen

$$x_0^n : \kappa(z) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(z).$$

An dem Punkt ∞ tut dies die Multiplikation mit x_1^n, also

$$x_1^n : \kappa(\infty) \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(\infty).$$

Diese Isomorphismen induzieren in der gewohnten Weise Isomorphismen der Wittgruppen

$$x_0^n : \tilde{W}(z) \xrightarrow{\cong} \tilde{W}(z, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(z))$$

bzw.

$$x_1^n : \tilde{W}(\infty) \xrightarrow{\cong} \tilde{W}(\infty, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(\infty)).$$

Dann kommutiert für alle $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{P}^1_{F(0)} - \{\infty\}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(\eta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(\eta)) \arrow[r, "\delta_z"] & \tilde{W}(z, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(z)) \\
\tilde{W}(\eta) \arrow[r, "\delta_z"] \arrow[u, "x_0^n", "\wr"'] & \tilde{W}(z); \arrow[u, "x_0^n", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

dabei ist η der generische Punkt von $\mathbb{P}^1_F$.
An der unendlichen Stelle kommutiert für jedes $n \in \mathbb{Z}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(\eta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(\eta)) \arrow[r, "\delta_\infty"] & \tilde{W}(\infty, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(\infty)) \\
\tilde{W}(\eta) \arrow[r, "\delta_\infty"] \arrow[u, "x_1^n", "\wr"'] & \tilde{W}(\infty). \arrow[u, "x_1^n", "\wr"']
\end{tikzcd}$$

Nun sei $n \in \mathbb{Z}$ beliebig aber fest und $\alpha = \langle a \rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}s_k \otimes x_0^n \in \tilde{W}(\eta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(\eta))$ vorgegeben.
Hierbei ist $a \in \kappa(\eta)^*$ und $s_1, ..., s_k \in \kappa(\eta)^*$ sind Elemente derart, daß das alternierende Produkt $d_{\kappa(\eta)/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}s_k$ eine $\kappa(\eta)-$Basis von $\omega_{\kappa(\eta)/k}$ ist.
Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha &= \langle a \rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}s_k \otimes (\frac{x_0}{x_1})^n \cdot x_1^n \\
&= \left\langle (\frac{x_0}{x_1})^n a \right\rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}s_k \otimes x_1^n \\
&= \left\langle (\frac{x_0}{x_1})^n ba \right\rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}\frac{x_0}{x_1} \wedge d_{\kappa(\eta)/k}t_2 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}t_k \otimes x_1^n,
\end{aligned}$$

wobei $b \in \kappa(\eta)^*$ und $t_2, ..., t_k$ eine separierende Transzendenzbasis von F/k ist.
Daher ist

$$\begin{aligned}
d_{\mathbb{P}^1_F}|_\infty(\alpha) &= \delta_2^{\frac{x_0}{x_1}}\left(\left\langle (\frac{x_0}{x_1})^n ba \right\rangle\right) \otimes d_{F/k}t_2 \wedge ... \wedge d_{F/k}t_k \otimes x_1^n \\
&\overset{(6.2.6)}{=} \begin{cases} \delta_2^{\frac{x_0}{x_1}}(\langle ba \rangle) \otimes d_{F/k}t_2 \wedge ... \wedge d_{F/k}t_k \otimes x_1^n & \text{für} \quad n \equiv 0 \bmod 2 \\ \delta_1^{\infty}(\langle ba \rangle) \otimes d_{F/k}t_2 \wedge ... \wedge d_{F/k}t_k \otimes x_1^n & \text{für} \quad n \equiv 1 \bmod 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Es ist

$$\langle a \rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}s_1 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}s_k = \langle ba \rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}\frac{x_0}{x_1} \wedge d_{\kappa(\eta)/k}t_2 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}t_k.$$

Dann ist

$$d|_\infty(\langle ba \rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}\frac{x_0}{x_1} \wedge d_{\kappa(\eta)/k}t_2 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}t_k) = \delta_2^{\frac{x_0}{x_1}}(\langle ba \rangle) \otimes d_{F/k}t_2 \wedge ... \wedge d_{F/k}t_k$$

bzw.

