ADNOTATA QUAEDAM DE NUMERIS eorumque Anatomia. Auctore I. H. LAMBERT.

§. I.

Ab antiquissimis retro temporibus, de inveniendis numerorum divisoribus cogitarunt, quotquot Numerorum doctrinam susceperunt augendam promovendamque. Problema quidem eatenus solutum est, quatenus tot instituendae sunt divisiones, quot dantur numeri primi, radice quadrata numeri propositi inferiores. Quodsi enim ex his nullus sit, qui propositum numerum metiatur, tuto colligitur, numerum istum esse primum. At vero si dicendum quod res est, hac ratione tentando potius, quam methodo certa, eaque directa expeditur negotium. Haec ipsa vero methodus adhucdum in desideratis est, atque plus una labori et difficultate. Quoniam vero eius impossibilitas neque dum illustrata est neque facile a quoquam demonstrabitur, operam haud perdidisse censendus est qui vel unum in ista re passum ulterius progrediatur. Hanc ob caussam, quae sequuntur, cum lectoribus communicare haud ambigo.

§. 2.

Si per numerum quemcunque *a* dividatur unitas, productumque feries decimalis, haec finita est abrumpiturque, quoties numerus *a* fuerit ex classe numerorum 2^n . 5^m .

§. 3.

Quodsi vero numerus *a* non sit ex ista classe, feries in infinitum producitur, ita tamen, ut quotientes, qui initio divisionis prodierunt, post certum terminorum numerum eodem ordine recurrant, ut adeo feries istas haud incongrue *periodicas* nominaveris. Ita v. gr

$\frac{1}{7} = 0,\ 142857,\ 142857,\ 142857,\ 14$ etc. *in* infinitum.

$\frac{1}{41} = 0,\ 024390,\ 24390,\ 24390,\ 24$ etc. in infinitum.

Prior ergo fractio producit periodum *6* terminorum, posterior 5.

§. 4.

Numerus membrorum periodi, si maximus est, unitate minor est numero *a*, per quem dividendo periodus ista producitur. Plerumque tamen longe minor prodit.

§. 5.

Si proponatur periodus quaelibet, numerus *a*, qui istam producit, dividendo facile reperitur. Sit *v.* gr. periodus

$$6489$$

scribatur fractio

$$\frac{6489}{9999}$$

ita ut denominator tot constet novenariis, quot sunt periodi membra haec fractio reducatur ad minimos terminos, eritque

$$\frac{6489}{9999} = \frac{721}{1111}$$

Ergo

Ergo periodus ista producitur, si 721. per 1111. dividatur

§ 6.

Theoremata haec iam in Tomo 3. *Actor. Helveticorum* dedi demonstrata. Uberius vero hic exponam, quae inde consequuntur, ad Anatomiam numerorum facientia.

§. 7.

Sit a numerus primus, b vero numerus quilibet per a non divisibilis, dico fore

$$\frac{b^{a-1}-1}{a} = \text{numero integro.}$$

Ponatur

$$b = c + 1$$

erit

$$b^{a-1}-1 = -1 + c^{a-1} + (a-1)c^{a-2} + (a-1).\frac{(a-2)}{2}c^{a-3} + \text{etc.} + 1.$$

In hac serie termini quilibet per a multiplicati, cum per a sint divisibiles, ponantur brevitatis ergo $= Aa$, eritque

$$b^{a-1}-1 = -1 + Aa + c^{a-1} - c^{a-2} + c^{a-3} \ldots \ldots + 1$$

Haec vero progressio cum sit geometrica, datur eius summa, estque

$$b^{a-1}-1 = -1 + Aa + \frac{c^{a}+1}{c+1}$$

sive

$$b^{a-1}-1 = -1 + Aa + c^{a-1} - \frac{c^{a-1}-1}{c+1}$$

Quare

$$\frac{b^{a-1}-1}{a} = A + \frac{c^{a-1}-1}{a} - \frac{c^{a-1}-1}{a(c+1)}$$

Eſt vero

$$\frac{c^{a-1}-1}{c+1} = \frac{c^{a-1}-1}{b} = \text{numero integro:}$$

Cumque b ponatur ipſi a incommenſurabilis, patet fore

$$\frac{c^{a-1}-1}{a(c+1)} = \text{numero integro}$$

quoties eſt

$$\frac{c^{a-1}-1}{a} = \text{numero integro.}$$

Hoc vero ſi fuerit, erit quoque

$$\frac{b^{a-1}-1}{a} = A + \frac{c^{a-1}-1}{a} - \frac{c^{a-1}-1}{a(c+1)} = \text{num integro}$$

