Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss.

Gesammelt von **F. Klein, M. Brendel** und **L. Schlesinger.**

IV. C. F. Gauss als Zahlenrechner.

Von

A. Galle in Potsdam[1]).

(Ein Abschnitt aus dem in Vorbereitung befindlichen Aufsatze „Über die geodätischen Arbeiten von Gauss".)

Vorgelegt in der Sitzung vom 9. Dezember 1916 durch Herrn F. Klein.

Die geistige Schöpferkraft hat erfahrungsgemäß das Vorhandensein besonderer geistiger und körperlicher Gaben[2]) zur Voraussetzung. Der Zusammenhang zwischen dem Genie und den ihm zu Grunde liegenden Talenten läßt sich aber um so schwieriger erkennen, als nach dem eigenen Zeugnis großer Männer gerade die höchsten Leistungen durch blitzartige Erleuchtungen zu Stande kommen und unbewußten Eingebungen gleichen[3]). Da die

1) Ein Verzeichnis der im folgenden gebrauchten Abkürzungen findet sich auf S. 22.

2) R. Wagner, Vorstudien zu einer wissenschaftlichen Morphologie und Physiologie des menschlichen Gehirns u. s. w. Abhandl. der Kgl. Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen Bd. 9, S. 59. Göttingen 1861. P. J. Möbius, Über die Anlage zur Mathematik. Leipzig 1900. S. 6. 183. L. Hänselmann, Karl Friedrich Gauß. Zwölf Kapitel aus seinem Leben. Leipzig 1878. S. 13.

3) Gauß spricht in einem Briefe an Schumacher (15. Mai 1843, Briefw. G.-Sch. Nr. 833) von „den gleichsam unbewußten Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann" und schreibt an Olbers (3. Sept. 1805, Briefw. G.-O. Nr. 133) „Alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die

Offenbarungen des Genies nur auf bestimmte, wenn auch manchmal weit ausgedehnte Gebiete beschränkt sind, so ist je nach dem Felde der Geistesbetätigung die Begabung eine verschiedene. Manche Gaben, wie ein hervorragendes Gedächtnis [1]), scheinen allerdings allen Schöpfernaturen gemeinsam zu sein.

Bei den mathematischen Genies findet man in der Regel eine besondere räumliche Vorstellungsgabe und einen ausgesprochenen Zahlensinn. Die Anwendungen der Mathematik bringen noch andere Anlagen zur Geltung [2]). Die Begabung für die Astronomie und Geodäsie zeigt sich vornehmlich in solchen Fähigkeiten, die beim Beobachten und beim Rechnen hervortreten [3]). In vielen Fällen überwiegt die eine die andre beträchtlich. Gauß hat sich in beiden Richtungen ausgezeichnet und die Astronomen aller Zeiten erreicht oder über-

---

Feder wieder niederlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen — aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloß durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wußte, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte — und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen".

Ähnlich machte Goethe die Erfahrung, daß derjenige Mensch, der ein Genie in sich trägt, erfährt, daß er heut diese, morgen jene Fähigkeiten und Unfähigkeiten hat: Zeitweise ist er ein Dichter, der leicht vermag, was er sich vornimmt, und dann folgen Wochen und Monate, wo Hinz und Kunz eine poetische Aufgabe rascher und geschickter ausführen (W. Bode, Goethes Leben im Garten am Stern. Berlin 1904). Er schreibt z. B. „30. März (1780) hatt' ich den erfindenden Tag. Anfangs trüblich, ich lenkte mich zu Geschäften, bald ward's lebendiger . . Abends wenig Momente sinkender Kraft. Darauf Acht zu geben, woher?" „Die Ausübung dieser Dichtergabe", sagt Goethe ein andres Mal von sich, „konnte zwar durch Veranlassung erregt und bestimmt werden, aber am freudigsten und reichlichsten trat sie unwillkürlich, ja wider Willen hervor".

1) Bei Gauß tritt das erstaunliche Erinnerungsvermögen an vielen Stellen seiner Briefe zu Tage, wenn er eine genaue Zeitangabe über ein weit zurückliegendes Ereignis macht oder den Wortlaut einer früheren Mitteilung wiederholt (vergl. Briefw. G.-Sch. Nr. 508. 509. 679. 735. 953; Briefw. G.-G. Werke, Band X 1, S. 125/126). Ja die oft fast gleich lautenden Berichte an verschiedene Empfänger sind bereits ein Zeichen der Sicherheit seines Gedächtnisses, da er nach seiner Angabe (Briefw. G.-Sch. Nr. 713) fast niemals den Entwurf eines Briefes niederschrieb. Für sein Zahlengedächtnis zeugt die Briefstelle (Briefw. G.-Sch. Nr. 321. 10. 12. 1827): „Ich schreibe diese Zahl (443, 31 Linien) nur aus dem Gedächtnis, da ich in diesem Augenblick die auf mehrere Decimalen genaue Angabe nicht gleich auffinden kann". Der genaue Wert war 443, 29849 (Briefw. G.-Sch. Nr. 378. 18. 4. 1830). Nur das Namensgedächtnis scheint bei Gauß nicht besonders gut gewesen zu sein, worüber er gelegentlich klagt (Briefw. G.-Sch. Nr. 856).

2) Vgl. Möbius a. a. O. S. 2, 127.

3) „Wo einmal eine tüchtige mathematische Grundlage vorhanden ist, [lassen sich die eigentlich astronomischen Kenntnisse] unter gehöriger Application bald

flügelt. Wenn man aber bei ihm jene beiden Fähigkeiten gegen einander abwägt, so wird man sein Rechentalent noch höher einschätzen, als seine Beobachtungsgabe. Bei den praktischen Aufgaben des Beobachters klagt er bisweilen über Schwierigkeiten[1]), seine Erfolge auf diesem Gebiete verdankt er zu nicht geringem Teil der großen Sorgfalt und der starken Willenskraft, die ihn alle Hindernisse überwinden ließen. Bei seiner Tätigkeit als praktischer Rechner hat Gauß dagegen wohl niemals irgend welche Schwierigkeiten erwähnt oder auch nur über Ermüdung geklagt. Allerdings äußerte er bisweilen, daß die Berechnungen ihm viel Zeit kosteten[2]), aber kaum jemals hat er im Ernste daran gedacht, sie durch andre ausführen zu lassen[3]), sofern sie nicht die Kraft eines Einzelnen überstiegen.

---

ergänzen. Anders verhält es sich aber im Allgemeinen mit den übrigen Erfordernissen für die Geschäfte der practischen Astronomie, sowohl für das Beobachten, als für den Calcül; es müssen dazu gewisse natürliche Anlagen mitgebracht werden, welche selbst vielen auch ausgezeichneten Mathematikern abgehen und diese natürlichen Anlagen müssen zu Fertigkeiten ausgebildet sein". (Gauß 4. April 1851 in einem Schreiben wegen Besetzung von Goldschmidts Stelle.)

1) „Überhaupt, so sehr ich die Astronomie liebe, fühle ich doch das Beschwerliche des Lebens eines practischen Astronomen, ohne Hülfe, oft nur zu sehr". (Briefw. G.-B. Nr. 120. 28. 6. 1820. Nr. 156. 1. 4. 1827.) „Das Einziehen der Spinnefäden ist eine sehr kitzliche Arbeit, wenn von einem stark vergrößernden Instrument die Rede ist. Beim Mittagsfernrohr habe ich eine ganze Woche damit zugebracht". (Briefw. G.-B. Nr. 113. 10. 2. 1820.) „Das Einziehen von 9 Spinnefäden ist ein Stück Arbeit, wobei man in den kurzen Wintertagen die Augen zum Zerspringen angreifen muß". (Briefw. G.-O. Nr. 465. 29. 12. 1822.) „Das Aufstellen des Heliometers, das Beobachten selbst etc. kostet zu viel Mühe, als daß ich sie an ein so betrügerisch-undankbares Geschäft [Beobachtung der Sonnenflecke] verschwenden sollte". (Briefw. G.-O. Nr. 302. 24. 6. 1815.) Gauß bedauert, daß er keine Übung im Zeichnen habe; er empfindet den Mangel eines Assistenten, der ihm die Nebenarbeiten abnehmen könnte (Briefw. G.-Sch. Nr. 274. 10. 7. 1826). Die Verdienste eines Gerling (Briefw. G.-O. Nr. 313. 27. 11. 1815) und eines Wilhelm Weber (Briefw. G.-O. Nr. 718. 29. 4. 1838), die ihm in praktischen Dingen zur Hand gingen, erkennt er dankbar an.

2) „Die Rechnungen über meine vorjährigen Messungen ... haben mir bisher viel zu thun gemacht und mich wenig zu andern Arbeiten kommen lassen". (Briefw. G.-B. Nr. 147. 15. 1. 1825.) „Die Verarbeitung der im vorigen Sommer gemachten Messungen raubt mir ganz enorm viele Zeit" (Briefw. G.-Sch. Nr. 352. 7. 12. 1828). „Alle diese Rechnungen kosten mir sehr viele Zeit" (Briefw. G.-Sch. Nr. 376. 24. 2. 1830). „Von der Langwierigkeit solcher Rechnungen [Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Bestimmung der Bilanz für Witwenkassen] haben diejenigen Herren eine sehr falsche Vorstellung, welche glauben, daß sie binnen vier Wochen vollendet werden können." (Werke, Band IV, Seite 120.)

3) Nur selten erwähnt er, daß er bei seinen Rechnungen einige fremde Hülfe benutzt habe (Briefw. G.-Sch. Nr. 1149. 16. 4. 1847). Vergl. Werke Band IX,

Daß bei Gauß das Rechentalent ursprünglich vorhanden war und nicht nur durch Übung ausgebildet wurde, zeigt die Erzählung, die Hänselmann aufgezeichnet hat[1]): „In seinem dunkeln Heimchenwinkel behorcht der kaum dreijährige Knabe die Berechnungen, die der Vater beim Wochenabschluß mit seinen Gesellen anstellt; es handelt sich um die Vergütung von Feierabendarbeit nach dem Verhältnis des Tagelohns. Als es ans Auszahlen geht, zirpt er warnend dazwischen, und siehe da, der Alte hat sich verrechnet und was der Kleine angibt, ist das Richtige". Hierdurch gewinnt der Scherz einen tieferen Sinn, mit dem Gauß von sich behauptete, er habe früher rechnen, als sprechen können[1]).

Auf die Entwicklung dieser außerordentlichen Gabe und zugleich auf die Betätigung seines Geistes dabei wirft eine andre Geschichte ein helleres Licht. Den Schülern der unter des Lehrers Büttner Leitung stehenden Rechenklasse der Katharinenschule in Braunschweig wurde die Aufgabe vorgelegt, die Summe einer Reihe auf einander folgende Zahlen zu bilden. Jeder, der die Rechnung beendet haben würde, sollte die Tafel auf einen Sammel-

---

Seite 241 und 434 noch die Bemerkungen von Krüger. (Briefw. G.-O. Nr. 329. 15. 2. 1817.) Die den Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc. beigegebene Tafel für Ψ hat nach der hier folgenden Anmerkung Nicolai berechnet, während Gauß die Tafel der Π selbst hergestellt zu haben scheint. Gauß sagt: „Eidem calculatori exercitatissimo [Nicolai] etiam debetur tabulae ad finem huius Sectionis annexae pars altera, exhibens valores functionis Ψ_z ad 18 figuras pro omnibus valoribus ipsius z a 0 usque ad 1 per singulas partes centesimas. Ceterum methodi, per quas utraque tabula constructa est, innituntur partim theorematibus, quae hic traduntur, partim calculi artificiis singularibus, quae alia occasioni proferemus (Werke, Band III S. 154, vgl. S. 21 dieses Aufsatzes). Bei den Störungsrechnungen (zu Störungstafeln der Pallas hielt Gauß sechs bis acht Rechner für nötig) und bei den Hülfstafeln zur Berechnung der magnetischen Kräfte hat er die Mitarbeit verschiedener Astronomen (Westphal, Encke, Nicolai, Goldschmidt) in Anspruch genommen vgl. Werke Band VII, S. 602. Band V, S. 152, 177. Auch die Hülfe, die Bessel durch Berechnung von Sonnenörtern (Briefw. G.-B. Nr. 1 und 2. 21. 12. 1804 und 29. 12. 1804) und der Koeffizienten in der Entwicklung des reziproken Wertes der Entfernung zweier Himmelskörper lieh (Briefw. G.-B. Nr. 6. 3. 9. 1805), kann hier erwähnt werden. — Wie Gauß sich zu dem Gebrauche mechanischer Hilfsmittel gestellt haben würde, läßt sich nicht mit Deutlichkeit aus dem wohlwollenden Zeugnis entnehmen, das er dem Erfinder des Modells einer Rechenmaschine, Professor Schiereck ausgestellt hat (Werke, Band X 1, S. 6).

1) Sartorius v. Waltershausen, Gauss zum Gedächtniss, Leipzig 1856, S. 11, Hänselmann, a. a. O. S. 16. A. Binet gibt eine Zusammenstellung (Psychologie des grands calculateurs et joueurs d'échecs, Paris 1894, S. 190/191), welche die Frühreife vieler hervorragender Zahlenrechner zeigt. Vergl. D. Katz, Psychologie und mathematischer Unterricht, Abhandlungen über den mathem. Unterricht in Deutschland, herausgeg. von F. Klein, Band III Heft 8, Leipzig und Berlin 1913, S. 68.

tisch legen. Kaum war die Aufgabe gestellt, so legte der damals neunjährige Gauß seine Tafel mit den Worten: Dar licht se! hin. Der alte Büttner musterte den schnellfertigen Knaben mit spöttischem Mitleid, während die andern Schüler die Stunde hindurch weiter rechneten. Auf der Tafel von Gauß stand nur eine Zahl, das richtige Ergebnis. Er hatte das Summationsprinzip für die arithmetischen Reihen auf den ersten Blick herausgefunden [1]).

Daß der Lehrer ein dauerndes Interesse an diesem Schüler nahm, ihm ein neues Rechenbuch aus Hamburg verschaffte, und daß auch andre auf ihn aufmerksam wurden, sei nebenbei bemerkt. Mit einem Hilfslehrer derselben Schule, Bartels, der zwar acht Jahre älter war, aber bald sein Freund wurde, widmete sich Gauß der niederen Analysis, aber in wie weit rechnerische Übungen ihn in jener Zeit beschäftigten, wird nicht berichtet. Auch die Anerkennung des Mathematiklehrers, Professor Hellwig, der von dem dreizehnjährigen Primaner sagte „es sei überflüssig, daß ein solcher Mathematiker noch in seinen Stunden erscheine“ nimmt nicht besonders auf sein Rechentalent Bezug. Dagegen stammen umfangreiche Tafeln zur Zahlentheorie und rechnerische Arbeiten für die Funktionentheorie aus den vier Jahren seines Besuchs des Carolinums [2]).

Aus dem Anfang der Studienzeit in Göttingen hören wir, daß Gauß, nachdem er im Alter von 17 Jahren die Methode der kleinsten Quadrate erfunden hatte, sie zu seinem Privatgebrauch in den folgenden Jahren häufig angewandt habe. Ein im Nachlaß vorhandenes Oktavblatt enthält ein Beispiel ihres Gebrauchs, das nach einer Bemerkung von Gauß aus dem Jahre 1799 stammt und zeigt, daß er damals schon eigene Wege einschlug [3]).

Aus demselben Jahre ist uns die Berechnung einer Sternbedeckung erhalten, die er an v. Lecoq übersandte und die uns ihn gleichfalls als fertigen Rechner vor Augen stellt [4]). Er fügt dem Beispiel eine Anmerkung hinzu, die darauf hindeutet, daß er häufig praktische Rechnungen ausführte und die seine Art, zu rechnen, kennzeichnet: „Übrigens bemerke ich noch, daß ich mich bei meinen eigenen Rechnungen mancher Kunstgriffe bediene. Bei Aufsuchung

---

1) Sartorius, a. a. O. Seite 12, Hänselmann, a. a. O. Seite 16, 17.

2) Vergl. hierüber Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauß, P. Bachmann, Werke, Band X 2, Seite 4 und L. Schlesinger, diese Nachrichten 1912, Heft III, Seite 10.

3) Vergl. Werke, Band X 1, Seite 445.

4) Werke, Band X 1, Seite 539.

der Sinus und der Tangenten z. B. von kleinen Winkeln wird das Interpolieren wegen der Größe und Veränderlichkeit der Differenzen sehr beschwerlich; da verfahre ich gewöhnlich so: Es sei n ein kleiner Bogen in Secunden ausgedrückt, c das Complement des Logarithmen seines Cosinus. Dann ist $\log\sin n = \log n - \frac{1}{3}c$, $\log\operatorname{tang} n = \log n + \frac{2}{3}c$[1]. Der Fehler kann in der 7ten Decimalstelle keine Einheit betragen, so lange n kleiner als $3^0 10' 7''$".

Bereits im Alter von 14 oder 15 Jahren hatte Gauß begonnen, sich mit der Zahlentheorie zu beschäftigen und 1799 hatte er im Wesentlichen die Disquisitiones arithmeticae vollendet, die bei ihrem Erscheinen im Jahre 1801 seine Beherrschung des Zahlensystems aller Welt zeigten. Dieser Beschäftigung mit der höheren Arithmetik schrieb Gauß einen wesentlichen Einfluß auf seine große Gewandtheit im Zahlenrechnen zu. Er spricht sich darüber in einem Briefe an Schumacher vom 6. Januar 1842 aus[2]: „Meine jetzt fast 50-jährigen Beschäftigungen mit der höheren Arithmetik haben allerdings insofern einen großen Anteil [an der mir zugeschriebenen Fertigkeit im numerischen Rechnen], als dadurch von selbst vielerlei Zahlenrelationen in meinem Gedächtnis unwillkürlich hängen geblieben sind, die beim Rechnen oft zu Statten kommen. Z. B. solche Producte, wie $13 \times 29 = 377$, $19 \times 53 = 1007$ und dergleichen, schaue ich unmittelbar an, ohne mich zu besinnen, und bei andern, die sich aus solchen sogleich ableiten lassen, ist des Besinnens so wenig, daß ich mir desselben kaum selbst bewußt werde. Übrigens habe ich Rechnungsfertigkeit niemals absichtlich irgendwie cultivirt, sonst hätte sie sich ohne Zweifel viel weiter treiben lassen; ich lege darauf gar keinen Werth, außer in so fern sie Mittel nicht aber Zweck ist".