$$d'|_\infty(\langle ba \rangle \otimes d_{\kappa(\eta)/k}\frac{x_0}{x_1} \wedge d_{\kappa(\eta)/k}t_2 \wedge ... \wedge d_{\kappa(\eta)/k}t_k) = \delta_1^{\infty}(\langle ba \rangle) \otimes d_{F/k}t_2 \wedge ... \wedge d_{F/k}t_k.$$

Zusammengenommen haben wir also für $n \equiv 0 \bmod 2$ das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(\eta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(\eta)) \arrow[r, "d_{\mathbb{P}^1}"] & \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} \tilde{W}(x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(x)) \\
\tilde{W}(\eta) \arrow[r, "d"] \arrow[u, "\wr"] & \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} \tilde{W}(x); \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

dabei ist der linke vertikale Isomorphismus x_0^n, der rechte vertikale Isomorphismus ist in den Summanden der endlichen Stellen ebenfalls x_0^n und an der unendlichen Stelle x_1^n. d ist wie in (6.2.1) definiert.

Für $n \equiv 1 \bmod 2$ haben wir das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(\eta, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(\eta)) \arrow[r, "d_{\mathbb{P}^1}"] & \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} \tilde{W}(x, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)(x)) \\
\tilde{W}(\eta) \arrow[r, "d'"] \arrow[u, "\wr"] & \bigoplus_{x \in \mathbb{P}^1_{F(0)}} \tilde{W}(x); \arrow[u, "\wr"]
\end{tikzcd}$$

dabei sind die vertikalen Isomorphismen die gleichen wie im vorhergehenden Diagramm und d' ist wie in (6.2.1) definiert.
Jetzt liefert (6.2.2) die Behauptung des Satzes. □

(6.2.7) Bemerkung: Die im Beweis von (6.2.5) gewählte lokale Trivialisierung von $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)$ induziert, in Verallgemeinerung der entsprechenden Tatsache für den $\mathbb{A}^1_F$ (vgl. (3.4.3)), einen Isomorphismus

$$m : \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)) \xrightarrow{\cong} F^*.$$

Es sei $n \equiv 0 \bmod 2$. Ist $j : \tilde{W}(F) \xrightarrow{\cong} HW_0(\mathbb{P}^1_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n))$ ein Isomorphismus, $f \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n))$ und $\overline{f}$ der induzierte Automorphismus von $HW_0(\mathbb{P}^1_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n))$, so kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\tilde{W}(F) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "m(f)"] & HW_0(\mathbb{P}^1_F;\tilde{W},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)) \arrow[d, "\overline{f}"] \\
\tilde{W}(F) \arrow[r, "j"] & HW_0(\mathbb{P}^1_F;\tilde{W},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n));
\end{tikzcd}$$

dabei ist der linke vertikale Pfeil die Multiplikation mit $m(f) \in F^*$.
Entsprechendes gilt für $HW_1(\mathbb{P}^1_F;\tilde{W},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_F}(n)) \cong \tilde{W}(F)$.

Wir benutzen nun den in den Kapiteln 4 und 5 entwickelten Homologieapparat um eine vollständige Übersicht über alle Wittkomplexe projektiver Räume über einem Körper $F \in (C_{fg}/k)$ von höherer Dimension zu erhalten.

