NOUVEAUX MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLXXI.

AVEC L'HISTOIRE POUR LA MÊME ANNÉE.

A BERLIN.
CHEZ CHRÉTIEN FRÉDERIC VOSS.

MDCCLXXIII.

SUR LES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES.

PAR M. JEAN BERNOULLI.

Quand on réduit en décimales une fraction dont le dénominateur n'est commensurable avec aucune puissance de 10, la fraction décimale qui en résulte doit nécessairement aller à l'infini; mais il ne s'en ensuit pas qu'on soit obligé de faire continuellement la division effective pour approcher toujours d'avantage de la valeur réelle de la fraction proposée; car les mêmes chiffres doivent revenir au bout d'un certain nombre de divisions & doivent se présenter dans le même ordre. En effet, quel que soit le dénominateur D, non divisible par 2 ni par 5, il ne peut y avoir dans la division que $D - 1$ résidus différens; or dès qu'on retombe dans un résidu qu'on a déjà eu, il est clair qu'on retrouve aussi dans le quotient les mêmes décimales, de sorte qu'on n'aura jamais besoin que de faire tout au plus $D - 1$ divisions pour connoître la fraction décimale équivalente d'une fraction ordinaire donnée. Ces fractions décimales se nomment *périodiques* ou *circulantes;* on s'appercevra d'abord qu'elles fournissent matiere à plusieurs recherches, non seulement de curiosité, mais fort utiles en même tems, vu le grand usage qu'on fait de plus en plus du calcul décimal en général; cependant je ne connois que Wallis & Mrs. Euler & Robertson qui s'en soient occupés. Je donnerai un précis de ce que j'ai trouvé sur ce sujet dans les écrits de ces Auteurs, à quoi je joindrai quelques remarques que j'ai faites moi-même lorsque pendant mon séjour à la campagne & pour

(*) Ce Mémoire a été lu le 8. Octobre 1772. J'aurois pû & j'aurois peut-être dû l'abréger, surtout après avoir trouvé à y faire les additions qui suivront; cependant comme il n'est pas fort long & que la maniere historique dont il présente la matiere peut aussi avoir son utilité, je m'en suis dispensé; je me flatte que dans quelque nouveau Traité d'Algebre on le mettra sous une forme plus didactique. J'espere aussi que les circonstances dans lesquelles j'ai construit les Tables qui ont donné lieu à ce Mémoire diminueront la surprise où l'on seroit peut-être d'y trouver plusieurs remarques faites postérieurement & qui se seroient présentées assés facilement *a priori* dans le cabinet & à un esprit plus libre.

me diſtraire dans ma maladie je me ſuis amuſé à conſtruire les Tables de décimales périodiques qui ſuivront.

ARTICLE PREMIER.
Extrait du Chap. XII. du premier Livre de l'*Algebre* de M. EULER.

C'eſt après avoir parlé des logarithmes que Mr. Euler fait obſerver la grande utilité du calcul décimal, & qu'il ſe propoſe d'enſeigner principalement, d'abord comment on convertit une fraction en décimales, & enſuite comment une fraction décimale étant donnée on peut aſſigner la fraction ordinaire qu'elle exprime. M. Euler s'arrête d'abord à pluſieurs fractions de petits nombres: en montrant comment on réduit en décimales $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{6}$ &c. il remarquera, par exemple, que lorſqu'on trouve $\frac{1}{4} = 0{,}25000000 = 0{,}25$ il eſt clair qu'on devoit parvenir à ce réſultat, puiſque $0{,}25 = \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$; ou bien que $\frac{1}{6} = 0{,}16666666$ &c. & qu'en effet, puiſque $0{,}6666666$ eſt $= 0{,}6666666 - 0{,}5$, que $0{,}6666666 = \frac{2}{3}$ & $0{,}5 = \frac{1}{2}$, on devoit trouver pour $\frac{2}{3} - \frac{1}{6}$ ou pour $\frac{1}{6}$ la fraction décimale $0{,}16666666$ &c.

Les fractions qui ont le nombre 7 pour dénominateur conduiſent M. Euler à des remarques plus généralement intéreſſantes & je vais les traduire ici litéralement:

„Quand le dénominateur eſt 7, dit M. Euler, les fractions décimales deviennent plus compliquées: on trouve, par exemple, $\frac{1}{7} = 0{,}142857$ &c, où il eſt à remarquer que ces 6 chiffres 142857 reviennent conſtamment. Or, pour faire voir que cette fraction décimale équivaut effectivement à $\frac{1}{7}$, transformons-la en une progreſſion géométrique dont le premier terme ſoit $= \frac{142857}{1000000}$ & l'expoſant $= \frac{1}{1000000}$; la ſomme de cette progreſſion ſera $= \frac{\frac{142857}{1000000}}{1 - \frac{1}{1000000}}$, ou (en multipliant par 1000000 le numérateur & le dénominateur) $= \frac{142857}{\cancel{1000000}} = \frac{1}{7}$." /999999

„On peut faire voir encore plus facilement de la maniere ſuivante que la fraction décimale trouvée fait préciſément $\frac{1}{7}$: Qu'on exprime ſa valeur par s en ſorte que

$$\begin{array}{lrcr}
 & s & = & 0,142857142857142857 \text{ \&c.} \\
\text{on aura} & 10s & = & 1,42857142857142857 \text{ \&c.} \\
 & 100s & = & 14,2857142857142857 \text{ \&c.} \\
 & 1000s & = & 142,857142857142857 \text{ \&c.} \\
 & 10000s & = & 1428,57142857142857 \text{ \&c.} \\
 & 100000s & = & 14285,7142857142857 \text{ \&c.} \\
 & 1000000s & = & 142857,142857142857 \text{ \&c.} \\
\text{ſouſtrayés} & s & = & 0,142857142857 \text{ \&c.} \\
\hline
\text{il reſte} & 999999s & = & 142857.
\end{array}$$

Or en diviſant par 999999 on a $s = \frac{142857}{999999} = \frac{1}{7}$ pour la valeur de la fraction décimale dont il étoit queſtion. On transformera de la même maniere $\frac{2}{7}$ en une fraction décimale qui devient 0,28571428 &c; ce qui nous conduit à une voye encore plus aiſée pour trouver la valeur de la fraction décimale que nous venons d'exprimer par s, vu que la fraction préſente doit être juſtement le double de la précédente, c'eſt à dire $= 2s$; or nous avons eu

$$\begin{array}{lrcr}
 & 100s & = & 14,28571428571 \text{ \&c.} \\
\text{ſouſtrayant} & 2s & = & 0,28571428571 \text{ \&c.} \\
\hline
\text{il nous reſte} & 98s & = & 14, \\
\text{donc} & s & = & \frac{14}{98} = \frac{1}{7}.
\end{array}$$

On trouve auſſi $\frac{3}{7} = 0,428571428 57$ &c. ce qui doit après notre ſuppoſition être $= 3s$; or nous avions trouvé

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 10s & = & 1,428571428 57 \text{ \&c.} \\
\text{donc en ſouſtrayant} & 3s & = & 0,428571428 57 \text{ \&c.} \\
\hline
\text{il reſte} & 7s & = & 1, \quad \text{\& par conſéquent } s = \frac{1}{7}.\text{''}
\end{array}
$$

M. Euler fait dans le paragraphe ſuivant la remarque que j'ai déjà faite en général dans mon introduction, il obſerve que le nombre des décimales pour des ſeptiemes ne peut ſurpaſſer 6.

Il paſſe enſuite aux fractions qui ont les nombres 8, 9, 10 & 11 pour dénominateur & elles ne l'arrêtent gueres; nous remarquerons ſeulement avec lui que ſi on ignoroit la valeur de $0,090909$ &c. laquelle eſt $\frac{1}{11}$, & qu'on la cherchât, on n'auroit qu'à faire $s = 0,090909$ &c. & $100s = 9,090909$ &c. parce qu'il en réſulte $99s = 9$ & $s = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$.

C'eſt à la ſuite de ces exemples que M. Euler obſerve que parmi les fractions décimales celles qui ſont périodiques ou infinies méritent une attention particuliere, & qu'il propoſe en général la méthode ſuivante pour trouver leurs valeurs.

„Suppoſons d'abord, dit-il, qu'un ſeul chiffre ſe répete ſans ceſſe & qu'il ſoit $= a$, nous aurons $s = 0, aaaaa$

/a

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{donc} & 10s & = & \cancel{0}, aaaaaa, \\
\text{ſouſtrayant} & s & = & 0, aaaaaa, \\
\hline
\text{il reſte} & 9s & = & a, \quad \text{\& par conſéquent } s = \frac{a}{9}.
\end{array}
$$

Si deux chiffres comme ab ſe trouvent répétés continuellement, on fait $s = 0,abababa$, ce qui donne $100s = ab, ababab$, & en ſouſtrayant de ceci la valeur de s, on a $99s = ab$; c'eſt à dire $s = \frac{ab}{99}$.

„Que si 3 chiffres sont répétés à l'infini, on a $s = 0, abcabcabc$; par conséquent $1000 s = abc, abc\,abc\,abc$; on soustrait la premiere quantité de la seconde & on obtient $999 s = abc$, ou $s = \frac{abc}{999}$. Et ainsi de suite.

„Toutes les fois donc qu'il se présente une fraction décimale de cette espece, il est facile d'en assigner la valeur: soit donnée, par exemple, celle-ci $0, 296296296$; sa valeur sera $\frac{296}{999}$, fraction qui se réduit à $\frac{8}{27}$ en divisant par 37.

„Il faut que ce résultat reproduise la fraction décimale proposée; or si l'on veut montrer plus facilement que cela arrive, on considérera que $27 = 3 \cdot 9$, & on divisera 8, d'abord par 9, & ensuite par 3, de la maniere qui suit:

$$\begin{array}{l}
9)\ 8,0000000 \\ \hline
3)\ 0,8888888 \\ \hline
\quad 0,2962962
\end{array}$$

&c. ce qui est la fraction proposée."

M. Euler finit ce chapitre en proposant encore un exemple de réduction en décimales; il s'agit de réduire la fraction $\frac{1}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8.\ 9.\ 10}$, & il en résulte une petite Table qu'à cause de son utilité dans plusieurs cas on sera bien aise de trouver ici:

$$\begin{array}{rl}
2) & 1,0000000000000 \\ \hline
3) & 0,5000000000000 \\ \hline
4) & 0,1666666666666 \\ \hline
5) & 0,0416666666666 \\ \hline
6) & 0,0083333333333 \\ \hline
7) & 0,0013888888888 \\ \hline
8) & 0,0001984126984 \\ \hline
9) & 0,0000248015873 \\ \hline
10) & 0,0000027557319 \\ \hline
 & 0,0000002755731 9.
\end{array}$$

ARTICLE II.

Extrait du Chap. LXXXIX. de l'*Algebre* de WALLIS,

Intitulé:

Hujus (Approximationis per divisionem) *collatio cum Reductione Fractionum ad decimales & sexagesimales.*

Le célebre Wallis observe en premier lieu que personne avant lui, de son sçu, n'a examiné un peu soigneusement la réduction des fractions ordinaires en décimales & que c'est ce qui l'engage à en traiter dans ce chapitre avec quelque étendue.

Il remarque dabord que cette réduction finit quelquefois par un quotient
$\frac{32}{50}$ déterminé, comme $\frac{1}{2} = 0,5$, $\frac{3}{20} = 0,128$ &c. & que cela n'arrive que lorsque la fraction étant réduite à ses moindres termes, le dénominateur ou le diviseur ne se trouve composé que des nombres premiers 2 & 5 qui sont des diviseurs du nombre 10. „Mais, dit-il, si d'autres nombres encore que 2 & 5 composent le dénominateur de la fraction réduite, le quotient ne se termine nulle part; il en donne des exemples, comme dans $\frac{1}{3} = 0,3333$ &c. $\frac{2}{37} = 0,054$ &c, il fait remarquer l'élégance du retour des périodes: il distingue des exemples où elles sont de 1, de 2, de 3 &c. chiffres; il observe que ce nombre des chiffres n'est cependant jamais plus grand que celui du diviseur moins 1; il en donne la raison par l'exemple de la fraction $\frac{1}{7}$; enfin il ajoute que souvent le nombre des chiffres n'est qu'une partie aliquote du diviseur moins 1, ou quelque autre moindre partie, sans en être cependant une partie aliquote; mais il ne fait pas remarquer que ce dernier cas n'a lieu que quand le diviseur n'est pas un nombre premier.

Notre Auteur demande ensuite comment on peut s'assurer où la période finira? Il conseille pour cet effet de commencer par diviser le dénominateur de la fraction réduite, autant de fois qu'il se pourra, par 2 & par 5 & de voir ensuite si le quotient est ou 9 ou 99 ou 999 &c. ou bien s'il est quelque diviſeur d'un de ces nombres 9, 99, 999; parce que le nombre de ces 9 ſera le nombre cherché des chiffres de la période.

Suivent les exemples.

Si le diviſeur de la fraction propoſée eſt ou 9 ou 3 ou 6 (= 2.3) ou 12 = 2.2.3 ou 15 = ~~2~~.5.3 &c. la circulation n'eſt que d'une figure; car 9 n'eſt compris qu'une fois dans 9; 3 eſt un diviſeur de 9; les nombres 6. 12 & 15 ſont compoſés de 2, de 5 (facteurs de 10) & du nombre 3 diviſeur de ce ſeul nombre 9.

Si le dénominateur eſt 99, 11, 22 (= 2.11), 33, 55 (= 5.11), 66 (= 2.33) &c. la période eſt de deux figures: car 99 eſt le nombre 9 écrit 2 fois; 11 & 33 ſont des parties aliquotes de ce nombre neuf répété deux fois; 22, 55, 66 ſont des produits de 2 ou de 5 par de pareilles parties aliquotes. Je ne cite pas ici pour exemple, dit Wallis, 9 & 3, quoique pareillement diviſeurs de 99, parce qu'ils appartiennent à la claſſe précédente & admettent non ſeulement une circulation de deux figures, mais auſſi celle d'une ſeule.

Si le diviſeur de la fraction réduite eſt 999, 27, 54 (= 2.27), 135 (= 5.27), 37, 74 (= 2.37) la période eſt de 3 chiffres.

S'il eſt 13, elle eſt de 6 figures (ou de la moitié de 12 = 13 — 1,) parce que 13 diviſe exactement 999999 & n'eſt point partie aliquote d'un nombre de 9 écrit moins de 6 fois.

L'Auteur paſſe après cela immédiatement à des exemples où le dénominateur, ſans qu'il y entre des 2 ou des 5, n'eſt cependant plus un nombre premier.

Quand le dénominateur, dit-il, eſt 21, qui n'eſt pas un nombre premier, la période eſt de 6 figures; ce qui n'eſt pourtant pas partie aliquote de 20 = 21 — 1; mais c'eſt que 21 l'eſt de 999999.

Ou bien, continue-t-il, on peut raiſonner ainſi: 21 eſt compoſé de 3 × 7; 7, comme nous avons vu, demande 6 figures & la circulation de 3 n'eſt que d'une figure, ce qui eſt partie aliquote de 6; ainſi cette circulation d'une figure répétée ſix fois ſe terminera avec celle de 6 figures.

Il en eſt de même de 77 = 7 × 11; car 11 demande une circulation de 2 figures ou d'un diviſeur du nombre 6 de figures qu'exige le nombre 7; c'eſt pourquoi les 3 périodes du premier finiront avec la période unique des 6 chiffres du nombre 7.

Par une raiſon ſemblable 259 = 7 × 37 ne demande que 6 figures, parce que 37 n'en exige que 3 & ce raiſonnement a lieu dans d'autres cas pareils.

Mais, continue notre Auteur, ſi les nombres premiers compoſans, & autres que 2 & 5, ſont tels que les nombres de leurs périodes ne ſont pas parties aliquotes les uns des autres, alors quoique l'une ſoit de moins de chiffres, la période compoſée en aura cependant davantage que la période de l'autre nombre compoſant: & elle ſera d'autant de chiffres qu'il y a d'unités dans le nombre qui eſt commun dividende des deux nombres des circulations.

Par exemple, 11 demande une période de 2 figures & 37 en demande une de 3; donc 407 = 11 × 37 en demandera une plus grande que de 2 ou que de 3 figures, ſavoir une de 6, qui eſt le plus petit nombre diviſible par 2 & par 3. Car c'eſt par là qu'il arrive que les deux circulations de l'un des nombres compoſans finiſſent avec les 3 de l'autre.

Il en eſt de même de 297 = 11 × 27, parce que 27 (quoiqu'il ne ſoit pas premier) ne demande que 3 figures &c.

Wallis ajoute qu'on portera le même jugement ſur d'autres nombres compoſés & il conſidere après cela les cas où il ne faut pas s'imaginer que les périodes doivent commencer d'abord avec la premiere figure: ces cas ont lieu toutes les fois qu'il entre dans le dénominateur de la fraction réduite des 2 ou des 5 ou des puiſſances de ces deux nombres. Car alors la circulation ne commence qu'après une ou pluſieurs places de décimales & ſeulement quand l'influence de ces nombres compoſans a ceſſé; c. à d. après autant de décimales ſeulement qu'il y a de dimenſions dans les puiſſances des nombres compoſans 2 & 5.

C'eſt ainſi que $\frac{5}{12} = 0,41\dot{6}\dot{6}\dot{6}\dot{6}$ &c; car diviſer 5 par 12 (= 4 × 3) eſt autant que diviſer dabord 5 par 4 & enſuite par 3.

