10. Die komplexen Zahlen.

Dies ist ein Thema, das unberechtigter Weise als schwer gilt! Die Konstruktion der komplexen Zahlen ist viel einfacher zu verstehen ist, als einige der bisherigen Zahlbereichserweiterungen. So hat man bei der Einführung der positiven rationalen Zahlen wohl keine andere Wahl, als mit Äquivalenzklassen von Paaren natürlicher Zahlen zu arbeiten. Wenn man die reellen Zahlen durch Intervall-Schachtelungen beschreiben will, muss man ebenfalls an Äquivalenzklassen denken. Die komplexen Zahlen dagegen können problemlos als Menge der Paare reeller Zahlen eingeführt werden.

Neben den drei bisher schon betrachteten Konstruktionsschritten (a), (m), (v) brauchen wir eine weitere Konstruktion (c): die Hinzunahme eines neuen Symbols, das mit i bezeichnet wird, so dass gilt $i^2 = -1$ (das neue Symbol i steht also für eine Wurzel aus -1, die ja innerhalb des Zahlsystems $\mathbb{R}$ nicht existiert).

Die neu einzuführenden Zahlmengen sind:

$\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen.

$\mathbb{Q}[i]$ die Menge der Gaußschen Zahlen, dies sind die komplexen Zahlen $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Z}[i]$ die Menge der ganzen Gaußschen Zahlen, dies sind die komplexen Zahlen $x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$.

Das neue Inklusionsdiagramm hat die folgende Form:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{C} \arrow[dl, "\mathrm{v}"'] \arrow[dr, "\mathrm{c}"] & & \\
 & \mathbb{Q}[i] \arrow[dl, "\mathrm{m}"'] \arrow[dr, "\mathrm{c}"] & & \mathbb{R} \arrow[dl, "\mathrm{v}"'] \arrow[dr, "\mathrm{a}"] & \\
\mathbb{Z}[i] \arrow[dr, "\mathrm{c}"'] & & \mathbb{Q} \arrow[dl, "\mathrm{m}"'] \arrow[dr, "\mathrm{a}"] & & \mathbb{R}^+ \arrow[dl, "\mathrm{v}"'] \\
 & \mathbb{Z} \arrow[dr, "\mathrm{a}"'] & & \mathbb{Q}^+ \arrow[dl, "\mathrm{m}"'] & \\
 & & \mathbb{N} & &
\end{tikzcd}$$

Hier gibt es nun eine Fülle verschiedener Wege, um von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{C}$ zu gelangen. Beim Schritt (c) handelt es sich immer darum, mit Paaren schon konstruierter Zahlen zu arbeiten: die Grundmenge von $\mathbb{Z}[i]$ ist $\mathbb{Z}^2$, die von $\mathbb{Q}[i]$ ist $\mathbb{Q}^2$, die von $\mathbb{C}$ ist $\mathbb{R}^2$. Wir erläutern als erstes, wie man von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ kommt (Abschnitt 10.1.). Im Abschnitt 10.2. werden wir sehen, dass man direkt von $\mathbb{R}^+$ zu $\mathbb{C}$ gelangen kann.

10.1. Einführung: kartesische Koordinaten.

Wir betrachten die reelle Zahlen-Ebene $\mathbb{R}^2$. Die Elemente in $\mathbb{R}^2$ haben die Form (x, y), dabei sind x, y reelle Zahlen. Die Vektoren $(1, 0)$ und $(0, 1)$ bilden eine "Basis", das heißt, dass wir jeden Vektor der Ebene als Linear-Kombination dieser beiden Vektoren schreiben können:

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$$

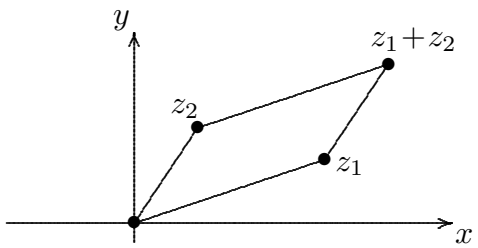
Wir wollen die x-Achse der Ebene als die übliche Zahlengerade ansehen, statt $(x, 0)$ mit $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir also einfach x. Schreiben wir statt $(0, 1)$ das Symbol i, so haben die Elemente der Ebene die Form

$$(x, y) = x + yi \qquad \text{mit} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Auf der Menge der Vektoren der Ebene ist bekanntlich eine **Addition** definiert:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

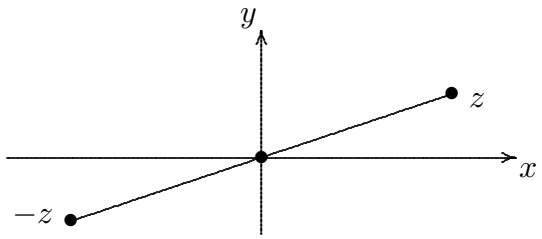
(man nennt dies die komponentenweise Addition, oder auch die Vektoraddition), geometrisch ergänzt man die drei Punkte $(0, 0)$, $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ durch die Summe $z_1 + z_2$ zu einem Paralellogramm:



Es ist ganz einfach nachzurechnen, dass diese Addition assoziativ und kommutativ ist. Den Ursprung haben wir mit 0 bezeichnet (da er auf der x-Achse liegt), natürlich gilt $z + 0 = z$ für jeden Punkt z der Ebene. Ist $z = (x, y)$, so setzt man $-z = (-x, -y)$ und erhält auf diese Weise

$$z + (-z) = 0.$$

also das Bild:



Statt $z_1 + (-z_2)$ schreibt man natürlich einfach $z_1 - z_2$ und hat auf diese Weise die **Subtraktion** eingeführt.

Nun wollen wir auf der reellen Zahlenebene auch eine **Multiplikation** einführen:

$$(*) \qquad (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2),$$

das sieht kompliziert aus, ist es aber gar nicht. Als erstes notieren wir, was man im Spezialfall $x_1 = x_2 = 0,\ y_1 = y_2 = 1$ erhält:

$$i \cdot i = (0,1) \cdot (0,1) = (-1,0) = -1,$$

wir sehen also, dass das Symbol i eine Wurzel aus -1 liefert. Verwenden wir die oben eingeführte Schreibweise $(x, y) = x + yi$, so lautet die Regel $(*)$ folgendermaßen:

$$(x_1 + y_1i) \cdot (x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)i,$$

rechts steht genau das, was man mit der Vorgabe $i^2 = -1$ und den üblichen Rechenregeln für Addition und Multiplikation (Assoziativität, Kommutativität, Distribituivität) beim Ausmultiplizieren des linken Produkts erhält.

Eine geometrische Interpretation des Produkts lernen wir im nächsten Abschnitt kennen.

Hier soll betont werden, dass es zwar aufwendig, aber nicht wirklich schwierig ist, nachzurechnen, dass für die durch $(*)$ definierte Multiplikation das Assoziativgesetz und das Kommutativgesetz gilt. Natürlich gilt auch $1 \cdot z = z$ für jedes $z \in \mathbb{R}^2$ (mit $1 = (1, 0)$, wie wir dies vereinbart haben). Schließlich rechnet man nach, dass für Addition und Multiplikation das übliche Distributivgesetz gilt. Notiert werden sollte noch, dass offensichtlich $0 \cdot z = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^2$ gilt.

Man nennt die reelle Zahlenebene mit der komponentenweisen Addition und der Multiplikation $(*)$ den "Körper" $\mathbb{C}$ der *komplexen* Zahlen. Nach Konstruktion ist $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{C}$, nämlich die x-Achse; die Punkte auf der y-Achse nennt man *rein-imaginär*. Ist $z = x + yi$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so nennt man x den *Realteil* von z und y (oder auch yi) den *Imaginärteil* von z.

Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ gibt es eine komplexe Zahl z' mit $zz' = 1$, man schreibt demnach $z' = z^{-1}$, nämlich

$$z' = \frac{1}{x^2 + y^2}(x - yi),$$

denn es gilt $(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$. Mit Hilfe von z^{-1} definiert man die **Division:** $z_1/z_2 = z_1z_2^{-1}$ für beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2 mit $z_2 \neq 0$.

Beispiel-Rechnungen. Es sei $z_1 = -3 + 2i,\ z_2 = 1 - i$.

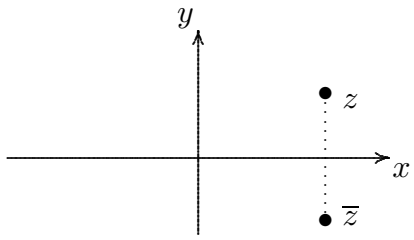
$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= -3 + 2i + 1 - i = -2 + i,\\
z_1 - z_2 &= -3 + 2i - (1 - i) = -4 + 3i,\\
z_1z_2 &= (-3 + 2i)(1 - i) = (-3 + 2) + (3 + 2)i = -1 + 5i,\\
z_1/z_2 &= (-3 + 2i)(1 - i)^{-1} = (-3 + 2i) \cdot \tfrac{1}{2}(1 + i)\\
&= \tfrac{1}{2}(-3 - 2) + (-3 + 2)i = \tfrac{1}{2}(-5 - i) = -\tfrac{5}{2} - \tfrac{1}{2}i
\end{aligned}$$

Da es zu jeder von Null verschiedenen komplexen Zahl z die multiplikativ-inverse Zahl z^{-1} gibt, ist $\mathbb{C}$ *nullteilerfrei:* Aus $z_1 z_2 = 0$ mit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ folgt $z_1 = 0$ oder $z_2 = 0$.

Beweis: Ist $z_1 z_2 = 0$ und $z_2 \neq 0$, so ist

$$z_1 = z_1 \cdot 1 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_2^{-1}) = (z_1 z_2) \cdot z_2^{-1} = 0 \cdot z_2^{-1} = 0.$$

Konjugation. Man nennt $x - yi$ die zu $z = x + yi$ *konjugierte* komplexe Zahl und schreibt $\overline{z} = x - yi$. Geometrisch gesehen handelt es sich beim Konjugieren um das Spiegeln an der x-Achse.



Dieses Konjugieren hat die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} \overline{\overline{z}} &= z \\ \overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_1}, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_1}, \end{aligned}$$

die letzten beiden Gleichungen besagen gerade, dass das Konjugieren mit Addition und mit Multiplikation vertauscht.

Ist $z = x + yi \in \mathbb{C}$, so ist

$$z \cdot \overline{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2$$

immer reell. Beachte, dass auch $z + \overline{z} = 2x$ immer reell ist. Wegen

$$(T - z)(T - \overline{z}) = T^2 - (z + \overline{z})T + z\overline{z}$$

sieht man, dass z und $\overline{z}$ Nullstellen eines quadratischen Polynoms mit reellen Koeffizienten sind (wir haben hier die Variable mit T bezeichnet).

10.2. Multiplikation: Geometrisch. Trigonometrische Koordinaten.

Betrag. Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$, so setzt man $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, dies ist gerade die Länge des Vektors (x, y), also der Abstand vom Ursprung. Man nennt $|z|$ den Betrag von z. Wegen $z\overline{z} = x^2 + y^2$ ist also

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Wie wir schon gesehen haben, verwendet man die Gleichung $z\overline{z} = |z|^2$, um für $z \neq 0$ die inverse komplexe Zahl z^{-1} zu finden:

$$z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}.$$

Für den Betrag gelten folgende Rechenregeln:

- Es ist $|z|$ eine reelle Zahl mit $|z| \geq 0$.
- Genau dann ist $|z| = 0$, wenn $z = 0$ gilt.
- (Dreiecksungleichung): Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so ist

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

- (Verträglichkeit mit der Multiplikation) Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, so ist

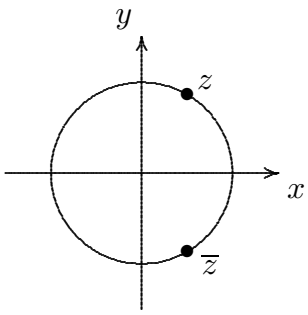
$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Ist $|z| = 1$, so liegt z auf dem Einheitskreis, hat also die Form

$$z = (\cos\phi, \sin\phi) = \cos\phi + i\sin\phi.$$

Ist $|z| = 1$, so ist $z^{-1} = \overline{z}$, und dies ist ebenfalls ein Punkt auf dem Einheitskreis.