Man hat:

(6.2.8) Satz: *Sei $\mathbb{P}^n_F = Proj(F[x_0,...,x_n])$ der $n-$dimensionale projektive Raum über $F \in (C_{fg}/k)$ $(n \geq 1)$ und $C_*(\mathbb{P}^n_F;\tilde{W},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m))$ der Wittkomplex auf $\mathbb{P}^n_F$ mit Werten in $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)$, und es gelte $m \equiv 0 \, mod\, 2$.*
Dann gilt für dessen Homologie:

$$HW_i(\mathbb{P}^n_F;\tilde{W},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) \cong \begin{cases} \tilde{W}(F), & \text{für } \; i=0 \\ 0, & \text{für } \; 1 \leq i \leq n-1 \\ \tilde{W}(F), & \text{für } \; i=n \qquad \text{und } \; n \equiv 1 \, mod\, 2 \\ 0, & \text{für } \; i=n \qquad \text{und } \; n \equiv 0 \, mod\, 2. \end{cases}$$

Für ungeraden Twist hat man:

(6.2.9) Satz: *Ist $m \equiv 1 \, mod\, 2$, so gilt für die Homologie des Komplexes $C_*(\mathbb{P}^n_F;\tilde{W},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m))$ $(n \geq 1)$:*

$$HW_i(\mathbb{P}^n_F;\tilde{W},\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) \cong \begin{cases} 0, & \text{für } \; i=0 \\ 0, & \text{für } \; 1 \leq i \leq n-1 \\ 0, & \text{für } \; i=n \qquad \text{und } \; n \equiv 1 \, mod\, 2 \\ \tilde{W}(F), & \text{für } \; i=n \qquad \text{und } \; n \equiv 0 \, mod\, 2. \end{cases}$$

Wir beweisen beide Sätze simultan.

Beweis von (6.2.8) und (6.2.9):
Es ist

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^n_F = \mathrm{Proj}(F[x_0, ..., x_n]) &= V_+((x_n)) \cup D_+(x_n) \\ &= \mathrm{Proj}(F[x_0, ..., x_{n-1}]) \cup D_+(x_n) \\ &= \mathbb{P}^{n-1}_F \cup \mathbb{A}^n_F.\end{aligned}$$

Die kanonische abgeschlossene Immersion $i : \mathbb{P}^{n-1}_F \hookrightarrow \mathbb{P}^n_F$ und die kanonische offene Immersion $j : \mathbb{A}^n_F \hookrightarrow \mathbb{P}^n_F$ induzieren nach (5.2.2) eine kurze exakte Sequenz von Wittkomplexen

$$0 \to C_*(\mathbb{P}^{n-1}_F; \tilde{W}) \xrightarrow{i_*} C_*(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}) \xrightarrow{j^*} C_*(\mathbb{A}^n_F; \tilde{W}) \to 0$$

und somit eine lange exakte Sequenz der Homologiegruppen

$$\to HW_{p+1}(\mathbb{A}^n_F) \xrightarrow{\delta} HW_p(\mathbb{P}^{n-1}_F) \xrightarrow{i_*} HW_p(\mathbb{P}^n_F) \xrightarrow{j^*} HW_p(\mathbb{A}^n_F) \xrightarrow{\delta} HW_{p-1}(\mathbb{P}^{n-1}_F).$$

(Bei Aussagen innerhalb dieses Beweises, welche von dem gerade betrachteten Geradenbündel unabhängig sind, lassen wir dieses, zur Vereinfachung der Notation, meistens weg.)

Nach (6.1.3) gilt $HW_p(\mathbb{A}^n_F) = 0$, für $p \neq n$ und jedes Geradenbündel auf $\mathbb{A}^n_F$. Daher ist für $1 \leq p < n-1$ $HW_p(\mathbb{A}^n_F) = HW_{p+1}(\mathbb{A}^n_F) = 0$ und man erhält aus obiger exakter Sequenz

(1) $HW_p(\mathbb{P}^{n-1}_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_F}(m)) \cong HW_p(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m))$ für $1 \leq p < n-1$ und alle m.

