Programm des Workshops
Derivierte Kategorien kohärenter Garben auf algebraischen Varietäten

Ulrich Görtz & Torsten Wedhorn

Einführung

In diesem Workshop wollen wir uns mit der derivierten Kategorie $D^b(X)$ der Kategorie der kohärenten Garben auf einer Varietät X beschäftigen. Im ersten Treffen wollen wir $D^b(X)$ als Invariante für X betrachten.

Es ist ein klassisches Resultat von Gabriel [Gab], dass die k-lineare Kategorie $\mathrm{Coh}(X)$ der kohärenten Moduln auf einer k-Varietät X diese bis auf Isomorphie bestimmen. Für die derivierte Kategorie $D^b(X) := D^b(\mathrm{Coh}(X))$ gilt dies im Allgemeinen aber nicht: Mukai [Muk] bewies, dass für eine abelsche Varietät X immer $D^b(X) \cong D^b(X^\vee)$ gilt ($X^\vee$ bezeichnet die duale abelsche Varietät). Auf der anderen Seite sind im Allgemeinen X und $X^\vee$ nicht isomorph. Ist allerdings X projektiv glatt und sein kanonischer Divisor ample oder anti-ample, so haben Bondal und Orlov [BO2] gezeigt, dass $D^b(X)$ die Varietät X bis aus Isomorphie bestimmt. Dieses Resultat wird der Startpunkt unseres Workshops sein.[1]

Mukai realisiert die Äquivalenz von $D^b(X)$ und $D^b(X^\vee)$ für eine abelsche Varietät X durch die folgende Konstruktion (nun Fourier-Mukai-Transformation genannt)

$$\Phi_{\mathcal{P}} \colon D^b(X) \to D^b(X^\vee), \quad \mathcal{E} \mapsto q_*(p^*\mathcal{E} \otimes \mathcal{P}),$$

wobei $\mathcal{P}$ das Poincaré-Bündel auf $X \times X^\vee$ und $p \colon X \times X^\vee \to X$ und $q \colon X \times X^\vee \to X^\vee$ die Projektionen bezeichnen. Hierbei sind q_*, p^* und $\otimes$ die derivierten Funktoren zwischen den derivierten Kategorien (auch wenn in diesem Fall p^* und $\otimes$ die nicht abgeleiteten Funktoren sind, da p flach und $\mathcal{P}$ lokal frei ist). Diese Konstruktion verallgemeinert sich und man erhält für je zwei Varietäten X und Y und für $\mathcal{P} \in D^b(X \times Y)$ eine "Fourier-Mukai-Transformation"

$$\Phi_{\mathcal{P}} \colon D^b(X) \to D^b(Y).$$

Dies ist ein exakter Funktor, und Bondal und Orlov geben in [BO1] ein Kriterium, wann $\Phi_{\mathcal{P}}$ voll treu ist. Umgekehrt hat Orlov in [Orl2] bewiesen (ergänzt durch Resultate von Bondal und Van den Bergh [BvdB]), dass jeder

[1] Balmer [Bal] bewies, dass jedes quasikompakte reguläre Schema aus $D^b(X)$ rekonstruiert werden kann, wobei man $D^b(X)$ als *Tensor*-(triangulierte Kategorie) via des derivierten Tensorprodukts auffasst; genauer hat er gezeigt, dass jedes reduzierte noethersche Schema aus der derivierten Kategorie der perfekten Komplexe $D^{\mathrm{perf}}(X)$ zusammen mit seinem Tensorprodukt rekonstruiert werden kann.

exakte voll treue Funktor $\Phi\colon D^b(X) \to D^b(Y)$ (X, Y glatt projektiv) eine Fourier-Mukai-Transformation $\Phi_{\mathcal{P}}$ für ein eindeutig bestimmtes $\mathcal{P}$ ist. Dieser Satz erlaubt es auch, auf relative einfache Weise zu zeigen, dass $D^b(X)$ bestimmte Invarianten von X (z.B. $\dim X$, die Ordnung des kanonischen Bündel ω_X oder den kanonischen Ring von X) bestimmt.