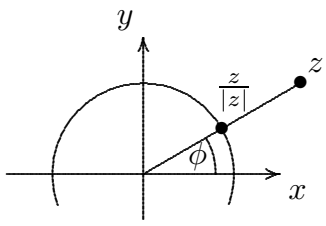
Beweis: Sei $z = x+yi$, also $\overline{z} = x-yi$. Wegen $1 = |z| = x^2+y^2$ ist $z\overline{z} = x^2+y^2 = 1$, also ist $\overline{z} = z^{-1}$. Und natürlich liegt mit (x, y) auch $(x, -y)$ auf dem Einheitskreis.



Ganz allgemein ist

$$z = |z|(\cos\phi + i\sin\phi)$$

mit $0 \leq \phi < 2\pi$, man nennt dies die *trigonometrische Darstellung* von z. Ist $z \neq 0$, so ist ϕ (und natürlich auch $|z|$) eindeutig bestimmt.



Seien nun zwei komplexe Zahlen $z_1 = |z_1|(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$ und $z_2 = |z_2|(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$ gegeben. Das Produkt ist

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= |z_1|(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)|z_2|(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= |z_1||z_2|(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)|z_2|(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2) \\ &= |z_1||z_2|\left(\cos\phi_1\cos\phi_2 - \sin\phi_1\sin\phi_2 + (\cos\phi_1\sin\phi_2 + \sin\phi_1\cos\phi_2)i\right) \\ &= |z_1||z_2|\left(\cos(\phi_1+\phi_2) + i\sin(\phi_1+\phi_2)\right), \end{aligned}$$

Hier haben wir die Additions-Theoreme für cos und sin verwendet. Man sieht: *Beim Multiplizieren werden die Beträge multipliziert, die Winkel addiert.*

Folgerung. *Sei z komplexe Zahl, n eine natürliche Zahl. Dann gibt es $z' \in \mathbb{C}$ mit* $(z')^n = z$, also eine n-te Wurzel.

Beweis: Aus der reellen Zahl $|z| \geq 0$ können wir die n-te Wurzel ziehen. Und natürlich können wir den Winkel ϕ durch n teilen. Man nimmt also

$$z' = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos(\tfrac{\phi}{n}) + i\sin(\tfrac{\phi}{n})\right).$$

10.3. Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$.

Im Abschnitt 5.1 haben wir Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$ betrachten. Nun betrachten wir den allgemeineren Fall der Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$.

Definition: Eine Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Form

$$f(z) = \sum_{t=0}^{n} a_t z^t = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

mit komplexen Zahlen a_t $(0 \leq t \leq n)$ nennt man ein *Polynom,* die Zahlen a_t heißen die *Koeffizienten* des Polynoms (dabei ist $n \geq 0$ eine ganze Zahl). Ist $a_n \neq 0$ so nennt man n den *Grad* des Polynoms, a_n seinen *höchsten* Koeffizienten, und man schreibt $\operatorname{grad} f(z) = n$. Ist der höchste Koeffizient $a_n = 1$, so nennt man $f(z)$ ein *normiertes* Polynom. Sind alle Koeffizienten a_t gleich Null, so handelt es sich um die Nullfunktion, man weist ihr den Grad -1 zu.