Wir betrachten nun den niedrigdimensionalen Teil der langen exakten Sequenz der Homologiegruppen:

$$... \to HW_1(\mathbb{A}^n_F) \xrightarrow{\delta} HW_0(\mathbb{P}^{n-1}_F) \to HW_0(\mathbb{P}^n_F) \to HW_0(\mathbb{A}^n_F).$$

Nach (6.1.3) ist wieder $HW_1(\mathbb{A}^n_F) = HW_0(\mathbb{A}^n_F) = 0$ (für $n \neq 1$) und damit

$$\textbf{(2)} \quad HW_0(\mathbb{P}^{n-1}_F) \cong HW_0(\mathbb{P}^n_F).$$

Die lange exakte Sequenz liefert für die hochdimensionalen Punkte die exakte Sequenz

$$(\mathbf{3})\quad 0 \to HW_n(\mathbb{P}^n_F) \to HW_n(\mathbb{A}^n_F) \xrightarrow{\delta} HW_{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}_F) \to HW_{n-1}(\mathbb{P}^n_F) \to 0;$$

hierbei haben wir wieder (6.1.3) benutzt.
Wiederum nach (6.1.3) ist $HW_n(\mathbb{A}^n_F) \cong \tilde{W}(F)$.
Wir berechnen nun δ in obiger Sequenz (3).
Wir betrachten dazu das folgende kommutative Diagramm mit exakter zweiter und dritter Zeile

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & HW_n(\mathbb{P}^n_F) \arrow[r] \arrow[d, hook, "kan"] & \tilde{W}(F) \arrow[d, "r"] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C_n(\mathbb{P}^n_F;\tilde{W}) \arrow[r, equal] \arrow[d, "d_{\mathbb{P}^n_F,n}"] & C_n(\mathbb{A}^n_F;\tilde{W}) \arrow[r] \arrow[d, "d_{\mathbb{A}^n_F,n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(d_{\mathbb{P}^{n-1}_F,n-1}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{Ker}(d_{\mathbb{P}^n_F,n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ker}(d_{\mathbb{A}^n_F,n-1}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & HW_{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}_F) \arrow[r] & HW_{n-1}(\mathbb{P}^n_F) \arrow[r] & 0; &
\end{tikzcd}$$

dabei ist r durch die Restriktion induziert (vgl. auch (2.4.3)). Man erhält die in Frage stehende Sequenz (3) aus vorstehendem Diagramm durch Anwendung des Schlangenlemmas auf die zweite und dritte Zeile.
Definitionsgemäß ist δ in der Sequenz (3) von dem Randhomomorphismus δ_ξ induziert, wobei $\xi \in {\mathbb{P}^n_F}^{(1)}$ der generische Punkt von $\mathbb{P}^{n-1}_F$ gemäß der Zerlegung $\mathbb{P}^n_F = \mathbb{P}^{n-1}_F \cup \mathbb{A}^n_F$ vom Anfang ist.
In $\mathrm{Spec}(F[\frac{x_0}{x_{n-1}}, ..., \frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}, \frac{x_n}{x_{n-1}}]) = D_+(x_{n-1})$ entspricht ξ dem von $\frac{x_n}{x_{n-1}}$ erzeugten Primideal.

Ein $\alpha \in \tilde{W}(F)$ wird unter r in $C_n(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m))$ auf

$$\langle a \rangle \otimes ds_1 \wedge ... \wedge ds_k \wedge d(\frac{x_0}{x_n}) \wedge d(\frac{x_1}{x_n}) \wedge ... \wedge d(\frac{x_{n-1}}{x_n}) \otimes x_n^m$$

abgebildet; dabei ist $a \in F^*, s_1, ..., s_k$ eine separierende Transzendenzbasis von F/k und d bezeichnet abkürzend $d_{\kappa(\eta)/k}$, wobei η der generische Punkt von $\mathbb{P}^n_F$ ist.
Nun ist

$$\langle a \rangle \otimes ds_1 \wedge ... \wedge ds_k \wedge d(\tfrac{x_0}{x_n}) \wedge d(\tfrac{x_1}{x_n}) \wedge ... \wedge d(\tfrac{x_{n-2}}{x_n}) \wedge d(\tfrac{x_{n-1}}{x_n}) \otimes x_n^m =$$

$$\langle -a \rangle \otimes ds_1 \wedge ... \wedge ds_k \wedge d(\tfrac{x_0}{x_n}) \wedge d(\tfrac{x_1}{x_n}) \wedge ... \wedge d(\tfrac{x_{n-2}}{x_n}) \wedge d(\tfrac{x_n}{x_{n-1}}) \otimes x_n^m.$$