Aus diesen Bemerkungen geht bereits hervor, worin die durch die Beschäftigung mit der Zahlentheorie erworbene Rechenfertigkeit zunächst bestand. Man könnte nach der Äußerung, daß Gauß die Zahlenprodukte unmittelbar anschaute, vermuten, daß ihm die Rechnung, wie sie auf dem Papier ausgeführt wird, unmittelbar vor Augen stand[3], etwa in derselben Weise, wie Klopstock, wenn er beim Schlittschuhlaufen eine Schachpartie spielte, die Figuren des Brettes in seinem Geiste erblickte. In diesem Fall könnte man daran denken, daß Gauß das Verfahren der symmetrischen Multi-

1) In der Handschrift steht $\frac{1}{3}c$.

2) Briefw. G.-Sch. 760.

3) Vergl. Binet a. a. O. Seite 93.

plikation angewandt habe[1]). Indessen legt die Wahl der Beispiele den Gedanken nahe, daß er $13 \times 29 = 390 - 13 = 377$, $53 \times 19 = 1060 - 53 = 1007$ bildete, wobei ihm das Einschlagen gerade dieses Weges zur andern Natur geworden war und garnicht zur Überlegung Anlaß gab. Zunächst werden es, wie in diesen Beispielen, Produkte von Primzahlen gewesen sein, die sich bei der Zerlegung der Zahlen in Primfaktoren seinem Gedächtnis eingeprägt hatten. Unter den daraus abgeleiteten Produkten wird man dann solche verstehen dürfen, die das 2-fache, 5-fache u. s. w. derselben sind[2]), also z. B. $13 \times 58 = 2 \times 377 = 754$, $265 \times 19 = 5 \times 1007 = 5035$. Wie dem aber auch sei, jedenfalls geht aus den voranstehenden Worten deutlich hervor, daß bei zwei- oder mehrstelligen Zahlenrechnungen bei Gauß die Erinnerungskraft eine ähnliche Rolle spielte, wie beim einfachen Einmaleins für den Durchschnitt der Menschen, die etwa $6 \times 7 = 42$ auch ohne jede Überlegung als Besitz in ihrem Gedächtnis festhalten.

Auf seine außergewöhnliche Fähigkeit, im Kopfe zu rechnen, legte aber Gauß nicht den entscheidenden Nachdruck. Als ihm die Hülfe des Rechenkünstlers Dase angeboten wurde, lehnte er sie entschieden ab: er könne sich bei den vielen und großen Rechnungen, die er in seinem Leben ausgeführt habe, kaum eines Falles erinnern, wo die Hülfe von jemand, der blos mechanische Rechnungsfertigkeit gehabt hätte, ihm von irgend einem Nutzen hätte sein können (Briefw. G.-Sch. Nr. 1149). „Was [über Dase] zu meiner Kenntnis gekommen ist, enthält eigentlich noch gar kein Zeugnis für eine ganz außerordentliche Rechnensfähigkeit",

---

1) $(a_0 + a_1 . 10 + a_2 . 10^2)(b_0 + b_1 . 10 + b_2 . 10^2) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) 10 + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) . 10^2$. Vgl. J. Fourier, Analyse des équations déterminées, Paris 1831, Seite 190, siehe auch Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Nr. 127, übersetzt von A. Loewy, Seite 183 und die zugehörige Bemerkung von Loewy, Seite 262. Über dieses von Ferrol neu erfundene Verfahren, das bis zu den Indern zurückreicht, vergl. u. a. Maennchen, Mathem. Bibl. XIII, Leipzig-Berlin 1913, Seite 34 ff. Noch weniger wird man bei Gauß an Vorstellungen von Diagrammen denken dürfen, wenn auch Synopsien häufiger vorzukommen scheinen, als man anzunehmen geneigt ist, vergl. Katz a. a. O. Seite 51.

2) Hierauf deutet auch die folgende von Gauß herrührende Berechnung des Lebensalters von Eisenstein (geb. 10. 4. 1823, gest. 11. 10. 1852) in Tagen mit Berücksichtigung der 8 Schaltjahre, die sich von Gauß' Hand unter dem Briefe findet, mit dem ihm Encke am 11. Okt. 1852 den Tod Eisensteins meldete:

$$\begin{array}{rr} 1823 & 100 \\ 1852 & 284 \\ \hline 29 & 184 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 10585 \\ 8 \\ 184 \\ \hline 10777 \end{array}$$

schreibt er an Schumacher (Briefw. G.-Sch. Nr. 1146). „Man muß hier zwei Dinge unterscheiden; ein bedeutendes Zahlengedächtniß und eigentliche Rechnungsfertigkeit. Dies sind eigentlich zwei ganz von einander unabhängige Eigenschaften, die verbunden sein können, aber es nicht immer sind. Es kann einer ein sehr starkes Zahlengedächtniß haben, ohne gut rechnen zu können, wie z. B. der Hirsch Dänemark, auch ein andrer wandernder Jude, dessen Namen ich vergessen habe. Umgekehrt kann jemand eine superiöre Rechnungsfähigkeit haben, ohne ein ungewöhnlich starkes Zahlengedächtnis. Das letztere besitzt Herr Dase ohne Zweifel in eminentem Grade; ich gestehe aber, daß ich darauf sehr wenig Werth legen kann. Rechnensfertigkeit kann nur darnach taxiert werden, ob jemand auf dem Papier ebenso viel oder mehr leistet als andere. Ob dies bei Herrn Dase der Fall ist, weiß ich nicht; nur wenn er um zwei Zahlen, jede von 100 Ziffern mit einander im Kopfe zu multipliciren $8^3/_4$ Stunden bedarf, so ist dies doch am Ende eine thörichte Zeitverschwendung, da ein einigermaßen geübter Rechner dasselbe auf dem Papier in viel kürzerer, in weniger als der halben Zeit würde leisten können. Als Beweis eines stupenden Zahlengedächtnisses — aber hat man denn die Richtigkeit seiner Rechnung controllirt? — ist allerdings jene Leistung etwas außerordentliches, aber psychologisch interessant würde es erst dadurch werden können, wenn man sich ein ganz adäquates Bild von dem, was dabei in seinem Geiste vorgeht, machen könnte. Schwerlich wird Herr Dase uns dazu nöthige Erklärung geben können, worüber ich aber weit entfernt sein würde, ihm einen Vorwurf zu machen“ [1]).

Schon allein aus dem großen Umfang der Rechnungen, die

---

1) Die Fertigkeit im Rechnen und die Freude, die er offenbar daran hatte (vergl. die oben S. 7, Fußnote 2 erwähnte Rechnung, vergl. Sartorius, a. a. O. S. 89), war Gauß eine ganz selbstverständliche Sache. Er äußerte zwar einmal, daß er bei sich selbst manche Erfahrungen gemacht habe, die ihm psychologisch rätselhaft wären. Er führt aber nur eine davon an, die weder für ihn besonders kennzeichnend ist, noch eigentlich auf seine Rechenfertigkeit sich bezieht (Briefw. G.-Sch. Nr. 1146). Es dürfte viel eher mit seiner astronomischen Beobachtungstätigkeit zusammenhängen, wenn er beim taktmäßigen Gehen die Schritte unbewußt bis 100 zählte und dann von neuem anfing, ganz ebenso wie er die Sekunden, dann allerdings bis 60 durchzählte, und dabei allerhand andre Beschäftigungen vornehmen, auch eine zweite von den Sekunden ganz unabhängige Zählung machen, ein Buch oder einen Brief lesen (Briefw. G.-Sch. Nr. 602), nur nicht sprechen konnte. Diese Fähigkeit haben aber bis zu einem gewissen Grade viele Astronomen.

Gauß ausgeführt hat, kann man schließen, daß er sehr schnell[1]) und sicher rechnete. Dies beruhte zu einem wesentlichen Teile darauf, daß er die zweckmäßigste Art, zu rechnen, sich in jedem Falle zurechtlegte[2]). Nicht immer war ihm das willkommen, was andre als bequem empfanden, da die Art der Gewöhnung bei ihm eine große Rolle spielte. Darauf weist eine Bemerkung, die zugleich die große Leichtigkeit, mit Brüchen umzugehen, zeigt, von der ein noch zu erwähnendes Beispiel[3]) eine Probe gibt: „Ich meinerseits rechne lieber mit den Brüchen in ihrer ursprünglichen Gestalt, wo sie nur sehr einfach sind, während man bei den Decimalbrüchen teils (nach meiner Gewöhnung) garnichts an Bequemlichkeit gewinnt, teils an Schärfe etwas aufopfert“[4]).