Or

Or la division par 4 donne un quotient terminé ou fini, qui s'étend à deux décimales; on a $\frac{5}{4} = 1,25$; ce quotient divisé ensuite par 3 donne $\frac{1,25}{3,00} = 0,41666$ &c. Cette division par 3 ne peut par conséquent avoir son effet que lorsqu'on parvient au troisieme chiffre des décimales & que les figures significatives du premier quotient viennent à manquer: c'est alors seulement que commence la circulation d'une figure qui est propre au nombre 3. On a $\frac{2}{15} = 0,13333$ &c; c'est à dire, à cause de $15 = 5 \times 3$, on a d'abord $\frac{2}{5} = 0,4$ & $\frac{0,4}{3,0} = 0,13333$. $\frac{45}{56} = 0,803,571428,571428,57$ &c. à cause de $56 = 8 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 7$ & que $\frac{45}{8} = 5,625$ & $\frac{5,625}{7000} = 0,803,571428,5714$ &c. il en sera de même d'autres cas.

Nous finirons ici, dit Wallis, ce que nous avions à dire des limites des circulations, & ce que nous avons traité un peu amplement comme une matiere neuve.

Il fait remarquer cependant aussi dans ce chapitre qu'on ne doit pas s'attendre à trouver cette *concinnité* dans les quotiens infinis, ou ce retour des périodes, dans les extractions des racines, quarrée, cubique ou de puissances plus hautes, pas même en nombres; nous ne nous arrêterons pas à ce qu'il dit de plus sur ce sujet, mais voici encore la traduction de la fin de ce chapitre.

„Ce qui a été dit des parties décimales peut s'appliquer, moyennant un léger changement, aux fractions sexagésimales, ou (comme on les nomme aussi) *physiques* ou *astronomiques*, adoptées de préférence après Ptolomée par nos prédécesseurs pendant plusieurs siecles. Les divisions de ces fractions finissent quelquefois par un quotient déterminé & continuent d'autres fois à l'infini.

Il importe seulement d'observer que ce que nous avons dit des nombres 2 & 5 (qui composent 10) & de leurs puissances, doit s'entendre maintenant des nombres 2, 3 & 5 (qui composent 60) & de leurs puissances; & qu'il faut appliquer à 59 & 59, 59' & 59, 59', 59'' &c. ce que nous avons dit de 9, 99, 999 &c. On raisonnera aussi de la même maniere (*mutatis mutandis*) au sujet d'autres progressions quelconques de fractions, où la valeur des dénominateurs décroit continuellement dans une certaine proportion."

„Ce que nous avons au reste principalement en vue ici est de faire observer que de même que ces procédés sont admis dans les nombres, avec confiance & d'un consentement unanime, tant à l'égard des parties décimales ou sexagésimales qui se continuent à l'infini, qu'à l'égard des divisions, des extractions des racines & d'autres opérations semblables, on ne doit pas rejeter ces procédés dans les quantités algébriques, mais qu'on doit les regarder plutôt comme légitimes."

ARTICLE III.

Extrait du Mémoire inséré dans les Transactions philosophiques pour 1768. sous le titre:

Of the Theory of circulating fractions: By JOHN ROBERTSON, Lib. R. S.

Le but de ce Mémoire est de faire mieux connoître la nature des fractions décimales périodiques, afin de rendre encore plus faciles les moyens d'abréger les opérations sur les décimales, proposés par *Cunn*, *Marsh*, *Malcolm* & d'autres auxquels M. Robertson renvoye, en attendant qu'il fasse lui-même l'application de ses principes dans un Traité d'Arithmétique qu'il se propose de publier.

Ce que M. Robertson avoit à dire pour le présent se réduit aux remarques suivantes.

Les fractions décimales sont produites par la division d'un nombre par un autre plus grand; elles sont équivalentes à des multiples des termes de la progression géométrique $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$ &c. & il y en a où les mêmes figures reviennent constamment jusqu'à l'infini, comme dans 0, 2323 &c.

$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{100} + \frac{2}{1000} + \frac{3}{10000} \text{ \&c.}$$

La fraction périodique $0,999$ &c. eſt $= 1,0$; car la différence entre $1,0$ & $0,999$ &c. eſt plus petite qu'on ne peut l'aſſigner.

Pour s'épargner la répétition des figures on eſt dans l'uſage de marquer la premiere & la derniere des expreſſions périodiques par des points ſur les chiffres: c'eſt à dire que

pour $0,333$ &c. on écrit $0,\dot{3}$,
$0,2323$ &c. - - $0,\dot{2}\dot{3}$,
$0,785785$ &c. - - $0,\dot{7}8\dot{5}$.

On nomme des fractions décimales périodiques *ſemblables* celles qui ont le même nombre de chiffres & dont les périodes commencent à la même place des décimales.

Toute fraction décimale finie peut être regardée comme infinie, en conſidérant les zéros comme la partie circulante.

On peut prendre chaque place des décimales d'une expreſſion périodique pour la premiere, pourvu que le nombre & l'ordre des chiffres périodiques ne ſoient pas altérés.

Car, comme c'eſt la diviſion qui produit la fraction décimale, ſi on prend une place quelconque des chiffres périodiques pour la premiere, les autres commenceront dans cet endroit à circuler périodiquement.

C'eſt pourquoi on peut faire que des fractions décimales périodiques diſſemblables commencent & finiſſent à des places pareilles de décimales.

Si dans l'échelle décimale 10, 100, 1000, 10000, 100000 &c. on choiſit une ſuite de termes également diſtans les uns des autres, qu'on prenne un terme quelconque pour le premier & qu'on faſſe de ce premier terme l'expoſant de la ſuite; il arrivera que la ſomme des termes inverſes ou réciproques d'une de ces ſuites, ſera égale toujours à l'inverſe du premier terme diminué de l'unité: Par exemple,

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \&c. = \frac{1}{9}, \text{ quand } 10 \text{ eſt le } 1^r \text{ terme.}$$

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \&c. = \frac{1}{99}, \text{ quand } 100 \text{ eſt le } 1^r \text{ terme.}$$

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \frac{1}{1000000000} + \&c. = \frac{1}{999}, \text{ quand } 1000 \text{ eſt le } 1^r \text{ terme.}$$

Car

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \&c. = \frac{100 + 10 + 1}{1000} = \frac{111 \ \&c.}{1000 \ \&c.}$$

$$\frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1000000} + \&c. = \frac{10000 + 100 + 1}{1000000} = \frac{10101 \ \&c.}{1000000 \ \&c.}$$

$$\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000000} + \frac{1}{1000000000} + \&c. = \frac{1000000 + 1000 + 1}{1000000000} = \frac{1001001 \ \&c.}{1000000000 \ \&c.}$$

Or

$$111 \ \&c. \times 9 = 1000 \ \&c. \text{ - - - - - - - donc } \frac{111 \ \&c.}{1000 \ \&c.} = \frac{1}{9}$$

$$10101 \ \&c. \times 99 = 100000 \ \&c. \text{ - - - - donc } \frac{10101 \ \&c.}{1000000 \ \&c.} = \frac{1}{99}$$

$$1001001 \ \&c. \times 999 = 1000000000 \ \&c. \text{ - donc } \frac{1001001 \ \&c.}{1000000000 \ \&c.} = \frac{1}{999}.$$

Par conſéquent le réciproque d'un nombre conſiſtant en n neuf eſt égal à un nombre périodique de n chiffres, où le premier à la droite eſt 1 & où les autres ſont des zéros: c'eſt à dire que

$$\frac{1}{9} = \frac{111 \ \&c.}{1000 \ \&c.} = 0,\dot{1},$$

$$\frac{1}{99} = \frac{10101 \ \&c.}{1000000 \ \&c.} = 0,\dot{0}\dot{1},$$

$$\frac{1}{999} = \frac{1001001 \ \&c.}{1000000000 \ \&c.} = 0,\dot{0}0\dot{1},$$

$$\frac{1}{9999} = \frac{100010001 \ \&c.}{1000000000000 \ \&c.} = 0,\dot{0}00\dot{1}.$$

Si donc on multiplie par un nombre D qui ne ſoit pas de plus de n chiffres, l'inverſe du nombre 9 répété n fois, le produit ſera une fraction décimale périodique de n chiffres où ſe trouveront à la droite les mêmes qui compoſent le nombre D.

Soit $D = 3$; ou $D = 23$: ou $D = 785$, ou quelqu'autre nombre.

Comme $\frac{1}{9} = \frac{111\ \&c.}{1000\ \&c.}$; $\frac{1}{99} = \frac{10101\ \&c.}{1000000\ \&c.}$; $\frac{1}{999} = \frac{1001001\ \&c.}{1000000000\ \&c.}$

on aura $\frac{1}{9} = \frac{111\ \&c.}{1000\ \&c.} \times 3 = \frac{333\ \&c.}{1000\ \&c.} = 0,\dot{3}$,

$$\frac{1}{99} \text{ ou } \frac{10101\ \&c.}{1000000\ \&c.} \left\{ \begin{array}{l} \times 3 = \frac{30303\ \&c.}{1000000\ \&c.} = 0,\dot{0}\dot{3}, \\ \times 23 = \frac{232323\ \&c.}{1000000\ \&c.} = 0,\dot{2}\dot{3}, \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{999} \text{ ou } \frac{1001001\ \&c.}{1000000000\ \&c.} \left\{ \begin{array}{l} \times 3 = \frac{3003003\ \&c.}{1000000000\ \&c.} = 0,\dot{0}0\dot{3}, \\ \times 23 = \frac{230230230\ \&c.}{1000000000\ \&c.} = 0,\dot{0}2\dot{3}, \\ \times 785 = \frac{785785785\ \&c.}{1000000000\ \&c.} = 0,\dot{7}8\dot{5}. \end{array} \right.$$

Donc toute fraction décimale périodique équivaut à une fraction ordinaire, dont le numérateur eſt exprimé par les mêmes chiffres périodiques & dont le dénominateur conſiſte en autant de 9 qu'il y a de chiffres dans le numérateur.

C'eſt ainſi que $0,\dot{3} = \frac{3}{9}$; parce que $\frac{1}{9} \times 3 = \frac{3}{9} = 0.\dot{3}$,

$0,\dot{0}\dot{3} = \frac{3}{99}$ $\qquad \frac{1}{99} \times 3 = \frac{3}{99} = 0,\dot{0}\dot{3}$,

$0,\dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99}$. $\qquad \frac{1}{99} \times \dot{2}\dot{3} = \frac{23}{99} = 0,\dot{2}\dot{3}$.

Donc une fraction décimale périodique d'un nombre quelconque de chiffres étant multipliée par un nombre d'autant de 9, donnera une expreſſion finie, qui aura les mêmes chiffres que la périodique.

Par exemple, $0,\dot{6} \times 9 = 6.$ Car $9 : 1 :: 6 : 0,\dot{6},$

$0,\dot{0}\dot{6} \times 99 = 6.$ $\quad 99 : 1 :: 6 : 0,\dot{0}\dot{6}.$

$0,\dot{2}\dot{5} \times 99 = 25.$ $\quad 99 : 1 :: 25 : 0,\dot{2}\dot{5}.$

$0,\dot{6}2\dot{5} \times 999 = 625.$ $\quad 999 : 1 :: 625 : 0,\dot{6}2\dot{5}.$

Il est clair par là que, dans la multiplication ordinaire, le produit d'un nombre périodique par son dénominateur en 9, sera en défaut du produit véritable, de la quantité du nombre périodique.

Ainsi $0,\dot{6} \times 9 = 5,4;$ & $5,4 +, 6 = 6.$ Car $\frac{6}{9} = 0,\dot{6}.$

$0,\dot{0}6 \times 99 = 5,94;$ & $5,94 + 0,06 = 6.$ Car $\frac{6}{99} = 0,\dot{0}\dot{6}.$

$0,\dot{6}2\dot{5} \times 999 = 624,375;$ & $624,375 + 0,625 = 625,0.$

Il s'ensuit que tout nombre fini est au même nombre considéré comme périodique, dans la proportion du dénominateur propre à la période, au même dénominateur augmenté de l'unité.

Ainsi que $9 : 10 :: 6 : \dot{6}.$ Parce que $\dot{6} \times 9 = 6 \times 10,$

$99 : 100 :: 25 : \dot{2}\dot{5}.$ Parce que $\dot{2}\dot{5} \times 99 = 25 \times 100.$

M. Robertson fait entendre dans une Scolie qui termine son Mémoire que si on ajoute aux articles précédens les manieres abrégées qu'on connoît pour multiplier ou pour diviser par un nombre quelconque de 9, on aura toute la théorie dont dépendent les opérations à faire avec les nombres périodiques. Car, dit-il, comme ceux-ci ont des 9 pour dénominateur, & qu'il ne manque que l'unité dans la place inférieure pour en faire des multiples de 10, on applique l'unité au lieu des 9 dans quelques additions & multiplications: ou bien en réduisant les parties circulantes en nombres finis & opérant sur ces nombres suivant les regles ordinaires on obtient des résultats finis: lesquels se réduisent ensuite à des résultats périodiques par les opérations contraires à celles dont on s'étoit servi pour réduire les nombres périodiques à des nombres finis.

ARTICLE IV.

Remarques sur la Table de fractions dont les diviseurs sont des nombres premiers, réduites en décimales périodiques.

Je n'avois rien vu encore des Écrits dont je viens de donner le précis, lorsque par hazard dans une conversation que j'eus avec M. de la Grange ma curiosité fut tournée du côté des fractions décimales périodiques.

M. de la Grange m'ayant fait observer qu'il seroit bon qu'on connût la loi que suivent les fractions de cette espece je me proposai de chercher à la découvrir, soit *a priori*, soit du moins par induction; je commençai par considérer les fractions qui ont pour numérateur 1 & pour dénominateur un nombre premier autre que 2 & 5, qui sont des diviseurs de 10, & je ne tardai pas à remarquer que le probleme de savoir combien de chiffres se trouveroient dans une période, revenoit à assigner le plus petit nombre s tel que $\frac{10^s - 1}{D}$ soit un nombre entier, en entendant par D le dénominateur de la fraction proposée. En effet, si je divise 1 par D, les mêmes décimales reviendront quand je serai parvenu à un reste 1, & si avant que d'être parvenu à ce reste j'ai ajouté s zéros ou multiplié s fois par 10, il faut que le quotient qui suit la virgule ait s chiffres & soit de plus $=$ $\frac{10^s - 1}{D \times 10^s}$. Le probleme étoit donc réduit à la formule très simple $\frac{10^s - 1}{D}$, en faisant abstraction du nombre 10^s qui multiplie D; mais j'entrevis cependant qu'il devoit être très difficile de déterminer s, quoique suivant la remarque que j'ai faite dabord au commencement, cette lettre ne puisse jamais être $>$ $D - 1$, & c'est qu'en effet on sait seulement par le 13^e^ Théoreme de M. Euler *de Residuis ex divisione potestatum relictis* (Nouv. Comment. de Pétersb. T. VII.) que pour que $\frac{10^s - 1}{D}$ soit un nombre entier il faut que s soit ou $=$ $D - 1$ ou égal à un facteur de $D - 1$, ſans qu'on ait pu juſqu'à préſent réſoudre le probleme plus généralement. C'eſt la raiſon pourquoi j'ai commencé bientôt à calculer la premiere des deux Tables qui ſuivront, perſuadé que non ſeulement je conſtruirois une Table utile, mais qu'elle devoit fournir du moins *a poſteriori* des éclairciſſemens ſur la ſolution d'un probleme curieux.

J'ai étendu cette Table, comme on voit, juſqu'au plus grand nombre premier au-deſſous de 200, c'eſt à dire juſqu'à 199; on trouve donc dans la premiere colonne la fraction $\frac{1}{D}$ qu'il s'agiſſoit de réduire en décimales; à ces termes répond dans la ſeconde colonne la premiere période de la fraction décimale qui lui eſt égale & que j'exprime en général par $0 + \frac{10^s - 1}{D \times 10^s} + \frac{10^s - 1}{D \times 10^{2s}} +$ &c. en entendant par s le nombre des chiffres de la période; une troiſieme colonne indique ce nombre s & fait voir en même tems en quels nombres il ſe décompoſe entant que s doit être $= D - 1$ ou à un diviſeur de $D - 1$. Voici à préſent pluſieurs remarques que la conſtruction & l'inſpection de cette Table fourniſſent.

REMARQUE I.

Tous les réſultats que j'ai trouvés pour s confirment le Théoreme que $\frac{10^s - 1}{D}$ eſt un nombre entier quand s eſt $= D - 1$ ou $=$ à un diviſeur de $D - 1$; & ne l'eſt point dans d'autres cas; mais je doute fort qu'on apperçoive dans ces réſultats quelques loix qui puiſſent faire juger abſolument de la valeur préciſe du nombre s & encore moins qui puiſſent faire trouver par une voye plus courte que la diviſion effective le quotient $\frac{10^s - 1}{D}$. J'ai fait pour cela pluſieurs eſſais infructueux en cherchant principalement à tirer parti des fractions continuës qu'on a trouvé être d'un ſi grand ſecours pour réſoudre bien des problemes qui ſe refuſoient aux méthodes analytiques les plus uſitées.

REMARQUE II.