Da im Rahmen des Rechnens mit komplexen Zahlen der Buchstabe i eine feste Bedeutung besitzt, nämlich als Bezeichnung für den Vektor $i = (1,0) \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, kann man i nicht mehr als Laufindex verwenden. Wir haben daher als Laufindex den Buchstaben t gewählt. Entsprechend verwenden wir als Variablen-Name statt x jetzt z (oder auch einen Großbuchstaben wie etwa T).

Addition. Sind $f(z)$ und $g(z)$ Polynome vom Grad höchstens n, so ist auch $f(z)+g(z)$ ein Polynom vom Grad höchstens n. Hier die Additionsregel: Sei $f(z) = \sum_{t=0}^{n} a_t z^t$, und $g(z) = \sum_{t=0}^{n} b_t z^t$, so ist

$$(f+g)(z) = f(z) + g(z) = \sum_{t=0}^{n} (a_t + b_t) z^t$$

(dabei haben wir vorausgesetzt, dass man für $f(z)$ und $g(z)$ die gleiche obere Summenschranke n verwendet — gegebenenfalls füge man eben zu einem der beiden Polynome noch Koeffizienten $a_t = 0$ hinzu).

Multiplikation. Seien Polynome $f(z) = \sum_{t=0}^{n} a_t z^t$, und $g(z) = \sum_{s=0}^{m} b_s z^s$ gegeben, dann ist

$$(fg)(z) = f(z)g(z) = \sum_{k=0}^{n+m} c_k z^k, \qquad \text{mit} \qquad c_k = \sum_{t=0}^{k} a_t b_{k-t}.$$

Wie für reelle Koeffizienten gilt auch hier (mit dem gleichen Beweis):

Satz. *Der Grad des Produkts $f(z)g(z)$ zweier von Null verschiedener Polynome $f(z), g(z)$ ist die Summe der Grade* und der höchste Koeffizient von $f(z)g(z)$ ist das Produkt der höchsten Koeffizienten von $f(z)$ und $g(z)$.

Seien $f(z), g(z)$ zwei Polynome. Man nennt $g(z)$ einen *Teiler* von $f(z)$, falls es ein Polynom $q(z)$ mit $f(z) = g(z)q(z)$ gibt.

Auch das **Teilen mit Rest** bereitet keine neuen Schwierigkeiten (und das Vorgehen ist das gleiche):

Satz. *Seien $f(z), g(z)$ Polynome, sei $g(z)$ nicht das Null-Polynom. Dann gibt es Polynome $q(z)$ und $r(z)$ mit*

$$f(z) = g(z)q(z) + r(z) \qquad \textit{mit} \qquad \operatorname{grad} r(z) < \operatorname{grad} g(z).$$

Diese Polynome $q(z)$ und $r(z)$ sind eindeutig bestimmt.

Das Teilen mit Rest liefert wieder folgendes wichtige Ergebnis (mit dem gleichen Beweis):

Satz. *Sei $f(z)$ ein von Null verschiedenes Polynom. Sei $c \in \mathbb{C}$. Genau dann ist $f(c) = 0$, wenn das Polynom $z-c$ das Polynom $f(z)$ teilt.*

Ist also c eine Nullstelle eines Polynoms $f(z)$ vom Grad $n \geq 1$, so können wir $f(z)$ in der Form $f(z) = (z-c)q(z)$ schreiben, dabei ist dann $q(z)$ ein Polynom vom Grad $n-1$; man sagt, dass man $q(z)$ durch **Abspalten einer Nullstelle** erhält.

Folgerung: *Ein Polynom vom Grad $n \geq 0$ hat höchstens n Nullstellen.*

10.4. Einheitswurzeln.

Eine komplexe Zahl ω mit $\omega^n = 1$ nennt man eine *n-te Einheitswurzel.* Eine n-te Einheitswurzel ist also eine Nullstelle des Polynoms

$$T^n - 1.$$

Eine komplexe Zahl n heißt primitive n-te Einheitswurzel, falls gilt

$$\omega^n = 1, \qquad \text{aber} \qquad \omega^t \neq 1 \qquad \text{für} \qquad 1 \leq t < n.$$