Noch merkwürdiger ist es, daß ihm eine entschiedene Erleichterung der Rechnung nicht die Gewöhnung an eine bestimmte Form der von ihm benutzten Tafeln aufwog: „Wie sehr die Gewohnheit oft Kleinigkeiten ein Gewicht beilegt, erläutere ich noch durch einen andern Umstand oder ein Beispiel. In den von mir (ausschließlich) gebrauchten Logarithmen der Zahlen, nämlich den Shervin'schen, steht der Proportionalteil für 37 so:

1 | 4 Bessel wünscht dafür die vollen Multipla 37
2 | 7 74
3 | 11 111
4 | 15 &
5 | 18 Ich lege darauf gar keinen Werth, nicht weil ich beim Interpoli-
6 | 22 ren die Ziffer vernachläßigte, sondern weil ich sie ganz mechanisch
7 | 26 in Gedanken (und doch ohne selbst zu denken) von selbst supplire,
8 | 30 bei 7 weiß ich von selbst, da die letzte Ziffer 9 sein muß,
9 | 33 daß 26 anstatt 25,9 steht und so bei den übrigen. Aber dieser Mechanismus hört auf, sobald ich ein andres Exemplar, z. B. die Calletschen brauchen soll, wo bei 5 nicht 18, sondern 19 steht. An sich hat man ebenso viel Recht 19 wie 18 zu schreiben, aber ich bin einmal an die Art gewöhnt, wo der Decimalbruch, wenn er genau 0,5 ist, weggelassen wird, ohne die vorhergehende Ziffer zu erhöhen. Anstatt 18 das 18,5 zu lesen, ist mir einmal völlig

1) Mit welcher Schnelligkeit Gauß rechnete, erhellt am besten aus seinem Journal über die Rechnungen an den Pallasstörungen, Werke Band VII, Seite 605 ff. Die ersten Elemente von Vesta erhielt er, nach der Entdeckung dieses Planeten, durch nur 10stündige Arbeit (Mon. Corr. Bd. XVI, S. 84). Vergl. Sartorius, a. a. O. S. 42.

2) „Diejenigen, die wirklich rechnen, finden leicht selbst, was zu ihrem Frieden dient“ (Briefw. G.-Sch. 496. 10. 10. 1835).

3) Seite 10, Anm. 2).

4) Briefw. G.-Sch. Nr. 1277. 22. 2. 50.

mechanisch, so wie bei 25,9 anstatt 26, d. i. ich werde mir der Verwandlung nicht bewußt. Aber Mechanismus hört auf, so bald ich mich, um das rechte zu treffen, erst ein kleines besinnen muß, ob ich meinen guten Shervin oder andere vor mir habe, und lediglich aus diesem Grunde brauche ich andre Exemplare nicht"[1]. Die erwähnte Abrundung einer mit 5 endenden Zahl nach unten übte Gauß nicht in allen Fällen, sondern wählte im Falle einer nachfolgenden Halbierung die gerade Zahl, da jeder gute Rechner, wo es möglich ist, solche Entscheidung entre deux foins zu vermeiden suche (Briefw. G.-Sch. Nr. 913. 21. 7. 1844)[2].

Bisweilen wirkte Gauß auch erziehlich durch Empfehlung eines Verfahrens, das er als vorteilhaft erprobt hatte. So ist sein Vorschlag, die Additionen und Subtraktionen zweier über einander stehender Zahlen von links nach rechts vorzunehmen, in die Gewohnheit der meisten Astronomen übergegangen. „Für mich ist immer das Subtrahiren etwas bequemer, als das Addiren (beim Rechnen, auch mitunter in andern Dingen). Obgleich der Unterschied sehr gering ist, so steht er doch als Factum bei mir seit 50 Jahren fest, aber erst heute [3. 10. 1844]: da Sie sagen, daß es bei Ihnen umgekehrt sei, habe ich darüber nachgedacht, was wohl bei mir der Grund davon sein möge: Ich glaube es ist folgender. Ich bin gewohnt, wenn zwei übereinanderstehende Zahlen addirt oder subtrahirt werden sollen, immer die Summe oder die Differenz sogleich von der Linken zur Rechten niederzuschreiben[3]. Allen meinen Schülern, die sich Rechnungsfertigkeit erwerben wollten, habe ich immer gleich Anfangs empfohlen, sich daran zu gewöhnen (was in sehr kurzer Zeit geschieht) und alle ohne Ausnahme haben es mir nachher sehr Dank gewußt. Der Vortheil davon besteht darin, daß jeder, der kein Jude ist, viel geläufiger und calligraphischer von der Linken nach der Rechten schreibt als umgekehrt, und auf ein zierliches Ziffernschreiben, und daß sie immer recht ordentlich unter einander und neben einander stehen, kommt ja sehr viel an.

Cela posé, beantwortet sich obige Frage nun so: Während man Summe oder Differenz von der Linken zur Rechten schreibt,

---

1) Briefw. G.-Sch. Nr. 986. 29. 4. 1845.

2) „Die Zwischenrechnung, nemlich $\frac{5}{24} \cdot 1316 = 274$, $\frac{3}{16} \cdot 60468 = 11338$, $\frac{1}{8} \cdot 10272698 = 1284087$, mache ich auf einem besonderen Papier. Statt der letzten am nächsten kommenden Zahl habe ich 1284088 deswegen gesetzt, weil sonst eine ungerade Summe kommen, und man entre deux foins keinen Grund hätte, beim Halbiren zwischen 9,7054688745 und 9,7054688746 zu wählen."

3) Vergl. A. Binet a. a. O. Seite 201, nach dem auch Inaudi ebenso verfuhr.

muß man immer zugleich die folgenden Ziffern berücksichtigen, die beim Addiren nöthig machen können, eine um 1 größere, beim Subtrahiren eine, um 1 kleinere Zahl zu schreiben. Diese *Berücksichtigung* wird nun zwar bald so mechanisch, daß man garnicht daran denkt, immer aber bleibt sie beim Subtrahiren ein klein wenig einfacher, als beim Addiren: z. B. wird addirt
387 . . .
218 . . . so kann die Summe sein 605 oder 606;
wird subtrahirt, so kann die Differenz sein 169 oder 168; allein die Entscheidung hängt beim Subtrahiren nur von Gleichheit oder Ungleichheit der übereinanderstehenden folgenden Ziffern ab, beim Addiren aber ob Summe der übereinanderstehenden die 9 überschreitet, und das erstere ist einfacher, als das andere. Mit Worten ausgedrückt, würde die ratio decidendi sein:

Beim Subtrahiren: Wenn (von der betreffenden Stelle nach der Rechten fortschreitend, und die übereinanderstehenden Ziffern immer als ein Paar bildend, betrachtet) — *das erste ungleiche* Paar die größere Ziffer $\left\{\begin{matrix}\text{oben}\\ \text{unten}\end{matrix}\right\}$ hat, tritt $\left\{\begin{matrix}\text{keine}\\ \text{eine}\end{matrix}\right\}$ Veränderung um eine Einheit ein.

Beim Addiren, wenn das erste Paar, welches eine von 9 verschiedene Summe gibt, diese Summe $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right\}$ ist als 9, tritt $\left\{\begin{matrix}\text{eine}\\ \text{keine}\end{matrix}\right\}$ Vergrößerung um eine Einheit ein“ [1]).

Diese Briefstellen zeigen auch, daß Gauß trotz der Schnelligkeit, mit der er rechnete, große Sorgfalt auf die Anordnung der Rechnung und auf die Schrift der Zahlen verwandte, die er sehr klar und deutlich, offenbar auch niemals hastig niederschrieb. Er legte Wert darauf, daß man auf dem Papier alles präzis und genügend vorfinde, was zu wissen nötig ist (Briefw. G.-Sch. Nr. 879). Dagegen durfte das Rechenblatt nicht mit überflüssigen Nebenrechnungen belastet sein, damit der wesentliche Kern im möglich kleinsten Raume und in der übersichtlichsten Form vorliege (Briefw. G.-Sch. Nr. 913, Werke Band IV, S. 312). Im Gauß-Schumacherschen Briefwechsel findet sich ein Beispiel (Berechnung von Länge, Breite, Meridianrichtung aus den Koordinaten eines Punktes) einmal in Delambrescher Breite [2]), ein zweites Mal als konzise Musterrechnung.

---

1) Briefwechsel G.-Sch. Nr. 932. 3. 10. 1844.

2) Briefw. G.-Sch. Nr. 378. 18. 4. 1830 und Werke Band IX, Seite 211, 212. Gauß schreibt an einer andern Stelle (Briefw. G.-Sch. Nr. 953. 18. 11. 1844):

Bei den Nebenrechnungen kam ihm seine Fähigkeit, vieles im Kopfe zu rechnen, sehr zu statten. „Ich kann“ sagt er, „sehr gut mit einer durch Addition, Subtraktion, Halbirung, Duplizirung entstandenen Zahl, ohne sie selbst vor mir zu haben, sogleich in eine Tafel eingehen; aber ich würde mich leicht verrechnen, wenn ich mit der Zahl, die ich nicht vor mir habe, erst noch eine Operation im Kopf vornehmen und mit dem Resultat, ohne es aufzuschreiben, eingehen soll, wenigstens würde mich dies sehr fatiguiren .... Hat man statt [des] log dessen Komplement wirklich schon vor sich, so geht es übrigens allerdings sehr bequem, im Kopfe Addiren und Halbiren zugleich zu machen“ [1]). Vielfach führte aber Gauß kleine Rechnungen auch auf Nebenblättern aus [2]).

Wie bei seinen eigenen Rechnungen, so verlangte Gauß auch von den Tafeln, die er benutzte, vor allem eine übersichtliche Anordnung. Deshalb störte ihn auch hier alles unnötige Beiwerk. Er wünschte in den trigonometrischen Tafeln nur die Logarithmen der Sinus, Kosinus, Tangenten und Kotangenten von Sekunde zu Sekunde (Briefw. G.-Sch. Nr. 973). Alles sollte sich ihm so bequem und rein, wie möglich, darbieten. Alles übrige hatte für ihn keinen Wert. Die Proportionalteile wollte er entbehren, obgleich er nicht unbedingt dagegen war. Dagegen war es ihm nur störend, wenn die Verwandlung von Bogen in Zeit angegeben war, die er gewissermaßen à vue im Kopfe ausführte. Auch andre Tafeln, wie die Verwandlung der Kompaßstriche, erschienen ihm höchst überflüssig und deshalb unerwünscht, weil sie das Tafelwerk umfangreicher machten, als nötig war. Kleinigkeiten, wie die Andeutung, daß die letzte der in der Tafel nicht wiederholten Ziffern erhöht werden soll, durch einen Stern oder Rhombus war ihm eher störend, als förderlich. Jedenfalls kam es ihm darauf an, daß in einer neuen Tafel dieselbe Bezeichnung angewandt war, an die er sich gewöhnt hatte, z. B. daß eine regelmäßige Abtei-

---

„Die Bedingung, daß die Preisbewerber (einer den Kometen von 1585 betreffenden Preisfrage) die Rechnungen in angemessenem Detail geben, halte ich für nothwendig, nicht einen ekelhaft Delambre-schen Detail, wo jeder einzelne Logarithmus aufbewahrt wird, aber doch so, daß man an jeder beliebigen Stelle, ohne gar zu viele Mühe, nachzurechnen im Stande sei“.

1) Briefw. G.-O. Nr. 289. 7. 1. 1815.

2) Daß Gauß kleine Rechnungen vielfach ausführte, ohne sie aufzubewahren, geht auch daraus hervor, daß ihm eine aus Porzellan oder Biscuit hergestellte Tafel, die ihm Schumacher empfohlen hatte, sehr angenehm für Nebenrechnungen war. Er schreibt darüber: „Die Rechentafeln haben mir bei meinen jetzigen Rechnungen über die im vorigen Jahre im Bremischen gemachten Messungen nützliche Dienste geleistet“ (Briefw. G.-Sch. Nr. 692. 25. 4. 1840).

lung von 5 zu 5 Zeilen durch horizontale Striche vorgesehen war (Briefw. G.-Sch. Nr. 161). Jede kleine Abweichung, z. B. wenn 15°02′ statt 15°2′ da stand, war nicht nach seinem Geschmack, wenn er auch anerkannte, daß diese oder jene Einrichtung für einen andern Rechner bequemer sein konnte. Gauß hat sich über diese Dinge ausführlich bei Besprechung von verschiedenen Tafeln geäußert [1]).

Es ist natürlich, daß sich auch in den Rechnungen von Gauß trotz seiner Sicherheit im Rechnen Fehler gefunden haben. Doch sind gröbere Fehler oder Versehen sehr selten. Zu den ersteren gehört ein von Schlesinger bemerkter Subtraktionsfehler Werke Band X 1, Seite 427. Er hat, um einen Fall letzterer Art zu erwähnen, versehentlich mit einem andern Wert der Abplattung der Erde statt des von Walbeck angegebenen längere Zeit gerechnet [2]). Man findet die Abweichungen in den Zahlenrechnungen der Theoria motus in Werke, Band VII, Seite 281 ff. ausführlich von Brendel angegeben, ebenso sind in Band IX von Krüger überall die Abweichungen in den Bemerkungen aufgeführt und in den Rentenrechnungen Werke Band IV, S. 188 Unrichtigkeiten von Schering bemerkt worden. Auch im Breitenunterschied sind bereits zu Gauß' Lebzeiten einige Versehen entdeckt worden [3]).

Die meisten Fehler betreffen die letzten Stellen. Ein Teil von ihnen wird Gauß nicht zur Last gelegt werden dürfen, da die Logarithmentafeln selbst nicht immer genau waren [4]). Andrerseits hat Gauß oft mit einer größeren Stellenzahl als notwendig war, gerechnet [5]), wobei ihm die Mitführung einiger Ziffern weniger Unbequemlichkeit als die Abrundung gemacht zu haben scheint.

1) Vergl. Werke, Band III, Seite 231—264 und Band VIII, Seite 121.

2) Vergl. Werke, Band IX, Seite 71. Briefw. G.-O. Nr. 448 und 609.

3) Vergl. Briefw. G.-Sch. Nr. 362 und 381. Werke, Band IX, Seite 63.

4) Vergl. Werke, Band VII, Seite 281, Theoria motus Art. 30, 31. Briefw. G.-Sch. Nr. 986.

5) Die Elemente der Theorie des Erdmagnetismus (Werke Band V, S. 150 ff.) wurden genau so angesetzt, wie die Rechnung sie gegeben hat, ohne die Dezimalbrüche wegzulassen. Gauß fügt hinzu: „Für jeden Rechnungskundigen ist die Bemerkung überflüssig, daß diese Bruchteile an sich keinen Wert haben, da wir noch weit davon entfernt sind, nur die ganzen Einer mit Zuverlässigkeit ausmitteln zu können: allein es ist von Wichtigkeit, daß die Beobachtungen mit einem und demselben System von Elementen scharf verglichen werden, und da war kein Grund vorhanden, an dem, was die Rechnung ergeben hatte, etwas zu verändern, weil durch Weglassung der Dezimalbrüche für die Bequemlichkeit der Vergleichsrechnungen gar nichts gewonnen worden sein würde".

Dies steht nur scheinbar im Widerspruch mit dem von Hammer (Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Stuttgart 1907 S. 603) erwähnten

Weniger über das Vorkommen von Fehlern, als vielmehr über die Seltenheit von wesentlichen Unrichtigkeiten ist man erstaunt, wenn man aus den handschriftlichen Aufzeichnungen den Eindruck gewonnen hat, daß Gauß wohl fast niemals Kontrollen angewendet, auch kaum eine Rechnung durch Wiederholung geprüft hat. Nur selten findet man korrigierte Zahlen, noch seltener durchstrichene Rechnungen. Wenn er eine Rechnung auf verschiedene Weise geführt hat, so hatte er nicht, wenigstens nicht in erster Linie den Wunsch, das Ergebnis zu sichern, sondern andre Wege auszuprobieren und er hatte offenbar Freude daran, auch bei kleinen Aufgaben sein Erfindertalent zur Geltung zu bringen. Das blos mechanische Rechnen machte ihm zwar keine Anstrengung, aber nahm doch sein Interesse wenig in Anspruch[1]. Dadurch lassen sich auch die oft auf den Rechenblättern zerstreuten Bemerkungen erklären, die häufig mathematische Entwicklungen ganz fern liegender Art enthalten, oder auch ganz andre Dinge betreffen.

In weitgehender Weise hat sich Gauß die Arbeiten durch Tafeln erleichtert, die er selbst berechnete, und bei deren Anlage und Anordnung sich ebenfalls eine besondere Begabung offenbarte. Da in solchen Tafeln, die nur bei völliger Korrektheit ihren Zweck erreichen, eine nicht geringe Arbeit steckt, dürfen sie gleichfalls als Beweis der Sicherheit und Schnelligkeit gelten, mit der Gauß rechnete.

Als die bekanntesten und verbreitetsten können die Tafeln der Gaußschen Additions- und Subtraktionslogarithmen angesehen werden. Gauß hat sie als „Tafel zur bequemern Berechnung des Logarithmen der Summe oder Differenz zweyer Größen, welche selbst nur durch ihre Logarithmen gegeben sind“ in Zachs Monatlicher Correspondenz Band 26, 1812, S. 498—528 zuerst veröffentlicht, von wo sie dann zunächst in Prasses fünfstellige Logarithmentafeln (neu bearbeitet von Mollweide, Leipzig 1825) und später in sehr viele andre Tafelwerke übergingen[2].

Hinweis von Gauß, daß sich der Mangel an mathematischer Bildung durch nichts so auffallend dokumentiere, wie durch maßlose Schärfe im Zahlenrechnen.

1) Gauß schreibt am 6. Juli 1802: „Ich sehne mich selbst recht nach einer solchen für den Geist interessanteren Arbeit und freue mich darauf als auf eine Erholung von den bisherigen Zahlenrechnungen, die, wenn man sich den Weg, den man nehmen will, einmal vorgezeichnet hat, eigentlich bloß eine mechanische Beschäftigung sind“ (Briefw. G.-O. Nr. 32) und am 10. Mai 1805: „Das gar zu viele mechanische todte Rechnen, was ich dabei [bei einer Methode die Ceres-Störungen zu berechnen] vor mir sah, hat mich abgeschreckt“ (Briefw. G.-O. Nr. 130).

2) Gauß schreibt darüber: „Meine Tafel für Logarithmen von Summen etc., die mir schon so vielen Nutzen geschafft hat und noch täglich schafft, ist von

Ein Gegenstück zu den Additionslogarithmen ist eine Tafel für den Unterschied der Summe und Differenz zweier Zahlen, die nur durch ihre Logarithmen gegeben sind, die ein Schüler von Gauß, v. Weidenbach, auf seine Veranlassung berechnet hat. Sie ist dem 7. Bande der Astronomischen Nachrichten 1829 (zu S. 384) beigefügt und absolut komplett, da die Relation zwischen Argument und Tafelwert gegenseitig ist [1]). Die Tafel ist mit einem Vorwort von Gauß eingeleitet, das wir als Anhang folgen lassen [2]).

Außer diesen zur allgemeinen Verwendung bestimmten Tafeln hat Gauß noch sehr viele Tafeln für besondere Zwecke berechnet.

Der Theoria motus hat er drei umfangreiche Tafeln beigefügt, von denen die erste, die für Kometenbahnen, deren Exzentrizität

---

mehreren Personen auf 7 Decimalen und den zehnfachen Umfang erweitert. Einmal von dem Senator Mathisson in Altona, dann von Werner. Letztere läßt Zach, wie mir Lindenau erzählte, zugleich mit einer neuen Ausgabe der gewöhnlichen Logarithmen drucken" (Briefw. G.-O. Nr. 289. 7. 1. 1815).

Gauß hat den Gedanken, solche Tafeln zu berechnen, bereits in einer Schrift von Leonelli (1806) vorgefunden, die er in der allgemeinen Literaturzeitung 1808 besprochen hat (Werke, Band VIII, Seite 121—127. Über ältere Versuche, das Logarithmieren von Summen und Differenzen zu vereinfachen, vergl. Wieleitner, Geschichte der Mathematik, Leipzig 1911. Sammlung Schubert LXIII Seite 10). Dabei hat er an den Vorschlägen von Leonelli zur wirklichen Ausführung einer solchen Tafel scharfe Kritik geübt. Die Tafel von Gauß bestand aus 3 Spalten, die den Werten $A = \log m$, $B = \log(1 + 1/m)$, $C = \log(1 + m)$ entsprechen, die auch als die doppelten Logarithmen der Tangenten, Kosekanten und Sekanten der Winkel von 45^0 bis 90^0 betrachtet werden können. Gauß bemerkt jedoch in dem erwähnten Briefe an Olbers (a. a. O. Nr. 289): „Wenn man statt derselben die Sinustafeln anwendet, so hat man 1. bei gleicher Anzahl von Decimalen nur die halbe Genauigkeit meiner Tafel, 2. eine Division mit 2, die dazu zwingt, wenigstens das Argument $\log b/a$, wirklich hinzuschreiben, was ich bei meiner Tafel niemals thue".

1) Vergl. Briefw. G.-Sch. Nr. 359. 4. 3. 1829.

2) Diese beiden Tafeln von Gauß und v. Weidenbach, ferner die Werke Band IX, Seite 456 abgedruckten sind auch in Jerome de La Landes logarithmisch-trigonometrische Tafeln, herausgegeben (und Herrn Hofrath Gauß aus innigster Verehrung gewidmet) von H. G. Köhler, Leipzig 1832, aufgenommen, letztere unter dem Titel: Des Herrn Hofrath Gauß Hülfstafel zum Höhenmessen mit dem Barometer (mit Gebrauchsanweisung und 2 Beispielen).

Ferner enthält die von Warnstorff besorgte zweite Auflage von Schumachers Sammlung von Hülfstafeln (Altona 1845) außer den Grundformeln und Differentialgleichungen der sphärischen Trigonometrie und der Interpolationsmethode für halbe Intervalle des Argumentes eine Tafel zur Verwandlung von Stundenwinkel und Deklination in Azimut und Höhe und die eben genannten Tafeln, um Höhenunterschiede aus Barometerbeobachtungen zu bestimmen, nach den Angaben von Gauß, worüber der Briefwechsel G.-Sch. Nr. 919—932 Aufschluß gibt. Vergl. den Aufsatz von Stäckel: Gauß als Geometer.

nur wenig von der Einheit abweicht, den Übergang von der wahren auf die mittlere Anomalie vermittelt, auch jetzt noch Verwendung findet [1]). Die zweite und dritte Tafel [2]) dienen zur Ermittlung des Verhältnisses vom Sektor zum Dreieck.

Umfangreiche Tafeln zur parabolischen Bewegung sind dann noch im Nachlaß aufgefunden, über deren Verwendung Gauß an Encke 1815 Mitteilungen gemacht hat [3]).

Auch für das geplante Werk über die Grundlagen der Triangulation von Hannover hatte Gauß eine Anzahl von Tafeln in Aussicht genommen, über deren Anordnung die im Nachlaß veröffentlichten einen Anhalt geben können, von denen etwa ein Dutzend in Werke, Band IX enthalten sind. In den Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie hat Gauß selbst Tafeln veröffentlicht. Der ersten Abhandlung ist eine Tafel für die Übertragung vom Sphäroid auf die Kugel angehängt [4]). Der zweiten Abhandlung folgt eine Tafel, die bei der Übertragung von Breite, Länge und Azimut (beziehungsweise der umgekehrten Aufgabe) für eine Breitenzone von drei Grad die von der Breite abhängigen Hilfsgrößen mit Bessels Abplattung gerechnet enthält [5]).

Wie man aus Band IX der Werke ersieht (S. 82 und 84) haben die Formeln und Tafeln erst allmählich die in der Abhandlung ihnen gegebene Gestalt angenommen. Von den übrigen geodätischen Tafeln seien nur noch die häufig gebrauchten für $\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ hervorgehoben (Bd. IX, S. 77, $\log 1/\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}$ S. 139, $\log 1/(1-e^2\sin^2\varphi)$ S. 160). Alle diese Tafeln sind im Wesentlichen auf das Gebiet der hannoverschen Gradmessung beschränkt, so daß sie zunächst nur für die eigenen Zwecke von Gauß bestimmt waren.

Tafeln zur Theorie des Erdmagnetismus, welche sowohl die von 5 zu 5^0 Breite und von 10 zu 10^0 Länge berechneten Werte von $\frac{V}{R}$, X, Y, Z, als auch die Deklination, Inklination, die ganze und die horizontale Intensität enthalten, sind mit Karten zusammen unter dem Titel: Atlas des Erdmagnetismus nach den Elementen der Theorie entworfen als Supplement zu den Resultaten aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, unter Mitwirkung von

---

1) Bauschinger hat in seinen Tafeln zur theoretischen Astronomie die Gaußsche Tafel mit einer geringen Modifikation aufgenommen, während allerdings v. Oppolzer das Verfahren ganz umgestaltet hat.

2) Vergl. Werke, Band VII, Seite 300. Berliner astronom. Jahrb. für 1814. S. 256.

3) Werke, Band VII, Seite 357 ff. und Seite 368. Vergl. Briefw. G.-O. Nr. 299. 29. 5. 1815.

4) Werke, Band IV, Seite 291 ff.

5) Werke, Band IV, Seite 335 ff.

C. W. B. Goldschmidt, von Carl Friedrich Gauß und Wilhelm Weber in Leipzig 1840 herausgegeben. (Vergl. Werke, Band V S. 150 ff.).

Eine vollständige Aufzählung aller, zumal der nur brieflich erwähnten Tafeln würde einen großen Raum beanspruchen, doch seien noch die Tafeln zur Bestimmung des Zeitwertes von einfachen Leibrenten und von Verbindungsrenten (Werke, Band IV, S. 173—183) genannt.

Wie Gauß bei den von ihm entworfenen und von ihm benutzten Tafeln einen großen Wert auf die Anordnung legte und bei letzteren sich an eine bestimmte Form gewöhnt hatte, so war dies auch bei der Aufstellung der Formeln der Fall. Hierdurch und durch eine sorgfältig durchdachte Bezeichnungsweise[1]) vermied er unnötige Überlegungen bei der Anwendung der Formeln. Er schrieb die Formeln in einer bestimmten Reihenfolge, wie dies z. B. bei den nach ihm benannten Gleichungen, die in der Theoria motus art. 34 und etwas verändert in Werke Bd. IV, S. 405 stehen, ersichtlich ist[2]). Dieselbe Bemerkung macht man bei der Vergleichung der Formeln der sphärischen Trigonometrie, bei denen die Reihenfolge der Funktionen und Buchstaben sich ihm wie ein musikalischer Klang eingeprägt haben mochte[3]). Auch hierbei hat

1) Gauß schreibt an Encke (Briefw. G.-E. Nr. 30. 9. 7. 1826): „Was mir bei dieser Ansarbeitung [Supplementum theoriae combinationis observationum] vorzüglich viel Plage macht, ist die Wahl der Bezeichnungen. Ihnen ist es nicht unbekannt, daß ich bei allen meinen Arbeiten darauf immer große Sorgfalt gewandt habe, gewöhnlich viel größere, als man nachher der Arbeit ansieht. Wenn das griechische Alphabet durchweg dem lateinischen correspondirte und die großen griechischen Buchstaben dann auch durchweg von den lateinischen verschieden wären, würde man den Zweck der größten elegantesten Übersichtlichkeit viel leichter erreichen. Das deutsche Alphabet ist mir immer nur ein Notbehelf, zu dem ich mich ungern entschließe, und ebensowenig mag ich die oben und unten zugleich accentuirten Buchstaben leiden. In dem gegenwärtigen Fall vergrößert sich die Schwierigkeit durch einen Nebenumstand. Nemlich fast alle Relationen in der 2ten Behandlung haben eine bewundernswürdige Analogie zu denen der ersten [theoria comb.], so daß sich analytisch betrachtet, fast ganz dieselben Gleichungen ergeben, obwohl hier die darin vorkommenden Größen etwas ganz andres bedeuten. Aber hin und wieder reichen die Alphabete nicht aus, immer eine symmetrische Bezeichnung zu gewinnen“.

2) Aus einer dieser (von Delambre unabhängig aufgestellten) Gleichungen findet man die andern durch die mechanische Regel, daß man die Vorzeichen auf der einen Seite, die Funktionen auf der andern Seite wechselt, so lange es geht.

3) Vergl. Werke, Band VIII, Seite 290 und Briefw. G.-Sch. Nr. 930, wo er noch hinzufügt: „Wenn ich sage, daß ich diese Form für die beste halte, so meine ich damit nicht, daß andere Stellungen, die unwesentlich davon abweichen, nicht völlig eben so gut sind.

er auf seine Nachfolger einen Einfluß ausgeübt, den man unschwer bei Encke, Schreiber, Brünnow u. a. herausfindet.

Wollte man die rechnerische Begabung von Gauß in ihrem vollen Umfange würdigen, so dürfte man nicht seine Rechnungen mit Buchstabengrößen und insbesondere seine große Gewandtheit in der Entwicklung von Reihen übersehen, bei denen die oft komplizierten Zahlenkoeffizienten eine wichtige Rolle spielen. Während hierbei aber die Darstellung der mathematischen Methoden in den Vordergrund treten müßte, sind bei der Würdigung des praktischen Rechners doch einige Hinweise auf die besondern Verfahrungsweisen und Kunstgriffe geboten, die Gauß nur allein im Hinblick auf die numerische Berechnung ausgebildet hat. Hierbei ist es bewundernswert, wie mit mathematischer Zierlichkeit, um einen von Gauß selbst oft angewandten Ausdruck zu benutzen, und treffenden Bezeichnungen die unmittelbare Verwendbarkeit für die Zahlenrechnung oder für die logarithmische Rechnung vereinigt sind.

Durch die Gewohnheit des Gebrauchs abgestumpft würdigt man wohl kaum vollkommen die musterhafte Anordnung des Gaußschen Algorithmus bei der Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate, und die vorteilhaften Bezeichnungen, wie sie in der Disquisitio de elementis Palladis zuerst angegeben sind und die sich dem Gedächtnis mühelos einprägen.

Ein Punkt, auf den Gauß in seinen Vorlesungen großes Gewicht zu legen pflegte, betrifft die Einführung von Näherungswerten für die gesuchten Größen. Hierdurch wird z. B. in der Ausgleichungsrechnung die Beschränkung auf eine geringere Stellenzahl in den Koeffizienten der Normalgleichungen und bei der Auflösung erreicht.

Bei vielen Aufgaben empfiehlt Gauß ein Verfahren allmählicher Annäherung, wenn eine direkte Methode zu weitläufig oder überhaupt nicht möglich ist. Dieses Verfahren hat die bekannteste Anwendung bei der Auflösung des Keplerschen Problems gefunden (Theoria motus art. 11, Werke, Band VII, S. 23). Zugleich ist dabei ein auch sonst von Gauß geübtes Bestreben bemerkenswert, die Beachtung der Vorzeichen (in diesem Falle bei den Verbesserungen des Näherungswertes) durch eine mechanische Regel zu erleichtern. Zu den approximativen Methoden gehört auch die indirekte Auflösung der Normalgleichungen, auf die Gauß in seinen Vorlesungen über die Methode der kleinsten Quadrate besonders hinzuweisen pflegte[1]), und von der ein Beispiel in Werke, Band IX, S. 265

---

1) Siehe: R. Dedekind, Gauß in seiner Vorlesung über die Methode der

gegeben ist. Ferner berührt sich mit diesen Gedankengängen die abwechselnde Auflösung der Winkel- und Seiten-Bedingungsgleichungen bei Ausgleichungen von Dreiecksnetzen, wobei aber die Umgestaltung der Gleichungen der zweiten Art wesentlich zur Erzielung einer rascheren Konvergenz beiträgt [1]).

Für die Ermittlung von u aus der Gleichung $g' \sin(G' + u) = g'' \sin(G'' + u)$ hat Gauß ebenfalls einen indirekten Weg gezeigt, obwohl er zwei elegante direkte Lösungen angegeben hat. Er benutzt dabei wieder wie beim Keplerschen Problem die logarithmischen Inkremente zur Verbesserung des Näherungswertes.

Die Aufgabe der ebenen Trigonometrie, aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel die andern Stücke des Dreiecks zu berechnen, hat Gauß öfter beschäftigt. Die erwähnte Weidenbachsche Tafel wird hierbei mit Nutzen angewendet, wenn die Lösung auf die Form gebracht wird:

$$\frac{a+b}{a-b} \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C = \operatorname{tang}(B + \tfrac{1}{2} C).$$

Auch eine andre Art, die genannte Dreiecksaufgabe zu lösen, ist auf Gauß zurückzuführen, indem sie durchaus den Stempel seines Geistes trägt [2]): Hat man nämlich etwa mit fünfstelligen Logarithmen Näherungswerte der Winkel A und B auf die obige Art gefunden (Gauß stand nur die 5stellige Weidenbachsche Tafel für $\log \frac{1+x}{1-x}$ zur Verfügung), so wird die Winkelsumme $A + B + C$ auf ihren theoretischen Betrag (180^0 bezw. 180^0 + Exzeß) genau abgestimmt. Der Widerspruch, der sich bei strenger Rechnung nach dem Sinussatz zwischen den gegebenen Seiten ergibt, wird den logarithmischen Sinusdifferenzen proportional verteilt und man findet damit die Verbesserungen, die an die beiden Näherungswerte für A und B angebracht werden müssen, um ihre richtigen Werte der angewandten Stellenzahl entsprechend zu erhalten.

Der praktische Sinn von Gauß zeigt sich in einer Anzahl von Rechnungsvorschriften, von denen hier einige Erwähnung finden mögen [3]). Bei der Interpolation in die Mitte teilt er Schumacher

---

kleinsten Quadrate, Festschrift zur Feier des 150-jährigen Bestehens der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Berlin 1901, Seite 45—59.

1) Vergl. L. Krüger, Über die Ausgleichung von bedingten Beobachtungen in zwei Gruppen. Potsdam 1905.

2) Gerling hat diese Auflösung als von Gauß herrührend an O. Börsch mit geteilt, wie L. Krüger von diesem erfahren hat.

3) Hier könnte auch auf die Vorschriften zur Berechnung der Ceres- und Pallas-Störungen hingewiesen werden, die in Werke Band VII enthalten sind, die

Briefw. G.-Sch. 913, 21. 7. 1844) ein Schema mit, nach dem die Interpolation zu machen sei. In Bezug auf die gleichzeitig mitgeteilte Formel bemerkt er: „Es versteht sich, daß die Zeichen der betreffenden Größen gehörig beachtet werden müssen: ich habe zwar einen Kunstgriff, die Aufmerksamkeit darauf zu ersparen“. Man kann vermuten, daß er bei dieser Bemerkung die von Encke (Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen Berlin, 1888, Band 1, Seite 17) erwähnte Vorschrift gemeint hat, wie er auch wohl die von Encke benutzte „Strichregel“ gefunden haben dürfte [1]. (Vergl. Bruns, Grundlinien des wissenschaftlichen Rechnens, Leipzig 1903, Leipzig 1903, Seite 46.)

Eine sehr leistungsfähige Interpolationsformel für Logarithmen, deren Verwendung bei Tafeln mit hoher Stellenzahl in Betracht kommt, findet man in Werke, Band VII, Seite 369. Es wird hier ähnlich, wie bei der Musterrechnung, um p und P aus $A = p \cos P$, $B = p \sin P$ zu finden [2] (Werke, Band VIII, Seite 130), das geo-

aber vielfach von M. Brendel für eine zusammenhängende Darstellung ergänzt werden mußten.