Ce qu'on ſait ſur la valeur de s ne laiſſe pas cependant d'être déjà d'un grand ſecours pour conſtruire & pour continuer des Tables telles que celle

dont

dont il eſt queſtion; car ces diviſions étant aſſés ennuyeuſes & d'autant plus qu'on ne peut gueres s'empêcher de ſe tromper fréquemment, on peut être perſuadé que cela eſt arrivé quand on a paſſé un nombre de diviſions plus grand que $D - 1$ ou quand on a trouvé pour s un nombre moindre que $D - 1$ ſans en être un diviſeur.

REMARQUE III.

Les limites qu'a la valeur de s ſerviroient peut-être à employer avec quelque avantage la méthode de diviſion que M. Rallier des Ourmes a propoſée dans le V[e] Vol. des Mémoires préſentés à l'Acad. Royale des Sciences de Paris; en ſuppoſant que quelqu'un qui s'eſt bien familiariſé cette méthode y trouve toute la facilité que M. des Ourmes promet. Je parle de la méthode de trouver le quotient d'une diviſion qu'on ſait pouvoir ſe faire ſans reſte, lorſqu'on connoit autant des derniers chiffres ſur la droite du dividende qu'il doit y en avoir dans le quotient, en effectuant la diviſion de la droite vers la gauche.

REMARQUE IV.

Il n'eſt pas inutile d'obſerver qu'on ſait toujours quel eſt le dernier chiffre du quotient $\frac{10^s - 1}{D \times 10^s}$; on le ſait parce que cette période finiſſant lorſqu'on eſt revenu au reſte 1, il eſt clair que le dernier chiffre de la période doit être 9 lorſque celui du diviſeur D eſt 1,

7 - - - - - - - - - 7,
3 - - - - - - - - - 3,
1 - - - - - - - - - 9.

REMARQUE V.

J'ai remarqué dans mes diviſions que lorſque s devenoit $D - 1$ le $\frac{(D-1)}{2}^e$ reſte étoit toujours $D - 1$ & j'en ai conclu ce théoreme:

Quand $D - 1$ eſt la plus petite valeur de s telle que $10^s - 1$ ſoit diviſible par le nombre premier D autre que 2 & 5, le $\left(\frac{D-1}{2}\right)^e$ reſte de cette diviſion eſt toujours $D - 1$.

Pour prouver au reste que ce théoreme doit avoir lieu & être général, il ne s'agit que de prouver que $\frac{10^{\frac{D-1}{2}} - D + 1}{D}$ ou $\frac{10^{\frac{D-1}{2}} + 1}{D} - 1$, est toujours un nombre entier, ou bien que $\frac{10^u + 1}{2u + 1} - 1$ ou $\frac{10^u + 1}{2u + 1}$ est un nombre entier: car D étant un nombre impair on peut faire $\frac{D - 1}{2} = u$. Or, puisque $\frac{10^{D-1} - 1}{D}$ est toujours un nombre entier & que $D - 1$ ne peut être que pair, il faut que $\frac{10^{2u} - 1}{2u + 1}$ ou $\frac{(10^u + 1)(10^u - 1)}{2u + 1}$ soit un nombre entier & que par conséquent ou $10^u + 1$ ou $10^u - 1$ soit divisible par $2u + 1$. Mais $10^u - 1$ étant de la même forme que $10^{D-1} - 1$, n'est pas divisible par D ou $2u + 1$, parce que $u < D - 1$ & qu'on a supposé $10^{D-1} - 1$ le plus petit nombre divisible par D, donc $\frac{10^u + 1}{2u + 1} - 1$ ou $\frac{10^{\frac{D-1}{2}} + 1}{D} - 1$ doit être un nombre entier dans le cas que nous avons supposé & le $\left(\frac{D - 1}{2}\right)^e$ reste de la division doit être $D - 1$.

REMARQUE VI.

Mais il y a plus: j'ai remarqué aussi que, quel que soit le nombre s des chiffres de la période, si un des restes de la division est $D - 1$, ce sera le $\frac{s}{2}^e$.

Ce théoreme ne peut pas se démontrer avec la même facilité que le précédent, mais on peut en déduire les cas où le reste $D - 1$ se trouvera dans la division: car, pour que cela soit, il faut que $\frac{10^s + 1}{D} - 1$ ou $\frac{10^s + 1}{D}$ soit un nombre entier; or on sait quelle forme doit avoir le nombre D pour qu'il puisse diviser $10^s + 1$ suivant la grandeur du nombre s & suivant que ce nombre est pair ou impair; M. Euler a indiqué les

les formes de ces diviſeurs dans les Nouv. Comment. de Pétersbourg T. I. aux §§. 29 & 33 de ſon Mémoire ſur les diviſeurs des nombres.

REMARQUE VII.

Ces deux théoremes ſont d'une grande utilité dans la conſtruction de la Table des décimales périodiques; car lorſqu'on arrive au nombre $D - 1$, on ne doit pas négliger de compter le quantieme reſte il eſt; ſi ce n'eſt pas le $\left(\frac{D-1}{2}\right)^e$ ou le $\left(\frac{s}{2}\right)^e$, c'eſt à dire qu'on ait dans le quotient préciſément $\frac{D-1}{2}$ chiffres ou bien un nombre de chiffres qui ſoit la moitié d'un diviſeur de $D - 1$, on peut être perſuadé qu'il y a quelque erreur.

REMARQUE VIII.

On déduit facilement de la formule $\frac{10^s - 1}{D}$, & on l'a vu auſſi dans les articles précédens, que $\frac{1}{D}$ eſt toujours égal au quotient périodique $\frac{10^s - 1}{D}$ qu'on peut déſigner par Q, diviſé par le nombre qu'exprime le chiffre 9 répété s fois; il ſeroit donc fort utile d'avoir une Table qui contînt tous les nombres premiers diviſeurs de 9, de 99, de 999 &c. puiſqu'on y verroit auſſitôt pour beaucoup de fractions $\frac{1}{D}$ de combien de chiffres deviennent les périodes de leurs valeurs en décimales; mais ſi une telle Table ſeroit commode il paroît d'un autre côté embarraſſant de la pouſſer auſſi loin qu'il ſeroit néceſſaire, les périodes étant le plus ſouvent bien longues en comparaiſon des ſecours que fourniſſent les Tables de diviſeurs les plus étendues. La conſidération ſuivante abrégera cependant cette recherche & la rendra moins rebutante: les nombres 9, 99, 999 &c. ſont des multiples de 9 par la progreſſion géométrique $1 + 10^1 + 10^2 + 10^3$ &c. Or quand on cherche les diviſeurs des ſommes d'un certain nombre de termes de cette progreſſion, on rencontre des manieres d'abréger que beaucoup d'autres nombres moins grands ne fourniroient pas; je le fais voir dans un autre Mémoire & j'ai même ébauché déjà la Table de ces diviseurs de 1, 11, 111 &c.

ARTICLE V.

Sur les fractions décimales périodiques provenant de fractions dont les diviseurs sont produits de deux nombres premiers.

(1) Soit $\frac{1}{P}$ une fraction de cette espece & que $\frac{1}{P} = \frac{1}{D} \times \frac{1}{d}$, il est clair

1°. Que le nombre des décimales, que nous désignerons par t, ne peut surpasser $(D \times d) - 1$ ou $P - 1$.

2°. Que s étant le nombre des chiffres décimales de $\frac{1}{D}$, si d est un diviseur du quotient Q ou $\frac{10^s - 1}{D \times 10^s}$, considéré comme un nombre entier $\frac{10^s - 1}{D}$, le nombre des chiffres pour $\frac{1}{P}$ sera pareillement $= s$: on pourroit croire un instant que t peut devenir $< s$ lorsque d est de plusieurs chiffres, mais on remarquera que, quoique $\frac{Q}{d}$ puisse alors se présenter sous la forme d'un très petit nombre entier, il sera cependant précédé de plusieurs zéros qui remplissant les places décimales feront que t ne sera jamais $< s$.

3°. Que si σ est le nombre des décimales de $\frac{1}{d}$, & que D soit un diviseur du quotient $\frac{10^\sigma - 1}{d}$ ou q, on aura $t = \sigma$.

(2) Mais il y aura des cas où t sera moindre que $P - 1$ & cependant plus grand que s ou que σ; voyons ce qu'on pourra déterminer *a priori* à cet égard.

Reprenons la division que nous avons supposée au N°. 2. du §. préc. & imaginons-nous que cette division ne puisse pas se faire sans reste; on aura $q = \frac{Q}{d} = r + \frac{\theta}{d}$, c'eſt à dire un nombre k de $d - 1$ chiffres ou de $\frac{d-1}{f}$ chiffres (en entendant par f un facteur de $d - 1$) multiplié par le nombre $dr + \theta$. Or r eſt de s chiffres, & conſidérons que ſi d eſt de ε chiffres il y aura dans k, $\varepsilon - 1$ zéros; & par conſéquent, quoique $dr + \theta$ ſoit de εs chiffres, cependant q ne pourra être de plus de $s \times (d - 1)$ chiffres.

Il ſuit de là que t ne pourra jamais être tout à fait de $P - 1$ chiffres, puiſque s peut-être tout au plus $= D - 1$ & que $(D - 1) \times (d - 1) < P - 1$.

(3) Ce que nous venons de dire ſemble être la démonſtration de ce que dit Wallis, que lorſqu'il n'y a point de commun diviſeur entre les nombres que nous avons déſignés par s & σ, on trouvera toujours $t = s\sigma$, produit qui eſt alors le plus petit commun dividende entre s & σ. On pourra peut-être auſſi donner par une voye ſemblable une démonſtration plus préciſe que celle de Wallis pourquoi t eſt égal au plus petit commun dividende de s & de σ, vérité que je ſoupçonnois devoir avoir lieu & qui a été confirmée par la Table II.

(4) Mais une exception dont il faut cependant rendre raiſon, ainſi que je le ferai plus bas, eſt celle-ci: Quand $P = \frac{1}{DD}$ on trouve $t = sD$, ſoit que s ſoit $= D - 1$, ſoit que ce ne ſoit qu'un diviſeur de $D - 1$. Je vais en donner quelques exemples:

$$\frac{1}{49} = \frac{1}{7 \times 7} = 0,0204081632653061224489795918367\ 34693877551 \text{ \&c.}$$

donc $t = 42 = 6 \times 7 = (D - 1) \times D$.

$$\frac{1}{121} = \frac{1}{11 \times 11} = 0,0082644628099173553719 \text{ \&c.}$$

donc $t = 22 = 2 \times 11 = sD$.

$$\frac{1}{169} = \frac{1}{13 \times 13} = 0,0059171597633136094674556213017$$
$$7514792899408284023668639053254$$
$$4378698224852071 \text{ \&c.}$$

donc $t = 78 = 6 \times 13 = sD.$

$$\frac{1}{1369} = \frac{1}{37 \times 37} = 0,0007304601899196493791088385682$$
$$9802775748721694667640613586559$$
$$5325054784514243973703433162892$$
$$622352091811541271 \text{ \&c.}$$

/37 donc $t = 111 = 3 \times \cancel{11} = sD.$

(5) L'exception dont je viens de parler aura cependant auſſi ſes exceptions, ſavoir lorſque le quotient Q eſt diviſible par D, par exemple:

$\frac{1}{9} = \frac{1}{3 \times 3} = 0,111$ &c. donc $t = 1 = s.$

(6) Mais il eſt clair au reſte que pour les fractions de la forme $\frac{1}{DD}$ le nombre t doit toujours être ou s ou sD, n'y ayant jamais de commun diviſeur entre s & D.

(7) Nous avons déjà vu plus haut de quelle utilité il eſt de connoître les diviſeurs des nombres 9, 99, 999 &c. Ces diviſeurs fourniront auſſi une voye aiſée pour reconnoître ſi une fraction qui a pour numérateur l'unité & pour dénominateur le produit, non ſeulement de deux, mais ſi l'on veut de pluſieurs nombres premiers, donnera une fraction décimale d'un nombre de chiffres égal à celui d'un de ces nombres premiers; car ſoit $\frac{1}{D} = \frac{abcd \text{ \&c.}}{9999 \text{ \&c.}}$, il eſt évident que toutes les fractions ayant pour dénominateur des nombres premiers, diviſeurs de 9999 &c. & autres que D, ſeront dans le cas dont nous parlons, vu que ces nombres premiers ou ces produits ſeront auſſi facteurs de $abcd$ &c.

(8) Pour être encore plus clair, ſoit $\frac{1}{D} = \frac{abc \text{ \&c.}}{s\,(999)}$, & $\frac{1}{d} = \frac{\alpha\beta\gamma \text{ \&c.}}{\sigma\,(999)}$, où s & σ indiquent combien de fois le nombre 9 eſt répété;

ſi d eſt un diviſeur de $s(999)$ il le ſera auſſi de abc, parce que abc eſt diviſeur de $s(999)$ & qu'il n'y a point de commun diviſeur entre D & d; par conſéquent la fraction décimale qui réſulte de $\frac{1}{D \times d}$ aura le même nombre de chiffres que celle qui répond à $\frac{1}{D}$, & il faut remarquer que ce ſera préciſément le même nombre de chiffres & jamais un moindre nombre: car, quoique le quotient de la diviſion de abc &c. par d devienne un plus petit nombre, il n'aura cependant pas moins de chiffres que n'en a abc &c. à cauſe des zéros qui rempliront les premieres places des décimales.

Il eſt évident au reſte, que ſi D eſt diviſeur de $\alpha\beta\gamma$ &c. les mêmes remarques auront lieu & que la période pour $\frac{1}{D \times d}$ ſera de σ chiffres.

(9) On peut conſidérer auſſi que $\frac{1}{D \times d} = \frac{abc}{s(999)} \times \frac{\alpha\beta\gamma}{\sigma(999)}$, & qu'on tombe dans le cas précédent lorſqu'entre les nombres $s(999)$ & $\sigma(999)$ ſe trouve le commun diviſeur d, puiſque d eſt diviſeur de $\sigma(999)$, & que pour l'être de abc, il faut qu'il le ſoit auſſi de $s(999)$; de plus, que ſi entre $s(999$ & $\sigma(999)$ ſe trouve le commun diviſeur 99, le nombre des chiffres ne ſera que la moitié de $s\sigma$; qu'il n'en ſera que le tiers ou le quart lorſque ce commun diviſeur eſt 999 ou 9999, & ainſi de ſuite.

(10) Comme $D - 1$ ou $d - 1$ ſont toujours des nombres pairs, il s'en enſuit que la période pour une fraction $\frac{1}{D \times d}$ ne peut jamais être de $(D - 1) \times (d - 1)$, mais tout au plus de $\frac{(D - 1) \times (d - 1)}{2}$ chiffres, quand D n'eſt pas $= d$.

(11) La Table II, que j'ai calculée pour toutes les valeurs de D & d depuis 1 juſqu'à 23, ne contient aucun cas où $t = s\sigma$, mais en voici deux exemples:

$$\frac{1}{1517} = \frac{1}{37 \times 41} = 0,00065919557811 47 \text{ \&c.}$$

donc $t = 15 = 3 \times 5 = s\sigma$, par la Table I.

$$\frac{1}{3737} = \frac{1}{37 \times 101} = 0,000267594327 \text{ \&c.}$$

donc $t = 12 = 3 \times 4 = s\sigma$.

(12) C'eſt actuellement qu'on pourra voir bien clairement la raiſon de l'exception dont nous avons parlé au §. 4. au ſujet des fractions de la forme $\frac{1}{DD}$.

On ſait que le nombre des chiffres d'une période pour $\frac{1}{D \times d}$ ne peut ſurpaſſer $s\sigma$, parce que $s\sigma$ (999 &c.) eſt toujours diviſible tant par D que par d, étant le produit de $s(999)$ multiple de D, par $\sigma(999)$ multiple de d; de plus on voit que ce nombre de la période eſt

$\frac{s\sigma}{2}$ quand $s\sigma$ (999 &c.) eſt diviſible par 2 (9),

$\frac{s\sigma}{3}$ - - - - - - - - - - 3 (9),

$\frac{s\sigma}{p}$ - - - - - - - - - - - p (9) &c.

Or ſi $\frac{1}{D} = \frac{abc}{s(999)}$, & que abc ne ſoit pas diviſible par D, il eſt clair qu'on ne peut pas employer le plus grand commun diviſeur $s(999)$ entre $s(999)$ & $s(999)$, & dire que la période ne ſera que de s chiffres: de plus comme $s(999)$ n'eſt pas diviſible par DD, que $s(999)$ eſt le plus petit nombre diviſible par D & que ni $ss(999)$ ni même $fss(999)$ (ſi $D - 1 = fs$) ne peuvent avoir d'autres facteurs multiples de D que $s(999)$, il eſt évident qu'il ne peut y avoir un nombre $y < fss$ tel que y (999) ſoit diviſible par DD; par conſéquent le plus petit nombre $y(999)$ diviſible par DD eſt $s(fs + 1)$ (999) ou $sD(999)$, & celui-ci l'eſt évidemment puiſqu'il eſt diviſible par $D(999)$ & par $s(999)$ & que $D(999)$ eſt toujours un multiple de D, quand D eſt, comme nous le ſuppoſons, un nombre premier quelconque autre que 2 & 5.

(13)

(13) Les remarques précédentes s'étendent si facilement aux fractions $\frac{1}{P}$, dans lesquelles P est égal au produit de plus de deux nombres premiers, que pour donner des bornes à cet Écrit je n'en parlerai pas. Je ne m'arrêterai pas non plus aux fractions qui ont pour dénominateur des produits de nombres premiers ou multiples de premiers, par des nombres commensurables avec quelque puissance de 10, ayant trouvé dans Wallis les idées que j'avois eues sur ce sujet lorsque j'ai pensé à m'en occuper.