Für $i = 0, ..., n-2$ gilt

$$\begin{aligned} d(\frac{x_i}{x_{n-1}}) \wedge d(\frac{x_n}{x_{n-1}}) &= d((\frac{x_i}{x_n})(\frac{x_n}{x_{n-1}})) \wedge d(\frac{x_n}{x_{n-1}}) \\ &= \frac{x_n}{x_{n-1}} \cdot d(\frac{x_i}{x_n}) \wedge d(\frac{x_n}{x_{n-1}}). \end{aligned}$$

Hieraus erhält man in $\omega_{\kappa(\eta)/F}$ die Identität

$$d(\frac{x_0}{x_{n-1}}) \wedge ... \wedge d(\frac{x_{n-2}}{x_{n-1}}) \wedge d(\frac{x_n}{x_{n-1}}) = (\frac{x_n}{x_{n-1}})^{n-1} \cdot d(\frac{x_0}{x_n}) \wedge ... \wedge d(\frac{x_{n-2}}{x_n}) \wedge d(\frac{x_n}{x_{n-1}}).$$

Somit erhält man

(4) $r(\alpha) =$

$$\left\langle (-1)^{n+k} a(\tfrac{x_n}{x_{n-1}})^{-n+1} \right\rangle \otimes d(\tfrac{x_n}{x_{n-1}}) \wedge ds_1 \wedge ... \wedge ds_k$$
$$\wedge d(\tfrac{x_0}{x_{n-1}}) \wedge d(\tfrac{x_1}{x_{n-1}}) \wedge ... \wedge d(\tfrac{x_{n-2}}{x_{n-1}}) \otimes (\tfrac{x_n}{x_{n-1}})^m x_{n-1}^m$$

$$= \left\langle (-1)^{n+k} a(\tfrac{x_n}{x_{n-1}})^{-n+1} (\tfrac{x_n}{x_{n-1}})^m \right\rangle \otimes d(\tfrac{x_n}{x_{n-1}}) \wedge ds_1 \wedge ... \wedge ds_k$$
$$\wedge d(\tfrac{x_0}{x_{n-1}}) \wedge d(\tfrac{x_1}{x_{n-1}}) \wedge ... \wedge d(\tfrac{x_{n-2}}{x_{n-1}}) \otimes x_{n-1}^m.$$

Wir beweisen jetzt (6.2.8) und (6.2.9) durch Induktion nach n.

Für $n = 1$ ist (6.2.8) und (6.2.9) gerade (6.2.5).
Es sei nun $n > 1$ und die Aussagen beider Sätze richtig für $n - 1$.

1. Fall: $m \equiv 0 \bmod 2$.
Aus (2) erhält man $HW_0(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) \cong \tilde{W}(F)$.
Aus (1) folgt $HW_i(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) = 0$ für $i = 1, ..., n-2$.
Es sei nun $n \equiv 1 \bmod 2$; dann ist nach Induktionsannahme

$$HW_{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_F}(m)) = 0$$

und also δ in der Sequenz (3) die Nullabbildung und somit folgt

$$HW_n(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) \cong HW_n(\mathbb{A}^n_F) \cong \tilde{W}(F).$$

Ist $n \equiv 0 \bmod 2$, dann ist nach Induktionsannahme

$$HW_{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_F}(m)) \cong HW_{n-1}(\mathbb{A}^{n-1}) \cong \tilde{W}(F);$$

unter Beachtung dieser Isomorphie folgt nun aus (4) mittels (6.2.6) die Isomorphie von δ in Sequenz (3).
Damit folgt $HW_n(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) = 0$. Mithin ist (6.2.8) bewiesen.