Theorema ergo de numero b verum erit, quoties verum eſt de numero c unitate minori. Et de hoc numero verum erit quoties verum eſt de numero $c-1$, quare et de numeris $c-2$, $c-3$, $c-4$ etc.....1. Sed verum eſt de numero 1. unde reciproce verum erit de 2, 3, 4 ...... c, b.

En celebre illud *theorema Fermatianum*, cui demonſtrando Cel. *Eulerus* plurimam operam impendit. Demonſtrationem dedi, qualis meditanti mihi primum ſeſe obtulit.

§. 8.

Quodſi iam ponatur $b = 10$, theorema hoc ſeriebus decimalibus adplicabile eſt, quippe erit

10*

$$\frac{10^{a-1}-1}{a} = \text{numero integro},$$

duobus casibus exceptis, quibus $a = 2$ vel $a = 5$. Etenim $b = 10$ est multiplum numeri 2 et numeri 5.

§. 9.

Sit a numerus primus, exceptis 2 et 5, atque si fuerit

$$\frac{10^m - 1}{a} = \text{numero integro},$$

erit m vel multiplum ipsius $a - 1$, vel $= a - 1$, vel pars aliquota ipsius $a - 1$. Uterque casus prior per se patet. Tertius facile demonstratur. Etenim numerorum $10^m - 1$ et $10^{a-1} - 1$ prior constat $m - 1$, posterior $a - 1$ novenariis. Quodsi ergo hic per illum dividatur atque quotus non sit numerus integer, residuum constat certo numero novenariorum, qui est $< m - 1$. At vero quoniam ponitur, numerum $m - 1$ novenariorum esse minimum, qui divisionem per a admittit absolutam, consequens est, $a - 1$ per $m - 1$ debere esse divisibilem.

§. 10.

Si numerus primus a dividat $10^m - 1$, et numerus primus b dividat $10^n - 1$, sintque numeri m, n, inter se primi, numerus ab, qui inde fit dividet $10^{mn} - 1$. Si vero numeri m, n non sint primi inter se, sumatur minimus eorum communis dividuus, qui si sit c, dico numerum ab numerum $10^c - 1$ dividere. Est enim

$$\frac{10^c - 1}{10^m - 1} = \text{numero integro}$$

et 10^c

$$\frac{10^t - 1}{10^n - 1} = \text{numero integro.}$$

Quoniam vero a metitur denominatorem $10^m - 1$, et b denominatorem $10^n - 1$, atque a, b, sunt numeri primi, patet numerum ab metiri $10^t - 1$. Ceterum generalius haec patent; quippe si

$$\frac{d^m - 1}{a} = \text{num. integro.}$$

et

$$\frac{d^n - 1}{b} = \text{num. integro.}$$

atque t sit minimus, quem m et n metiantur, erit quoque

$$\frac{d^t - 1}{ab} = \text{num. integro.}$$

eoque magis

$$\frac{d^{\lambda t} - 1}{ab} = \text{num. integro.}$$

Excipitur casus, ubi sumitur $a = b$, sive pro utroque idem numerus primus.

§. 11

Si numerus impar quicunque g unitatem dividendo producat periodum $g - 1$ membrorum, numerus g erit primus. Si negas, sint a, b eius factores, ut sit $ab = g$. Iam dividendo unitatem seorsim per a et per b, prodeat priori casu periodus m membrorum, posteriori casu periodus n membrorum. Sed ad summum est $m = a - 1$, et $n = b - 1$ (§. 4.) unde periodus, quae prodit dividendo per $g = ab$, ad summum est $\frac{(a - 1)(b - 1)}{2}$ membrorum, (§. 10) cum $a - 1$ et $b - 1$ sint numeri pares. Quoniam

ergo

ergo $a > 1$ et $b > 1$, erit $\frac{(a-1)(b-1)}{2} < ab - 1$, adeoque periodus minor quam $g - 1$ membrorum. Quod cum evertat hypothesin, liquet, numerum g esse primum.

§. 12.

Si numerus quicunque g unitatem dividendo producat periodum m membrorum, atque $g - 1$ per m dividi nequeat, numerus g non erit primus. Quodsi enim primus esset, $g - 1$ per m divideretur (§. 9). Quare primus esse nequit.

§. 13.

Si numerus quicunque g unitatem dividendo producat periodum m membrorum, atque $g - 1$ per m dividi possit, sitque m numerus primus, tunc numerus g aut est primus, aut si divisores habet, erunt illi ex classe numerorum $2^n \cdot 5^m$, aut ternarius, aut novenarius, aut denique numeri tales, qui unitatem dividendo producunt periodum, quae itidem est m membrorum. Quoniam enim numeri ex classe $2^n \cdot 5^m$ producunt seriem finitam, haec periodos non mutat, quoad numerum membrorum. Similiter ternarius et novenarius producunt periodum μονόκωλον, unde nec illi periodorum longitudinem mutant (§. 10.) Quoniam vero facile dignoscitur, an numerus propositus per 2, 5, dividi possit, dividatur, quoties has divisiones admittet, atque quotum, quem prodeat, ponamus $= q$, nihilominus unitatem dividendo producet periodum m membrorum. Quodsi et $q : 9 = r$ sit numerus integer, etiam r unitatem dividendo producet periodum m membrorum. Ponas iam r non esse primum, verum $= ab$. Unitas dividatur per a, b seorsim. Quodsi ergo prodeant periodi m membrorum, constat propositum. Ponas vero periodos prodeuntes esse μ et ν membrorum, atque per §. 10 patet, m debere esse multiplum ipsius μ, et ipsius ν. Quoniam vero m ponitur esse numerus primus, aut erit

$p = m$, $q = 1$, aut $p = 1$, $q = m$, aut $p = m$, $q = m$. Sed $p = q = 1$ est periodus μονόκωλος quae nonnisi ternario aut novenario debetur. Quare vel p vel q debet esse $= m$, vel uterque erit $= m$.

§. 14.

Quodsi vero m non sit numerus primus, tunc utique multiplum esse potest ipsorum p, q, unde pluribus modis possibile est ut numerus g non sit primus.

§. 15.

Si numerus primus a unitatem dividendo producat periodum $a - 1$ membrorum, ut sit

$$\frac{10^{a-1} - 1}{a} = \text{numero integro}$$

erit quoque

$$\frac{10^{(a-1):2} + 1}{a} = \text{numero integro.}$$

Etenim ob a numerum primum, erit $a - 1$ numerus par. Ponatur ergo $a = 2m + 1$
erit

$$a - 1 = 2m$$

$$\frac{a - 1}{2} = m$$

Unde

$$\frac{10^{a-1} - 1}{a} = \frac{10^{2m} - 1}{a} = \frac{(10^m + 1).(10^m - 1)}{a}$$

Sed a ipsum $10^m - 1$ non metitur, quia periodus esse non tum $a - 1$ membrorum. Quare oportet a metiatur factorem alterum $10^m + 1$.

§ 16.

§. 16.

Hac ergo ratione his casibus divisio si actu sit instituenda ad dimidiam operationis partem reducitur. Dato enim quotus pro

$$\frac{10^m + 1}{a} = q$$

dabitur quoque pro

$$\frac{10^{2m} - 1}{a} = (10^m - 1)\, q = 10^m \cdot q - q.$$

adeoque per simplicem subtractionem ipsius q a $10^m\, q$. Ita v. gr.

$$\frac{10^3 + 1}{13} = 77.$$

unde

$$77000 - 77 = 76923.$$

Est ergo

$$\tfrac{1}{13} = 0,\, 076923,\, 076923,\, 076 \text{ etc.}$$

§. 17.

Vicissim, si fuerit

$$\frac{10^n + 1}{a} = \text{numero integro} = q$$

erit

$$\frac{10^{2n} - 1}{a} = (10^n - 1)\, q = \text{numero integro}.$$

Ita v. gr. reperitur

$$\frac{10^5 + 1}{9091} = 11$$

Quare erit

$$\frac{10^{10}-1}{9091} = 1100000 - 11 = 1099989$$

adeoque

$$\frac{1}{9091} = 0,\ 0001099989,\ 000109 \text{ etc.}$$

§. 18

Similiter si $\frac{1}{a}$ producat periodum $2m$ membrorum, adeoque sit

$$\frac{10^{2m}-1}{a} = \text{numero integro,}$$

erit quoque

$$\frac{10^{m}+1}{a} = \text{numero integro.}$$

ponendo nempe a esse numerum primum. Est enim

$$10^{2m} - 1 = (10^m + 1)\cdot(10^m - 1)$$

sed

$$\frac{10^m - 1}{a}$$

produceret periodum minorem quam $2m$ unde oportet sit

$$\frac{10^m + 1}{a} = \text{numero integro.}$$

§. 19

Si numerus a non sit primus atque unitatem dividendo producat periodum $2m$ membrorum, erit a ipsi $10^m + 1$ commensurabilis. Quoniam enim

$$\frac{10^{2m}-1}{a} = \text{numero integro,}$$

et

$$10^{2m} - 1 = (10^m + 1).(10^m - 1)$$

patet

$$\frac{10^m - 1}{a}$$

non esse numerum integrum. Quare ad summum factores quidam metientur Numerum $10^m - 1$. Quoniam ergo oportet reliqui factores metiantur ipsum $10^m + 1$, patet propositum. Ita v. gr.

$$\frac{1}{81103} = 0,00001233,000012 \text{ etc.}$$

producit periodum 8 membrorum, quare cum sit

$$\frac{10^8 - 1}{81103} \quad \text{num. integro,}$$

numerus 81103 aut metietur ipsum $10^4 + 1$, aut ipsi erit commensurabilis. Instituto examine

$$\begin{array}{rrrrr}
10001 & \left|\begin{array}{r}81103\\80008\end{array}\right| 8 & & & \\
 & 1095 & \left|\begin{array}{r}10001\\9855\end{array}\right| 9 & & \\
 & & 146 & \left|\begin{array}{r}1095\\1022\end{array}\right| 7 & \\
 & & & 73 & \left|\begin{array}{r}146\\146\end{array}\right| 2 \\
 & & & & 0
\end{array}$$

patet, utrique esse communem divisorem 73. Quare

$$\frac{81103}{73} = 1111 \quad 11 \cdot 101$$

ut adeo numeri 81103 factores sint 73. 11. 101

§. 20.

Si numerus a non sit primus, atque unitatem dividendo producat periodum $2m$ membrorum, ut sit

$$\frac{10^{2m} - 1}{a} = \text{numero integro,}$$

dico, singulos numeri a divisores, exceptis iis qui sub forma $2^p\, 5^q$ continentur, periodum $2m$ membrorum esse producturos, quoties fuerit m numerus primus, et

$$\frac{10^m + 1}{a} = \text{numero integro.}$$

Ponatur numeri a divisor quilibet $= b$, et factor alter $= c$, ut sit

$$a = b\,c$$

Erit ergo

$$\frac{10^{2m} - 1}{a} = \frac{(10^m + 1).\,(10^m - 1)}{b\,c}$$

Ponas iam b metiri ipsum $10^m - 1$. Quoniam vero a metitur ipsum $10^m + 1$, patet, hunc numerum quoque divisibilem esse per b. Habent itaque $10^m + 1$ et $10^m - 1$ communem factorem b. At vero $10^m + 1$ et $10^m - 1$, quoniam impares sunt, et binario differunt, divisorem communem habent nullum. Quare b ipsum $10^m - 1$ metiri nequit. Quoniam ergo metitur ipsum $10^m + 1$, ac proinde ipsum $10^{2m} - 1$, patet, b unitatem dividendo producere periodum $2\,m$ membrorum. Est enim $2\,m$ duplum numeri primi, adeoque in alias periodos non resolubilis. Ita v. gr.

$$\tfrac{1}{91} = 0,\,010989,\ 010989, \text{ etc.}$$

producit periodum 6 membrorum. Cumque $\frac{6}{2} = 3$ sit numerus primus, consequens est, divisores numeri 91, si

quos

quos habet, unitatem dividendo, producere periodos 6 membrorum. Est vero $91 = 7 \cdot 13$, et

$$\tfrac{1}{7} = 0,\ 142857,\ 1428 \text{ etc.}$$
$$\tfrac{1}{13} = 0,\ 076923,\ 076 \text{ etc.}$$

§. 21:

Si numerus a, non primus, unitatem dividendo, producat periodum m membrorum, sitque m numerus primus, divisores numeri a, saltem unus eorum, producet periodum m membrorum, reliqui aut sunt ternarius, aut novenarius, aut ex classe $2p.\ 5q.$ Hi enim periodorum longitudinem non mutant, atque si soli essent, vel seriem finitam, vel periodum μονόκολον producerent. Quoniam vero periodus ponitur esse m membrorum, patet, alios insuper adesse divisores, saltem unum. Ponas vero plures adesse, et quoniam m est numerus primus, periodus m membrorum ex aliis minoribus conflata esse nequit. Quare singuli isti divisores periodum m membrorum producunt. Ita v. gr. numerus 4187, qui per 2, 3, 5 non dividitur, producit periodum 13 membrorum, cum sit

$$\tfrac{1}{4187} = 0,\ 0002388344877,\ 0002388 \text{ etc.}$$

Quoniam ergo 13 est numerus primus, consequens est, divisores numeri 4187, si quos habet, iidem producere periodos 13 membrorum. Sit ex divisoribus aliquis b numerus primus. Quoniam ergo producit periodum m membrorum, erit $b - 1$ multiplum ipsius m (§. 9.). Ponatur $b - 1 = n.m$, eritque

$$b = nm + 1$$

Quare in casu exempli propositi oportet b sit ex serie 14, 27, 40, 53, 66, 79 etc. Quoniam vero b est numerus primus, atque minor assumi potest radice quadrata numeri 4187, 4187, patet, ex hac serie unicum numerum 53 assumendum esse, quo, instituta divisione, reperiri possit, an numerum 4187 metiatur. Reperitur vero

$$4187 = 53 \cdot 79$$

patet ergo et his casibus, ubi m est numerus primus, divisores facile reperiri.

§. 22.

Si numerus a per 2, 3, 5 non divisibilis producat periodum $m\,n$ membrorum, periodus ista in alias minores resolvi potest. Etenim $10^{mn} - 1$ dividitur per $10^m - 1$ aeque ac per $10^n - 1$. Ponamus m, n esse numeros primos. Quoniam ergo a neque $10^m - 1$, nec $10^n - 1$ metitur, aut primus est, aut utrique $10^m - 1$, $10^n - 1$ est commensurabilis, aut factores habet, qui itidem producunt periodum $m\,n$ membrorum. Casu primo et tertio res liquet. Pro secundo ponitur $a = b\,c$, et b, c producant periodos p, q membrorum. Erit ergo $p < m\,n$ et $q < m\,n$. Unde cum $m\,n$ debeat esse multiplum ipsius $p\,q$, et praeter m, n alios divisores non agnoscat, patet esse $p = m$, $q = n$. Producit ergo divisor b periodum m membrorum, et divisor q periodum n membrorum. Quare cum sit

$$\frac{10^m - 1}{b} = \text{num. integro}$$

et

$$\frac{10^m - 1}{c} = \text{num. integro}$$

erit $10^m - 1$ et $10^n - 1$ ipsi a commensurabilis. Ita v. gr. numerus 1517 producit periodum 15 membrorum, quae cum in periodos 3 et 5 membrorum resolvi possit, pe-

riou·

riculum fiat, an 1517 sit ipsi $10^3 - 1$ et $10^5 - 1$ commensurabilis. Reperitur vero

999	1517	1
	999	
518	999	1
	518	
481	518	1
	481	
37	481	13
	481	
	0	

1517	99999	65
	98605	
1394	1517	1
	1394	
123	1394	11
	1353	
41	123	3
	123	
	0	

Sunt ergo 37 et 41 divisores numeri 1517.

§. 23.

Si numerus a per 2, 3, 5 non divisibilis producat periodum mnp membrorum, sintque m, n, p numeri primi, periodus ista in alias minores resolvitur m, n, p, mn, mp, np membrorum. Quare eadem ratione fiat periculum, an numerus a ipsis $10^m - 1$, $10^n - 1$, $10^p - 1$, $10^{mn} - 1$, $10^{mp} - 1$, $10^{np} - 1$ sit commensurabilis. Hoc si fuerit, divisores reperiunt. Quodsi vero nullo modo succedat, numerus a aut erit primus, aut, si divisores habet, singuli periodum mnp membrorum producent, eruntque uti §. 21. multiplum ipsius mnp unitate auctum. Ita v. gr numerus 2449 producit periodum 195 membrorum, estque $195 = 3 \cdot 5 \cdot 13$. Unde periodi minores erunt 3, 5, 13, 15, 39, 65 membrorum. Ex his tantum $10^{13} - 1$ et $10^{15} - 1$ reperiuntur ipsi 2449 commensurabiles, suntque divisores communes 31 et 79. qui ergo metiuntur numerum 2449. Similiter numerus 10001 quippe $= 1^4 + 1$, producit periodum 8 membrorum, quae in periodos 2, et 4 membrorum resolvitur. At vero neque $10^2 - 1$ nec $10^4 - 1$ ipsi 10001 est commensurabilis. Quare, si quos divisores habet, singuli periodos 8 membrorum producent, atque erunt numeri ex classe $8k+1$. Quare divisione numeri 10001 per 17, 41, 73, 89, 97 < $\sqrt{10001}$ tentata, pro solo divisore 73 succedit, eritque

$$10001 = 73 \cdot 137.$$

et ideo et 73, et 137, periodos 8 membrorum producunt. Similiter numerus 1000001 seu $= 10^6 + 1$ producit periodum 12 membrorum. Et numeri 12 divisores sunt 2, 3, 4, 6, unde fiunt periodi 2, 3, 4, 6 membrorum. Videatur igitur an $10^2 - 1$, $10^3 - 1$, $10^4 - 1$, $10^6 - 1$, ipsi 1000001 sint commensurabiles. Quod unico tantum casu fieri reperitur, quippe ubi $10^4 - 1$, et ipsi 1000001 divisor communis 101. Et est

$$\frac{1000001}{101} = 1901$$

Est ergo et 101 et 1901 numerus primus, et uterque producit periodum 10 membrorum. Simili ratione numeri 100001 reperiuntur factores 11 et 9091, et numeri 10000001 factores 11 et 909091.

§ 24

Si numerus a unitatem dividendo periodum m membrorum, atque a non metiatur [illegible], vidimus supra (§.12) a non esse numerum primum. Habet ergo factores b, c, ut sit $a = bc$. Quodsi jam b, c unitatem dividendo producunt periodos p, q membrorum, erit vel $m = pq$ vel pq erit multiplum ipsius m (§ 10). Quoniam ergo m non metitur $a - 1$, neque factum pq metietur $a - 1$. Quare vel p, vel q, vel [illegible], erit ad $a - 1$ primus et m in primos numeros resolvi potest. Singulis ergo his [illegible] divisores numeri propositi a facile inveniuntur (§. 12). Ita v. gr. numerus 1261 producit periodum 90 membrorum. At vero

vero 96 non metitur 1261 — 1. Quare numerus 1261 non est primus. Quoniam vero numeri 96 divisores sunt 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 32, 48 totidem evidenter periodi minores, ex quibus necessario saltem unica ipsi 1261 commensurabilis est. Reperitur vero, instituto examine commensurabilem esse periodum 6 membrorum, cum 999999 et 1261 communi divisore 13 gaudeant. Est ergo

$$1261 = 13 \cdot 97$$

§. 25

Numerus primus a sit duplum numeri primi b unitate auctum, sive $a = 2b + 1$, erit (§. 8)

$$\frac{10^{2b} - 1}{2b+1} = \text{numero integro.}$$

Quodsi ergo $2b + 1$ unitatem dividendo producit periodum quae sit $< 2b$ membrorum ista vel nullius, vel unius, vel 2, vel b membrorum erit. At inter numeros primos nonnisi 11 periodum bimembrem producit, et periodus unius membri inter numeros primos soli ternario debetur. His ergo casibus exceptis, periodus erit vel b, vel $2b$ membrorum, adeoque omnium maxima. Ita v. gr.

$2.3 + 1 = 7$	dat periodum	6 membrorum
$2.11 + 1 = 23$	. . . .	22
$2.23 + 1 = 47$	. . . .	46
$2.29 + 1 = 59$		58
$2.41 + 1 = 83$	.	82
$2.53 + 1 = 107$	. . .	106

etc.

Contra vero

$2.1 + 1 = 3$	. .	1
$2.2 + 1 = 5$	. . . .	0
$2.5 + 1 = 11$	. . . .	2

Et

$2.113 + 1 = 227$	. . . .	113

§. 26.

Sint numeri primi $2a+1$, $2b+1$, prior unitatem dividendo producat periodum A membrorum, alter periodum B membrorum, et qui inde fit $(2a+1).(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1$ producat periodum C membrorum, erit $2a$ vel $= A$, vel eius multiplum, et $2b$ vel $= B$, vel eius multiplum (§ 9.). At vidimus, C non semper metiri ipsum $4ab + 2a + 2b$. Quo ergo investigentur conditiones, generalissime ponemus

a esse factum ex numeris primis $tmnpqr$.

b . . . . $tmnPQR$.

erit ergo

$$2a = 2tmnpqr.$$
$$2b = 2tmnPQR.$$

Factores illi prout casus tulerit ponentur $= 1$, et si plures dentur, sub his subintelligi poterunt. Ita v. gr. si a, b sint inter se primi, fiet $t = m = n = 1$. Si b sit multiplum ipsius a, fiet $p = q = r = 1$. Et si a vel b vel uterque sit primus, ad p vel P reducitur, positis reliquis factoribus $= 1$. Iam ponatur

$$A = (2)\ tmpq$$
$$B = (2)\ tnPQ$$

binarium parenthesi includendo, quoniam quandoque abest, quandoque retinetur, quod fit quandocunque $\frac{2a}{A}$ vel $\frac{2b}{B}$ est numerus impar. Quoniam dantur casus, quibus $\frac{2a}{A} < a$ et $\frac{2b}{B} < b$, his casibus quidam ex factoribus ipsius a vel ipsius b valorem A vel B non ingrediuntur. Hanc ob causam

sam in valore A omissum vides factorem proprium r et communem n, similique ratione in B omisi factorem proprium R et communem m. Ponas enim eos non esse omittendos, censeri poterunt esse $= 1$, adsunt enim factores eorum vices tuentes. Iam ponetur (§. 10)

$$C = (2)\, t m n p q P Q.$$

In hoc valore (2) omittitur, si in utroque valore A, B omittatur, reliquis casibus retinetur. Erit substitutis valoribus

$$\frac{(2a+1)(2b+1)-1}{C} = \frac{4 t m n p q r . t m n P Q R + 2 t m n p q r + 2 t m n P Q R}{(2)\, t m n p q P Q}$$

$$= \frac{4 r t m n R}{(2)} + \frac{2 r}{(2) P Q} + \frac{2 R}{(2) p q}$$

Patet ergo, divisorem (2) etiamsi retineatur, non impedire, quo minus haec expressio sit numerus integer. Pars eius prima

$$\frac{4\, A r t m n R}{(2)}$$

necessario est numerus integer, quare quaestio ad alteram partem

$$\frac{2 r}{(2) P Q} + \frac{2 R}{(2) p q}$$

sive simpliciter

$$\frac{r}{P Q} + \frac{R}{p q}$$

reducitur. Haec vero fractio nunquam est numerus integer, nisi uterque divisor sit $= 1$, adeoque

$$A = (2)\, t m.$$

$$B = (2)\, t n.$$

 Quodsi

Quodsi ergo in valoribus A, B desint factores proprii ipsorum a, b, erit

$$\frac{(2a+1)\ (2b+1)-1}{C} = \text{numero integro}$$

reliquis casibus, usque longe frequentissimis, non erit

$$\frac{(2a+1).\ (2b+1)-1}{C} = \text{num. integro.}$$

Ita v. gr. $\frac{1}{41}$ producit periodum 5 membrorum, et $\frac{1}{101}$ periodum 4 membrorum. Est ergo

$2a+1 = 41$	$2b+1 = 101$
$a = 20 = 2\,2.\,5$	$b = 50 = 2\,5.\,5$
$A = 5$	$B = 4$

Quare

$$(2)\ a = (2)\ tmnpqr$$
$$= (2) * 5\ 2 * * 2$$
$$(2)\ b = (2)\ tmnPQR$$
$$= (2) * 5\ 2 * * 5$$

Hinc

$$A = (2)\ tm * pq *$$
$$= * * 5 * * * *$$ Hic enim omittitur (2)
$$B = (2)\ t * nPQ *$$
$$= 2 * * 2 * * * = 4.$$ Hic enim retinetur (2)

Quoniam ergo $p = q = P = Q = 1$, patet esse

$$\frac{(2a+1).\ (2b+1)-1}{C} = \text{numero integro.}$$

Quod facile examini subiicitur. Nam cum

$\frac{1}{41}$ producat periodum 5 membrorum .
$\frac{1}{101}$ . . . . . . 4 . . .

conse-

consequens est (§. 10)

$$\frac{1}{41} \cdot \frac{1}{101} = \frac{1}{4141}$$ producere periodum 20 membrorum. Sed

$$\frac{4141-1}{20} = \frac{4140}{20} = 207 = \text{numero integro.}$$

§. 27.

Ex his, quae hactenus de seriebus decimalibus exposui, plurima sunt quae et aliis progressionibus applicantur. Decimales propterea reliquis praetuli, quod systema numericum iis est accommodatum. Hoc unum notabo aliis plerumque prodire periodos, si alia aliaque assumatur progressio. Ita v. gr. supra vidimus (§. 16.)

$$\frac{1}{13} = 0, 076923, 076923, 0 \text{ etc.}$$

in systemate decimali dare periodum tantum 6 membrorum, ut adeo hinc colligi nequeat, an 13 primus sit nec ne? (§. 11). At vero, si loco progressionis decimalis adhibeatur dyadica

$$1, 2, 4, 8, 16, 32 \text{ etc.}$$

periodus duodecim membrorum emerget, atque inde colligitur, 13 esse numerum primum. Fit enim, residua duplicando, et si 13 exundant, 13 abiciendo, residuorum series

1, 2, 4, 8, 16
3, 6, 12, 24
11, 22
9, 18
5, 10, 20
7, 14
1, 2 etc.

Sic et pro quovis numero primo a dantur progressiones

$$1, m, m^2, m^3, m^4, \text{ etc.}$$

quae

quae periodum producant $a - 1$ membrorum, quod cum de numeris compositis nunquam locum habeat, patet, et hinc peti posse numerorum primorum criterium. Denique si in serie decimali duo numeri primi, uti v. gr. 41 et 271, aequalem periodum 5 membrorum producant, alia adhibita progressione periodos producent inaequales. Simili ratione ratione ille casus numeri 4141, qui in systemate decimali periodum producit 20 membrorum, seu partem aliquotam ipsius $4041 - 1$, (ut 25, alia assumta progressione speciem numeri primi mentiri desinit. Etenim in systemate dyadico periodum producit 100 membrorum, et cum

$$\frac{4141 - 1}{100} \text{ non sit} = \text{numero integro,}$$

hinc utique liquet, numerum 4141 non esse primum.