Beim zweiten Treffen soll es darum gehen, dass gewisse Konstruktionen aus Moris Minimales-Modell-Programm die Kategorie $D^b(X)$ nicht ändern. Leitlinie ist die Vermutung von Bondal und Orlov, dass wann immer eine birationale Korrespondenz

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

zwischen glatten projektiven komplexen Varietäten X und Y mit $f^*\omega_X \cong g^*\omega_Y$ existiert, $D^b(X) \cong D^b(Y)$ gilt. Dafür starten wir mit einem Übersichtsvortrag über Mori's Programm und betrachten dann Beispiele von Flips und Flops. Das Treffen schließt mit einem Überblick (leider ohne Beweis) über bekannte Resultat in Dimension ≤ 3.

Beim dritten Treffen soll es dann um singuläre Varietäten X gehen: Wir betrachten den Quotient von $D^b(X)$ nach der triangulierten Unterkategorie der perfekten Komplexe (welcher trivial ist, wenn X regulär ist). Dieser Quotient ist unter anderem von Orlov studiert worden, der zum Beispiel gezeigt hat, dass dieser Quotient (genauer, seine idempotente Komplettierung) eine Invariante von Singularitäten sind. In Beispielen ist es auch möglich, mehr über diese Invarianten zu sagen. Für diesen Fall wollen wir uns orientieren an [Orl4] und [Orl6].

Für eine Vielzahl von interessanten Resultaten und Verbindungen werden wir in diesem Workshop leider keine Zeit haben. Als Beispiele seien genannt:

1. **Kategorielle Auflösung von Singularitäten**: $D^b(X)$ ist immer äquivalent zur Kategorie der perfekten Komplexe über einer dg-Algebra ([Rou1], Bemerkung in Abschnitt 2.2.3.; [Rou2]). Van den Berghs nichtkommutative Auflösungen [VdB1], [VdB2]. Kuznetsovs kategorielle Auflösungen [Kuz].

2. **Spiegelsymmetrie für Fano-Varietäten**: Z.B. für gewichtete projektive Räume [AKO1]

3. **Vollständige exzeptionelle Folgen**: Flaggenvarietäten (Kapranov [Kap]); torische Varietäten (Kawamata [Kaw]); etc.

4. **Modulräume für Bondal-Köcher**: siehe [BePr] (hier nimmt man die Existenz einer vollständigen exzeptionellen Folge an. Besteht sie aus Vektorbündeln, so erhält man eine natürliche Abbildung in einen Modulstack von Darstellungen des zugehörigen "Bondal-Köchers".)

Vorkenntnisse: Folgendes wird als bekannt vorausgesetzt und sollte nicht im Workshop erklärt werden: Triangulierte Kategorien und exakte Funktoren, derivierte Kategorien und derivierte Funktoren, kohärente Garben auf Varietäten, Kohomologie kohärenter Garben, Serre-Dualität. Allerdings mag es didaktisch sinnvoll sein, einige Begriffe in einem Nebensatz noch einmal zu wiederholen. Zur Wiederholung dieser Begriffe als Vorbereitung auf den Workshop seien die ersten drei Kapiteln von [Huy] empfohlen.

Notation: Es sei k immer ein fester Körper. Eine Varietät über einem Körper k ist für uns (per definitionem) ein quasi-projektives Schema über k. Punkte sind immer abgeschlossene Punkte. Da es uns weniger um die größtmögliche Allgemeinheit sondern mehr darum geht, dieses Gebiet kennenzulernen, ist es jedem Vortragenden freigestellt, nur den Fall "k algebraisch abgeschlossen" oder sogar "$k = \mathbb{C}$" zu betrachten.

1. Treffen: Derivierte Kategorien kohärenter Garben als Invarianten

Als Leitfaden benutzen wir den Artikel [Rou1] von Rouquier über seinen Vortrag im Séminaire Bourbaki. Der Inhalt der Vorträge des ersten Treffens ist aber (zum allergrößten Teil) auch in dem Buch [Huy] von Huybrechts bestens dokumentiert.

1 Rekonstruktion von Varietäten mit (anti-)amplem kanonischen Divisor aus ihrer derivierten Kategorie (60 Minuten)

- Serre-Funktoren (abstrakte Definition und geometrische Motivation; [Huy] 1.28 und 3.12).
- Rekonstruktionssatz von Bondal und Orlov ([Rou1] Théorème 2.1); Rouquier skizziert drei Beweise, aber uns reicht eine ausführlich erklärte Version (1 oder 3, nach Wahl des Vortragenden).

2 Semi-orthogonale Zerlegungen (60 Minuten)

- (Semi-)orthogonale Zerlegung einer triangulierten Kategorie und (stark) vollständige exzeptionelle Folgen ([Rou1] Abschnitt 2.2 oder [Huy] Abschnitt 1.4)
- Der Zerlegungssatz von Bondal, Kapranov, Van den Bergh ([Rou1] Théorème 2.3); ohne Beweis
- [Rou1] Prop. 2.4
- Erkläre, wie stark vollständige exzeptionelle Sequenzen $(E_1, \ldots, E_m)$ in $D^b(X)$ eine Äquivalenz zwischen $D^b(X)$ und $D^b(\mathrm{End}(\bigoplus E_i))$ liefern ([Bon]); betrachte das Beispiel $X = \mathbb{P}^n$ im Detail ([Bei] und [Huy] Abschnitt 8.3; dies ist der Schwerpunkt dieses Vortrags); erwähne (ohne Beweis) die analoge Aussage für projektive Bündel ([Rou1] 4.2.1).

3 Die Fourier-Mukai-Transformation (75 Minuten)

- Definition der Fourier-Mukai-Transformation und erste Beispiele ([Rou1] Abschnitt 3.1, [Huy] Abschnitt 5.1)
- Fourier-Mukai-Transformation ist exakt und besitzt rechts- und linksadjungierte Funktoren ([Huy] Prop. 5.9)
- Orlovs Satz ([Rou1] Théorème 3.7; ohne Beweis—siehe Vortrag 4)
- Anwendung von Orlovs Satz auf die Rekonstruktion von $\dim X$ ([Huy] Corollary 5.23), den kanonischen Ring $R(X)$ und die Kodaira-Dimension von X ([Huy] Prop. 6.1; kurze Wiederholung dieser Begriffe, z.B. [Huy] Abschnitt 6.5) und von X falls das kanonische Bündel ω_X (anti-)ampel ist (neuer Beweis des Satzes von Bondal-Orlov)
- Eventuell Beschreibung von $\mathrm{Aut}(D^b(X))$, wenn ω_X (anti-)ampel ist ([Huy] Prop. 4.17).

4 Beweis des Satzes von Orlov (75 Minuten)

Beweis(skizze) von [Rou1] Thm. 3.7 (siehe Referenzen in [Rou1] 3.1.4)

2. Treffen: Derivierte Kategorien und birationale Geometrie

5 Minimales Modell Programm (MMP) (60 Minuten)

Überblick und Beschreibung von Moris MMP. Insbesondere sollte erklärt werden:

- Flips und Flops
- Diskrepanz eines birationalen Morphismus; krepante Auflösungen
- Ein kurzer Überblick, was und was nicht bekannt ist, insbesondere in Dimension ≤ 3 (vor allem Existenz und Terminierung von Flips und Flops; Ketten von Flops, die zwei minimale Modelle verbinden; Existenz krepanter Auflösungen)
- Erkläre die Vermutung von Bondal und Orlov ([Rou1] Conjecture 1.1, [Huy] Conjecture 6.24)

Einige Referenzen: [Cad], [Cor], [Deb], [Kol], [KoMo], [Mat], [Rei], für neuere Entwicklungen siehe auch [CHKLM], [Dru] und die dort gegebenen Referenzen (insbesondere die Arbeiten von Birkar, Cascini, Hacon und McKernan), aber das soll hier nicht der Fokus sein.

6 Derivierte Kategorien und Aufblasungen (60 Minuten)

Beweis von Orlov über semi-orthogonale Zerlegungen der derivierten Kategorie von Aufblasungen glatter projektiver Varietäten in glatten Untervarietäten der Codimension ≥ 2 ([Orl1], siehe auch [Huy] Prop. 11.18 oder [Rou1] Théorème 4.2; für den Beweis müssen einige Vorbereitungen getroffen werden, siehe z.B. [Huy] Abschnitt 11.1).

7 Standard Flip und Standard Flop (45 Minuten)

Zeige, dass Standard-Flips voll treue Funktoren und Standard-Flops Äquivalenzen der derivierten Kategorien induzieren ([Huy] Abschnitt 11.3, insbesondere Prop. 11.23, und [Rou1] Abschnitt 4.3)

8 Der Mukai-Flop (45 Minuten)

Dies ist ein Beispiel eines Flops, bei dem sich wiederum die derivierte Kategorie nicht ändert, aber wo diesmal die Äquivalenz zwischen den derivierten

Kategorien nicht durch die birationale Korrespondenz induziert wird (siehe [Huy] Abschnitt 11.4 und [Rou1] Abschnitt 4.4).