1) Daß der Inhalt von Enckes Abhandlungen über Interpolation (Gesammelte Abhandlungen, Seite 1), über mechanische Quadratur (ebenda, Seite 21) und über die Berechnung der speciellen Störungen (Berliner astronomisches Jahrbuch für 1837 und für 1838) auf Vorträgen von Gauß aus den Jahren 1811 und 1812 beruht, geht aus Briefen von Encke an Gauß hervor. Über die Grundlagen, die Encke hierbei benützte, schreibt er aus Berlin den 28. März 1826 an Gauß (Briefw. G.-E. Nr. 50; C. Bruhns, Johann Franz Encke. Sein Leben und Wirken. Leipzig 1869. Seite 20): „Obgleich ich damals leider fast in allen Punkten sehr zurück war und besonders eine klare Vorstellung von der Differential- und Integralrechnung mir abging, so ersetzte doch mein sehr gutes Gedächtniss etwas diesen Mangel. Sobald die Vorlesung geschlossen war, eilte ich nach Hause und warf mit Hülfe Ihrer Formeln, die Sie mir auf einem besondern Zettel stündlich aufschrieben, den Gang Ihrer Vorträge flüchtig auf das Papier. Der Abend ward dann angewandt, um diese rohen Entwürfe so vollständig als es gehen wollte, auszuarbeiten und auf diese Weise entstand, wenn auch mit manchen Lücken, ein Heft, was indessen von dem Gepräge Ihres Geistes nur zu weit sich entfernte. Demungeachtet ist dieses Heft in Verbindung mit Ihren einzelnen eigenhändigen Papieren, die ich in der genauen Ordnung mir zusammengestellt habe, fast einzig das leitende Buch mir geblieben, und ich wüßte selten eine etwas allgemeinere Untersuchung, wo es mir nicht genügenden Aufschluß verschafft hätte. Noch jetzt wird es immer mehr vervollständigt, jemehr es mir gelingt, aus einzelnen Andeutungen den wahren Sinn Ihrer Behandlung mir deutlich zu machen“.

2) Gauß schrieb immer zuerst den Kosinus, dann den Sinus, bei logarithmischer Rechnung subtrahierte er dann die obere von der unteren Zahl, um den Tangens zu erhalten. Hatte er aus $p \cos P = A$, $p \sin P = B$ auf diese Weise P gefunden, so ging er von log tang P auf log sinus oder log cosinus über, und zwar zu dem größeren, in der Tafel rechts stehenden Logarithmus, um p zu berechnen.

metrische Mittel aus der gegebenen und der gesuchten Zahl eingeführt, wobei Gauß wahrscheinlich sich dem gesuchten Werte durch Wiederholung der Rechnung näherte.

Nicht eigentlich in den Bereich der Kunstgriffe, sondern mehr in das mathematische Gebiet gehören die Vorschriften, um den Logarithmus Sinus eines kleinen Bogens zu finden, die aus dem Nachlaß in Band VII, Seite 299 und Band VIII, Seite 128 abgedruckt sind [1]). Sie verdienen aber deshalb hier eine Erwähnung, weil die Rechnung mit den eingeführten Hilfsgrößen sich durch sehr schnelle Konvergenz auszeichnet.

F. Klein hat in den Vorbemerkungen zum Gaußischen Tagebuch (Werke, Band X 1, Seite 486) die Eigenart des mathematischen Genius von Gauß hervorgehoben: „induktiv an der Hand von Zahlenrechnungen die Resultate zu finden, um hinterher langsam, in härtester Arbeit, die Beweise zu zwingen".

Auf ein Beispiel, das diesen Weg seines hell blickenden Erfindungsgeistes, durch Zahlenrechnungen mathematische Tatsachen aufzuspüren, besonders überraschend zeigt, weist die Tagebuchbemerkung Nr. 63 vom 29. März 1797 (Werke, Band X1, Seite 517) hin. Bei seinen ersten Untersuchungen über lemniskatische Funktionen gelang es Gauß, durch zahlenmäßige Ausrechnung besonderer Werte von sin lemn und cos lemn die zwischen Lemniskatenlänge und Kreisumfang bestehende Beziehung aufzustellen, die er nach der Aufzeichnung Nr. 92 des Tagebuchs (Werke, Band X1, Seite 535) erst im Juli 1808 beweisen konnte. Man darf vermuten, daß allein der Anblick der Zahl 4,81048 (= $N\bar{\omega}$ Werke, Band X 1, Seite 158) ihn darauf führte, daß ihr natürlicher Logarithmus mit $\frac{\pi}{2}$ übereinstimmt.

Ebenso bewundernswert ist es, wenn Gauß die Exponentialform der Koeffizienten einer (Werke, Band X 1, Seite 203 angegebenen) nach den Kosinus der Vielfachen eines Winkels φ fortschreitenden Reihe aus ihren Zahlenwerten errät und 1, $e^{-\frac{1}{2}\pi}$, $e^{-2\pi}$, $e^{-\frac{9}{2}\pi}$, $e^{-8\pi}$, $e^{-\frac{25}{2}\pi}$, $e^{-18\pi}$ ... dafür findet. Auf ein Beispiel der Verschmelzung numerischer Rechnungen mit zahlentheoretischen Unter-

1) S. a. G. Witt Über Näherungsdarstellungen von Funktionen. Astron. Nachr. Bd. **202**, 1916, 217—226.

suchungen weisen die Erläuterungen zur Tagebuchbemerkung 112 hin (Werke, Band X 1, S. 551), wozu Werke, Band III S. 426 ff. zu vergleichen ist.

Verzeichnis der bei den Anführungen benützten Abkürzungen.

Briefwechsel G.-Sch. bezeichnet den Briefwechsel zwischen Gauß und Schumacher. Herausgegeben von C. A. F. Peters. Altona 1860—1865.
Band I: Nr. 1—237,
„ II: „ 238—510 und 226 a,
„ III: „ 511—729,
„ IV: „ 730—986,
„ V: „ 987—1237,
„ VI: „ 1238—1319.

Briefwechsel G.-O. zwischen Gauß und Olbers in W. Olbers, sein Leben und seine Werke, herausgegeben von C. Schilling. Berlin, 1894—1909.
Band II. 1. Abteilung: Nr. 1—380.
„ „ 2. „ : „ 381—767.

Briefwechsel G.-B. zwischen Gauß und Bessel. Herausgegeben auf Veranlassung der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften. Leipzig 1880.

Briefw. G.-G. zwischen Gauß und Gerling ist nicht veröffentlicht.

Briefw. G.-E. zwischen Gauß und Encke, ebenfalls nicht veröffentlicht.

Die Nummerierung bezieht sich überall auf die fortlaufenden Nummern (nicht auf die noch hinzugefügten der von Gauß allein verfaßten Briefe).

Anhang.

Vorwort von Herrn Hofrath Gauß zu der „Tafel um den Logarithmen von $\frac{x+1}{x-1}$ zu finden, wenn der Logarithme von x gegeben ist, von Herrn v. Weidenbach berechnet. Für die astronomischen Nachrichten [7, 1829, zu S. 384]. Copenhagen, 1829“.

Gegenwärtige Tafel ist das Seitenstück zu der zuerst im Jahr 1812 bekannt gemachten und seitdem oft wieder abgedruckten Tafel für die Logarithmen von Summen und Differenzen, und von einer fast ebenso häufigen Brauchbarkeit. Der Zusammenhang der beiden Columnen ist der, daß, wenn die eine den Logarithmen von x darstellt, die andere den Logarithmen von $\frac{x+1}{x-1}$ giebt. Diese Beziehung ist eine gegenseitige, und daher die Tafel absolut vollständig, indem man jeden positiven Logarithmen entweder in der einen oder andern Columne antrifft. Anstatt die Argumente mit 0,382 anfangen zu lassen, hätte man sie auch von 0 anfangen und mit 0,383 schließen lassen können; die Tafel würde dann aber nicht so bequem für den Gebrauch ausgefallen sein.

Die Tafel ist von Hrn. v. Weidenbach ursprünglich auf sieben Decimalen berechnet, um die fünfte auf eine halbe Einheit verbürgen zu können; in den Fällen, wo zu der Entscheidung selbst sieben Ziffern noch nicht zureichten, sind sogar noch mehrere zugezogen.

Man sieht leicht, daß eine Hauptanwendung der Tafel bei der so häufig vorkommenden Aufgabe Statt findet, wo zwei unbekannte Größen p, P durch zwei Gleichungen

$$p\cos(P+A) = a$$
$$p\cos(P+B) = b$$

oder

$$p\sin(P+A) = a$$
$$p\sin(P+B) = b$$

oder

$$a\cos(P+A) = b\cos(P+B) = p$$

oder

$$a\sin(P+a) = b\sin(P+B) = p$$

bestimmt werden sollen. Es gehört dahin der Fall der ebenen Trigonometrie, wo aus zwei Seiten eines Dreiecks a, b und dem eingeschlossenen Winkel C die beiden andern Winkel A, B bestimmt werden sollen, und wo man bekanntlich

$$\frac{a+b}{a-b}\cdot\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C = \operatorname{tang}(B+\tfrac{1}{2}C)$$

hat; indem man hier a die größere gegebne Seite bedeuten läßt giebt die Tafel, wenn man in sie mit $\log a - \log b$ eingeht, ohne weiteres den Logarithmen von $\frac{a+b}{a-b}$, wozu man sonst, wenn man erst a und b aus den Logarithmen berechnen wollte, vier Aufschlagungen, oder wenn man nach der Form $\dfrac{\frac{a}{b}+1}{\frac{a}{b}-1}$ rechnete, drei, oder wenn man den Hülfswinkel einführte, dessen Tangente $\frac{a}{b}$ ist, doch zwei Aufschlagungen nöthig hätte. Beispiele in Zahlen hier beizufügen würde wohl überflüssig sein.

Gauß.