2. Fall: Sei $m \equiv 1 \bmod 2$.
Aus (2) erhält man $HW_0(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) = 0$.
Aus (1) folgt $HW_i(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) = 0$ für $i = 1, ..., n-2$.
Es sei zunächst $n \equiv 1 \bmod 2$; dann ist nach Induktionsannahme

$$HW_{n-1}(\mathbb{P}^{n-1}_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_F}(m)) \cong HW_{n-1}(\mathbb{A}^{n-1}) \cong \tilde{W}(F);$$

unter Beachtung dieser Isomorphie folgt nun aus (4) mittels (6.2.6) die Isomorphie von δ in Sequenz (3).
Damit folgt $HW_n(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) = 0$.
Ist $n \equiv 0 \bmod 2$, so ist δ notwendig die Nullabbildung und also

$$HW_n(\mathbb{P}^n_F; \tilde{W}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m)) \cong HW_n(\mathbb{A}^n_F) \cong \tilde{W}(F).$$

Damit ist auch (6.2.9) bewiesen. □

(6.2.10) Bemerkung: $\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_F}(m))$ operiert, vermöge den in (6.2.8) und (6.2.9) angegebenen Isomorphismen, auf $\tilde{W}(F)$ in analoger Weise wie es in (6.2.7) für den $\mathbb{P}^1_F$ angegeben ist.

Literatur

[AK] Altman, A. and Kleiman, S.
Introduction to Grothendieck Duality Theory
Lecture Notes in Math. 146 (1970)

[Ar] Arason, J. Kr.
Cohomologische Invarianten Quadratischer Formen
J. Algebra 36 (1975) 448-491

EGA I Grothendieck, A.
Elments de Gometrie Algbrique I
Publ. Math. IHES 4 (1960)

EGA I* Grothendieck, A., Dieudonn, J.A.
Elments de Gometrie Algbrique I
Grundlehren d. math. Wiss. 166, Springer (1971)

EGA II Grothendieck, A.
Elments de Gometrie Algbrique II
Publ. Math. IHES 8 (1961)

EGA IV,1 Grothendieck, A.
Elments de Gometrie Algbrique IV (Premire Partie)
Publ. Math. IHES 20 (1964)

EGA IV,2 Grothendieck, A.
Elments de Gometrie Algbrique IV (Seconde Partie)
Publ. Math. IHES 24 (1965)

EGA IV,4 Grothendieck, A.
Elments de Gometrie Algbrique IV (Quatrime Partie)
Publ. Math. IHES 32 (1967)

[Et] Ettner, A.
Diplomarbeit, Regensburg (in Vorbereitung)

[Fu] Fulton, W.
Intersection Theory
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete,
Springer (1984)

[GH] Geyer, W.D., Harder G., Knebusch, M., Scharlau, W.
Ein Residuensatz für symmetrische Bilinearformen
Inv. Math. 11 (1970) 319-328

[Ha] Hartshorne, R.
Algebraic Geometry
Graduate Texts in Mathematics, Springer (1977)

[Ku] Kunz, E.
Kähler Differentials
Advanced Lectures in Mathematics, Vieweg (1986)

[Li] Lipman, J.
Dualizing Sheaves, Differentials and Residues on Algebraic Varieties
Socite Mathmatique de France, Asterisque 117 (1984)

[Mi] Milnor, J.
Algebraic $K-$Theory and Quadratic Forms
Invent. Math. 9 (1970) 318-344

[Mo] Motscha, A.
Zur Funktorialität der Randabbildung beim Wittring und der Milnor-Scharlau-Sequenz
Diplomarbeit, Regensburg (1992)

[Pa] Parimala, R.
Witt Groups of Conics, Elliptic, and Hyperelliptic Curves
Journal of Number Theory 28 (1988) 69-93

[Pf] Pfister, A.
Quadratic Lattices in Function Fields of Genus 0
Proc. Canad. Math. Soc. 66(2) (1993) 257-278

[Ro] Rost, M.
Chow Groups with Coefficients
Doc. Math. J. DMV 1 (1996) 319-393

[Sa] Scharlau, W.
Quadratic and Hermitian Forms
Grundlehren d. math. Wiss. 270, Springer (1985)