(14) Mais je ne négligerai pas de faire observer encore que dans la construction de quelque Table de décimales périodiques que ce soit il est toujours essentiel pour se guider dans ce travail de faire attention au résidu $P - 1$, en faisant l'application des Remarques V & VI. de l'Art. IV.

Je finirai enfin par le petit Article qui suit.

ARTICLE VI.

Sur les fractions décimales périodiques produites par des fractions qui ont des nombres premiers dans le dénominateur & d'autres nombres que l'unité dans le numérateur.

Soit $\frac{m}{D}$ une fraction de cette espece, il est évident que si le nombre des décimales pour D est $D - 1$ on aura pour $\frac{m}{D}$ le même nombre de chiffres & aussi les mêmes chiffres, mais rangés dans un autre ordre; car le premier chiffre sera le nombre qui dans la division de 1 par D résultoit du reste m; par exemple $\frac{1}{7} = 0,142857$ &c. mais $\frac{3}{7} = 0,428571$ &c. par la raison que la division commence par 3, qui étoit le second reste dans celle de $\frac{1}{7}$.

Les réductions de fractions $\frac{1}{D}$ en décimales serviront donc immédiatement aussi pour un nombre considérable de fractions telles que $\frac{m}{D}$; mais outre qu'on peut n'avoir pas ſous les yeux la réduction de $\frac{1}{D}$ en décimales, il y a des cas où le nombre m ne ſe trouvera pas parmi les réſidus de la diviſion de 1 par D & ces cas auront lieu fréquemment quand le nombre de chiffres ne ſera pas $D - 1$, mais ſeulement un diviſeur de $D - 1$; je ne ſache pas alors d'autre expédient que de multiplier directement par m la fraction décimale équivalente à $\frac{1}{D}$; par exemple, on ne trouve point le réſidu 7 dans la réduction de $\frac{1}{13}$ & $\frac{7}{13} = 0,538461$ &c. où les chiffres ne ſont plus les mêmes.

On obſervera qu'au reſte le nombre des chiffres reſtera toujours le même que pour $\frac{1}{D}$, parce que $\frac{m}{D}$ eſt ſuppoſé moindre que 1 & que ſi $m > D$ on commence par mettre les entiers de côté pour n'opérer que
/m ſur la fraction $\frac{\mu}{D}$, en entendant par μ le réſidu de la diviſion de D en μ.

Ces idées ſuffiſent pour étendre extrêmement les Tables qui ſont jointes à ce Mémoire; & afin de faciliter ce travail à qui voudra s'en charger je conſerve les papiers ſur leſquels j'ai fait mes diviſions en décimales. J'ajouterai donc ſeulement qu'il ſeroit cependant utile de pouvoir déterminer par la ſimple inſpection de la fraction périodique de $\frac{1}{D}$, ſi tel ou tel reſte doit s'être trouvé dans la diviſion de 1 par D.

Il faudroit pour cet effet examiner s'il y a quelque nombre x moindre que $D - 1$, $\left(\text{ou} < s, \text{ quand on connoît le période de } \frac{1}{D}\right)$, tel que $\frac{10^x - m}{D}$ ſoit un nombre entier.

I. TABLE

de fractions, dont les diviseurs sont des nombres premiers, réduites en décimales périodiques.

$1 : D =$	$0 + (10^s - 1) : D \times 10^s + (10^s - 1) : D \times 10^{2s} + \&c.$ donc	s ou $(D - 1) : \delta$
1 : 3 =	0, 3 &c.	1 = (3 — 1) : 2
1 : 7 =	0, 142857	6 = (7 — 1) : 1
1 : 11 =	0, 09	2 = (11 — 1) : 5
1 : 13 =	0, 076923	6 = (13 — 1) : 2
1 : 17 =	0, 0588235294117647	16 = (17 — 1) : 1
1 : 19 =	0, 052631578947368421	18 = (19 — 1) : 1
1 : 23 =	0, 0434782608695652173913	22 = (23 — 1) : 1
1 : 29 =	0, 0344827586206896551724137931	28 = (29 — 1) : 1
1 : 31 =	0, 032258064516129	15 = (31 — 1) : 2
1 : 37 =	0, 027	3 = (37 — 1) : 12
1 : 41 =	0, 02439	5 = (41 — 1) : 8
1 : 43 =	0, 023255813953488372093	21 = (43 — 1) : 2
1 : 47 =	0, 0212765957446808510638297872340425531914893617	46 = (47 — 1) : 1
1 : 53 =	0, 0188679245283	13 = (53 — 1) : 4
1 : 59 =	0, 0169491525423728813559322033898305084745762711864406779661	58 = (59 — 1) : 1
1 : 61 =	0, 016393442622950819672131147540983606557377049180327868852459	60 = (61 — 1) : 1
1 : 67 =	0, 014925373134328358208955223880597	33 = (67 — 1) : 2

$1 : D =$	$0 + (10^s - 1) : D \times 10^s + (10^s - 1) : D \times 10^{2s} + \&c.$ donc	s ou $(D - 1) : \delta$
$1 : 71 =$	0, 01408450704225352112676056338028169	$35 = (71 - 1) : 2$
$1 : 73 =$	0, 01369863 - - -	$8 = (73 - 1) : 9$
$1 : 79 =$	0, 0126582278481 - - -	$13 = (79 - 1) : 6$
$1 : 83 =$	0, 012048192771084337349397590361445783132 53 - - - -	$41 = (83 - 1) : 2$
$1 : 89 =$	0, 011235955056179775280898876404494382022 47191 - - - -	$44 = (89 - 1) : 2$
$1 : 91 =$	0, 010989 - - -	$6 = (91 - 1) : 15$
$1 : 97 =$	0, 010309278350515463917525773195876288659 793814432989690721649484536082474226804 123711340206185567 - -	$96 = (97 - 1) : 1$
$1 : 101 =$	0, 0099 - - - -	$4 = (101 - 1) : 25$
$1 : 103 =$	0, 0097087378640776699029126213592233	$34 = (103 - 1) : 3$
$1 : 107 =$	0, 009345794392523364485981308411214953271 02803738317757 - -	$53 = (107 - 1) : 2$
$1 : 109 =$	0, 009174311926605504587155963302752293577 981651376146788990825688073394495412844 036697247706422018348623853211 -	$108 = (109 - 1) : 1$
$1 : 113 =$	0, 008849557522123893805309734513274336283 185840707964601769911504424778761061946 9026548672566371681415929203539823 -	$112 = (113 - 1) : 1$
$1 : 127 =$	0, 007874015748031496062992125984251968503 937 - - - - -	$42 = (127 - 1) : 3$
$1 : 131 =$	0, 007633587786259541984732824427480916030 534351145038167938931297709923664122137 4 045801526717557251908396946564885496183 206106870229 - - - -	$130 = (131 - 1) : 1$
$1 : 137 =$	0, 00729927 - - - -	$8 = (137 - 1) : 17$

$1 : D =$	$0+(10^s-1):D\times10^s+(10^s-1):D\times10^{2s}+$&c. donc	s ou $(D-1):\delta$
1 : 139 =	0, 0071942446043165467625899280575539568345 5323741 - - - -	46 = (139 − 1) : 3
1 : 149 =	0, 0067114093959731543624161073825503355704 6979865771812080536912751677852348993 2885906040268456375838926174496644295302 0134228187919463087248322147651 -	148 = (149 − 1) : 1
1 : 151 =	0, 0066225165562913907284768211920529801324 503311258278145695364238410596026 49	75 = (151 − 1) : 2
1 : 157 =	0, 0063694267515923566878980891719745222292 9936305732484076433121019108280254777070 7	78 = (157 − 1) : 2
1 : 163 =	0, 006134969325153374233128834355828220858 895705521472392638036809815950920245398 773 - - - -	81 = (163 − 1) : 2
1 : 167 =	0, 0059880239520958083832335329341317365 26 9461077844311377245508982035928143712 57 4850299401197604790419161676646706586 82 6347305389221556886227544910179640718 56 2874251497 - - -	166 = (167 − 1) : 1
1 : 173 =	0, 0057803468208092485549132947976878612 71 6763 - - - -	43 = (173 − 1) : 4
1 : 179 =	0, 005586592178770949720670391061452513966 4804469268156424581 - - -	58 = (179 − 1) : 3
1 : 181 =	0, 0055248618784530386740331491712707182 32 0441988950276243093922651933701657458 56 3535911602209944751381215469613259668 50 8287292817679558011049723756906077348 06 629834254143646 3408839779 -	180 = (181 − 1) : 1
1 : 191 =	0, 0052356020942408376963350785340314136 12 5654450261780104712041884816753926701 57 0680628272251308 9 - -	95 = (191 − 1) : 2

$1 : D =$	$0 + (10^s - 1) : D \times 10^s + (10^s - 1) : D \times 10^{2s} +$ &c. donc	s ou $(D - 1) : \delta$
$1 : 193 =$	0, 00518134715025906735751295336787564766839378238341968911917098445595854922279792746113989637305699481865284974093264248704663212435233160621761658031088082901554404145077720207253886010362694 3	$192 = (193 - 1) : 1$
$1 : 197 =$	0, 0050761421319796954314720812182741116751269035532994923857868020304568527918781725888324873096446 7 - -	$98 = (197 - 1) : 2$
$1 : 199 =$	0, 005025125628140703517587939698492462311557788944723618090452261306532663316582914572864321608040201 - -	$99 = (199 - 1) : 2$

II. TABLE

de fractions, dont les diviſeurs ſont des produits de deux nombres premiers, réduites en décimales périodiques.

$1 : P = 1 : D \times d =$	$0 + (10^t - 1) : P.10^t + (10^t - 1) : P.10^{2t} +$ &c. donc	$t = (s \times \sigma) : p$
$1 : 9 = 1 : 3 \times 3 =$	0, 111 &c. - - -	$1 = (1 \times 1) : 1$
$1 : 21 = 1 : 3 \times 7 =$	0, 047619 - - -	$6 = (1 \times 6) : 1$
$1 : 33 = 1 : 3 \times 11 =$	0, 03 - - - -	$2 = (1 \times 2) : 1$
$1 : 39 = 1 : 3 \times 13 =$	0, 025641 - - -	$6 = (1 \times 6) : 1$
$1 : 49 = 1 : 7 \times 7 =$	0, 020408163265306122448979591836734693877551 - - -	$42 = (6 \times 7) : 1$
$1 : 77 = 1 : 7 \times 11 =$	0, 012987 - - -	$6 = (6 \times 2) : 2$
$1 : 91 = 1 : 7 \times 13 =$	0, 010989 - - -	$6 = (6 \times 6) : 6$
$1 : 119 = 1 : 7 \times 17 =$	0, 008403361344537815126050420168067226890756302521 - -	$48 = (6 \times 16) : 2$
$1 : 133 = 1 : 7 \times 19 =$	0, 007518796992481203 - -	$18 = (6 \times 18) : 6$
$1 : 161 = 1 : 7 \times 23 =$	0, 0062111180124223602484472049689440993788819875776397515527950310559 - - - -	$66 = (6 \times 22) : 2$
$1 : 143 = 1 : 11 \times 13 =$	0, 006993 - - -	$6 = (2 \times 6) : 2$
$1 : 187 = 1 : 11 \times 17 =$	0, 0053475935828877 - -	$16 = (2 \times 16) : 2$
$1 : 209 = 1 : 11 \times 19 =$	0, 004784688995215311 - -	$18 = (2 \times 18) : 2$
$1 : 253 = 1 : 11 \times 23 =$	0, 0039525691699604743083 -	$22 = (2 \times 22) : 2$
$1 : 221 = 1 : 13 \times 17 =$	0, 004524886877828054298642533936651837104072398 19 - -	$48 = (6 \times 16) : 2$
$1 : 247 = 1 : 13 \times 19 =$	0, 004048582995951417 - -	$18 = (6 \times 18) : 6$

$1 : P = 1 : D \times d =$	$0 + (10^t - 1) : P.10^t + (10^t - 1) : P.10^{2t} +$ &c. donc	$t = (s \times \sigma) : p$
$1 : 299 = 1 : 13 \times 23 =$	0, 00334448160535117056856187290969 89966555183946488294314381270903 01 - - - -	$66 = (6 \times 22) : 2$
$1 : 323 = 1 : 17 \times 19 =$	0, 00309597523219814241486068111455 10835913312693498452012383900428 79256944272445820433436532507739 93808049535603715170278637770897 8328173374613 - -	$144 = (16 \times 18) : 2$
$1 : 391 = 1 : 17 \times 23 =$	0, 00255754475703324808184143222506 39386189258312020460358056265984 65473145780051150895140664961636 82864450127877237851662404092071 61125319693094629156010230179028 1329923273657289 - -	$176 = (16 \times 22) : 2$
$1 : 437 = 1 : 19 \times 23 =$	0, 00228832951945080091533180778032 03661327231121281464530892448512 58581235697940503432494279176201 37299771167048054919908466819221 96796338672768878718535469107551 48741418764302059496567505720823 798627 - - - -	$198 = (18 \times 22) : 2$

ADDITIONS

ADDITIONS

au Mémoire précédent. (*)

ADDITION PREMIERE.

Ayant communiqué à mon ſavant Confrere M. Lambert mes Tables de décimales périodiques & les Remarques qui les précedent, il m'a appris qu'il s'étoit occupé du même ſujet & qu'il avoit publié ſes idées dans le troiſieme Volume des *Acta Helvetica*, imprimé en 1758, & dans les *N. Acta Eruditorum* du mois de Mars 1769.

J'ai trouvé qu'en effet, après avoir indiqué dans le premier de ces Recueils quelques vues générales, M. Lambert a donné dans le ſecond une théorie preſque complete ſur les Fractions décimales périodiques, quoique ſon principal but ait été dans ce Mémoire de faire ſervir ces décimales à trouver des diviſeurs de nombres. Les principes ſur leſquels M. Lambert appuye ſes démonſtrations s'accordent avec ceux qu'on a vu établis dans ce qui a précédé, mais M. Lambert fait de plus différentes remarques que je ne dois pas paſſer ſous ſilence, & comme ſon Mémoire eſt écrit plus ſyſtématiquement que le mien, je crois devoir encore préſenter ici de ſuite les propoſitions qu'il démontre; elles offriront en même tems un réſumé utile d'une partie de ce qui a été dit.

1. La fraction $\frac{1}{a}$ réduite en fraction décimale en donne une finie ſi a appartient à la claſſe des nombres $2^n \times 5^m$, & infinie mais périodique ſi a n'eſt pas de cette forme.

2. Les périodes dans ce dernier cas ſont tout au plus de $a-1$ termes.

3. On trouve facilement le nombre a qui a produit une période donnée, en écrivant ſous les chiffres de la période un pareil nombre de 9, & en réduiſant cette fraction aux moindres termes.

(*) Lues à l'Académie le 17 Décembre 1772.

Voilà les théoremes que M. Lambert avoit démontrés dans les Actes Helvétiques : on va voir à quel point il les a étendus.

4. Soit a un nombre premier, b un nombre quelconque non divisible par a, on aura $\frac{b^{a-1} - 1}{a} =$ à un nombre entier.

M. Lambert fait observer que ce théoreme célebre de Fermat, démontré aussi par M. Euler dans les Commentaires de Pétersbourg, est applicable aux fractions décimales, puisqu'on aura $b = 10$ & $\frac{10^{a-1} - 1}{a} =$ nombre entier, excepté quand $a = 2$ ou $a = 5$. Ensuite il remarque

5. que si a exprime tout autre nombre premier, & que $\frac{10^m - 1}{a} =$ nombre entier, il faut que m soit ou un multiple de $a - 1$ ou $=$ $a - 1$ ou une partie aliquote de $a - 1$.

6. Si $10^m - 1$ est divisible par le nombre premier a & $10^n - 1$ par le nombre premier b & que m & n soient premiers entr'eux, le produit ab divisera $10^{mn} - 1$. Mais si m & n ne sont pas premiers entr'eux & que leur plus petit commun dividende soit c, ce sera $10^c - 1$ qui sera divisible par ab. Excepté quand $a = b$.

7. Si en divisant l'unité par un nombre impair quelconque g on obtient une fraction décimale de $g - 1$ chiffres périodiques, g est nécessairement un nombre premier.

8. Mais si la période est de m chiffres & que $g - 1$ ne soit pas divisible par m, le nombre g ne peut être premier.

9. Si au contraire $g - 1$ est divisible par m & que m soit premier, g sera ou premier ou s'il a des diviseurs ils seront ou de la forme $2^n \times 5^m$, ou 3, ou 9, ou enfin des nombres tels qu'en divisant l'unité ils produisent pareillement une fraction périodique de m chiffres.

10. Mais si m n'est pas un nombre premier il peut arriver de plusieurs manieres que g ne le soit pas.

11. Si $\frac{1}{a}$ donne une période de $a - 1$ chiffres de ſorte que $\frac{10^{a-1} - 1}{a}$ = nombre entier, on aura auſſi $\frac{10^{\frac{a-1}{2}} + 1}{a}$ = nomb. ent. M. Lambert tire de ce théoreme, qui eſt le même que j'ai démontré plus haut, une remarque fort utile qui m'avoit échappé; la voici:

12. Cela fait, dit-il, que lorſqu'on fait les diviſions effectives on peut réduire en ce cas l'opération à la moitié.

En effet, ſi pour $\frac{10^m + 1}{a}$ le quotient eſt $= q$, on aura pour $\frac{10^{2m} - 1}{a}$ le quotient $(10^m - 1)q = 10^m \times q - q$, & par conſéquent il ſuffira de retrancher q de $10^m q$.

Qu'on ait, par exemple, $\frac{10^3 + 1}{13} = 77$ on dira $77000 - 77 = 76923$, donc $\frac{1}{13} = 0,076923,076$ &c. (*)

13. D'un autre côté, ſi $\frac{10^n + 1}{a}$ = nombre entier $= q$, il s'en enſuit que $\frac{10^{2n} - 1}{a} = (10^n - 1)q$ = nombre entier,

par ex. $\frac{10^5 + 1}{9091} = 11$. Donc

$$\frac{10^{10} - 1}{9091} = 1100000 - 11 = 1099989,$$

d'où il ſuit que

$$\frac{1}{9091} = 0,0001099989,000109 \text{ \&c.}$$

14. Pareillement ſi $\frac{1}{a}$ produit une période de $2m$ chiffres, c'eſt à dire que $\frac{10^{2m} - 1}{a}$ = nombre entier, on aura auſſi $\frac{10^m + 1}{a}$ =

(*) C'eſt à dire qu'ayant trouvé $\frac{1}{13} = 0,076 + \frac{1}{13}$ on prendra le complément à 9 des trois chiffres trouvés, on les écrira à la ſuite de celles-ci & on aura la période entiere.

nombre entier, en ſuppoſant que a ſoit un nombre premier; car

$$10^{2m} - 1 = (10^m + 1)(10^m - 1);$$

or $\frac{10^m - 1}{a}$ donneroit une période moindre que $2m$; donc il faut que $\frac{10^m + 1}{a}$ ſoit un nombre entier.

15. Si a n'eſt pas un nombre premier & que $\frac{1}{a}$ produiſe une période de $2m$ chiffres, a ſera commenſurable avec $10^m + 1$.

16. Si a n'eſt pas un nombre premier & qu'en diviſant 1 par a on obtienne une période de $2m$ chiffres, c'eſt à dire pour $\frac{10^{2m} - 1}{a}$ un nombre entier, tous les diviſeurs de a, excepté ceux qui ſont compris dans la formule $2^p \times 5^q$, donneront des périodes de $2m$ chiffres, toutes les fois que m ſera un nombre premier & $\frac{10^m + 1}{a}$ un nombre entier.

17. Si 1 diviſé par le nombre a non premier, donne une période de m chiffres & que m ſoit premier, les diviſeurs de a, ou au moins l'un d'entr'eux, produiront des périodes de m chiffres; les autres feront ou 3 ou 9 ou de la forme $2^p \times 5^q$.

18. Si le nombre a non diviſible par 2, 3, 5 produit une période de mn termes, cette période pourra ſe réſoudre en de plus petites, ce qui ſervira à trouver les diviſeurs de a ſi ce nombre n'eſt pas premier.

19. On peut de même parvenir à connoître les diviſeurs de a ſi ce nombre non diviſible par 2, 3, 5 produit une période de mnp chiffres, & que m, n, p ſoient des nombres premiers, parce qu'on pourra réſoudre cette période en d'autres plus petites de m, n, p, mn, mp, np chiffres.

20. Si $\frac{1}{a}$ donne une période de m chiffres & que m ne ſoit pas diviſeur de $a - 1$, nous ſavons (Art. 5. & 8.) que a ne peut être un

nombre premier; donc ce nombre a des facteurs b, c de sorte que $a = bc$. Or si on obtient des périodes de p, q termes en divisant 1 par b & c, il faut que $m = pq$ ou un multiple de p & q (Art. 6.). Donc, puisque m ne divise pas $a - 1$, le produit pq ne divisera pas non plus $a - 1$. C'est pourquoi ou p ou q ou p & q sera premier avec $a - 1$ & m pourra être décomposé en des périodes plus petites; & dans tous ces cas on pourra trouver facilement les diviseurs de a.

21. Soit $a = 2b + 1$ & b un nombre premier, on aura (Art. 4.) $\frac{10^{2b} - 1}{2b + 1} =$ nombre entier.

Si donc $\frac{1}{2b + 1}$ donne une période de moins de $2b$ chiffres, cette période sera ou nulle ou de 1 ou de 2 ou de b chiffres.

Or il n'y a parmi les nombres premiers que 11 qui produise une période de 2 chiffres & que 3 qui en produise une de 1 chiffre, donc dans tous les autres cas elle sera de b ou de $2b$ chiffres, c'est à dire, la plus grande possible.

22. Qu'on ait les nombres premiers $2a + 1$, $2b + 1$; que le premier en divisant l'unité produise une période de A chiffres, l'autre une de B chiffres, & que leur produit $(2a + 1) \times (2b + 1) = 4ab + 2a + 2b + 1$ donne une période de C chiffres; $2a$ sera $= A$ ou multiple de A, & $2b = B$ ou multiple de B & on pourra trouver dans quels cas $\frac{4ab + 2a + 2b}{C} = \frac{(2a + 1)(2b + 1) - 1}{C}$ deviendra un nombre entier.

M. Lambert finit en observant que les mêmes propositions peuvent s'appliquer à d'autres progressions que le systeme décimal, mais qu'on obtiendra d'autres périodes suivant qu'on adoptera une autre progression; que par exemple 13 donnant une période de 6 chiffres dans la progression décimale on ne peut reconnoître si ce nombre est premier ou non, mais qu'il donne une période de 12 chiffres dans la progression dyadique ou des puisſances de 2, d'où l'on conclud qu'il eſt premier. Et comme pour tout nombre a on peut aſſigner une progreſſion $1, m, m^2, m^3, m^4$ &c. dans laquelle le nombre de la période devient $a - 1$, ce qui n'a pas lieu à l'égard des nombres compoſés, on tire de là une nouvelle méthode de reconnoître les nombres premiers. Il arrive auſſi quelquefois que dans le ſyſteme décimal deux nombres produiſent des périodes égales & en produiſent d'inégales dans un autre ſyſteme; on peut obſerver même, mais le cas a lieu rarement, que tel nombre qui eſt premier dans le ſyſteme décimal ne peut l'être dans quelque autre progreſſion.

ADDITION SECONDE.

Une erreur que je voyois devoir s'être gliſſée dans ma réduction de $\frac{1}{181}$ en décimales, & que je n'avois pas encore redreſſée lorſque je communiquai ma Table à M. Lambert, lui a donné lieu de me faire part auſſi de la remarque ſuivante.

„Pour trouver la période décimale de $\frac{1}{181}$, je commence la diviſion juſqu'à ce que je rencontre un reſte qui ſoit un ſeul chiffre ou même l'unité, ou qui ne differe du diviſeur que de quelques unités. Dans cet exemple, après avoir trouvé les 15 quotiens 005524861878453, le reſte eſt $=7$, ce qui donne

$$\frac{10^{15}-7}{181\times10^{15}} = 0,005524861878453,$$

& par conſéquent

$$\frac{7\times10^{15}-49}{181\times10^{30}} = 0, - - - - - - -, 038674033149171,$$

c'eſt à dire 7 fois plus.

Je continue à ſeptupler ce nombre & chaque produit ſuivant, & je range les produits de la façon qui ſuit:

Premier quotient	0,005524861878453	038674033149171	Septuple du 1r quotient.
Septuple du 2d quotient	27071823204419~~7~~		
	~~1~~	8950276243093~~79~~	Septuple du 3me quot. &c.
	8	~~13~~	
		92	
	265193370165~~653~~		
	~~92~~	8563535911~~59571~~	
	745	~~649~~	
		60220	
	9944751381~~16997~~		
	~~4549~~	9613259668~~18979~~	
	21546	~~31849~~	
		50828	
	729281767~~732853~~		
	~~222948~~	10497237~~4129971~~	
	955801	~~1560636~~	
		5690007	
	7348066~~18909797~~		
	~~10924457~~	1436463~~32368579~~	
	29834254	~~76471200~~	
		408839779	
	005524~~326580053~~		
	~~535228400~~	038670860603 71	
	861808453	- - - - - - - - - &c.	

La période ne revient qu'après le 12me quotient; ainſi la période ſera de 12 fois 15 ou 180 membres; il n'y a qu'à prendre de ſuite les nombres qui ne ſont pas effacés.

„S'il ne s'agit que de trouver de combien de membres eſt la période, le calcul eſt moins long.

Après la 15^{me} division le reste est - - - - 7.

Donc, après la 30^{me} il sera septuple - - - - 49,

après la 45^{me} il sera 7×49 - - $= 343 = 181 + 162$,

après la 60^{me} - - 7×162 - - $= 1134 = 6 \times 181 + 48$,

après la 75^{me} - - 7×48 - - $= 336 = 181 + 155$,

après la 90^{me} - - 7×155 - - $= 1085 = 6 \times 181 - 1$.

Ainsi on aura

$$\frac{7^6 + 1}{181} = \text{nombre entier,}$$

ce qui étant multiplié par $7^6 - 1$ donne

$$\frac{7^{12} - 1}{181} = \text{nombre entier.}$$

Donc, après la 12^{me} opération, c'est à dire, après 180 divisions le reste sera $= 1$.

Mais cette méthode n'a pas généralement lieu. Par exemple, après la 21^{me} division le reste est 6, ce qui pour la 42^{me} donne le reste 36, après la 63^{me} le reste $216 = 181 - 35$ &c. mais 21 n'est pas une partie aliquote de 180, ainsi après être parvenu à la 168^{me} division, il faut d'autres moyens pour parvenir à la 180^{me} qui laisse le reste $= 1$, & avec tout cela on pourroit avoir sauté quelque reste qui auroit déjà été $= 1$."

Il ne sera pas inutile de développer encore d'avantage la remarque de M. Lambert, qu'on vient de lire; elle me paroît devoir être d'une grande utilité pour continuer plus facilement ma Table.

J'ai dit plus haut (Art. IV. Rem. VII.) que le $\frac{s}{2}^{e}$ résidu sert fréquemment à vérifier l'opération; j'observe donc, en premier lieu, d'après l'écrit de M. Lambert, qu'on peut d'une maniere semblable vérifier l'opération, quel que soit le résidu. En effet, soit par ex. $\frac{10^m + D - r}{D}$ ou $\frac{10^m - r}{D}$

un

un nombre entier, c'est à dire, qu'après m divisions on ait le résidu r, ou bien que $\frac{1}{D} = 0 + \frac{10^m + r}{D \times 10^m}$, ou si le quotient est q qu'on ait $\frac{1}{D} = 0 + q\frac{r}{D}$ & on aura $\frac{r}{D} = rq + \frac{rr}{D}$, & par conséquent quand on aura fait de nouveau m divisions on trouvera le résidu rr, ou si $rr > D$ ou $= fD + \varrho$, on devra trouver le résidu ϱ; concluons de là qu'on pourra vérifier partout l'opération en regardant si après le double nombre de divisions on trouve le quarré du premier résidu, ou ce qui reste après qu'on a divisé ce quarré par D. Il est de plus évident qu'on peut continuer cette vérification aussi loin qu'on veut avec le même résidu; car après $3m$ divisions le résidu sera r^3, ou $r\varrho$ ou ϱ', parce qu'on peut avoir $r^3 = (fD + \varrho)$ ou $r^3 = frD + r\varrho = frD + gD + \varrho'$ $= f'D + \varrho''$; après $4m$ divisions le reste ϱ'' se déterminera en faisant $r^4 = (f'D + \varrho')r = f'rD + \varrho'r = f'rD + hD + \varrho'' = f''D + \varrho''$: & ainsi de suite. Il est bon d'observer aussi que si r est grand & approchant de D on peut lui substituer $D - r$.

J'observerai de plus que la même remarque sert comme la septieme de l'Art. IV. & le §. 12. de la premiere Addition à abréger considérablement les opérations qui nous occupent. Il est évident que dès qu'on est parvenu à un résidu qui n'est que de quelques unités, on peut trouver facilement la période entiere sans achever la division effective. On n'a qu'à multiplier par r le quotient q trouvé par les m premieres divisions, on obtiendra m chiffres qu'on écrira à la suite des m premiers; on multipliera de nouveau cette seconde période par r pour ranger ce produit après le second, & ainsi de suite; on tiendra compte des valeurs de fgh &c. ou de f, f', f'' &c. & on continuera cette opération jusqu'à ce qu'on voye les mêmes chiffres revenir & qu'on ait la fraction décimale complete, ou du moins jusqu'à ce qu'on parvienne aux complémens à 9 des premiers chiffres & qu'on voye par là qu'ayant passé la moitié de la période on peut l'achever conformément au §. 12. cité. Les deux exemples suivans éclairciront cette remarque.

Exemple I. Lorſqu'on réduit $\frac{1}{23}$ en décimales on trouve $\frac{1}{23} = 0,043478\frac{6}{23}$, c'eſt à dire, le 6^e ou m^e reſte $= 6$; on en conclud que $\frac{10^6 - 6}{23}$, $\frac{6 \times 10^6 - 6^2}{23}$, $\frac{6 \times 10^6 - 6^3}{23}$ &c. ſont des nombres entiers, ou bien que $\frac{1}{23}$ étant $= 0, \frac{10^6 + 6}{23 \times 10^6}$, les ſix chiffres qui ſuivront ceux que donne cette diviſion ſeront exprimés par $\frac{6 \times 10^6 + 6^2}{23 \times 10^{12}}$ & ainſi de ſuite.

Puis donc que

$$r = 6,$$
$$r^2 = 6^2 = 1 \times 23 + 13,$$
$$r^3 = 6^3 = 6(23 + 13) = 6 \times 23 + 3 \times 23 + 9,$$
$$r^4 = 6^4 = 6(9 \times 23 + 9) = 54 \times 23 + 2 \times 23 + 8 = 56 \times 23 + 8,$$

on aura

$$f = 1, \quad g = 3, \quad h = 2, \quad f'' = 9, \quad f''' = 56,$$
$$\varrho = 13, \quad \varrho' = 9, \quad \varrho'' = 8, \quad \&c.$$

On n'a pas beſoin d'aller plus loin, parce que m étant $= 6$ la période ne peut paſſer $4m$ chiffres.

Or les m premiers chiffres ſont 043478,
donc les m ſuivans - - - $6 \times (043478) + 1$ ou 260869,
- - m - - - - - - $6 \times (260869) + 3$ ou 565217,
- - m - - - - - - $6 \times (1565217) + 2$ ou 391304,
ainſi la période eſt de 22 chiffres &

$$0,0434782608695652173913 \text{ \&c.}$$

& on voit qu'après le 11^e viennent les complémens à 9, des premiers.

J'ai fait entrer dans cette opération les valeurs de f, g, h; ſi on vouloit tenir compte plûtôt de f, f', f'', voici comment on procéderoit; on multiplieroit les premiers m chiffres par 6, le produit de même & ainsi des suivans; on ne tiendroit compte qu'à la fin des restes négligés & on disposeroit l'opération de la façon qui suit

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{23} = 0,043478 \\
\qquad\qquad\qquad\quad 260868 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1565208 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 9391248 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 56\frac{8}{23} \text{ donc} \\
\hline
\frac{1}{23} = 0,04347826086956521739130 4 \ \&c.
\end{array}$$

La même opération enfin peut aussi se réduire à la forme suivante:

puisque $\frac{1}{23} = 0,043478\frac{6}{23}$,

on a $\frac{6}{23} = 0,260868\frac{36}{23} = 0,260869\frac{13}{23}$,

donc $\frac{1}{23} = 0,043478260869\frac{13}{23}$,

& $\frac{13}{23} = 0,565217391297 + \frac{169}{23}$ ou $+ 7\frac{8}{23}$.

On ne peut pas se méprendre sur les valeurs décimales des multiples de $\frac{1}{23}$ qui sont à la fin de ces périodes & en joignant les deux dernieres on a la même fraction périodique complete que ci-dessus.

Exemple II. On a $\frac{1}{89} = 0,011235\frac{85}{89}$.

Ici le 6^e ou m^e reste est 85 ou -4 & $\frac{10^6 + 4}{23}$ est un nombre entier. En reprenant les lettres de la Remarque 8^e, nous aurons donc

$rr = (-4)^2 = +16$,

$r^3 = (-4)^3 = -64$,

$r^4 = (-4)^4 = +256 = 2 \times 89 + 78$,

$r^5 = (-4)^5 = -8\times89-4\times78 = -8\times89-3\times89-45$,

$r^6 = (-4)^6 = +44\times89+180 = +44\times89+2\times89+2$,

$r^7 = (-4)^7 = -184 \times 89 - 8$,

$r^8 = (-4)^8 = +736 \,/\!/ + 32$, |89|

& par conséquent

après	$2m$	divisions le	12^e	reste	ϱ	sera	$= 16$,
-	$3m$	- - -	18^e		ϱ'	-	$= 89 - 64 = 25$,
-	$4m$	- - -	24^e	-	ϱ''	-	$= 78$,
-	$5m$	- - -	30^e	-	ϱ'''	-	$= 89 - 45 = 44$,
-	$6m$	- - -	36^e	-	ϱ^{IV}	-	$= 2$,
-	$7m$	- - -	42^e	-	ϱ^{V}	-	$= 89 - 8 = 81$,
-	$8m$	- - -	48^e	-	ϱ^{VI}	-	$= 32$.

C'est à dire qu'on aura

$$f = 0,\ g = 0,\ h = 0,\ i = -3,\ k = +2,\ l = 0,\ n = 0,$$

$$\&\ f' = 0,\ f'' = 2,\ f''' = -11,\ f^{IV} = 46,\ f^{V} = -184,\ f^{VI} = 736.$$

Je n'ai pas continué cette énumération, parce que si, avant que d'aller plus loin, on applique ces données, on trouvera que la période n'est que de 44 termes; & puisque le 48^e reste seroit 32, il s'en ensuit que 32 doit aussi être le 4^e reste.

On peut d'une maniere semblable déterminer les périodes des fractions $\frac{1}{P}$ qui ont fait le sujet du cinquieme Article de mon Mémoire, & souvent même sans aucune réduction de $\frac{1}{P}$ en décimales, parce que la division de la période de $\frac{1}{D}$ par d ou de celle de $\frac{1}{d}$ par D peut donner un reste assés commode, comme je le ferai voir par un exemple:

Je veux déterminer la période de $\frac{1}{119} = \frac{1}{7 \times 17}$.

J'ai $\frac{1}{17} = 0,0588235294117647\frac{1}{17}$.

Si je divise cette période par 7 il en résulte $\frac{1}{119} = 0,0084033613445378\frac{1}{7} + \frac{1}{7 \times 17}$,

donc le reste r après la 16^e division est $= \frac{1}{7} + \frac{1}{7 \times 17} = \frac{18}{119}$.

Les 16 chiffres suivans seront par conséquent 16 fois plus grands avec un résidu $\varrho = 86$, à cause de $18 \times 18 = 324 = 2 \times 119 + 86$, & après la 48^e division on doit trouver le reste $\varrho' = 1$, vu que 48 est le plus petit commun dividende entre $\varrho = 6$ & $\sigma = 16$; & en effet $86 \times 18 = 1548 = 13 \times 119 + 1$; si de plus on tient compte de 49×119 à cause de $f = 2$ & de $f' = 36 + 13 = 49$; il ne restera plus qu'à disposer l'opération de la maniere enseignée plus haut.

J'observerai enfin que la méthode par laquelle M. Lambert a déterminé le nombre de la période de $\frac{1}{181}$ ne laisse pas, nonobstant la remarque qu'il a ajoutée à la fin, de pouvoir servir généralement à trouver la période d'une fraction quelconque du nombre de celles que j'ai désignées par $\frac{1}{D}$; il suffira pour cet effet de voir quels sont les m^{es} résidus en adoptant pour m successivement tous les nombres premiers qui sont facteurs de $D - 1$ & de déterminer pour ces différens cas les restes ϱ, ϱ', ϱ'' &c. jusqu'à ce qu'on parvienne au résidu 1 ou $D - 1$, car le multiple de m auquel répond cette valeur indiquera le nombre soit de la période entiere soit de la moitié de la période. Pour $\frac{1}{67}$ par ex. on fera usage du 2^d ou du 4^e reste, du 3^e & du 11^e. Mais il faut avoir attention de faire l'essai pour toutes les valeurs que m peut avoir, autrement on risqueroit de sauter quelque valeur de ϱ, ϱ' &c. $= 1$, & de croire la période plus grande qu'elle n'est effectivement. Par exemple dans $\frac{1}{D} = \frac{1}{31}$, les différentes valeurs que peut avoir m sont 2, 3, & 5; or si on vouloit se contenter de la premiere, on ne trouveroit de résidu 1 que pour celui qui suit la $15m^e$ ou la 30^e division; cependant la période n'est que de 15 chiffres & c'est ce qu'indiqueront les valeurs $m = 3$ & $m = 5$; car dans ces deux cas 15, ou le nombre de la période, est un multiple de m, ce qui n'avoit pas lieu dans la supposition de $m = 2$, de sorte qu'en passant de $7m$ à $8m$, on a sauté le résidu 1 qui reste après la 15^e division.

RECHERCHES
sur les diviseurs de quelques nombres très grands compris dans la somme de la progression géométrique

$$1 + 10^1 + 10^2 + 10^3 + - - - - 10^T = S.$$

PAR M. JEAN BERNOULLI. (*)

§. 1.

J'ai eu occasion dans ce que j'ai écrit sur les fractions décimales périodiques, de faire voir qu'il seroit très utile, pour trouver facilement les périodes d'un grand nombre des fraction, de connoître les diviseurs des sommes de la progression géométrique $1 + 10 + 100 + - - -$ &c. & j'ai d'autant moins regretté d'employer quelque tems à chercher de ces diviseurs, que les mêmes recherches ne pouvoient que répandre du jour sur deux matieres qui en laisseront toujours beaucoup à désirer, je veux dire la Théorie des nombres premiers & celle des diviseurs des nombres.

§. 2. On sait que la somme S de la progression dont il s'agit est toujours $= \frac{10^{T+1} - 1}{10 - 1}$; ainsi on s'appercevra sur le champ que nos recherches seront plus ou moins embarrassantes, suivant que T sera pair ou impair. En effet lorsque T est pair, $T + 1$ est un nombre impair; & si avec cela il est premier, on ne connoît positivement aucun de ses facteurs, excepté $10 - 1$ qui ne fait que ramener à la progression proposée. Si au contraire T est impair, de sorte que $T + 1$ est pair $= 2t$, on a $\frac{10^{2t} - 1}{10 - 1} = \frac{(10^t + 1) \times 10^t - 1}{10 - 1}$, au moyen de quoi on connoît aussitôt les deux facteurs entiers $10^t + 1$ & $\frac{10^t - 1}{10 - 1}$ de la somme dont il s'agit.

(*) Lues le 17. Décembre 1772.

§. 3. Il eſt donc évident que nos recherches ſe réduiſent à déterminer les nombres premiers qui diviſent les formules $10^t \pm 1$, & qu'on aura pour cet effet trois cas différens à conſidérer; ceux de $10^t + 1$, ſuivant que t ſera pair ou impair, & celui de $10^t - 1$ quand t ſera impair; je ne parle pas de celui de $10^t - 1$ quand t eſt pair, parce qu'il ramene néceſſairement à deux des autres cas. Ce ſera un grand avantage de n'avoir à opérer que ſur des puiſſances de 10 augmentées ou diminues de l'unité: car nous ſommes à même par là de mettre d'abord en uſage des méthodes propres pour de telles formules, & ce n'eſt qu'après être parvenu à des nombres encore plus petits qu'il s'agira de voir parmi les méthodes générales pour la recherche des diviſeurs, laquelle on veut employer.

Les méthodes particulieres dont je veux parler ſont compriſes principalement dans les Théoremes ſuivans, où toutes les lettres expriment des nombres entiers:

§. 4. *Si* m *eſt un nombre premier, la formule* $a^m - b^m$ *ne peut avoir pour diviſeur, outre* $a - b$, *d'autre nombre premier que des nombres contenus dans la forme* $mn + 1$.

Ce Théoreme contenu dans le §. 38 du Mémoire de M. Euler *circa diviſores Numerorum* (Nouv. Comment. de l'Acad. de Pétersbourg, T. I.) eſt également d'uſage pour notre formule $10^t - 1$, que t ſoit un nombre impair premier ou non premier; car dans ce dernier cas ſi $t = pm$, on aura $a = 10^p$. De plus M. Euler remarque avec raiſon au §. 57 de ſon Mémoire *de Reſiduis ex diviſione poteſtatum relictis* (Nouv. Comment. de Pétersb. T. VII.) où il démontre ce théoreme, que les diviſeurs dont il eſt queſtion ne pourront même avoir la forme que de $2mk + 1$, parce qu'on ne pourra prendre pour n que des nombres pairs.

§. 5. *La ſomme de deux puiſſances* $a^{2^m} + b^{2^m}$ *n'admet de diviſeurs que les nombres de la forme* $2^{m+1}n + 1$.

Si dans $a^m + b^m$, m *eſt un nombre pair ſans être une puiſſance de* 2, *ce nombre aura la forme* $2^n p$ *& dans ce cas* $a^{2^n} + b^{2^n}$ *diviſera* $a^m + b^m$.

Si de plus p *a le diviſeur* q, *la formule* $a^m + b^m$ *aura auſſi le diviſeur* $a^{2^n} q + b^{2^n} q$.

Voilà trois théoremes tirés des §§. 29 & 33 du Mémoire cité en premier lieu & renfermant tous les cas où dans notre expreſſion $10^t + 1$, la lettre t ſignifie un nombre pair.

§. 6. De plus pour qu'un nombre premier p diviſe la formule $10^t + 1 = 10^{2^m r} + 1$, il faut qu'il puiſſe diviſer la formule $10^{2^m 2r} - 1$, en entendant par r un nombre impair & premier; or les diviſeurs premiers de $(10^{2m})^{2r} - 1$, ou de $(10^{2^{m+1}})^r - 1$, ſont tous de la forme $2rn + 1$, par conſéquent les diviſeurs qu'admet $10^t + 1$ ſuivant les trois théoremes précédens doivent être auſſi de la forme $2rn + 1$, ce qui en limite conſidérablement le nombre.

§. 7. Mais comme en général, pour qu'un nombre premier p diviſe la formule $10^t + 1$, il faut qu'il puiſſe diviſer la formule $10^{2t} - 1$, on remarquera que $\frac{10^{2t} - 1}{p}$ ne peut être un nombre entier à moins que $2t$ ne ſoit un diviſeur de $p - 1$ ou $= p - 1$ ou un multiple de $p - 1$; de ſorte que pour voir ſi un des nombres indiqués par les trois Théoremes précédens eſt un diviſeur poſſible, il n'y a qu'à examiner ſi en en retranchant l'unité on a un nombre qui eſt ou multiple de $2t$ ou $= 2t$ ou diviſeur de $2t$; les deux premiers cas ſont évidemment ceux qu'on a développés dans le §. précédent, où p doit être $= 2rn + 1$; car ſi $p - 1 = 2t$ ou $2\mu t$, comme $t = 2^m r$, p aura la forme $2rn + 1$, ſoit qu'on ait $p = 2t + 1$ ou $= 2\mu t + 1$; quant au troiſieme cas, il eſt une ſuite de la démonſtration plus étendue du Théoreme de Fermat que M. Euler a donnée dans les N. Comment. de Pétersb. (T. VII. Th. 13.) & ſuivant laquelle un nombre $a^p - 1$ eſt diviſible par un nombre premier d, non ſeulement quand p eſt $= d - 1$ ou multiple de $d - 1$, mais auſſi quand c'eſt un facteur de $d - 1$;

cette

cette démonſtration eſt facile d'ailleurs dans le cas particulier dont il s'agit, ainſi que M. Lambert l'a fort bien remarqué dans les *N. Acta Erud.* Mars 1769.

§. 8. *Si* p *eſt diviſeur du nombre impair* m, *la formule* $a^m + b^m$ *a toujours, outre le diviſeur* $a + b$, *auſſi le diviſeur* $a^p + b^p$.

Ce Théoreme tiré du Mémoire déjà cité *circa diviſores numerorum* §. 33, s'appliquera, comme on voit, à la formule $10^t + 1$ quand t ſera un nombre impair, non premier.

§. 9. *Tout nombre de la forme* $aa + 10bb$ *ne peut avoir, outre les nombres* 2 & 10, *d'autres nombres premiers pour diviſeurs que ceux qui ſe rapportent aux* 8 *formules qui ſuivent:*

$40m + 1$	$40m + 7$
$40m + 9$	$40m + 23$
$40m + 11$	$40m + 37$
$40m + 19$	$40m + 13$.

Ce Théoreme eſt le 31^e de ceux que Mr. Euler a donnés dans le XIV Vol. des Anciens Comment. de Pétersbourg, dont il a démontré quelques-uns dans le T. VIII. des Nouveaux Commentaires de la même Académie, & ſur lesquels M. de la Grange a jeté encore plus de jour dans un Mémoire qui n'eſt pas encore imprimé. Il eſt évident qu'on peut l'appliquer avec avantage à toutes nos formules $10^t + 1$ quand t eſt un nombre impair $2y + 1$, puiſqu'alors $10^t + 1 = 1 + 10 \times (10^y)^2$. Et ſi on conſidere de plus que les diviſeurs de $10^t + 1$ doivent auſſi avoir la forme $2nt + 1$ parce que $10^t + 1$ eſt facteur de $100^t - 1$, on trouvera moyen de limiter beaucoup les eſſais.

§. 10. Une remarque qu'il eſt encore à propos de faire c'eſt que la premiere de mes deux Tables de fractions décimales périodiques, nous met en état ſoit de connoître ſur le champ ſoit d'exclure quelques-uns des diviſeurs auxquels les théoremes précédens bornent les eſſais qu'on aura à faire;

par ex. 16 étant le nombre de la période de 17, on voit que $10^{16} - 1$ a néceſſairement le diviſeur 17 & que $10^t - 1$ ne peut être diviſé par 17 quand $t < 16$. De plus comme $10^t + 1 = \frac{10^{2t} - 1}{99(10^t - 1)}$ on peut être aſſuré, quand la période d'un nombre autre que 11 eſt $2t$, que $10^t + 1$ eſt diviſible par ce nombre, parce que $10^t - 1$ ne peut l'être.

Ces conſidérations devroient engager quelqu'un qui auroit envie de completer la Table I qui ſuivra, non ſeulement à continuer la Table II, mais auſſi à en conſtruire une où l'on trouvât en fractions décimales pouſſées juſqu'à 31 chiffres les valeurs de l'unité diviſée par ces facteurs de $aa + 10bb$; car il eſt clair qu'on verroit alors auſſitôt ſi tel ou tel nombre peut être un diviſeur de $10^T + 1$, quand T eſt un nombre impair juſqu'à 15, ou de $10^T - 1$, ſi T eſt un nombre pair juſqu'à 30; cette Table, quoique conſtruite pour les facteurs de $aa + 10bb$, ne laiſſeroit pas d'indiquer auſſi des diviſeurs de $10^T - 1$ pour des cas où T ſeroit impair; car rien n'empêche qu'un nombre de cette forme n'ait pour diviſeur un des facteurs poſſibles de $aa + 10bb$; par ex. $10^5 - 1$ eſt diviſible par 41. C'eſt la raiſon pourquoi je conſeille d'aller juſqu'à 31 décimales, vu que ma Table I s'étend juſqu'à la ſomme $\frac{10^{31} - 1}{9}$, de la progreſſion $1 + 10 + 100 + \&c. \text{ - - - } 10^{30}$.

Ces principes poſés, commençons par décompoſer ſucceſſivement quelques nombres de la forme $10^t + 1$ dans la ſuppoſition de t impair.

§. 11. Si $t = 1$; on a $10^1 + 1 = 11$.

Si $t = 3$; on a $10^3 + 1 = (10 + 1) \times 91 = 7 \times 11 \times 13$.

Si $t = 5$; on a $10^5 + 1 = (10 + 1) \times 9091 = 11 \times 9091$,

& on ſait par les Tables que 9091 eſt un nombre premier.

§. 12. Si $t = 7$; on a $10^7 + 1 = (10 + 1) \times 909091$. Ici les Tables de diviſeurs & de nombres premiers les plus étendues nous laiſſent déjà en défaut & la premiere idée qui ſe préſente c'eſt d'appliquer au nombre 909091 le Théoreme & la remarque du §. 9, & de voir si $10^7 + 1 = 1^2 + 10(1000)^2$ a outre son diviseur $10 + 1$ quelque diviseur de la forme $2nt + 1$ ou $14n + 1$ qui soit en même tems d'une des formes indiquées par le Théoreme cité & réduites en nombres jusqu'à 3000 dans la Table II qui suivra.

Il n'étoit pas nécessaire d'essayer aucun nombre de cette Table plus grand que 953, sur le nombre même 10000001; car la racine quarrée de 909091 tombant entre 953 & 954, si $10^7 + 1 = 11 \times 909091$ a un diviseur plus grand que 953, ce facteur doit aussi diviser 909091, puisqu'il ne peut diviser 11; or si 909091 a un diviseur plus grand que 953, ce nombre doit aussi en avoir un plus petit que 953. J'ai voulu cependant avant que de faire ces essais de division mettre en œuvre une méthode qui m'eût donné bientôt quelque diviseur approchant de 953, si 909091 en avoit eu un; c'est la méthode que M. Lambert a exposée au §. 5 de son Écrit sur les diviseurs des nombres, dans le 2^d Volume de ses Mémoires de Mathématique Allemands, & qu'il a réduite par des considérations particulieres à pouvoir être employée beaucoup plus avantageusement qu'elle ne semble d'abord le promettre; je n'ai cependant fait usage de cette méthode que pour le fond qui revient à ceci:

Si un nombre A est $= aa + b$ & qu'il ait deux diviseurs $a - x$ & $a + x + y$ on aura $\frac{A}{a - x} = a + x + y = \frac{aa + b}{a - x}$; donc $xx = ay - xy - b$; donc $x = -\frac{1}{2}y + \sqrt{(\frac{1}{4}yy + ay - b)}$, ou $2x + y = \sqrt{(yy + 4ay - 4b)}$, & par conséquent si on peut trouver pour y une valeur telle que $\sqrt{(yy + 4ay - 4b)}$ soit une quantité rationelle, on a aussitôt la valeur de $2x$ & ensuite celle des deux facteurs $a - x$ & $a + x + y$; pour cet effet on substitue dans la quantité qui est sous le signe, les valeurs connues de a & de b & pour y successivement 1, 2, 3 &c. & on cherche dans les Tables des nombres quarrés si les résultats de ces substitutions sont des quarrés ou non;

quand on n'a pas de ces Tables à la main on ne laisse pas de voir aussitôt à la terminaison du plus grand nombre des résultats qu'ils ne peuvent être des quarrés, ce qui dispense d'en faire l'essai : dans l'application de cette méthode à notre nombre 909091, nous avons $a = 953$ & $b = 882$: donc pour

y	$yy + 4ay - 4b$	y	$yy + 4ay - 4b$	y	$yy + 4ay - 4b$
1	285*	13	7	25	7
2	4100	14	50036	26	60
3	7633*	15	7	27	20
4	11736	16	20	28	2
5	14557*	17	65	29	51
6	19380*	18	2	30	2
7	23205*	19	69261	31	05
8	27032*	20	2	32	80
9	30861	21	65	33	7
10	34692*	22	20	34	127336
11	38525	23	7	35	7
12	42360*	24	188536	36	134000

Dans cette Table les résultats marqués d'une étoile ne peuvent être des quarrés, ni ceux dont je n'ai par la même raison écrit que les 1 ou 2 derniers chiffres qui résultent de l'addition de la valeur de yy avec celle de $4ay - 4b$; les autres nombres se trouvent n'être pas non plus des quarrés ; j'en ai conclu que 134000 étant approchamment le quarré de 366, $2x + y$ ne peut être un nombre entier moindre que $2x + 36$ & par conséquent que la plus grande valeur que puisse avoir $a - x$ doit être $953 - 165$ ou 788 ; mais cette méthode d'exclusion me paroissant mener ici trop lentement au but j'ai divisé ensuite 909091 par tous les nombres qu'indique le §. 9, même par ceux qui sont compris entre 788 & 953 ; mais en en excluant plusieurs au-dessous de 200 en vertu de la remarque du §. 10. Aucun de ces essais n'a donné de division sans reste & en sauvant les erreurs de calcul, nous sommes fondés à croire que 909091 est un nombre premier.

§. 13. Soit à présent $t = 9$; on aura $10^9 + 1 = (10^3)^3 + 1$; par conséquent divisible par $10^3 + 1$; c'est à dire $10^9 + 1 =$

1001×999001. Or 18 étant le nombre des chiffres décimales périodiques de 19; il s'en ensuit (§. 10.) que $10^9 + 1$ est divisible aussi par 19; aussi trouve-t-on $999001 = 19 \times 52579$, & ce dernier nombre étant premier suivant les Tables, tous les facteurs de $10^9 + 1$ sont $7 \times 11 \times 13 \times 19 \times 52579$.

§. 14. Soit $t = 11$; nous voyons d'abord par le §. 10 que $10^{11} + 1$ a outre le diviseur 11, le diviseur 23; c'est donc du nombre 395256927 qu'il nous reste à chercher les diviseurs; j'ai pour cet effet appliqué à la Table II la remarque du §. 9 en cherchant d'abord, au moyen de la façon ordinaire de reconnoître si un nombre est divisible par 11, quels nombres de cette Table étoient en même tems de la forme $22m + 1$; je n'ai trouvé que les suivans 23, 89, 331, 397, 463, 727, 859, 881, 1013, 1277, 1321, 1453, 1783, 2069, 2179, 2333, 2531, 2663, 2861, 2971, 3037; j'ai essayé tous ces nombres sans trouver de diviseurs; mais je n'ai pas eu la patience de pousser cette recherche plus loin; ainsi tout ce que je crois pouvoir assurer c'est que 395256927 n'a pas de diviseur au-dessous de 3000.

§. 15. Soit $t = 13$; nous avons $10^{13} + 1 = 11 \times 909090909091$; les diviseurs de ce dernier nombre doivent être des nombres d'une des formes du §. 9, & en même tems de la forme $26m + 1$; mais je me dispenserai de les chercher.

§. 16. Soit encore $t = 15$; nous avons $10^{15} + 1$ divisible par $10^5 + 1$, en vertu du Théoreme 2[d]; or $\frac{10^{15} + 1}{10^5 + 1} =$ 999900001; ainsi ce n'est que de ce dernier nombre qu'on aura encore à chercher les diviseurs. Il seroit divisible par $10^3 + 1 = 11 \times 91$, si en divisant $10^{15} + 1$ par $10^5 + 1$ nous n'avions pas déjà divisé en même tems par 11, mais la division par 91 donne le quotient 10988901 1; maintenant nous considérerons que les diviseurs de ce nombre ne pouvant être que de la forme $30m + 1$ ne peuvent appartenir en même tems qu'aux deux formules $40m + 1$ & $40m + 11$ du §. 9; cette remarque limite beaucoup les essais à faire, & heureusement encore on trouve aussitôt que 211 est un des diviseurs cherchés; & comme le quotient 52081 est un nombre premier, nous voyons que $10^{15} + 1$ est le produit des nombres suivans 7. 11. 13. 211. 9091. 52081.

§. 17. Passons aux nombres de la forme $10^t - 1$, en entendant par t un nombre impair.

Si $t = 1$; nous avons $10^t - 1 = 9$,

Si $t = 3$; - - - $10^3 - 1 = 3.\ 9.\ 37$,

Si $t = 5$; - - - $10^5 - 1 = 9.\ 41.\ 271$,

§. 18. Si $t = 7$; nous avons $10^7 - 1 = 9.1111111$, & les Tables ne nous apprennent plus si ce nombre 1111111 a des diviseurs; mais en essayant conformément au §. 4. les nombres premiers de la forme $7n + 1$ on trouve qu'il est divisible par 239, & comme le quotient 4649 est un nombre premier les facteurs de $10^t - 1$ sont 9. 239. 4649.

§. 19. Si $t = 9$; on voit sur le champ que $10^9 - 1$ est divisible par 999 & encore par 3, c'est à dire par 9. 9. 37 & le quotient 333667 se trouve être un nombre premier dans les Tables de diviseurs manuscrites, continuées jusqu'à 339000, qui sont entre les mains de M. Lambert & qu'il a annoncées dans la Préface du troisieme Volume de ses Mémoires de Mathématique.

§. 20. Si $t = 11$; on a $10^{11} - 1 = 9.\ 11111111111$, & comme il faudroit essayer ici tous les nombres premiers de la forme $11n + 1$, ou du moins $22n + 1$, qui sont au-dessous de 105414, je me dispenserai d'un calcul si tédieux.

§. 21. Si $t = 13$; on a l'avantage de pouvoir réduire sans essai le produit 9. 1111111111111 à quatre facteurs; car on voit par la Table des fractions décimales périodiques que les périodes de 53 & 79 sont de 13 chiffres & que par conséquent $10^{13} - 1$ est divisible par 53

& par 79, ou $= 9 \cdot 53 \cdot 79 \cdot 265371653$; mais au reste je laisse à d'autres à voir si ce dernier nombre est encore résoluble en facteurs.

§. 22. Soit enfin $t = 15$; nous avons d'abord évidemment $10^{15} - 1$ divisible par 9, par 111 ou $3 \cdot 37$ & par 11111 ou $41 \cdot 271$. Ce nombre est de plus divisible par 31 parce que la période de 31 est 15; il nous reste donc à chercher les diviseurs du dernier quotient 2906161, & pour ne pas essayer d'abord les nombres premiers de la forme $15n + 1$, j'ai fait usage d'une méthode indiquée dans le 2d Tome des Mémoires de Mathématique de M. Lambert; l'application seulement demandoit des considérations différentes de celles qu'offroit l'exemple que l'auteur apporte:

Quand un nombre donné est la différence de deux quarrés il a deux facteurs, on tâche donc de trouver ces facteurs & de voir s'ils sont rationels; or un nombre ne peut être la différence de deux quarrés à moins qu'il ne soit

de la forme	alors il est une différence telle que
$12m - 1$	$36a^2 - (2b + 1)^2$,
$12m + 1$,	$(2b + 1)^2 - 36aa$,
$12m - 5$	$4aa - 9(2b + 1)^2$,
$12m + 5$	$9(2b + 1)^2 - 4aa$.

Notre nombre donc 2906161 étant $= 12 \times 242180 + 1$ nous le comparerons avec la seconde formule en faisant $2906161 = (2b + 1)^2 - 36aa = 4bb + 4b + 1 - 36aa$ afin de trouver les facteurs $2b + 1 + 6a$ & $2b + 1 - 6a$ dont il est le produit. Mais si on vouloit chercher ces deux facteurs immédiatement par le tâtonnement, il faudroit essayer une grande quantité de nombres; considérons donc plutôt que notre équation se réduit à celle-ci: $726540 = bb + b - 9aa$, & que $bb + b$ étant toujours un nombre pair, il faut dans notre cas que $9aa$ le soit pareillement; de plus a étant par conséquent pair, faisons $a = 2c$; moyennant cela nous avons

$726540 = bb + b - 36cc$, & $cc = \frac{bb + b}{36} - 20181\frac{2}{3}$ $= \frac{bb + b - 24}{36} - 20181$; ainſi notre équation eſt réduite à de moindres nombres & nous voyons de plus que cc qu'il s'agit de déterminer ne peut devenir un quarré à moins que $\frac{bb + b - 24}{36}$ ne ſoit un nombre entier.

Or il eſt aiſé de voir que $bb + b - 24$ ne peut être diviſible par 36 à moins que b ne ſoit d'une forme $36n + x$ telle que $xx + x - 24$ puiſſe devenir $= 0$ ou $= 36$, & puiſqu'on voit auſſitôt qu'aucune valeur de x ne ſatisfait à ces deux équations, on en conclura que ni c ni a ne peuvent être des nombres rationels & qu'il faudra recourir à quelque méthode qui indique ſi 2906161 a des facteurs d'une autre eſpece.

§. 23. Je ne m'arrêterai pas plus longtems aux quantités de la forme $10^t - 1$ & je vais en conſidérer quelques-unes de la forme $10^t + 1$ dans la ſuppoſition que t ſoit pair.

Soit d'abord $t = 2$, nous ſavons que $10^2 + 1 = 101$ eſt un nombre premier.

Si $t = 4$, nous avons $10^4 + 1 = 10001$, & les Tables nous apprennent que ce nombre eſt $= 73 \times 137$.

§. 24. Quand t eſt $= 6$, ou à un plus grand nombre pair, les Tables ordinaires ne nous ſont plus d'aucun ſecours avant qu'on ait trouvé moyen de décompoſer du moins en partie le nombre $10^t + 1$; mais on pourra tirer parti des Tables de fractions décimales périodiques, des Théoremes du §. 5, de la Remarque du §. 6. & d'un Mémoire très curieux *de numeris primis valde magnis* que M. Euler a donné dans le Tome IX des Nouveaux Commentaires de l'Académie de Pétersbourg. Cet illuſtre Géometre, en partant du Théoreme que les diviſeurs de la ſomme de deux quarrés ſont tous auſſi la ſomme de deux quarrés & que tout nombre premier de la forme $4n + 1$ eſt la ſomme de deux quarrés, conclud qu'un nombre tel que $aa + 1$ n'eſt diviſible par d'autres nombres premiers que ceux

qui

qui ont la forme $4n + 1$; ce qu'on peut conclure auſſi du premier Théoreme du §. 5. M. Euler a conſtruit d'après cette remarque différentes Tables pour les valeurs que doit avoir a afin que $aa + 1$ ſoit diviſible par tous les nombres de la forme $4n + 1$ au-deſſous de 2000 & même par des puiſſances de $4n + 1$; il entre à la vérité dans ces Tables une variable m qui fait, qu'outre que les Tables dont je parle ne nous meneroient pas fort loin, ce ſeroit dans notre cas un travail aſſés long de chercher les valeurs de m en nombres entiers, & telles que $aa + 1$ ſoit exactement une puiſſance paire de 10 augmentée de l'unité, & de voir enſuite ſi à ces valeurs de a & de m répond un des diviſeurs $4n + 1$. Mais outre un avantage que cette Table ne laiſſe pas de procurer & que je me réſerve d'indiquer dans le §. ſuivant, on trouve auſſi à la fin du Mémoire une autre Table qui indique pour toutes les valeurs de a depuis 1 juſqu'à 1500 les nombres premiers moindres que a qui diviſent $aa + 1$; & cette Table eſt précédée de la remarque que lorſqu'un ſeul diviſeur α répond à une certaine valeur de a c'eſt ſigne que $aa + 1$ n'en a pas d'autres au-deſſous de a & que $\frac{aa + 1}{\alpha}$ eſt un nombre premier; pareillement que ſi ſeulement deux diviſeurs α & β ſont indiqués, c'eſt ſigne que $\frac{aa + 1}{\alpha\beta}$ eſt premier; & ainſi de ſuite; on voit donc que cette Table étant continuée juſqu'à $a = 1500$, donne outre les diviſeurs que nous connoiſſons de $aa + 1$ quand $a = 100$, ceux de $10^6 + 1$ où $a = 1000$; en effet à $a = 1000$ répond ſeulement 101; d'où nous concluons de plus que $\frac{10^6 + 1}{101} = 9901$ eſt un nombre premier & que ce ſont là tous les facteurs cherchés poſſibles.

§. 25. Soit à préſent $t = 8$; nous voyons d'abord, d'après le §. 10, que ce nombre eſt diviſible par 17, parce que 16 eſt le nombre des chiffres décimales périodiques de 17, & comme $10^8 + 1$ ne peut avoir pour diviſeurs d'autres nombres premiers que de la forme $2^4 + 1$ en vertu du §. 5, il nous reſteroit à eſſayer de tels nombres ſur $\frac{10^8 + 1}{17}$ ou ſur

5882353. Mais revenons auparavant au Mémoire cité dans le §. précédent. La forme que M. Euler prouve que doit avoir a pour que $aa + 1$ soit divisible par un nombre premier $4n + 1$ est $m(4n + 1) \pm \alpha$, où m est un nombre entier quelconque & α un nombre entier $pr + qs$ qu'il a déterminé pour toutes les valeurs de $4n + 1$ au-dessous de 2000, après avoir enseigné la méthode dont il s'est servi. Or dans notre cas, où $a = 10000$, il faut d'abord, pour que $(10000)^2 + 1$ soit divisible par un nombre premier donné $4n + 1$, que $m(4n + 1) \pm \alpha$ puisse être $= a$, ou que $\frac{a \mp \alpha}{4n + 1}$ puisse devenir un nombre entier. Commençons donc par essayer de diviser seulement $a \mp \alpha$ par les valeurs de $4n + 1$, & quand la division ne pourra pas se faire sans reste, concluons en que $(10000)^2 + 1$ n'est pas divisible non plus par ce nombre $4n + 1$, & remarquons de plus qu'en vertu du §. 6. il seroit inutile d'essayer des nombres $4n + 1$ qui ne soient pas en même tems de la forme $16n + 1$. J'ai commencé ces essais par la plus grande valeur de $16n + 1$ qui soit dans la Table de M. Euler & je suis arrivé jusqu'à la plus petite 17 sans trouver de nombre $4n + 1$ facteur de $a \mp \alpha$; mais 17 s'est trouvé être un tel nombre, comme cela devoit arriver; car α étant dans ce cas $= 4$, on a $\frac{10000 - 4}{17} = 588$ nombre entier; nous savons donc non seulement que $10^8 + 1 = 17 \times 5882353$, mais aussi que le plus grand de ces deux facteurs ne pouvant plus être divisé par 17 n'a pas de facteur au-dessous de 2000. Ainsi en cherchant à présent les diviseurs de 5882353 il seroit inutile d'essayer aucun nombre $16n + 1$ plus grand que 2897, vû que tout facteur de 5882353 plus grand que 2897, supposeroit un autre facteur plus petit que 2000; or en tirant de la Table II. tous les nombres de la forme $16n + 1$ depuis 2017 jusqu'à 2897, je n'en ai trouvé aucun qui divisât 5882353; j'en conclus que ce nombre est premier, & c'est peut-être le plus grand nombre premier qu'on connoisse; au moins ſurpaſſe-t-il de plus du double le plus grand de ceux que M. Euler a déterminés dans le Mémoire *de numeris primis valde magnis*.

§. 26. Si nous faiſons à préſent $t = 10$; nous voyons que $10^{10} + 1$ étant $= 100^5 + 1$ doit être diviſible par 101 & on a en effet $10^{10} + 1 = 101 \times 99009901$; mais on aura de la peine peut-être à déterminer les facteurs de ce dernier nombre; il faudra conſidérer que les nombres premiers qu'on eſſayera doivent tous en même tems être la ſomme de deux quarrés & être des nombres de la forme $20n + 1$; on peut auſſi recourir pour les nombres qui ſont au-deſſous de 2000 à la Table de M. Euler, en eſſayant de diviſer $100000 \mp \alpha$ par les nombres qui ſont en même tems exprimables par $4n + 1$ & par $20n + 1$.

§. 27. Que t ſoit $= 12$; on aura $10^{12} + 1 = 10000^3 + 1$, & par conſéquent diviſible par 10001, ou par 73×137: le quotient eſt 99990001, ſur lequel on pourra faire l'épreuve des nombres de la forme $24n + 1$, en faiſant uſage de la Table de M. Euler & de la formule $a \mp \alpha$ ou $1000000 \mp \alpha$ pour ceux qui ſont au-deſſous de 2000.

§. 28. Si $t = 14$; on voit que $10^{14} + 1 = 100^7 + 1$ eſt diviſible par 101; le quotient eſt 990099009901 & en y appliquant la Table de M. Euler & en général les diviſeurs de la forme $28n + 1$, on doit trouver auſſitôt que 29 en eſt un qui ſatisfait; car la Table des décimales périodiques fait voir que 28 eſt le nombre de la période de 29, & cette ſeconde diviſion donne 34141345169. (*)

§. 29. Je terminerai ici mes remarques ſur les diviſeurs des formules $10^t \pm 1$ & je vais préſenter dans une petite Table les réſultats qu'elles fourniſſent pour les ſommes de la progreſſion géométrique qui a occaſionné ces recherches.

On remarquera aiſément que la même Table, combinée avec les diviſeurs de la formule $10^t + 1$, ſervira à déterminer ceux des ſommes

(*) Ce nombre eſt diviſible par 281. Voyés Table IV.

de plusieurs progressions géométriques dont les exposans seront des puissances plus hautes de 10.

Ensuite viennent 3 Tables qui pourront servir à continuer ces recherches; la derniere, que je n'ai construite qu'après avoir écrit ce qui précede, est une ébauche de celle dont j'ai donné l'idée, plus haut au §. 10. Les fractions décimales de cette Table qui sont de moins de 31 chiffres sont des périodes completes, ou, si elles sont marquées d'une étoile, elles sont des moitiés de périodes; ainsi on conclura, par exemple, de celle qui répond à $\frac{1}{521}$ qu'après la 26^e division je suis parvenu au résidu 520, que par conséquent $10^{26} + 1$ est divisible par 521 & que ce nombre est aussi facteur de $10^{52} - 1$ & de la somme de $1 + 10^1 + 10^2 + - - - 10^{51}$.

I. TABLE

de quelques sommes de la progression géométrique

$$1 + 10^1 + 10^2 + - - - - - 10^t = S$$

résolues en nombres premiers.

NB. On n'a pas examiné complétement si les nombres marqués d'une étoile sont premiers.

t	Valeur de S.
1	11
2	3. 37
3	11. 101
4	41. 271
5	3. 7. 11. 13. 37
6	239. 4649
7	11. 73. 101. 137
8	3. 3. 37. 333667
9	11. 41. 271. 9091
10	11111111111*
11	3. 7. 11. 13. 37. 101. 9901
12	53. 79. 265371653*
13	11. 239. 4649. 909091
14	3. 31. 37. 41. 271. 2906161*
15	11. 17. 73. 101. 137. 5882353
16	11111111111111111*
17	3. 3. 7. 11. 13. 19. 37. 52579. 333667
18	19 fois 1*
19	11. 41. 101. 271. 9091. 99009901*
20	3. 37. 239. 4649. 900900990991
21	11. 23. 11111111111*. 395256927*
22	23 fois 1*
23	3. 7. 7. 11. 11. 13. 13. 37. 101. 9901. 99990001*
24	41. 271. 100001000010000100001*
25	11. 53. 79. 265371653*. 90909090901*
26	3. 3. 3. 37. 333667. 333333333666666667*
27	11. 29. 101. 239. 281. 4649. 909091. 121499449*
28	29 fois 1*
29	3. 7. 11. 11. 13. 17. 73. 101. 137. 211. 9091. 52081. 5882353
30	31 fois 1*

II. TABLE

de nombres premiers de la forme $16n + 1$.

17	1553	3617	5857	8081	10337	12721	14753	16561	19457
97	1601	3697	5953	8161	10369	13009	14897	16657	19489
113	1697	3761	6113	8209	10433	13121	14929	16673	19553
193	1777	3793	6257	8273	10513	13217	15073	16993	19681
241	1873	3889	6337	8353	10529	13249	15121	17041	19697
257	1889	4001	6353	8369	10657	13297	15137	17137	19777
337	2017	4049	6449	8513	10753	13313	15217	17377	19793
353	2081	4129	6481	8609	10993	13441	15233	17393	19841
401	2129	4177	6529	8641	11057	13457	15313	17489	19889
433	2161	4241	6577	8689	11329	13537	15329	17569	19937
449	2273	4273	6673	8737	11393	13553	15361	17681	20113
513	2417	4289	6689	8753	11489	13633	15377	17713	20129
529	2593	4337	6737	8849	11617	13649	15473	17729	20161
577	2609	4481	6833	8929	11633	13681	15569	17761	20177
593	2657	4513	6961	9041	11681	13697	15601	17921	20353
641	2689	4561	6977	9137	11777	13729	15649	18049	20369
673	2753	4657	7057	9281	11953	13841	15761	18097	20593
769	2801	4673	7121	9377	11969	13873	15809	18257	20641
881	2833	4721	7297	9473	12049	13921	15889	18289	20753
929	2897	4801	7393	9521	12097	14033	15937	18353	20849
977	3041	4817	7457	9601	12113	14081	16001	18401	20897
1009	3089	4993	7489	9649	12161	14177	16033	18433	20929
1153	3121	5153	7537	9697	12241	14321	16097	18481	21089
1201	3137	5233	7649	9857	12289	14369	16193	18593	21121
1217	3169	5281	7681	10141	12401	14401	16273	18913	21169
1249	3217	5297	7793	10177	12433	14449	16369	19009	21313
1297	3313	5393	7841	10193	12497	14561	16417	19073	21377
1361	3329	5441	7873	10273	12577	14593	16433	19121	21521
1409	3361	5521	7937	10289	12641	14657	16481	19249	21569
1489	3457	5569	8017	10321	12689	14737	16529	19441	21601

III. TABLE

de nombres premiers facteurs possibles de la formule aa + 10bb.

$40m+1$	$40m+7$	$40m+9$	$40m+11$	$40m+13$	$40m+19$	$40m+23$	$40m+37$
1	7	9	11	13	19	23	37
41	47	89	131	53	59	103	157
241	127	409	211	173	139	223	197
281	167	449	251	293	179	263	277
401	367	569	331	373	379	383	317
521	487	769	491	613	439	463	397
601	607	809	571	653	479	503	557
641	647	929	691	733	599	743	677
761	727	1009	811	773	619	823	757
881	887	1049	971	853	659	863	797
1201	967	1129	1051	1013	739	983	877
1321	1087	1249	1091	1093	859	1063	997
1361	1327	1289	1171	1213	1019	1103	1237
1481	1367	1409	1291	1373	1259	1223	1277
1601	1447	1489	1451	1453	1459	1303	1597
1721	1487	1609	1531	1493	1499	1423	1637
1801	1567	1669	1571	1613	1579	1543	1877
2081	1607	1709	1811	1693	1619	1583	1997
2161	1847	1789	1931	1733	1699	1663	2237
2281	2087	1949	2011	1933	1979	1783	2357
2441	2207	2029	2131	1973	2099	1823	2437
2521	2287	2069	2251	2053	2179	2063	2477
2741	2447	2269	2371	2213	2339	2143	2557
2861	2647	2309	2411	2293	2459	2383	2677
3041	2687	2389	2531	2333	2539	2423	2797
	2767	2549	2731	2693	2579	2503	2837
	2887	2749	2851	3253	2659	2543	2917
	2927	2789	2971		2699	2663	2957
	3167	2909	3011		2819	2903	3037
		3109			2939	3023	
					3019		

TABLE IV.

Valeurs en décimales de quelques fractions ayant pour numérateur l'unité & pour dénominateur un des nombres de la Table précédente.

1 : 7	=	0, 142857.	
1 : 11	=	0, 09.	
1 : 13	=	0, 076923.	
1 : 19	=	0, 052631578947368421.	
1 : 23	=	0, 0434782608695652173913.	
1 : 37	=	0, 027.	
1 : 41	=	0, 02439.	
1 : 47	=	0, 0212765957446808510638297872340	+ 20 : 47.
1 : 53	=	0, 0188679245283.	
1 : 59	=	0, 0169491525423728813559322033898	+ 18 : 59.
1 : 103	=	0, 0097087378640776699029126213592	+ 24 : 103.
1 : 127	=	0, 0078740157480314960629921259842	+ 66 : 127.
1 : 131	=	0, 0076335877862595419847328244274	+ 106 : 131.
1 : 139	=	0, 0071942446043165467625899280575	+ 75 : 139.
1 : 157	=	0, 0063694267515923566878980891719	+ 117 : 157.
1 : 167	=	0, 0059880239520958083832335329341	+ 53 : 167.
1 : 173	=	0, 0057803468208092485549132947976	+ 152 : 173.
1 : 179	=	0, 0055865921787709497206703910614	+ 94 : 179.
1 : 197	=	0, 0050761421319796954314720812182	+ 146 : 197.
1 : 211	=	0, 0047393364928909952606635071109.	
1 : 223	=	0, 0044843049327354260089686098654	+ 158 : 223.
1 : 241	=	0, 0041493775935103734439834024896	+ 64 : 241.
1 : 251	=	0, 00398406374501992031872250*.	
1 : 263	=	0, 0038022813688212927756653992395	+ 115 : 263.
1 : 277	=	0, 0036101083032490974729241877256	+ 88 : 277.
1 : 281	=	0, 0035587188612099644128113879.	
1 : 293	=	0, 0034129692832764505119453924914	+ 198 : 293.
1 : 317	=	0, 0031545741324921135646687697160	+ 280 : 317.
1 : 331	=	0, 0030211480362537764350453172205	+ 145 : 331.

Suite de la Table IV.

1 : 367	=	0, 0027247956403269754768392370572	+	76 : 367.
1 : 373	=	0, 0026809651474530831099195710455	+	285 : 373.
1 : 379	=	0, 0026385224274406332453825857519	+	299 : 379.
1 : 383	=	0, 0026109660574412532637075718015	+	255 : 383.
1 : 397	=	0, 0025188916876574307304785894206	+	218 : 397.
1 : 401	=	0, 0024935162094763092269326683291	+	309 : 401.
1 : 409	=	0, 0024449877750611246943765281173	+	343 : 409.
1 : 439	=	0, 0022779043280182232346241457858	+	338 : 439.
1 : 449	=	0, 0022271714922048*.		
1 : 463	=	0, 0021598272138228941684665226781	+	417 : 463.
1 : 479	=	0, 0020876826722338204592901878914	+	194 : 479.
1 : 487	=	0, 0020533880903490759753593429158	+	54 : 487.
1 : 491	=	0, 0020366598778004073319755600814	+	326 : 491.
1 : 503	=	0, 0019880715707654075546719681908	+	276 : 503.
1 : 521	=	0, 00191938579654510556621880*.		
1 : 557	=	0, 0017953321364452423698384201077	+	111 : 557.
1 : 569	=	0, 0017574692442882249560632688927	+	537 : 569.
1 : 571	=	0, 0017513134851138353765323992994	+	426 : 571.
1 : 599	=	0, 0016694490818030050083472454090	+	90 : 599.
1 : 601	=	0, 0016638935108153078202995008319	+	281 : 601.

ERRATA. Page 323 l. 5 & page 325 l. 9 au lieu de *Table II.* lisés *Table III.*

- - - - Pour le Tome précédent de ces Mémoires.

Page 317 à la fin ajoutés: *& à appliquer en conséquence une petite correction aux hauteurs observées. Au reste je suppose dans ces observations, à moins que je n'avertisse du contraire, que le fil horizontal coupoit l'astre par le milieu.*

NOUVEAUX MÉMOIRES

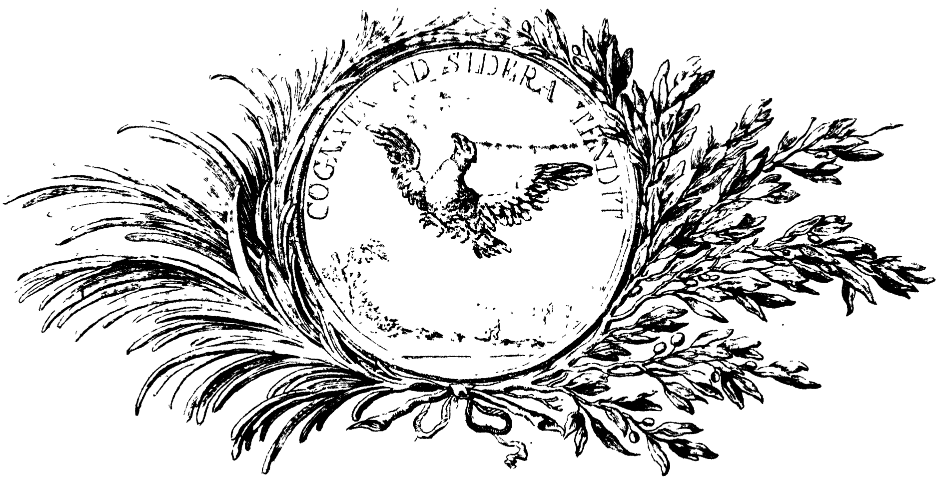
DE

L'ACADÉMIE ROYALE

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES.

ANNÉE MDCCLXXII.

AVEC L'HISTOIRE POUR LA MÊME ANNÉE.



A BERLIN.

CHEZ CHRÉTIEN FRÉDERIC VOSS.

MDCCLXXIV.

pêcher en réfléchiſſant ſur celles de M. *Pallas*, ſur celle de *Gœdart*, ſur le rapport ſingulier qu'on remarque entre le phalene de la chenille à broſſes & la premiere des deux eſpeces que décrit M. *Pallas*, je ne pourrois m'empêcher, dis-je, de croire la monogénéſie dont il a été queſtion réelle au moins dans quelques eſpeces, ou poſſible même dans un grand nombre; la réalité de cette ſeconde ſuppoſition dépendroit probablement beaucoup d'un certain degré de chaleur; quant à la premiere elle exigeroit peut-être encore qu'on admît la conjecture avancée déjà, ſi je ne me trompe, par plus d'un Naturaliſte: qu'une même fécondation peut ſervir pour trois ou quatre générations ou davantage. Quoi qu'il en ſoit, la matiere me ſemble mériter qu'on l'approfondiſſe & qu'on la ſoumette à des expériences réitérées; elles ne ſeroient peut-être infructueuſes abſolument qu'avec les femelles des papillons diurnes, n'y ayant aucun exemple, que je ſache, que de tels papillons ayent pondu des œufs ſans avoir eu commerce avec quelque mâle.

CALCUL.

EXTRAIT D'UNE LETTRE

de M. Euler *le Pere à M.* Bernoulli, *concernant le Mémoire imprimé parmi ceux de 1771. p. 318.*

Ayant lu avec bien du plaiſir vos recherches ſur les nombres de la forme $10^p \pm 1$ j'ai l'honneur de vous communiquer les criteres par lesquels on peut juger, pour chaque nombre premier $2p + 1$, laquelle de ces deux formules $10^p - 1$ ou $10^p + 1$ ſera diviſible par $2p + 1$.

Pour cet effet il faut diſtinguer les deux cas ſuivans.

I^r Cas. Si $2p + 1 = 4n + 1$, on n'a qu'à conſidérer les diviſeurs de ces 3 nombres n, $n - 2$, & $n - 6$, & ſi parmi eux on trouve ou les 2 nombres 2 & 5 ou aucun d'eux, c'eſt une marque que la formule $10^p - 1$ ſera diviſible; mais ſi parmi les dits diviſeurs ne ſe trouvent que les nombres 2 ou 5, alors la formule $10^p + 1$ ſera diviſible; ainſi pour le nombre premier $2p + 1 = 53 = 4n + 1$, on aura $n = 13$, & nos 3 nombres ſeront 13. 11. 7, donc ni 2 ni 5 n'eſt diviſeur, & partant la formule $10^{26} - 1$ ſera diviſible par 53.

II^d CAS. Si $2p + 1 = 4n - 1$, on doit conſidérer ces trois nombres n, $n + 2$, & $n + 6$, & ſi parmi leurs diviſeurs ſe rencontrent ou tous les deux nombres 2 & 5 ou aucun d'eux, alors la formule $10^p - 1$ ſera diviſible; mais ſi ſeulement l'un des nombres 2 ou 5 s'y trouve, alors la formule $10^p + 1$ ſera diviſible; comme ſi $2p + 1 = 59 = 4n - 1$, & partant $n = 15$; nos 3 nombres ſont 15, 17, 21 ou 5 eſt parmi les diviſeurs & non pas 2, donc la formule $10^{23} + 1$ ſera diviſible par 59.

Ces regles ſont fondées ſur un principe dont la démonſtration n'eſt pas encore connue.

Le plus grand nombre premier que nous connoiſſions eſt ſans doute $2^{31} - 1 = 2147483647$, que Fermat a déjà aſſuré être premier, & moi je l'ai auſſi prouvé; car puiſque cette formule ne ſauroit admettre d'autres diviſeurs que de l'une & ou de l'autre de ces 2 formes $248n + 1$ & $248n + 63$, j'ai examiné tous les nombres premiers contenus dans ces deux formules juſqu'à 46339, dont aucun ne s'eſt trouvé diviſeur.

Cette progreſſion 41. 43. 47. 53. 61. 71. 83. 97. 113. 131 &c. dont le terme général eſt $41 - x + xx$, eſt d'autant plus remarquable que les 40 premiers termes ſont tous des nombres premiers.

MÉTAPHYSIQUE.

Les conſidérations que nous allons préſenter, ſont tirées du Diſcours que M. *Cochius* prononça le jour de ſon entrée à l'Académie, & qu'il fit rouler ſur divers objets appartenans à la Philoſophie, & particulierement à celle de *Leibnitz*.