9 Dimension ≤ 3 (60 Minuten)

Gib einen Überblick über die bekannten Resultate in Dimension ≤ 3 (Kurven vom Geschlecht $\neq 1$ sind durch das Theorem von Bondal und Orlov abgedeckt, für abelsche Varietäten siehe [Huy] Kapitel 9; für Flächen siehe [BrMa] und [Rou1] 3.4). Gib das Theorem von Bridgeland an ([Huy] Theorem 11.34, [Rou1] Abschnitt 4.5), und erläuter es. Selbst für eine Beweisidee wird leider keine Zeit sein.

3. Treffen: Derivierte Kategorien und Singularitäten

Während bei den ersten beiden Treffen alle Varietäten glatt waren, wollen wir nun das Augenmerk darauf legen, wie sich die Singularitäten einer Varietät X in der derivierten Kategorie widerspiegeln. Ein Ansatzpunkt hier ist, dass auf einer regulären Varietät jede kohärente Garbe eine endliche Auflösung durch lokalfreie Garben besitzt, was wir so umformulieren können, dass die derivierte Kategorie der kohärenten Garben übereinstimmt mit der Kategorie der perfekten Komplexe. Im allgemeinen ist letztere eine volle triangulierte Unterkategorie, und man kann den Quotienten der beiden Kategorien als ein Maß für die Singularitäten von X ansehen.

Diesen Quotienten nennt Orlov die triangulierte Kategorie $D_{\mathrm{Sg}}(X)$ der Singularitäten von X, und hat ihn in mehreren Arbeiten ausführlich studiert. Wir beginnen mit der Arbeit [Orl4] von Orlov; siehe auch den Vorgänger [Orl3]. Hier wird die Konstruktion für eine graduierte k-Algebra (k Körper) durchgeführt, und man erhält die Kategorie $D^{\mathrm{gr}}_{\mathrm{Sg}}(A)$. Orlov stellt für Gorensteinsche Algebren einen Zusammenhang mit der derivierten Kategorie $D^b(\mathrm{qgr}(A))$ her, wobei die abelsche Kategorie $\mathrm{qgr}(A)$ der Quotient der Kategorie der endlich erzeugte graduierten A-Moduln nach der Unterkategorie der Moduln endlicher k-dimension ist (falls A kommutativ und von Elementen im Grad 1 erzeugt ist, so ist $\mathrm{qgr}(A)$ äquivalent zur Kategorie der kohärenten Garben auf $\mathrm{Proj}\, A$[2]).

Weiter schauen wir uns die Arbeit [Orl6] an, wo Orlov beweist, dass unter gewissen Voraussetzungen die idempotenten Vervollständigungen der Singularitätenkategorien von X und X' äquivalent sind, wenn die formalen Komplettierungen von X und X' entlang der Singularitäten isomorph sind.

[2] Ist A nicht notwendig von Elementen im Grad 1 erzeugt, so ist $\mathrm{qgr}(A)$ äquivalent zur Kategorie der kohärenten Garben auf dem Stack $\mathbb{P}\mathrm{roj}(A)$.

Im letzten Vortrag soll auf den Unterschied zwischen $D_{\mathrm{Sg}}(X)$, dem Quotienten $D^b_{\mathrm{Sing}(X)}(\mathrm{coh}X)/\mathrm{Perf}_{\mathrm{Sing}(X)}(X)$ (siehe [Orl6] §1 für die Definition) und ihren idempotente Komplettierung eingegangen werden.

Das Studium der triangulierten Kategorien von Singularitätem ist auch inspiriert durch homologische Spiegelsymmetrie. Diesen Aspekt werden wir aber in diesem Workshop (leider) nicht berühren können.

10 Triangulierte Kategorie der Singularitäten für Gorenstein-Algebren (75 Minuten)

In diesem Vortrag soll Theorem 2.5 und sein Beweis aus [Orl4] erklärt werden. Eine Reihe der Begriffe aus §1 sind bei den bisherigen Treffen bereits erklärt worden. Definition und Eigenschaften von "Gorenstein" sollten kurz wiederholt werden.

11 Anwendungen (45 Minuten)

Hier sollen die Anwendungen von Theorem 2.5 in [Orl4] (besonders Corollary 2.6 bis Example 2.9; Theorem 2.12 bis Prop. 2.15) erklärt werden.