Sei

$$\omega_n = \cos(\tfrac{2\pi}{n}) + i\sin(\tfrac{2\pi}{n}).$$

Dann gilt:

$$(\omega_n)^t = \cos(\tfrac{2t\pi}{n}) + i\sin(\tfrac{2t\pi}{n}).$$

für jede natürliche Zahl t, insbesondere ist

$$(\omega_n)^n = 1,$$

aber $(\omega_n)^t \neq 1$ für $1 \leq t < n$. Wir sehen:

Satz. *Die komplexe Zahl ω_n ist eine primitive n-te Einheitswurzel. Die Zahlen ${\omega_n}^t$ mit $0 \leq t < n$ sind paarweise verschieden, dies sind gerade alle n-ten Einheitswurzeln.*

Beweis: Wir haben schon gesehen, dass ω_n eine primitive n-te Einheitswurzel ist. Aus ${\omega_n}^n = 1$ folgt natürlich $({\omega_n}^t)^n = 1$ für alle natürlichen Zahlen t, also sind alle komplexen Zahlen ${\omega_n}^t$ n-te Einheitswurzeln. Die Zahlen ${\omega_n}^t$ mit $0 \leq t <$ sind offensichtlich paarweise verschieden, wir erhalten also auf diese Weise n n-te Einheitswurzeln. Da eine n-te Einheitswurzel eine Nullstelle des Polynoms

$$T^n - 1$$

ist, ist die Anzahl der n-ten Einheitswurzeln höchstens n. Daher sehen wir, dass wir alle n-ten Einheitswurzeln erhalten haben.

Satz. *Für $n > 1$ ist die Summe der n-ten Einheitswurzeln gleich Null.*

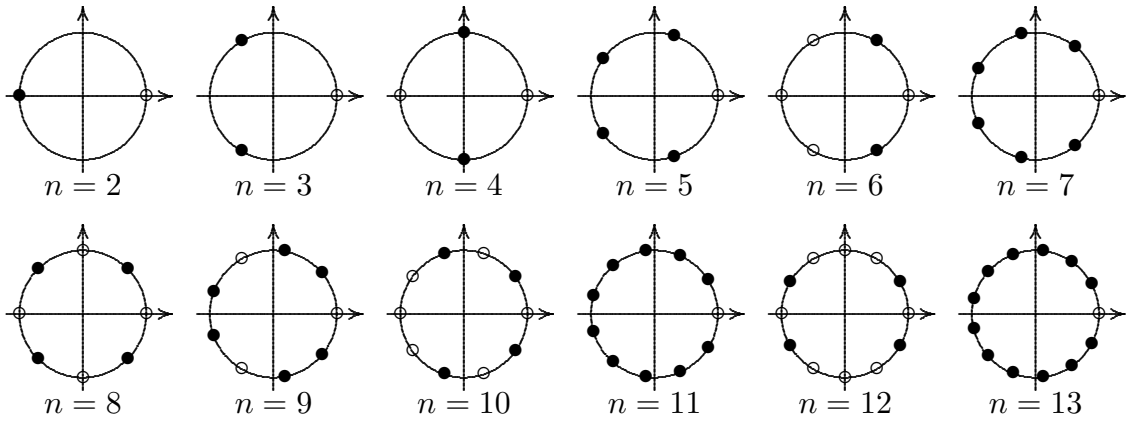
Beweis: Es ist

$$T^n - 1 = (T-1)(T^{n-1} + \cdots T + 1),$$

also auch

$$0 = (\omega_n)^n - 1 = (\omega_n - 1)((\omega_n)^{n-1} + \cdots \omega_n + 1).$$

Wegen $\omega_n - 1 \neq 0$ und der Nullteilerfreiheit von $\mathbb{C}$ folgt:

$$(\omega_n)^{n-1} + \cdots \omega_n + 1 = 0.$$

Wir zeigen hier für $2 \leq n \leq 13$ alle n-ten Einheitswurzeln. Die fetten Punkte markieren die primitiven n-ten Einheitswurzeln in $\mathbb{C}$: