PRAXIS

DES

ZAHLENRECHNENS

VON

DR GOTTFRIED RUCKLE

1 9 2 5

ROM-VERLAG / R OTTO MITTELBACH
CHARLOTTENBURG

DRUCK DER SPAMERSCHEN BUCHDRUCKEREI IN LEIPZIG

DEM ANDENKEN
MEINES LIEBEN BRUDERS
PHILIPP

Vorwort.

Es ist mir oft nahegelegt worden über meine Arbeitsmethoden in der Praxis des Zahlenrechnens etwas zu schreiben

Deswegen lasse ich die vorliegende kleine Schrift erscheinen, von der ich hoffe, daß sie manchem mit Zahlen Arbeitenden eine Anregung bietet Ich widme sie dem Andenken meines am 1 Dezember 1922 verschiedenen lieben Bruders *Philipp*

Es ist nicht leicht, über ein Gebiet mathematischer Betätigung zu berichten, das wesentlich in persönlichen Leistungen in diesem Fall in der Lösung bestimmter Zahlenaufgaben besteht

Soll die Arbeit über die Darstellung von erstaunlichen Tatsachen die niemand Nutzen bringt, hinausgehen, so muß sie die zur Verwendung gelangenden Methoden auseinandersetzen

Das laßt sich mit kurzen Worten nicht machen, da es sich um einen Gegenstand handelt, der im allgemeinen wenig bekannt ist, zum mindesten wenig gründlich studiert wird, da man das Gebiet für weit abliegend halt von den Wissenschaften, die in die Praxis fordernd eingreifen Im Zeitalter der Rechenmaschinen erscheinen Methoden für zielsicheres Kopfrechnen überflüssig

Zunächst sollen die Methoden angegeben werden für die Ausführung numerischer Rechnungen ohne die Hilfsmittel von Bleistift, Papier und Tabellen An Hand einiger Gedachtnisversuche mit Zahlenreihen und Zahlenkarrees soll gezeigt werden, was sich in der Beherrschung des Zahlensystems leisten laßt, wenn die rein mathematischen Eigenschaften der Zahl zu geeigneter Verwendung gelangen

Man wird bei den Zahlenaufgaben, wie das meistens geschieht, zwei Gruppen unterscheiden, je nachdem es sich um die genaue Bestimmung des Resultats in rationalen Zahlen handelt oder um Näherungsresultate bei komplizierteren Rechenprozessen In die erste Gruppe sind zunächst die auf rationalen Operationen, also der Addition, der Multiplikation der Potenzierung beruhenden Rechenvorgange aufzunehmen, aber auch die Bestimmung von Wurzeln aus entsprechenden vollständigen Potenzen, die Lösung diophantischer Gleichungen u a m In einer besonderen Untergruppe von I sind die Aufgaben zahlentheoretischer Art unterzubringen, wie die Zerlegung von ganzen rationalen Zahlen in die Summe von zwei, drei oder vier Quadratzahlen ferner die Zerlegung ganzer Zahlen in Primzahlen

Der erste Teil der Arbeit soll sich mit den Grundlagen meiner Rechenmethoden befassen und einfache Aufgaben der gekennzeichneten

Art behandeln. Eingehend besprechen wir dann später die Primfaktorenzerlegung und die auf nicht rationale Prozesse gegründeten approximativ auszuführenden Operationen

Wenn dabei Streifzüge in das Gebiet der Zahlentheorie unternommen werden, so läßt sich das einmal nicht vermeiden, andererseits weiß man nach einem Ausspruch des großen Zahlentheoretikers *Hermann Minkowski* nicht wie bald die Grundwahrheiten der höheren Arithmetik auf physikalischem Gebiet eine wichtige Rolle zu spielen berufen sind.

Die Fähigkeit, rechnerische Vorgänge mit großen Zahlen im Kopfe durchzuführen, setzt eine genaue Kenntnis des Zahlensystems in nicht zu engen Grenzen voraus, die meiner Ansicht nach am besten durch das Studium der Zahlen auf ihre einfachen mathematischen Eigenschaften erworben werden kann

Diese eingehende Beschäftigung mit den ganzen Zahlen (die schärfere Bezeichnung „rational" kann weggelassen werden, da *algebraische* Zahlen in diesem Bericht kaum vorkommen werden) bildet für den Vortragenden die Grundlage für sein von den Psychologen[1]) eingehend untersuchtes Zahlengedächtnis das für wirkliche Leistungen im Kopfrechnen Vorbedingung ist Bei diesen Bemerkungen sei mir eine etwas mehr persönliche Darstellung gestattet

Wenn ich davon erzählen darf, wie sich bei mir das Interesse für die Zahlen und ihre Gesetze entwickelt hat so muß ich mit den Primzahlen und der Rolle, die sie bei dem Aufbau der ganzen teilbaren Zahlen spielen, beginnen Für Primzahlzerlegungen hat sich großes Interesse bei mir schon recht frühzeitig gezeigt, etwa im Alter von 11 Jahren Die Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ lernte ich als Quartaner kennen und nutzte sie konsequent für meine Zahlenzerlegungen aus Die Kenntnis des Zahlengebietes von 1—1000 etwa in bezug auf die Struktur der Zahlen aus Primzahlen hat mir die dreistelligen Zahlen individualisiert Der dreistellige Komplex wurde mir zu einer Art von Atom für das Auffassen und Behalten von Zahlenreihen, das ich übrigens nie besonders geübt habe Erst als mich *G E Müller* in Göttingen Anfang 1902 veranlaßte, meine Gedächtnisfunktionen quantitativ feststellen zu lassen erfuhr ich, daß meine Leistungen auf dem Gebiete der sogenannten Zahlenvirtuosen die bis dahin in der Literatur bekannt gewordenen Höchstleistungen nicht unerheblich übertrafen In dem Maße, in dem meine zahlentheoretischen Kenntnisse wuchsen, hat sich meine Charakterisierungsmethode der Zahlen vertieft Selbständig habe ich mich im Alter von 12 Jahren mit den Eigenschaften der Dezimalbruchperioden und den Endziffereigenschaften der Quadratzahlen beschäftigt, um

[1]) Vgl *G E Müller* Zur Analyse der Gedächtnistätigkeit und des Vorstellungsablaufs Bd I—II (besonders Bd I) Leipzig Joh Ambrosius Barth 1911 bis 1916

diese auf das Ausziehen der Quadratwurzeln anzuwenden. Später nachdem ich als Primaner den elementaren Teil von *Dirichlets* Zahlentheorie gelesen hatte, fing ich an, die Eigenschaften gewisser quadratischer Formen, und als Göttinger Student den quadratischen Zahlkörper herauszuziehen, um meine Methoden zu verbessern.

Die mit der Kenntnis zahlentheoretischer Hilfsmittel schärfer werdende Individualisierung der Komplexe steigerte ganz von selbst das Gedächtnis für Zahlen, während diese ganz natürlich und stetig vor sich gehende Entwicklung rückwirkend die Fähigkeit des numerischen Rechnens erhöhte.

Über Einzelheiten werde ich bei der Beschreibung der Gedächtnisversuche berichten. Hier ist es mir nur darum zu tun, zu zeigen, inwieweit meine Methoden ganz auf dem Boden der Mathematik gewachsen sind. Deswegen hoffe ich außer einer Anregung manchem Leser die Richtung zeigen zu können, in der er seine Gewandtheit im Zahlenrechnen erhöhen kann.

Es wird vom psychologischen Standpunkt aus nicht ohne Interesse sein, wenn ich erzähle, daß ich für die Erhaltung der Schnelligkeit und Sicherheit beim Operieren mit Zahlen keinerlei Übung bedarf. Aus der psychologischen Literatur ist bekannt, daß die Rechenkünstler die ja durchgängig mit mnemotechnischen Mitteln arbeiten und in vielen Fällen nur auswendig gelernten Ballast darbieten, in ganz empfindlicher Weise von der Übung abhängig sind.

Psychologen haben meine Auffassung bestätigt, daß die Unabhängigkeit von der Übung in dem Maße sich steigert, in dem die rein mechanische Arbeitsweise durch Methoden ersetzt wird, die auf dem denkenden Erfassen des Arbeits- und Lernstoffes, also hier der Zahlen, beruht.

Meine Lösungen von Zahlenaufgaben haben für den Hörer oder den Leser den Nachteil, daß fast gar nicht nach einem Schema gearbeitet wird, wie die spätere Diskussion von einzelnen Aufgaben zeigen wird. Viele werden der Ansicht sein, daß meine Art, mit den Zahlen zu operieren, für andere keine Förderung bedeutet. Dem darf ich entgegenhalten, daß meine — ich darf wohl sagen elastische Operationsweise darauf beruht, daß Individuelles an der Aufgabe sofort erkannt und konsequent ausgenutzt wird. Das ist eine Methode, die der Mathematik wie den Ingenieurwissenschaften gleich eigentümlich ist und in der raschen Erkenntnis der besonderen Zusammenhänge beruht. Vom psychologischen Gesichtspunkt aus werden meine Arbeitsmethoden in einem kleinen Buch [1]) behandelt, das im November 1922 erschienen ist.

Hattenbach i. Hessen, Januar 1923.

Gottfried Rückle.

---

[1]) *O. Kroh*, Eine einzigartige Begabung und ihre psychologische Analyse. Göttingen, Vandenhoeck u. Ruprecht.

Inhaltsverzeichnis.

Erster Abschnitt.

§ 1. Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen.

Über die Bedingungen der Teilbarkeit der ganzen Zahlen durch 2, 3, 5 und die Potenzen dieser drei kleinsten Primzahlen brauche ich nicht zu reden. Ich bemerke vorweg, daß die Methoden im wesentlichen unabhängig sind von der Grundzahl 10 des Zahlensystems, und manche Überlegungen und Vorgänge werden klarer erkannt, wenn man mit der allgemeinen Grundzahl g arbeitet. An die Stelle des dekadischen Systems soll also gelegentlich ein allgemeines System treten, dessen Grundzahl g eine beliebige ganze Zahl ist.

Dann wird jede ganze Zahl A dargestellt als eine ganze rationale Funktion von g mit Koeffizienten $a_k = 1, 2, 3, \ldots, g-2, g-1$ (0, 1, 2, ..., 8, 9 im gebräuchlichen 10-System). Also kommt für die $n$stellige Zahl

$$A = a_1 g^{n-1} + a_2 g^{n-2} + a_3 g^{n-3} + \cdots + a_{n-1} g + a_n$$

Im folgenden kommt es häufig vor, daß Zahlen in Komplexe abgeteilt werden, z. B. 29 557 836 wird von rechts dreistellig abgeteilt, d. h. $29 \mid 557 \mid 836 \mid = 29 \cdot 10^6 + 557 \cdot 10^3 + 836$; das kommt in praxi darauf hinaus, an Stelle der Grundzahl 10 die Potenz 10^3 zu wählen. Die Koeffizienten, die dann alle kleiner als 10^3 bleiben, werden ein-, zwei- oder dreistellige Zahlen. Für den allgemeinen Fall der Grundzahl g käme eine Darstellung der Zahl

$$A = f_1 \cdot g^{e_1 k} + f_2 \cdot g^{e_2 k} + \cdots + f_l \cdot g^{e_l k}$$

wo die Faktoren $e_1, e_2, e_3, \ldots$ des Exponenten eine um 1 abnehmende arithmetische Reihe bilden, wie das Beispiel der achtstelligen Zahl 29 557 836 unmittelbar erkennen läßt. Kurz wird man das so ausdrücken: Geht man von einem Komplex zum linksstehenden, so entspricht das einer Multiplikation der Einheit mit g^k. Man denke hierbei an die Kommasetzung bei Dezimalbrüchen.

Zum leichteren Verständnis des folgenden will ich hier eine allgemeine Bemerkung einschalten, die den Weg als natürlich erscheinen läßt, auf dem wir Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen durch gewisse Primzahlen finden wollen. Die Zahlen, für die wir einfache, im Rechenunterricht gelehrte Teilbarkeitseigenschaften kennen, sind 2, 5, 3, 11, die wie 2 und 5 Teiler der Grundzahl 10, wie 3 Teiler von

$10-1$ wie $11 = 10+1$ sind, zu 10 also in denkbar einfachster funktionaler Beziehung stehen Fur die Grundzahl g sind demnach die Teiler von g, die g_1, g_2 usw sein mogen, die Zahlen $g-1$ und $g+1$ und die Teiler dieser Zahlen die 2, 5, 3, 11 entsprechenden Zahlen mit einfachen Teilbarkeitseigenschaften Im Grunde genommen beruhen diese Eigenschaften darauf, daß die die Zahl A darstellende ganze rationale Funktion

$$A = a_1 g^{n-1} + a_2 g^{n-2} + \cdots + a_{n-1} g + a_n$$

in sehr einfacher Weise als Funktion von $g-1$ bzw $g+1$ dargestellt werden kann, wahrend fur die Teiler von g die entsprechende Darstellung schon gegeben ist

Man sucht in Verwertung dieses Gedankens also andere einfache Funktionen von g, durch die die Funktion $A(g)$ ohne große Rechnung dargestellt werden kann, und kommt ganz von selbst auf die Formen $g^k + d$, wo $d >$ oder < 0 und wegen der Bedingung leichter Reduzierbarkeit eine kleine ganze Zahl sein wird Soll die Zahl $A(g)$ mit $g^k + d$ geordnet, oder wie man sagen wird, nach $g^k + d$ reduziert werden, so kommen wir zur Bildung der k-stelligen Komplexe, die der Darstellung von A als Funktion von g^k entsprechen

Diese Uberlegung wird das in der Komplexbildung willkurlich Erscheinende beseitigen Wir schreiben also jetzt, nach k-stelligen Komplexen geordnet

$$A = f_1 g^{ek} + f_2 g^{(e-1)k} + f_3 \cdot g^{(e-2)k} + \cdots + f_e g^k + f_{e+1}$$

Das entwickelte Verfahren hat zum Ziel, A als Funktion von $g^k + d$, das ich als Teilerfunktion mit $t = t(g, d)$ bezeichnen will, darzustellen Es ist $g^k + d = t$, und es ist im Wert von A an Stelle von g^k zu setzen

$\underline{t-d}$

Dann kommt

$$\begin{aligned} A &= f_1 (g^k)^e + f_2 (g^k)^{e-1} + f_3 (g^k)^{e-2} + \cdots + f_e g^k + f_{e+1} \\ &= f_1 (t-d)^e + f_2 (t-d)^{e-1} + f_3 (t-d)^{e-2} + \cdots + f_e (t-d) + f_{e+1} \\ &= g(t, d)\, t + f_1 (-d)^e + f_2 (-d)^{e-1} + f_3 (-d)^{e-2} + \cdots + f_e (-d) + f_{e+1} \end{aligned}$$

Hier ist $g(t, d)$ die ganze rationale Funktion von t und d, die mit t multipliziert ist, also durch alle Teiler von $t = g^k + d$ teilbar wird, und es bleibt der Rest zu untersuchen, der weiter nichts ist als die Funktion

$$A = f_1 g^{ek} + f_2 g^{(e-1)k} + \cdots + f_e g^k + f_{e+1}$$

fur $-d$ als Grundzahl, das an die Stelle von g^k tritt

Diese Funktion $A(-d)$ ist sehr leicht zu bestimmen fur kleine ganzzahlige Werte von d

Ich setze $A(-d) = R$, wo R den Rest darstellt, der auf die in $t_{(g,d)} = g^k + d$ enthaltenen Teiler zu untersuchen ist

Man kann diese Betrachtung auf einem etwas anderen Wege herleiten, der bei einfachen Beispielen leichter verständlich ist, im allgemeinen aber nicht so übersichtlich wird wie der soeben beschriebene

Es ist ein in der Algebra oft angewandtes Verfahren, die Teilbarkeit einer ganzen rationalen Funktion $F(x)$ durch Funktionen niederen Grades zu untersuchen, indem man $F(x)$ durch Addition des mit einem zunächst willkürlichen Funktionsfaktor versehenen Produkts der Teiler $d_1(x)$, $d_2(x)$ $\ldots$ $d_r(x)$ abändert Denn die so modifizierte Funktion

$$\overline{F(x)} = F(x) + \varphi(x)\ d_1(x)\ d_2(x) \ldots d_r(x)$$

hat in bezug auf die Teilbarkeit durch die $d_k(x)$ genau die gleichen Eigenschaften wie $F(x)$ Durch die Zusammenfassung geeigneter Teiler $d_k(x)$ und durch geschickte Wahl des Koeffizienten $\varphi(x)$ läßt sich in vielen Fällen $F(x)$ in eine Form $\overline{F}(x)$ bringen, die die Rechnung sehr einfach gestaltet

Gehe ich auf die Darstellung der Zahl A in k-stelligen Komplexen zurück, schreibe also

$$A = A_1 \cdot g^{n\ k} + A_2 ,$$

so erkennt man unmittelbar, daß es angebracht ist, Teiler für die Untersuchung zu kombinieren, deren Produkt von der Form $g^{n\ k} + e$ ist wo e eine kleine ganze Zahl ist, mit der es sich bequem rechnen läßt Man schreibt demnach

$$A = A_1(g^{n\ k} + e) + A_2 - A_1 e$$

$g^{n\ k} + e$ sollte ein Produkt von Teilern sein $= d_1\, d_2\, d_3 \ldots$ Die Teilbarkeit von A durch diese Teiler hängt jetzt nur noch von der Teilbarkeit der Restzahl $A_2 - A_1 e$ durch die Teiler $d_1, d_2, \ldots$ ab

Für die jetzt zu betrachtenden Zahlenbeispiele sind demnach die Zahlen der Form $10^k \pm d$ als Reduktionsgrößen zu wählen

Die Beispiele werden manches Bekannte geben, doch glaube ich, daß es nicht zwecklos ist, wenn man diese Dinge, von denen gelegentlich auch Tageszeitungen als von Zahlenmerkwürdigkeiten berichten, unter einem allgemeinen Gesichtspunkt betrachtet und dadurch den Tatsachen das Besondere nimmt, das ihnen nicht zukommt, die Methoden beim Rechnen von allem Willkürlichen befreit das ihnen nicht anhaftet

Beispiele.

1 Formen $10^k + 1$ und $10^k - 1$

Nach den allgemeinen Ausführungen können wir $10 + 1$, $10 - 1$, aber auch $10^2 + 1$ und $10^2 - 1$ beiseite lassen Ihre Verwendung als Reduktionsformen liefert die Teilbarkeitsgesetze für 11, 3 und 3^2 sowie ein nicht viel Nutzen gewährendes Gesetz für den Primteiler

$$10^2 + 1 = 101$$

Ich betrachte daher zunachst $10^3 + 1$, dann $10^3 - 1$ Die Komplexzahl ist entsprechend dem Exponenten der Grundzahl 10 die 3 Die zu untersuchenden Zahlen werden von rechts dreistellig abgeteilt Fur $10^3 + 1$ wird $d = +1$, fur $10^3 - 1$ $d = -1$

Um die allgemeine Formel anwenden zu lernen fuhre ich einige Zahlenbeispiele ausfuhrlich durch, wobei noch folgendes zu bemerken ist

Erfolgt die Untersuchung der Zahl $A = A(g)$ auf nur *einen* Primfaktor p so kann man alle Teilresultate beliebig durch Addition von geeigneten Vielfachen von p verändern, ohne daß die Teilbarkeitsbedingungen der Zahl A geandert werden

Bei einiger Geschicklichkeit lauft die Untersuchung dann tatsachlich auf das Rechnen mit kleinen ganzen Zahlen hinaus, wie die Beispiele zeigen werden Das Verfahren spielt bei allen Teilbarkeitsbetrachtungen eine wichtige Rolle, es wird uns spater wieder begegnen

1 Beispiel Die Zahl 371 293 soll auf ihre Teilbarkeit durch 7 11 13 untersucht werden Es wird fur $371 \mid 293$ mit $d = -1$

$$R = 371\,(-1)^1 + 293 = 293 - 371 = -78 = -\,|\,2 \quad 3 \cdot \underline{\underline{13}}\,|$$

Die Zahl ist durch 13 teilbar

Man erkennt sofort, daß man den linksstehenden Dreierkomplex von dem rechtsstehenden zu subtrahieren hat um den noch zu betrachtenden Rest R zu finden

Da die Vorzeichen von Komplex zu Komplex wechseln so kann das Subtraktionsverfahren auf eine beliebige Reihe von Komplexen also auf beliebig große Zahlen A ausgedehnt werden Es ist meiner Ansicht nach fur die Demonstration des Verfahrens immer instruktiv, wenn man beim Bilden von Beispielen von einem Vielfachen des zu suchenden Faktors ausgeht, dieses Vielfache einer Rechenoperation unterwirft, bei der der Faktor erhalten bleibt und den Faktor im Resultat aufsucht Um eine mehrstellige Zahl mit den Faktoren 7 und 11 zu erhalten, multipliziere ich 7 11 mit der Primzahl 3137 Das Produkt $7 \quad 11 \cdot 3137 = 241\,549$ erhebe ich ins Quadrat, und untersuche dieses auf die Faktoren 7, 11 Es kommt $241\,549^2 = 58 \mid 345 \mid 919 \mid 401$ Mit $10^3 + 1$ reduziert kommt folgendes Schema

$$\begin{array}{r|r|r|r|}
58 & 345 & 919 & 401 \\
 & -\;58 & -\;287 & -\;632 \\
\cline{2-4}
 & +\;287 & +\;632 & -\;231 = 3 \quad \underline{\underline{7 \quad 11}}
\end{array}$$

2 Beispiel Untersuchung durch Reduktion mit $10^3 - 1 = 3^3 \quad 37$ $10^3 - 1$ liefert das einfachste Verfahren, auf den Faktor 37 zu untersuchen Da in $t - d = 10^3 - 1$, $d = -1$ wird, also $-d$ in der allgemeinen Formel $= +1$, so wird die Restfunktion $R = f_1 + f_2 + f_3 + \quad + f_{e+1}$, womit das Verfahren als fortschreitende Addition der Dreierkomplexe gekennzeichnet ist

1 *Zu* untersuchen

$$37\ \ 17\,569\ \ 667\,859 = 650\,053\ \ 667\,859$$

$$\begin{array}{rrrrl}
-434 & |\ 143 & |\ 746 & |\ 527 & \text{auf die Teilbarkeit durch } 37 \\
 & +434 & +577 & +1323 & \\
\hline
 & 577 & 1323 & 1850 & = \frac{3700}{2} = 50\ \ \underline{\underline{37}}
\end{array}$$

Wir wollen bei diesen Augaben in den Teilrechnungen die Reduktion durch Vielfache von 37 vornehmen, dann kommt, wobei die Identität $3\ \ 37 = 111$ immer zu beachten ist

$$\begin{array}{rrrrl}
434 & |\ 143 & |\ \overline{746} & 527 & \\
-10 & |-10 & +6 & +28 & \\
 & & +22 & & \\
\hline
 & \underline{133} & & 555 & = 5\ \ 111 = 5\ \ 3\ \ \underline{\underline{7}} \\
 & +22 & +28 & &
\end{array}$$

Man erkennt die Überlegenheit der Methode gegenuber dem gewohnten Ausdividieren Vor allem ist man in der Lage, den Zahlen die Bedingungen vorzuschreiben, indem man sie ihren Gesetzen unterwirft Das nimmt dem Rechnen das Ermudende, laßt reizvollen Kombinationen Spielraum und vermeidet das Arbeiten mit großen Zahlen uberall da, wo es uberhaupt vermieden werden kann Rechenfehler sind dadurch so gut wie ausgeschlossen

3 *Beispiel* Es soll untersucht werden

$$A = 233\,|\,481\,|\,103\,219 \text{ auf } 7,\ 11,\ 13,\ 37$$

a) $7,\ 11,\ 13\,|$

$$\begin{array}{rrrrl}
233 & |\ 481 & |\ 103 & |\ 219 & | \\
 & -\underline{233} & -\underline{248} & +\underline{145} & \\
 & 248 & -145 & 364 & = 2^2\ \ 91 = 2^2\ \ \underline{\underline{7\ \ 13}}
\end{array}$$

b) $37\,|$

$$\begin{array}{r|r|r|r|}
233 & 481 & 103 & 219 \\
\hline
+11 & 0 & -8 & -3 \\
 & \underline{+11} & \underline{+11} & \underline{+3} \\
 & +11 & +3 & \underline{\underline{0}}
\end{array}$$

Ich will die dreistelligen Komplexe gleich anfangs nach 37 reduzieren

$$481 = 13\ \ 37$$

ist dabei zu beachten

$$222 = 2\ \ 3\ \ 37$$

$$\underline{111 = 3\ \ 37}$$

4. *Beispiel.* Es soll untersucht werden

$$A = 29\,170\,680\,231 \text{ auf } 7, 11, 13, 37.$$

a) 7 · 11 · 13

$$\begin{array}{rrrrrrr}
29 & | & 170 & | & 680 & | & 231 \ | \\
 & & -29 & & -141 & & -539 \\
 & & 141 & & 539 & & -308 = 2^2 \cdot \underline{\underline{7 \cdot 11}}
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rrrrrrr}
29 & | & 170 & | & 680 & | & 231 \ | \quad 680 = 666 + 14 \\
-8 & & -8 & & +14 & & +9 \\
 & & 162 & & +14 & & +28 \\
 & & = +51 & & +28 & & \underline{\underline{37}} \\
 & & = +14 & & & &
\end{array}$$

Es fragt sich weiter, wie das Verfahren, das für 7, 11, 13, 37 sich unter allen Umständen bewährt hat, auf andere Primzahlen ausgedehnt werden kann.

Ziehen wir die allgemeine Reduktions- oder Teilerform $10^k + d$ heran, so wollen wir bei $k = 3$ bleiben und die Zahl d, natürlich in engen Grenzen, von $+1$ und -1 verschieden annehmen. Ich nehme die Werte

$$d = +2, \quad d = +3, \quad d = +4, \quad d = +5, \quad d = +7.$$

Dann kommen Teilerformen

$$\begin{array}{ll}
1.\ 1002 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{\underline{167}} & 3.\ 1004 = 2^2 \cdot \underline{\underline{251}} \\
2.\ 1003 = \underline{17 \cdot 59}, & 4.\ 1005 = 3 \cdot 5 \cdot \underline{\underline{67}} \\
\multicolumn{2}{c}{5.\ 1007 = \underline{19 \cdot 53}}
\end{array}$$

Nach der Restformel im allgemeinen Fall sind die Komplexe beim Übergang von links nach rechts jeweils mit d zu multiplizieren und von rechts folgendem Komplex zu subtrahieren.

1. *Beispiel.* $t = \overline{1002}$, $p = \underline{167}$. Ich multipliziere zur Herstellung eines instruktiven Beispiels 167 mit einer beliebigen Zahl, etwa mit 1789, erhebe das Produkt, um eine nicht zu kleine Zahl zu bekommen, ins Quadrat, das ich auf den Faktor 167 untersuche. Dann kommt

$$167 \cdot 1789 = 298\,763 \qquad 298\,763^2 = 89\,259\,330\,169$$

$$\begin{array}{rrrrrrr}
89 & | & 259 & | & 330 & | & 169 \ | \\
 & & -178 & & -162 & & -336 \ | \\
2 \cdot 89 & + & 81 & & 168 & & \underline{\underline{167}}
\end{array} \qquad (d = -2)$$

Bei richtiger Reduktion der Teilrechnung mit Vielfachen von 167 wird die Rechnung erheblich einfacher. Dann kommt, wenn die

Dreierkomplexe gleich anfangs auf ihre Reste nach 167 gebracht wurden

$$
\begin{array}{rr|r|r|r|}
 & 89 & 259 & 330 & 169 \\
\hline
 & 89 & 259 & -4 & +2 \\
 & & -11 & -162 & -2 \\
2 \cdot 89 = +11 & & 248 & -166 & =0 \\
 & & =+81 & =+1 &
\end{array}
$$

Ich brauche das Verfahren nicht für alle Teilerformen durchzuführen, da die Rechnung immer die gleiche ist, nur daß an die Stelle des Faktors -2 die anderen Werte d treten.

Wegen der Multiplikation mit d bleibt, wie ja die allgemeine Formel unmittelbar erkennen läßt, die Rechnung nur einfach für kleine ganzzahlige Werte von d.

Zum Schluß der Betrachtung der Formen $10^3 + d$ will ich noch auf eine Erweiterung hinweisen, die im Falle zweier kleiner Primzahlen gute Dienste leistet. Es ist $3 \cdot \overline{23 \cdot 29} = 2001 = 2 \cdot 10^3 + 1$. Man erkennt ohne weiteres, daß die Multiplikation der Dreierkomplexe mit 2 jetzt von rechts nach links geht, was sich für den allgemeinen Ansatz mit $t = h \cdot g^k + 1$ leicht nachweisen läßt.

Beispiel. Ich bilde das Produkt $29 \cdot 8543 = 247\,747$, das noch ins Quadrat erhoben werden soll, damit die Zahl A, die auf 29 untersucht werden soll, nicht zu klein ausfällt, und suche den Faktor 29 in der Quadratzahl, in der er natürlich in der zweiten Potenz vorkommt.

Es kommt $247\,747^2 = 61\,|\,378\,|\,576\,|\,009$

$$
\begin{array}{r|r|r|r|}
61 & 378 & 576 & 009 \\
-32 & +44 & -18 & \\
\hline
\underline{\underline{29}} & 422 & 558 & 2 \cdot 9 \\
 & =+16 & -22 &
\end{array}
$$

$(580 = 20 \cdot 29)$
$(422 = 406 + 16)$
$(406 = 2 \cdot 7 \cdot 29)$

2. Die Teilformen $10^4 + 1$ und $10^5 - 1$

a) $10^4 + 1 = 73 \cdot 137$. Der Rechenvorgang bei der Untersuchung auf 73 und 137 ist genau der gleiche wie bei 7, 11, 13, nur daß vierstellig abgeteilt wird, entsprechend dem Exponenten $k = 4$.

Beispiel. Ich bilde das Produkt $73 \cdot 5141 = 375\,293$, das ich zu einfacher Gewinnung einer nicht zu kleinen Zahl A noch ins Quadrat erhebe.

Es wird

$$
\begin{array}{rrrl}
375\,293^2 = 1408 & 4483 & 5849 & \\
 & -1408 & 3075 & \\
\hline
 & 3075 & 2774 = 2 \cdot & 1387 \\
 & & & 1387 \\
 & & & +\ 73 \\
\hline
 & & & 1460 = 20 \cdot \underline{\underline{73}}
\end{array}
$$

Es kommt bei den größeren Komplexen noch mehr als früher darauf an, richtig zu reduzieren. Hier erhält man, wie leicht erkannt wird

$$
\begin{array}{r|r|r}
1408 & 4483 & 5849 \\
\hline
-52 & +103 & -9 \\
 & & -9 \\
\hline
 & +\ 52 & \underline{\underline{0}} \\
 & 155 = -9 &
\end{array}
$$

Für 137 ist natürlich die Rechnung die gleiche.

b) Aus $10^4 - 1 = (10^2 + 1)(10^2 - 1) = 101 \cdot 11 \cdot 3^2$ läßt sich eine Methode finden, um 11 und 101 gleichzeitig zu behandeln.

c)
$$\frac{10^5 - 1}{3^2} = 11\,111 = 41 \cdot 271$$

Man hat fünfstellig abzuteilen und sonst genau wie im Falle $p = 37$ zu verfahren.

Ich bilde folgendes Beispiel

$$271 \cdot 1489 = 403\,519$$

Zu dem gleichen Zweck wie sonst bilde ich das Quadrat des Produkts und erhalte

$$A = 403\,519^2 = 162\,827\,583\,361$$

$$
\begin{array}{rrrr}
16 & 28\,275 & 83\,361 & 111\,652 \\
 & 16 & +\ 28\,291 & 111\,110 \\
\hline
 & 28\,291 & 111\,652 & = 542 = 2 \cdot \underline{\underline{271}}
\end{array}
$$

(Zur Reduktion mit einem bekannten Vielfachen von 271, für das sich hier die Ausgangsidentität

$$41 \cdot 271 = 11\,111$$

gerade darbietet.)

Wir schließen diese Betrachtung ab durch eine kurze Zusammenstellung der Primfaktoren, die mit dieser Methode behandelt werden können.

Zusammenstellung

$\underline{7}\ \ \underline{11}\ \ \underline{13} = 1001$		$\underline{19}\ \ \underline{53} = 1\,007$
$3^3\ \ \underline{37} = 1000$	1	$3\ \ \underline{23}\ \ \underline{29} = 2\,001$
$2\ \ 3\ \ \underline{167}\ \ 1002$		$\underline{73}\ \ \underline{137}\ \ 10\,001$
$\underline{17}\ \ \underline{59} = 1003$		$3^2\ \ \underline{11}\ \ \underline{101} = 10\,000 - 1$
$2^2\ \ \underline{251} = 1004$		$3^2\ \ \underline{41}\ \ \underline{271} = 10^5 - 1$
$3\ \ 5\ \ \underline{67} = 1005$,		

Wir werden zusammenfassend sagen Bei einiger Übung die in mehr als einer Richtung das Interesse und damit die Ausdauer und die Sicherheit beim Zahlenrechnen erhoht laßt sich die Methode die ganz wesentlich zur Individualisierung der mehrstelligen Zahlen beitragt mit Vorteil verwenden

Vor der systematischen Untersuchung der Zerlegung ganzer Zahlen in Primzahlen die wir später behandeln werden nachdem wir uns noch einige Hilfsmittel geschaffen haben, die auf unserem Wege bei der Besprechung gewisser Gruppen von Rechenaufgaben gewonnen werden sollen einige Sonderfalle besprochen werden die einerseits belehrend sind und mir andererseits doch so interessant erscheinen daß sie die Darstellung nicht ermudend gestalten Bemerkt sei daß diese Darstellung an sich mathematisch nichts Neues gibt dagegen einige Ergebnisse zeitigt, die nicht bekannt sind Was wir bisher entwickelt haben ist die folgerichtige Übertragung eine Methode der Algebra auf das Rechnen mit ganzen Zahlen Es wird sich bei der Besprechung von Multiplikations und Divisionsaufgaben zeigen, daß die Kenntnis solcher Zahlenzerlegungen in vielen Fallen von Nutzen sein kann Das gilt auch fur die naherungsweise Ausfuhrung von Divisionen irgend welcher Art Jeder Rechner wird bald darauf kommen daß bei der Untersuchung einer Zahl A auf die Teilbarkeit durch gewisse Primzahlen p_1 p_2 die Division von rechts auszufuhren ist und zwar so daß man zwei oder mehr Primzahlen untersucht, die so zu wahlen sind daß ihr Produkt in moglichst vielen Stellen mit der gegebenen Zahl ubereinstimmt Um dies zu erreichen, wird man im allgemeinen geeignete Hilfsfaktoren hinzuziehen, und im ubrigen immer die Generalformel benutzen, die aussagt, daß $A + k\, p_1 p_2 p_3 \ldots p_n \equiv A$ in bezug auf die Teilbarkeit durch die Zahlen $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$

Man erzielt dadurch den Vorteil moglichst einfacher Rechnung, kann die Reste beliebig zerlegen oder weiter durch additive Glieder $l\, p_1 p_2$ so abandern, daß die Zerlegbarkeit unmittelbar erkannt wird Oft kommt es vor, daß man auf diesem Wege die Teiler sehr rasch findet

Um das Verfahren zu erläutern, wollen wir die aus der Kreisteilung bekannte Zahl

$$K^{(5)} = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$$

auf ihre Primteiler untersuchen.

Nach einem auf *Euler* und *Gauß* zurückgehenden Satz der rationalen Zahlentheorie müssen die Faktoren von $K^{(5)}$ von der Form $4n + 1$ sein, da die Zahl als die Summe von zwei Quadratzahlen dargestellt ist, nämlich

$$K^{(5)} = 2^{32} + 1 = (2^{16})^2 + 1^2.$$

Man fängt die Untersuchung mit den kleinsten Primzahlen der Form $4n + 1$ an, schreibt also

$$5,\ 13,\ 17,\ 29,\ 37,\ 41.$$

Auf 5, 13, 37, 41 wird man nach den vorhin entwickelten Methoden sehr rasch untersucht haben, und zwar mit negativem Ergebnis.

Da $17 \cdot 41 = 697$ ist, so empfiehlt es sich, mit 17 eine Primzahl der Form $100f + 41$ für die Teilbarkeitsuntersuchung zu kombinieren, da die Produkte dieser Zahlen, also der Reihe 41, 241, 541, 641, 941 mit 17 alle in den beiden letzten Stellen 97 mit unserer Zahl $K^{(5)}$ übereinstimmen.

Da auf 41 untersucht sein soll, folgen $241 \cdot 17$ und $541 \cdot 17$, für die die Untersuchung, die ein negatives Ergebnis liefert, rasch durchgeführt ist.

Wir kommen zu $17 \cdot 641 = 10\,897$, und führen die Rechnung im einzelnen durch:

$$\begin{array}{lllll}
K^{(5)} = 2^{32} + 1 = & 4\,294\,967\,297 & & & \\
 & \underline{-\ 10\,897} = (17 \cdot 641) & & & \\
 & 4\,294\,956\,4 & = 4 \cdot 10\,737\,391 & & \\
 & & \underline{-\ 641} & & \\
 & & 10\,736\,75 & \cdot\, 4 = 42\,947 & \\
 & & & \underline{+\ 1\,923 = 3 \cdot 641} & \\
 & & & 44\,870 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \underline{\underline{641}} &
\end{array}$$

Die Untersuchung ist im einzelnen nur für 641 durchgeführt, da 17 bei den vorhergehenden Primzahlen der Form $100f + 41$, nämlich 241 und 541 schon als Nichtteiler von $K^{(5)}$ festgestellt worden ist.

Man kann die Untersuchung auf 641 dadurch verbessern, daß man an Stelle von 17 einen Hilfsfaktor $100m + 17$ wählt, der so beschaffen ist, daß das Produkt $(100m + 17) \cdot 641$ in *mehr* als zwei Stellen mit $K^{(5)}$ übereinstimmt. Das geht einfach so:

$$17 \cdot 641 = 10\,897.$$

Die drittletzte Stelle von $K^{(5)}$ war eine 2, also muß sein

$$\begin{aligned}
641 \cdot (100m + 17) &= 64 \cdot 1000m + 100m + 10\,897 \\
&= Z \cdot 1000 + 2 \cdot 100 + 97,
\end{aligned}$$

woraus sich sofort $m = 4$ ergibt. Es wird $417 \cdot 641 = 267\,297$ und man sieht beim Vergleich mit der Zahl $K^{(5)}$, daß wir mit unserer Reduktion insofern Glück gehabt haben, als nicht weniger als fünf Stellen von $K^{(5)}$ reduziert wurden.

$$\begin{array}{rrl}
K^{(5)} = & 4\,294\,967\,297 & \qquad 42\,947 \qquad\qquad\qquad\qquad 4487 \\
417 \cdot 641 = & 267\,297 & \Big| + \;\; 1\,923 = 3 \cdot 641 \quad + 1923 \\
\hline
R = & 4\,294\,7 \cdot 10^5 & \Big| \quad 44\,870 \;\Big| \qquad\qquad\quad 6410 = 2 \cdot 5 \cdot \underline{\underline{641}}
\end{array}$$

Ein Leser, der mit derartigen Betrachtungen wenig vertraut ist, der außerdem gern kritisiert, wird das Ergebnis als ein durch einen glücklichen Zufall gefundenes bezeichnen. Demgegenüber kann ich hervorheben, daß das Verfahren der Primfaktorenkombination überraschend oft schnell zum Ziel führt. Darüber soll bei den Ausführungen über die Zerlegung der ganzen Zahlen in Primfaktoren Näheres angegeben und mit Beispielen belegt werden.

Gauß hat im Jahre 1796 als neunzehnjähriger Student gezeigt, daß sich der Kreis geometrisch in 17 Teile teilen läßt, d. h. daß das regelmäßige Siebzehneck mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Diese Entdeckung war eine ungeahnte Erweiterung der Elementargeometrie, sie wurzelt in rein arithmetischen Sätzen, die *Gauß* in einem Abschnitt seiner klassischen, 1801 erschienenen „Disquisitiones Arithmeticae" behandelt. Die Kreisteilung hängt ab von der Lösung einer reinen Gleichung

$$x^l - 1 = 0\,,$$

deren Wurzeln die l l-ten Einheitswurzeln sind. Man sieht sofort, daß eine rationale Wurzel $x = 1$ ist. Für die übrigen $l - 1$ (komplexen) Wurzeln der Gleichung

$$x^{l-1} + x^{l-2} + \cdots + x + 1 = 0$$

ergibt sich, daß die Zurückführung dieser Wurzeln auf solche quadratischer, also geometrisch konstruierbarer Teilgleichungen immer dann möglich ist, sobald

$$l - 1 = 2^{2^n}, \quad \text{also} \quad l = 2^{2^n} + 1.$$

n	K
0	3
1	5
2	17
3	257
4	65 537
5	4 294 967 297

Fermat, der Begründer der Zahlentheorie, der manchen Satz und manche berühmt gewordene Behauptung aufgestellt hat, die die Zahlentheorie mächtig gefördert haben, sprach die Ansicht aus, daß *alle* Zahlen der Form $2^{2^n} + 1$ Primzahlen seien. Wir schreiben die kleinsten dieser Zahlen in ein Täfelchen.

In der Tat sind die fünf Zahlen $K^{(0)} = 3$, $K^{(1)} = 5$, $K^{(2)} = 17$, $K^{(3)} = 257$, $K^{(4)} = 65\,537$ Primzahlen.

Dagegen fand *Euler* bei einer Untersuchung der Zahl $K^{(5)}$ daß

$$K^{(5)} = 2^{32} + 1 = 641 \quad 6\,700\,417$$

wird, womit die *Fermat*sche Behauptung widerlegt war

Ich will zeigen wie man eine derartige Zerlegung mit etwas Gluck ohne Rechnen und Probieren zuweilen durch eine mathematische Überlegung findet, die ja den Zweck hat, das Zahlenrechnen nach Moglichkeit einzuschranken indem sie dieses zielsicher gestaltet Dazu muß ich einige Begriffe der elementaren Zahlentheorie auseinandersetzen, die immer wieder auch spater bei der Bestimmung von Wurzeln, aus vollstandigen Potenzen gebraucht werden

Der erste Satz von Fermat.

1 Ist a eine beliebige ganze rationale Zahl so gilt fur jede beliebige Primzahl p die Identitat

$$a^p - a = a\,(a^{p\ 1} - 1) = k \quad p$$

wo k eine ganze Zahl ist Ist insbesondere a nicht durch p teilbar so muß sein

$$a^{p\ 1} = 1 - \ ' \quad p$$

eine Beziehung die sich am einfachsten durch die binomische Entwicklung fur $(x + y)^p$ und die Betrachtung der Koeffizienten herleiten laßt Der Satz ist grundlegend fur die Zahlentheorie Wir brauchen ihn, wie schon angedeutet, spater fur die Ableitung der Endziffereigenschaften der Potenzen mit ungeradem Exponenten

Fur das folgende soll a immer als nicht teilbar durch p voraus gesetzt werden so daß

$$a^{p\ 1} - 1 - l \quad p$$

wird Den Sonderfall $p - 1 = 2$ betrachten wir nicht weiter und nehmen $p - 1$ durch 2^{λ} teilbar an, wo $\lambda > 1$ ist Es sei

$$p - 1 = 2^{\lambda} \quad q_1\, q \qquad q_n$$

Dann wird

$$a^{p\ 1} - 1 = a^{2^{\lambda}\ \ \lambda q \qquad q_n} - 1$$

Ist t ein beliebiger Teiler von $p - 1$ so wird $a^{p\ 1} - 1$ teilbar durch $a^t - 1$

Schreibe ich die Reihe t_1, t_2, t_3, $\quad t_s$ aller moglichen Teiler von $p - 1$ auf, so muß fur mindestens einen Teiler t der Ausdruck $a^t - 1$ durch p teilbar werden Es sei f der kleinste Teiler von $p - 1$, fur den $a^f - 1 = k \quad p$ wird Um Anschluß an unser dekadisches Zahlensystem zu bekommen, soll jetzt fur die Basis a die Grundzahl 10 unseres Zahlensystems gewahlt werden

Es sei p eine Primzahl, für die $10^f - 1 = l \cdot p$ wird. Es soll $\frac{1}{p}$ in einen Dezimalbruch entwickelt werden. Dann kommt

$$\frac{1}{p} = \frac{l}{l \cdot p} = \frac{l}{10^f - 1} = \frac{l}{10^f} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^f}} = \frac{l}{10^f}\left\{1 + \frac{1}{10^f} + \frac{1}{10^{2f}} + \frac{1}{10^{3f}} + \cdots\right\}$$

$$= \frac{l}{10^f} + \frac{l}{10^f} \cdot \frac{1}{10^f} + \frac{l}{10^f} \cdot \frac{1}{10^{2f}} \cdots$$

Man erkennt sofort, daß die Entwicklung periodisch ist und die Periode f Stellen hat.

Beispiel:

$$\frac{1}{41} = 0{,}02439\ 02439 \ldots$$

Es war $41 \cdot 271 = 11111 = \frac{10^5 - 1}{9}$, d. h. 41 ist ein Teiler von $10^5 - 1$, unser Exponent f wird $= 5$, die Periode der Dezimalentwicklung von 41 hat 5 Stellen. Etwas weiter zu verfolgen ist der Fall, daß $f = 2f'$ eine gerade Zahl wird. Es kommt dann

$$10^f - 1 = 10^{2f'} - 1 = (10^{f'} + 1)(10^{f'} - 1)$$

und es wird p entweder Teiler von $10^{f'} + 1$ oder von $10^{f'} - 1$. Da die Differenz dieser beiden Zahlen $= 2$ ist und p eine ungerade Primzahl sein soll, so kann nur das eine oder das andere eintreten. Da der Fall $10^{f'} - 1$ erledigt ist und zu einer f'-stelligen Periode führt, so bleibt die zweite Möglichkeit $10^{f'} + 1 = m \cdot p$ zu untersuchen. Wir erhalten die Entwicklung

$$\frac{1}{p} = \frac{m}{m \cdot p} = \frac{m}{10^{f'} + 1} = \frac{m}{10^{f'}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{10^{f'}}} = \frac{m}{10^{f'}}\left\{1 - \frac{1}{10^{f'}} + \frac{1}{10^{2f'}} - \frac{1}{10^{3f'}} - \cdots\right\}$$

$$= \frac{m}{10^{f'}}\left(1 - \frac{1}{10^{f'}}\right) + \frac{1}{10^{3f'}}\left(1 - \frac{1}{10^{f'}}\right) + \frac{1}{10^{5f'}}\left(1 - \frac{1}{10^{f'}}\right) + \cdots$$

1. Die Periode hat $2f'$ Stellen.
2. Schreibt man eine Periode

$$P = \underline{\frac{m}{10^{f'}}\left(1 - \frac{1}{10^{f'}}\right)}$$

in der Form

$$P = \frac{m}{10^{2f'}}(10^{f'} - 1) = \frac{(m-1)\,10^{f'} + (10^{f'} - m)}{10^{2f'}} = \frac{A \cdot 10^{f'} + B}{10^{2f'}},$$

so entspricht dies der Teilung des $2f'$-stelligen Periodenkomplexes in zwei f'-stellige Halbperioden, die ziffernmäßig durch die Zahlen A und B dargestellt werden, und es folgt

$$A + B = (m - 1) + 10^{f'} - m = 10^{f'} - 1$$

Ist $f = 2f'$ und p ein Teiler von $10^{f'} + 1$, so hat die Entwicklung von $\frac{1}{p}$ eine Periode von $2f'$ Stellen. Die Summe der Halbperioden ergibt $10^{f'} - 1$, d. h. eine Zahl, die mit f' Neunen geschrieben wird.

Man kann den Satz umkehren und aus der Dezimalbruchentwicklung für $\frac{1}{p}$ schließen auf die Zahl $10^{f'} + 1$, deren Teiler p ist.

Ich darf hier auf die bekannte und oft als Zahlenmerkwürdigkeit hingestellte Eigenschaft der Entwicklung von $\frac{1}{7}$ hinweisen.

Es ist

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857| \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{r} 142 \\ +857 \\ \hline \end{array} = 999$$

7 ist also Teiler von $10^3 + 1$, was wir früher schon benutzten. Die 6stellige Periode besteht aus zwei Halbperioden von p drei Stellen, deren Summe nach unserer Betrachtung $10^3 - 1 = 999$ ergeben muß.

Diese fast zu ausführlich geratenen Ausführungen über Dezimalbruchperioden sollen auf die Zahl 641 angewandt werden.

Es ist

$$641 = 5^4 + 2^4 \qquad 641 - 1 = 2^7 \cdot 5.$$

Man beachte die besondere Struktur dieser Zahl, die einmal die Summe der Biquadrate von 5 und 2, also der beiden Faktoren der Grundzahl 10, andererseits die Form $1 + 2^7 \cdot 5$ hat. Eine solche Zahl fordert zur Untersuchung ihrer Dezimalbruchentwicklung direkt heraus.

Nach dem ersten *Fermat*schen Satz ist $2^{640} - 1$, und $5^{640} - 1$ durch 641 teilbar. Ich mache die Annahme, daß es, von dem Faktor 5 in 640 zunächst abgesehen, eine kleinste Potenz von 2 gebe 2^n, für die gilt

$$2^{2^n} + 1 = 2^{4 \cdot 2^n} - 1 = t \cdot 641.$$

Da $5^4 = 641 - 2^4$ ist, so gilt, wie unmittelbar einzusehen ist,

$$(-2^4 + 641)^{2^n} + 1 = 5^{4 \cdot 2^n} + 1.$$

Da 2^n eine gerade Zahl ist, so folgt daraus

$$5^{4 \cdot 2^n} + 1 = 2^{4 \cdot 2^n} + 641\{\quad\},$$

wo die Klammer eine ganze Zahl ist. D. h. ist $2^{2^n} + 1$ durch 641 teilbar, so gilt das gleiche für $5^{2^n} + 1$. Dann wird um so mehr das Produkt dieser beiden Vielfachen von 641 durch diese Primzahl teilbar. Es gilt

$$P = (5^{2^n} + 1)(2^{2^n} + 1) = 10^{2^n} + 5^{2^n} + 2^{2^n} + 1 = l \cdot 641^2$$

oder

$$10^{2^n} - 1 = r \cdot 641.$$

Also ist entweder

$$10^{2^{n-1}} + 1 \qquad \text{oder} \qquad 10^{2^{n-1}} - 1$$

durch 641 teilbar, da dies die zwei zueinander primen Faktoren von $10^{2^n} - 1$ sind. (Da ihre Differenz $= 2$ ist, so können sie keinen gemeinsamen Teiler haben) Diese Reduktion auf Zahlen $10^{2^{n-1}} \pm 1$ $= 10^{2 \cdot 2^{n}} \pm 1$, legt die Vermutung nahe daß die Stellenzahl der Periode der Dezimalentwicklung von $\frac{1}{641}$, die nach dem Fruheren hochstens 2^n Stellen haben kann, ein verhaltnismaßig kleiner Teiler von $p - 1 = 640$ ist Die Entwicklung von $\frac{1}{641}$ ergibt eine Periode von 32 Stellen, die in der Mitte „umkehrt" wie bei $\frac{1}{7}$, d h $10^{16} - 1$ als Summe der beiden Halbperioden hat Das zeigt nach unserer Betrachtung ohne weiteres, daß 641 Teiler von $10^{16} + 1$ ist Es wird also $5^{2 \cdot 16} + 1 = 5^{32} + 1$ und $2^{32} + 1$ durch 641 teilbar Man hatte auch so schließen konnen Die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{641}$ zeigt, daß $10^{16} - 1 = m \cdot 641$

Es liegt nahe, dieses Resultat mit der Zahl $2^{32} - 1$ in Verbindung zu bringen, die ein besonders mathematisches Interesse beanspruchen kann Man wird zunachst fragen, ob $10^{16} + 1$ und $2^{32} + 1$ einen gemeinsamen Faktor haben, der naturlich in der Differenz der beiden Zahlen enthalten sein muß

Da $10^{16} + 1 = 5^{16} \cdot 2^{16} + 1$, so kommt

$$10^{16} + 1 - (2^{32} + 1) = 2^{16}(5^{16} - 2^{16}) = 2^{16}(5^8 + 2^8)\,\underline{\underline{(5^4 + 2^4)}}\,(5^4 - 2^4)$$

Der Faktor $5^4 + 2^4$ ist gerade unsere Primzahl 641 die als Teiler von $10^{16} + 1$ bereits erkannt war Also ist 641 Teiler von $2^{32} + 1$ Durch diese Überlegung habe ich vor langer Zeit diesen Zusammenhang gefunden

Die Frage nach den Primfaktoren und Quadratsummenzerlegungen der Zahlen $K^{(n)} = 2^{2^n} + 1$, die den Kreis geometrisch teilen, sobald sie Primzahlen sind, ist eines der ungelosten Probleme der Zahlentheorie, deren am leichtesten zu formulierenden und auch dem Nichtfachmann klar zu machenden Fragestellungen oft die schwierigsten sind Ich darf da auf das vielumworbene Problem von *Fermat* (auch letzter Satz von *Fermat* genannt) hinweisen, dessen Inhalt folgender ist Die Potenzgleichung $x^n + y^n = z^n$ ist in ganzen rationalen Zahlen x, y, z unmöglich, sobald der ebenfalls ganzzahlige Exponent n den Wert 2 uber steigt Die Problemstellung ist so einfach zu begreifen daß viele, die kaum die Elemente der Arithmetik kennen glauben, sich mit Erfolg an das Problem heranmachen zu konnen Gerade die einfach auszusprechenden Wahrheiten sind die umfassenden, die in der Tiefe liegen und deswegen zu ihrer Losung neue Methoden erfordern Ich darf in diesem Zusammenhang noch an das Problem der *Verteilung der Primzahlen* erinnern, das zu seiner Forderung die subtilsten Hilfsmittel der Analysis bedingt

Die Betrachtung der Zahl 641 führt zur Untersuchung weiterer Zahleneigenschaften, die eng mit der Periodizitat der Dezimalbruche zusammenhängen. Einmal wird man Zahlen der Form $m^4 + n^4$ oder allgemeiner $m^{2^k} + n^{2^k}$ betrachten. Dann führt die Darstellung $641 = 2^9 + 2^7 + 1 = 2^{2^3+1} + 2^{2^3-1} + 1$ dazu, die Zahlen dieser Struktur zu behandeln.

Stellen wir für die kleinsten Zahlen $L^{(n)} = 2^{2^n+1} + 2^{2^n-1} + 1$ ein Täfelchen auf, so ergibt sich die folgende Übersicht.

n	$L^{(n)} = 2^{2^n+1} + 2^{2^n-1} + 1$
1	11
2	41
3	641
4	163 841
5	10 737 418 241

Genau wie bei den Zahlen $K^{(n)} = 2^{2^n} - 1$ tritt die erste zerlegbare Zahl für $n = 5$ auf, denn es wird

$$10\,737\,418\,241 = 11 \cdot 37 \cdot 53 \cdot 497\,771.$$

Zu beachten ist noch die Quadratsummenzerlegung der $L^{(4)} = 163\,841$, die nach einem grundlegenden Satz der Zahlentheorie auf nur eine Art möglich ist, sobald die Zahl von der Form $4k + 1$ und Primzahl ist.

Es wird

$$163\,841 = 5^4 + 404^2 = 5^4 + 2^4\,(10^2 + 1)^2.$$

Man bemerke die Ähnlichkeit mit $641 = 5^4 + 2^4$. Weitere Aufschlüsse muß die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{163\,841}$ geben. Die Zahlen $L^{(0)}$, $L^{(1)}$, $L^{(2)}$, $L^{(3)}$ haben, wie wir wissen, alle kurze Perioden; die höheren $L^{(n)}$ sind daraufhin zu untersuchen.

Auf den Zusammenhang zwischen Primfaktorenzerlegung und Quadratsummenzerlegung $A = u^2 + v^2$ haben wir später einzugehen.

§ 2. Bemerkungen über Zahlengedächtnisleistungen.

In der Einleitung war die Rede von der Individualisierung der Zahlen als Grundlage für die Ausbildung des Zahlengedächtnisses. Die bisherigen Ausführungen geben Verfahrensweisen, wie ganze Zahlen auf ihre Eigenschaften, zunächst auf ihre Teilbarkeit durch gewisse Primzahlen leicht, d. h. ohne ermüdende Rechnung, untersucht werden können. Im folgenden will ich mich mit den Grundlagen der *Zahlengedächtnisleistungen* etwas näher befassen. Ich hoffe dabei einmal manches zur Erklärung von oft als wunderbar bezeichneten Leistungen beitragen zu können und andererseits bestimmt geordnete Gesichtspunkte für die spätere Darstellung der einzelnen Arten von Rechenleistungen zu gewinnen.

Wird erzählt, daß jemand große Ziffernreihen auswendig lernen kann, so heißt es sofort „Mnemotechnik". Das ist ein Schlagwort wie so viele andere, und wir leben wohl etwas im Zeitalter der Schlagwörter, die wertvoll sind, wenn sie das in einen kurzen Spruch oder möglichst in ein Wort zusammenziehen, was man sich sehr gründlich überlegt hat, so von allen Seiten durchdacht hat, daß man den Kern der Sache klar darstellen kann Schlagworter sind deswegen gut fur jemanden, der die Sache beherrscht und die Zusammenhange uoersieht dagegen gefahrlich fur die, die sie kritiklos nachsprechen aus einer falschen Okonomie heraus, die nicht allein die mundliche und schriftliche Darstellung einer Sache abkurzen sondern auch das Gehirn entlasten will, das bei der Mehrzahl der das Wort Gebrauchenden uberhaupt nicht in Aktion tritt

Naturlich muß der Schreiber dieser Zeilen fur viele „Mnemotechniker sein, wahrend seine Methoden genau den Gegenpol zu dem Verfahren der Mnemotechniker bildet

Warum erprobt die Mnemotechnik ihre Kraft so gern an Ziffernreihen?

1 Große Zahlen auswendig zu lernen fallt den meisten Menschen schwer Diese Erscheinung muß also in der besonderen Sprodigkeit des Ziffernmaterials seinen Grund haben In der Tat halt man allgemein Zahlenreihen fur eine Anzahl gedanklich nicht verknupfter Elemente

Man muß demnach danach streben solchen Lernstoff in eine Form zu ubertragen, die gedankliche Verknupfungen zulaßt Das geht dann so Aus Ziffern werden Buchstaben gemacht aus diesen Worte die ihrerseits in mehr oder weniger sinnvollen Satzen vereinigt werden, die gedanklich verknupftes Material vorstellen sollen

2 Die Mnemotechnik mag ihre großen Verdienste haben im Zahlengebiet macht sie auf mich den Eindruck als tragt sie die Kirche ums Dorf Man wird zugeben daß mnemotechnisches Arbeiten mit Zahlen recht weit entfernt ist von dem was man in der Mathematik als die Reinheit der Methode zu bezeichnen gewohnt ist Dabei glaube ich daß kein Mnemotechniker bestreiten wird daß Zahlen ein mathematischer Lernstoff sind In der Arbeitsweise des Mnemotechnikers liegt ein Zug der Resignation, sobald es sich um Zahlen handelt ,Zahlen sind so schwer zu lernen, daß dies auf Umwegen durch eine Transformation des hartnackigen Materials in eine andere leichter zugangliche Form geschehen muß Mein Standpunkt ist der genau entgegengesetzte

Um mit Zahlen arbeiten zu konnen muß man in einem nicht zu engen Bereich die Zahlen studieren d h ihre der Natur der Zahl nach mathematischen Eigenschaften kennenzulernen suchen worauf schon in der Einleitung hingewiesen wurde Wie das geschehen kann, habe ich bisher an einigen Beispielen zu zeigen versucht

Daruber hinaus behaupte ich daß das mnemotechnische Auffassen und Behalten von Zahlenreihen und gewissen Zahlenbeziehungen der Entwicklung der eigentlichen Tatigkeit des Zahlenrechnens keinen Vorteil bringt Oft wird das Gegenteil festzustellen sein Zuviel Zahlenballast auswendig gelernter Resultate hemmt das Finden der richtigen Rechenmethode mehr als es sie fordert Man sagt allgemein daß zuviel

Gehirnballast die geistige Frische herabsetzt. Für die Forderung der wirklichen Rechenfähigkeit liefert die Mnemotechnik bestimmt keine positive Komponente. Mnemotechnisch gelerntes Zahlenmaterial reicht hin, um als „Rechenkünstler" zu glänzen, deren es nicht wenige gibt, die vom wirklichen Rechnen sehr wenig und von Mathematik gar nichts verstehen. Erwünscht ist natürlich für solche Zahlenvirtuosen ein Kreis von Zuhörern, der der Zahlenwissenschaft recht fremd gegenübersteht, der nicht schwer zu finden ist. Es sei mir gestattet, kurz anzudeuten, wie man als Rechenkünstler gelten kann, ohne eigentlich rechnen zu können.

Man lernt die Quadrate und die vierten Potenzen der 90 zweistelligen Zahlen (10—99) auswendig, und „rechnet" dann enorm rasch mit Zahlen, „die in die Millionen gehen". Natürlich kann man ebenso rasch Quadratwurzeln und vierte Wurzeln ziehen, allerdings nur in dem sehr konventionell abgegrenzten Gebiet. Etwa so: $53^2 = 2809$, $2809^2 = 53^4 = 7\,890\,481$. Es kommt dann allerdings recht oft vor, daß die dritte Potenz $53^3 = 148\,877$ nur schwer gefunden wird, daß 53^5 zum Ausrechnen im Kopfe zu schwierig ist. Der Grund liegt für das Versagen natürlich darin, daß man nicht alles auswendig lernen kann und daß Rechnen nicht jedermanns Sache ist, oft auch nicht die des „Rechenkünstlers", der nur das „rechnen", und zwar „sehr schnell rechnen" kann, was er seinem Repertoir mnemotechnisch einverleibt hat.

Ein zweiter Tummelplatz, auf dem mnemotechnischer Ballast als Ersatz des Rechnenkönnens mit Erfolg öffentlich in die Erscheinung tritt, ist das Wurzelziehen aus großen Zahlen, die vollständige Potenzen entsprechenden Grades sind. Hier trifft der Mnemotechniker die Elberfelder Pferde als Konkurrenten an. Merkwürdigerweise, so wird es dem Zuhörer scheinen, werden die großen Wurzelexponenten bevorzugt, 5., 7. und höhere Wurzeln werden gewählt. Dann sind die Potenzen, also die Radikanden, von imponierender Ziffernzahl, während die Wurzeln fast immer ein- oder zweistellig werden, weil es kaum vorkommt, daß ein Aufgabensteller eine dreistellige Zahl in die 5., 7. oder eine noch höhere Potenz erhebt.

Darauf haben wir später näher einzugehen. Hier können die beiden Fälle, in denen Mnemotechnik mit Erfolg Rechenkunst vortäuscht, so charakterisiert werden:

1. Man geht von einem engbegrenzten Bereich von Zahlen aus, die man einer bestimmten mathematischen Operation unterwirft, etwa der Bildung bestimmter Potenzen der zweistelligen Zahlen. Man lernt das engbegrenzte Zahlenmaterial auswendig. Die einigermaßen großen Resultate imponieren.

2. Man geht von einer festbegrenzten Reihe großer Zahlen aus, nicht zu niedrigen Potenzen ein- oder zweistelliger Zahlen. Beim Wurzelziehen erhält man kleine Zahlen als Resultat.

In beiden Fällen kommt man ohne Rechnen aus. Ein Unglück tritt natürlich immer ein, wenn einmal eine Potenz verlangt wird, etwa die dritte, wenn im Gehirnballast nur die zweiten und vierten Potenzen aufgenommen sind. Weniger gefährlich ist die Sache beim Wurzelziehen. Wenn da nur ungefähr die Zahl der Ziffern und die Endziffer richtig ist, so wird bei genügend hohem Wurzelexponenten auch die Wurzel richtig. Die Elberfelder Pferde kommen über diese kleinen Schwierigkeiten einer falsch errechneten Potenz leicht hinweg, womit der innige Konnex zwischen dem potenzierenden Aufgabensteller und dem radizierenden „Rechner" in diesem Fall wie nicht anders zu erwarten nachgewiesen ist.

Man soll es vermeiden, Zahlenresultate bewußt auswendig zu lernen, um sie beim Rechnen zu verwerten. Als wertvoll erweist sich nur das, was im Laufe der Zeit durch Überlegung und Erfahrung als richtig erkannt und deswegen bei vielfachem Wiederauftreten auf Grund logischer Überlegung behalten wird. Ein so erworbener eiserner Bestand liefert vollkommen zuverlässige Hilfen, die in keiner Weise als Ballast wirken, der wie bei dem Mnemotechniker auf seine Sicherheit durch Übung geprüft werden muß.

Wenn ich aus meiner Erfahrung reden darf, so sei als Beispiel dieser Auffassung erwähnt, daß ich nie mit Vorsatz Potenzen oder Logarithmen von Zahlen auswendig gelernt habe. Ich habe das immer für eine unfruchtbare Arbeit gehalten. Durch die originelle Behandlung vieler Zahlenaufgaben hat sich eine große Reihe von Resultaten bei mir angesammelt, die mir jederzeit ohne Energieaufwand und mit treffender Sicherheit zur Verfügung stehen, ohne daß ich je nur die geringste Zeit auf ihre Rekapitulation verwende. Ein Beispiel mag zeigen, wie ich mir das Erwerben derart zuverlässigen Materials denke.

Sehr bald nach dem Kennenlernen der Logarithmen und ihrer rechnerischen Verwendung haben sich mir etwa die Werte

$$\log 70 = 1{,}84510, \qquad \log 80 = 1{,}90309$$

eingeprägt. Der mathematische Rechner, dem die *Entwicklung* einer Reihe von Funktionswerten immer die Hauptsache ist, der in den Zahlenwerten den Zusammenhang finden will, prüft fast unbewußt die Reihe auf ihre Differenzen, deren Verhalten sein Interesse erweckt. Er nimmt zunächst die lineare Entwicklung an, wie sie bei relativ kleinen Differenzen in den Interpolationstäfelchen vorausgesetzt wird. Mit der Zeit beobachtet er das im Vergleich zur Entwicklung der Zahlen langsamere Anwachsen der Logarithmen, das seinen Ausdruck in der logarithmischen Reihe findet. Es entwickelt sich bei ihm, wenn er ein starkes Anschauungsbildgedächtnis hat, eine einigermaßen klare Vorstellung von der Verteilung der Logarithmen auf einer Geraden, die die Rolle einer Skala spielt. So fortschreitend gewinnt der in solcher

Weise uber die Großenverhaltnisse der Logarithmenwerte orientierte Rechner die funf Dezimalen, die die gebrauchlichen Tafeln angeben Durch zweckmaßige Ausnutzung der Erfahrung gewonnen sind die Werte, deren Genauigkeitsgrad sich stetig entwickelt vollkommen zuverlassig Ich brauche kaum zu sagen, daß ein so erworbener Funktionswert mit der ihm entsprechenden Zahl logisch etwas besser verknupft ist als wenn die schonste Gedichtzeile die Ziffern von Numerus und Logarithmus mnemotechnisch verbindet

log 70 = 1 84510	
	616
log 71 = 1 85126	
	609
log 72 = 1 85733	
	599
log 73 = 1 86332	
	591
log 74 = 1 86923	
	583
log 75 = 1 87506	
	575
log 76 = 1 88081	
	568
log 77 = 1 88649	
	560
log 78 = 1 89209	
	554
log 79 = 1 89763	
	546
log 80 = 1 90309	

Mit geometrischen Hilfsvorstellungen arbeite ich sehr viel auch beim Rechnen, wie die Betrachtung der verschiedenen Arten von Rechenaufgaben zeigen wird *O Kroh* behandelt diese Erscheinung in seiner im Druck befindlichen Schrift vom Standpunkt des Anschauungsbildgedachtnisses aus

Will man dieses Verfahren zuverlassiges Zahlenmaterial zu gewinnen mathematisch kennzeichnen, so stellt es einen Naherungsprozeß dar, der sich fast unbewußt und doch recht folgerichtig vollzieht Man wird zugeben, was im Logarithmenbeispiel schon angedeutet wurde daß das beim Zahlenrechnen auf Grund mathematischer Überlegung erworbene Material ganz anders geeignet ist bei verwickelten Rechenvorgangen fordernd einzugreifen als das mnemotechnisch angequalte Ziffernmaterial, das auf einem Weg gewonnen ist, der alles andere nur kein mathematischer Prozeß ist

Hat jemand eine Ziffernreihe zu lernen, so kommt er bald darauf nicht in einzelnen Ziffern zu lernen sondern diese in zwei drei- oder mehrstellige Zahlen zusammenzufassen Die Psychologen nennen das Komplexbildung

Worin liegt der Zwang begrundet so zu verfahren? Fragen wir uns zunachst, worin die eigentumliche Schwierigkeit fur das Auswendiglernen von Zahlenreihen besteht Dabei nehmen wir zunachst an, dem

Lerner sei das mathematische Gesetz der Bildung mehrstelliger Zahlen aus den einzelnen Ziffern unbekannt

Dann stellt die Reihe gedanklich nicht verknüpftes Material dar, bei dem wie jeder auch bei ähnlich geartetem Lernstoff merken wird die gesetzlose Wiederholung von nur zehn Einzelelementen, also der Ziffern 0, 1, 2 3 8, 9 sehr störend wirkt Ist eine 7 auch individuell verschieden von einer 4, so kommt doch früher oder später, und das geschieht bei langen Reihen recht oft wieder eine 7 die zu individualisieren ist, und bei vielfacher Wiederkehr des Einzelelements verliert es seine besondere Ausprägung Um diesem Übelstand zu entgehen, bildet man Komplexe, die bei den Ziffern außerdem ihre logisch-mathematische Bedeutung haben Dadurch schlägt man zwei Fliegen mit einer Klappe

1 Sei k die Ziffernzahl des Komplexes N die Gesamtzahl der Ziffern, so ist die Anzahl n der Komplex, wenn der Einfachheit halber N als durch k teilbar vorausgesetzt wird $n = \frac{N}{k}$ d h es hat eine Reduktion von N auf $n = \frac{N}{k}$ gedanklich zunächst nicht verknüpfte Einzelelemente stattgefunden

2 Aus der oftmaligen die individuelle Ausprägung des Elements störenden Wiederholung folgt eine nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmbare sehr viel kleinere Zahl von Wiederholungen des Elements die nicht mehr als störend empfunden wird, sondern oft geradezu einen Stützpunkt für die Einteilung oder wie man sagt die Strukturierung der Reihe abgeben kann

Persönlich darf ich hierzu bemerken daß ich bei langen Reihen gewohnt bin mit sechsstelligen Komplexen zu arbeiten Das hängt in erster Linie mit der Tatsache zusammen, daß sich meine Zahlenkenntnis von der dreistelligen Zahl aus entwickelt hat was in der Einleitung besprochen worden ist Aus der Zusammensetzung des sechsstelligen Komplexes aus zwei dreistelligen Unterkomplexen entsteht einmal der leistungsfähigere große Komplex dann läßt sich durch die vergleichende Betrachtung der die Unterkomplexe bildenden beiden dreistelligen Zahlen die Individualisierung der sechsstelligen Zahl sehr viel schärfer durchführen Im allgemeinen wird bei dem vorwiegend visuellen Lerner die Spannweite der aufgefaßten Einheit also des Komplexes von der Höhe der Vorstellungskraft mitbedingt sein Bei mir kamen dann über den sechsstelligen Komplex hinaus auch der siebenstellige in Frage Auf Grund der beschriebenen Vorzüge stellt sich der sechsstellige Komplex als der geeignetste vor

Diese mehr psychologische Betrachtung läßt sich nicht gut vermeiden, wenn ich dem Leser einen Einblick geben will in die Vorgänge, auf denen die Rekordgedächtnisleistungen beruhen Außerdem werden die rechnerischen Methoden die einzeln zu behandeln sind, leichter verständlich werden

Ich darf hier auf eine Analogie hinweisen, die allgemein zwischen dem Verfahren beim Rechnen und dem beim Auswendiglernen von Zahlenreihen besteht.

Zur Auffindung beim Rechnen verwendbarer Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen gingen wir von der Grundzahl g des Systems, ihren Faktoren g_1 und g_2, den allereinfachsten Funktionen $g - 1$ und $g + 1$ über zu etwas weniger einfachen Funktionen $f(g) = g^i + a$, die wir Teilerfunktionen genannt haben, weil sie uns neue Ergebnisse für die Untersuchung der Teilbarkeitseigenschaften der ganzen Zahlen lieferten.

Genau so steigen wir bei der Auffassung der Zahlenreihen zu höheren Einheiten auf, die mit der Erweiterung des Kreises der Eigenschaften einer Verschärfung der Individualisierung gleichkommt.

Noch auf einen weiteren Punkt muß ich eingehen, um einigermaßen ein Bild von den Vorgängen beim Lernen von Ziffernreihen zu entwerfen.

Bleiben wir zunächst bei dem Mnemotechniker. Er lernt etwa eine 100stellige Zahl mit seinen künstlichen Methoden, sagen wir nach dem Text eines Gedichtes. Die lange Zahlenreihe kann er jetzt reproduzieren — und er wird es reichlich oft tun —, um zu zeigen, welch glänzende Gedächtnisleistungen er zu vollbringen imstande ist.

Man wird das kaum als eine Leistung bezeichnen können, solange man nicht weiß, wieviel Zeit er braucht, um irgendwelche ihm vorgelegten 100 Ziffern mit dem Erfolg sicherer Reproduktionsfähigkeit zu lernen.

Das bloße Reproduzieren von in unkontrollierbar langer Zeit gelerntem Material ist keine wirkliche Gedächtnisleistung.

In Abhandlungen von Psychiatern, die sich mit diesem Gebiet befassen, wird oft erwähnt, daß zuweilen Geisteskranke ein ausgezeichnetes Gedächtnis haben oder phänomenal rechnen können. Geht man der Sache auf den Grund, läßt eine bestimmte Aufgabe stellen, so zeigt sich, daß die aktuelle Leistung unterhalb der der Normalen liegt und zwar meist recht tief.

Das Aufspeichern einer Menge von Daten und Zahlen ist noch keine Leistung, da man ja nicht weiß, in wie langer Lernzeit und mit wieviel Aufwand von Übung die Reproduktion erzielt worden ist. Man wird annehmen können, daß der Kranke von früher her Interesse für Daten hat, viele im Gedächtnis aufgespeichert hat und mit der Verengung des Gebietes seiner geistigen Interessen sich mit einem engbegrenzten Gebiet immer mehr reproduktiv beschäftigt. Sein gesammeltes Material beherrscht er dann allerdings.

Das gleiche gilt für gewisse Rechenaufgaben. Man stelle in solchen Fällen die Aufgabe, eine Reihe, sagen wir 50 neue Daten, zu lernen. Dann wird man ganz etwas anderes finden als ein leistungsfähiges

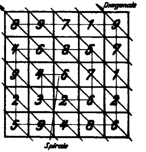
Gedächtnis oder auch wirkliche Rechenfähigkeit beim Vorlegen einer neuartigen Aufgabe, die eigene Überlegung erfordert. Der tiefgehende Unterschied zwischen aktueller Leistung und bloßer Reproduktion von Gehirnballast ist in der psychologischen Literatur oft übersehen worden, und die meisten Fragen sind erst durch das zitierte Werk von *G. E. Müller*, Göttingen, geklärt worden. Zusammenfassend können wir sagen: Solange man nicht sagen kann, wieviel Zeit für das Lernen und die Erhaltung der Reproduktionsfähigkeit verbraucht wird, kann man die Leistung nicht messen.

Die Karreeversuche.