12 Triangulierte Kategorie der Singularitäten als Invariante der Singularitäten (90 Minuten)

Hier sollen [Orl6] §1–§3 erklärt werden. Das Ziel ist die Interpretation und der Beweis von Theorem 2.10 und Corollary 3.5, die grob gesprochen aussagen, dass die idempotente Komplettierung von $D_{\mathrm{Sg}}(X)$ nur von der Gestalt (formal oder étale) lokal von X an seinem singulären Ort abhängt. Es wäre gut, diese Aussagen für komplexe Varietäten mit Hilfe der komplex analytischen Topologie zu illustrieren.

13 $D_{\mathrm{Sg}}(X)$ und seine idempotente Komplettierung (60 Minuten)

Die triangulierte Kategorie $D_{\mathrm{Sg}}(X)$ enthält die volle Unterkategorie $D^b_{\mathrm{Sing}(X)}(\mathrm{coh}X)/\mathrm{Perf}_{\mathrm{Sing}(X)}(X)$ (siehe [Orl6] §1 für die Definition), und ihre idempotenten Komplettierungen $\overline{D_{\mathrm{Sg}}(X)}$ sind gleich. In diesem Vortrag soll der Unterschied zwischen diesen Kategorien erläutert werden. Beispiele sind die unterschiedlichen (aber analytisch gleichen) Doppelpunkte aus [Orl6] §1 und [Orl5] Theorem 2.1 (bzw. [Orl6] Theorem 4.3). Außerdem wäre es schön, die exakte Sequenzen von K-Gruppen in [Orl6] §4 zu erklären, insbesondere

$$0 \to K_0(D_{\mathrm{Sg}}(X)) \to K_0(\overline{D_{\mathrm{Sg}}(X)}) \to K_{-1}(\mathrm{Perf}(X)) \to 0$$

und

$$0 \to K_0(D^b_{\mathrm{Sing}(X)}(\mathrm{coh}X)/\mathrm{Perf}_{\mathrm{Sing}(X)}(X)) \to K_0(\overline{D_{\mathrm{Sg}}(X)})$$
$$\to K_{-1}(\mathrm{Perf}_{\mathrm{Sing}(X)}(X)) \to 0$$

und Definition und Unterschied von $K_{-1}(\mathrm{Perf}(X))$, $K_{-1}(\mathrm{Perf}_{\mathrm{Sing}(X)}(X))$.

Literatur

[AKO1] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for weighted projective planes and their noncommutative deformations*, Ann. of Math. **167** (2008), 867–943.

[AKO2] D. Auroux, L. Katzarkov, D. Orlov, *Mirror symmetry for del Pezzo surfaces: vanishing cycles and coherent sheaves*, Invent. math. **166**, no. 3 (2006), 537–582.

[Bal] P. Balmer, *Presheaves of triangulated categories and reconstruction of schemes*, Math. Ann. **324** (2002), no. 3, 557–580.

[Bei] A. Beilinson, *Coherent sheaves on $\mathbb{P}^n$ and problems in linear algebra*, (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 (1978), no. 3, 68–69. English translation: Functional Anal. Appl. 12 (1978), no. 3, 214–216 (1979).

[BePr] A. Bergman, N. Proudfoot, *Moduli spaces for Bondal quivers*, Pacific J. Math. **237** (2008), no. 2, 201–221. `http://www.uoregon.edu/~njp/bq.pdf`

[Bon] A. Bondal, *Representations of associative algebras and coherent sheaves*, Math. USSR-Izv. **34** (1990), no. 1, 23–42.

[BO1] A. Bondal, D. Orlov, *Semiorthogonal decompositions for algebraic varieties*, Preprint `arXiv:alggeom/9506012`

[BO2] A. Bondal, D. Orlov, *Reconstruction of a variety from the derived category and groups of autoequivalences*, Compositio Math. **125** (2001), 327–344

[BrMa] T. Bridgeland, A. Maciocia, *Complex surfaces with equivalent derived categories*, Math. Z. **236** (2001), no. 4, 677–697.

[BvdB] A. Bondal, M. Van den Bergh, *Generators and representability of functors in commutative and noncommutative geometry*, Mosc. Math. J. **3**, no. 1 (2003), 1–36.

[Cad] C. Cadman et al, *A first glimpse at the minimal model program*, Snowbird lectures in algebraic geometry, 17–42, Contemp. Math. **388**, Amer. Math. Soc., Providence (2005).

[Cor] A. Corti, *What is … a flip?*, Notices Amer. Math. Soc. **51** (2004), no. 11, 1350–1351.

[CHKLM] A. Corti, P. Hacking, J, Kollár, R. Lazarsfeld, M. Mustata, *Lectures on flips and minimal models*, `arXiv:0706.0494`

[Deb] O. Debarre, *Higher-dimensional algebraic geometry*, Universitext, Springer (2001).

[Dru] S. Druel, *Existence de modèles minimaux pour les variétés de type général*, Exposé **982**, Séminaire Bourbaki, 2007/08, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/%7Edruel/Fichiers/Exp.982.S.Druel.pdf`

[Gab] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[Huy] D. Huybrechts, *Fourier-Mukai transforms in Algebraic Geometry*, Oxford Mathematical Monographs, 2006.

[Kap] M. Kapranov, *On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces*, Invent. Math. **92** (1988), no. 3, 479–508.

[Kaw] Y. Kawamata, *Derived categories of toric varieties*, Michigan Math. J. **54** (2006), no. 3, 517–535.

[Kol] J. Kollar, *Minimal models of algebraic threefolds: Mori's program*, Séminaire Bourbaki, Astérisque No. **177-178** (1989), Exp. No. 712, 303–326.

[KoMo] J. Kollar, S. Mori, *Birational geometry of algebraic varieties*, with the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti, Cambridge Tracts in Mathematics **134**, Cambridge University Press (1998).

[Kuz] A. Kuznetsov, *Lefschetz decompositions and categorical resolution of singularities*, Sel. math., new ser. **13** (2008), 661-696.

[Mat] K. Matsuki, *Introduction to the Mori program*, Universitext. Springer-Verlag (2002).

[Muk] S. Mukai, *Duality between $D(X)$ and $D(\hat{X})$ with its application to Picard sheaves*, Nagoya Math. J. **81** (1981), 153–175.

[Orl1] D. Orlov, *Projective bundles, monoidal transformations and derived categories of coherent sheaves*, Math. USSR Izv. **38** (1993), 133–144.

[Orl2] D. Orlov, *Equivalences of derived categories and K3 surfaces*, Algebraic geometry **7**, J. Math. Sci. (New York) 84 (1997), no. 5, 1361–1381.

[Orl3] D. Orlov, *Triangulated categories of singularities and D-branes in Landau-Ginzburg models*, Tr. Mat. Inst. Steklova **246** (2004), Algebr. Geom. Metody, Svyazi i Prilozh., 240–262; translation in Proc. Steklov Inst. Math. 2004, no. 3 (246), 227–248 `arXiv:math.AG/0302304v2`.

[Orl4] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, `arXiv:math.AG/0503632v2`.

[Orl5] D. Orlov, *Triangulated categories of singularities and equivalences between Landau-Ginzburg models*, Sbornik Math. **197**:12 (2006), 1827–1840.

[Orl6] D. Orlov, *Formal completions and idempotent completions of triangulated categories of singularities*, `arXiv:0901.1859v1`.

[Rei] M. Reid, *Young person's guide to canonical singularities*, Algebraic geometry, Bowdoin, 1985, 345–414, Proc. Sympos. Pure Math. **46**, Part 1, Amer. Math. Soc. (1987).

[Rou1] R. Rouquier, *Catégories dérivées et géométrie birationelle (d'après Bondal, Orlov, Bridgeland, Kawamata ...)*, Sém. Bourbaki exp. **947** (2004/05), see `arXiv:math.AG/0503548v1`.

[Rou2] R. Rouquier, *Dimensions of triangulated categories*, J. K-Theory **1** (2008), no. 2, 193–256.

[Tak] A. Takahashi, *Matrix factorization and representations of quivers I*, `arXiv:math.AG/0506347v2`.

[VdB1] M. Van den Bergh, *Non-commutative crepant resolutions*, In: The Legacy of Niels Henrik Abel, Springer, Berlin, 2004, 749–770. `http://alpha.uhasselt.be/Research/Algebra/Publications/ncrepant.ps`

[VdB2] M. Van den Bergh, *Three-dimensional flops and noncommutative rings*, Duke Math. J. **122** (2004), 423–455.