Ich setze die psychologische Betrachtung etwas weiter fort, da die aktuelle Leistungsfähigkeit des Gedächtnisses, wie es einleuchtend und in der Einleitung hervorgehoben ist, eine ganz wesentliche Komponente für die wirklichen Leistungen im Kopfrechnen ist, da ferner für die Beschreibung der im Vortrag ausgeführten Gedächtnisversuche eine kurze Begründung für die Wahl der Ziffernkarrees als Lernmaterial gegeben werden muß.

Das Karree als Grundlage für die Prüfung der Gedächtnisfunktionen geht auf den französischen Psychologen und Psychiater *Charcot* zurück, der auf diesem Gebiet ein Vorläufer von *Binet*[1]) war, dem das erste zusammenfassende Werk über diese Fragen zu verdanken ist.

Charcot ließ ein Karree von 25 Ziffern auswendig lernen, maß die Lernzeit und die Hersagezeit in der natürlichen Richtung. Dann ließ er das Karree in verschiedenen räumlichen Anordnungen hersagen, und maß die Hersagezeiten. Ein Beispiel wird das Verfahren am besten erläutern.



Hersageformen

1. Vorwärts in einzelnen Ziffern
2. Rückwärts in einzelnen Ziffern
3. In Vertikalreihen
4. In der Spirale
5. In Diagonalreihen

Die Zusammenstellung der aus einer Reihe von Versuchen gewonnenen mittleren Reproduktionszeiten läßt manche Schlüsse zu und gibt ein recht klares Bild von der Arbeitsweise des untersuchten Gedächtnisses.

---

[1]) Vgl. *Binet*, Les grands calculateurs et joueurs d'échecs. Paris 1894.

Wir nehmen an, ein Mnemotechniker habe das Karree gelernt in der naturlichen Ziffernfolge

89719 | 46857 | 94671 | 23262 | 59486

Diese Folge von 25 Ziffern wird er gut wiederholen konnen Es geht auch noch einigermaßen mit dem Ruckwartshersagen

Die Vertikalreihen machen schon Schwierigkeiten, denn der Spruch, mit dessen Hilfe er die Reihe vorwarts gelernt hat, verträgt diese Um stellung nicht Bei der Spirale und der Diagonale geht es keinesfalls besser

Der Karreeversuch laßt rasch und sicher beurteilen, ob der Lerner mit naturlichen oder kunstlichen Hilfen gearbeitet hat Er gibt weiteren Einblick in die Mechanik der Vorstellungen Wir alle wissen, ob wir besser mit den Augen oder mit den Ohren lernen, ob wir, wie die Fachausdrucke heißen, vorwiegend visuell oder in der Hauptsache auditiv veranlagt sind Allgemein ist einleuchtend, daß der visuelle Lerner sich auf die transformierten Hersageformen leichter einstellen wird als der vorwiegend auditiv veranlagte, fur den die Worte, in denen die Zahlen gesprochen sind, ihre besondere Bedeutung haben fur das Lernen wie das Hersagen, zumal, wenn ihm das Karree in der naturlichen Folge in funfstelligen Zahlen vorgelesen worden ist

Seien t_1, t_2, t_3 t_4, t_5 die Hersagezeiten der funf Anordnungen, in der die Reproduktion verlangt wird Die Werte t_i sollen aus einer Reihe von Versuchen gewonnen sein, dann gibt die Quotientenreihe

$$q_1 = \frac{t_1}{t_1} = 1\,, \quad \frac{t_2}{t_1} = q_2\,, \quad \frac{t_3}{t_1} = q_3\,, \quad \frac{t_4}{t_1} = q_4\,, \quad \frac{t_5}{t_1} = q_5$$

ein gutes Bild von der Mechanik der Vorstellungen des Lernens, besonders dann, wenn die Versuchsperson sich durch eine hohe Konstanz der Leistung auszeichnet Diese Andeutungen mogen genugen, um erkennen zu lassen, daß die systematische Untersuchung dieser Fragen mit den besonderen Methoden und wohldurchdachten Versuchsanordnungen der experimentellen Psychologie doch recht viel klare Erkenntnis uber die Gedachtnisfunktionen und den Ablauf der Vorstellungen liefern kann Ausnahmefalle besonders hoher Leistungsfahigkeit werden naturgemaß besonders gern und dementsprechend eingehend unter sucht

Ich habe diese Fragen etwas eingehender behandelt, als es ursprung lich in meiner Absicht lag Das allgemeine Interesse, das dieses wenig gekannte Gebiet beanspruchen kann, und der Umstand, daß so vieles uber Gedachtniswunderleistungen geschrieben wird, das einer strengen Kritik nicht standhalten kann, mögen mich entschuldigen Mir ist es immer darum zu tun gewesen, meine Leistungen auf dem Zahlengebiet als keine Hexerei ' hinzustellen

Über die Rekordleistungen auf diesem Gebiet, die oft und in der Überzahl der Fälle ohne vernünftigen Kommentar erwähnt werden, darf ich, zumal der neueren Resultate wegen auf die mehrfach zitierte Schrift von *O. Kroh* hinweisen. Hier kommt es darauf an, die Wege einigermaßen deutlich zu zeigen, auf denen diese Leistungen erreicht werden können.

Der folgende Teil des Berichts soll sich mit dem eigentlichen Vortrag befassen, die dort gezeigten Leistungen besprechen und daran anschließend die Methoden beim Rechnen, in mancher Hinsicht auch die beim Lernen der Zahlenreihen darstellen. Dabei muß ich das in der Einleitung Gesagte wiederholen, daß ich mich nie auf eine bestimmte Methode festlege, die Aufgaben in den meisten Fällen individuell behandle. Man wird nicht allzuviel Schema und Schablone finden. Das geschieht immer mit der Tendenz, einen möglichst guten Weg für die Lösung zu finden, der ohne viel Mühe das Resultat liefert und auf seine Richtigkeit prüfen läßt, was für wirkliches Rechnen immer eine wesentliche Nebenbedingung darstellt. Auch hier waltet ein Gesetz der Trägheit. Um sich durch zuviel Nebenarbeit nicht zu ermüden, sucht man einen bequemen Weg. Doch wird man zugeben, daß Trägheit in dieser Form nicht zu verurteilen ist.

Zweiter Abschnitt.

Dieser zweite Abschnitt soll der Hauptsache nach die Aufgaben beschreiben, die im Vortrag gelöst worden sind, um auf diesem Wege Methoden des Kopfrechnens zu finden und darzustellen. Bei den Multiplikationsaufgaben wird es genügen, wenn eine hinreichende Anzahl von Produkten dreistelliger Zahlen besprochen wird. Nach den Ausführungen in Teil I bildet die dreistellige Zahl den eigentlichen Baustein bei meinen Operationen mit Zahlen und dazu kommt, daß der Aufbau der mehrstelligen Zahlen sich durchgehends aus dreistelligen Komplexen vollzieht.

Eine gesonderte Betrachtung veranlassen die Potenzberechnungen, da sie durch einfache Formeln erleichtert werden. An die Betrachtung der Potenzaufgaben schließt sich naturgemäß die Bestimmung der Wurzeln aus Radikanden, die vollständige Potenzen entsprechenden Grades sind. Insbesondere hängt die Struktur der Quadratzahlen eng zusammen mit der Zahlentheorie der quadratischen Formen. Die kombinierte Behandlung der beiden Formen

$$F_I = u^2 + v^2 , \quad F_{II} = u^2 - v^2$$

bietet die Grundlage für die Bestimmung der Primfaktoren der ganzen Zahlen. Die Betrachtung der im Vortrag gelösten derartigen Aufgaben gibt schon einigermaßen einen Einblick in die zu benutzenden Methoden.

Dabei wird es zweckmäßig sein, noch einige Fragen dieses Gebietes zu streifen, die allgemeines Interesse beanspruchen können. Einige Ergebnisse von Teil I werden dabei weiter behandelt.

§ 1. Die Multiplikation der ganzen Zahlen.

Hat man Tafeln der Quadratzahlen in hinreichendem Umfang zur Hand, so ist die Identität $a \cdot b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ mit großem Vorteil zu verwenden. Davon wird von den Astronomen bei den Ausgleichsrechnungen mit der Methode der kleinsten Quadrate Gebrauch gemacht. Für den Kopfrechner ist die Methode in allen Fällen praktisch, wo $\frac{a-b}{2}$ keine große Zahl ist, also $\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ ohne besonderen Rechenaufwand zu bilden und von $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ zu subtrahieren ist.

Zunächst werden die im Vortrag gestellten Aufgaben der Multiplikation dreistelliger Zahlen hier zusammengestellt und besprochen.

Einige dieser Aufgaben zeigen besondere zufällige Erleichterungen, die die Rechnung sehr abkürzen.

1. $164 \cdot 328 = 164 \cdot 2 \cdot 164 = 2 \cdot 164^2 = 2 \cdot 26\,896 = 53\,792$
2. $277 \cdot 554 = 277 \cdot 2 \cdot 277 = 2 \cdot 277^2 = 2 \cdot 76\,729 = 153\,458$
3. $379 \cdot 758 = 379 \cdot 2 \cdot 379 = 2 \cdot 379^2 = 2 \cdot 143\,641 = 287\,282$

Bei allen drei Aufgaben ist der eine Faktor gleich dem Zweifachen des anderen $v = 2u$; $u \cdot v = 2u^2$, so daß die Rechnung auf die augenblicklich durchführbare Bestimmung des Quadrats einer dreistelligen Zahl zurückgeführt werden kann.

Diese ganz spezielle Form der Aufgaben weist darauf hin, daß eine bestimmte Fähigkeit des Rechners unter allen Umständen bereit sein muß, nämlich die des augenblicklichen Erkennens von Besonderheiten der gestellten Aufgabe. Ein Rechner, der noch so schon nach einer festen Norm rechnet, hätte solche Aufgaben nicht im Bruchteil einer Sekunde lösen können, wenn er nicht beim Aussprechen der Aufgabe schon ihre einfache Struktur erkannt hätte. Man sieht weiter, daß hierzu die möglichst zeitlose Umsetzung des Gesprochenen in die Zahlenbilder erforderlich ist, da nur diese die zu benutzende Beziehung zwischen den beiden Faktoren unmittelbar erkennen läßt.

$$
\begin{aligned}
4.\ 576 \cdot 426 = (500 + 76)(500 - 74) &= 500^2 + 500(76 - 74) - 76 \cdot 74 \\
&= 500^2 + 500 \cdot 2 - (75^2 - 1) = 251\,001 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 5\,625 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \underline{245\,376}
\end{aligned}
$$

Allgemein wendet man die auf die Inder zurückgehende Klammermultiplikation an, indem man setzt

$$u \cdot v = (A + d)\,(A + e),$$

wo A die Bezugszahl genannt werden soll, durch deren geschickte Wahl die Rechnung mit wenig Mühe und recht schnell durchgeführt werden kann.

Natürlich hätte hier die Quadratdifferenzformel

$$u \cdot v = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2$$

mindestens ebenso schnell zum Ziele geführt. Es wird

$$\frac{576 + 426}{2} = 501 \qquad \frac{576 - 426}{2} = 75$$

und die Rechnung führt auf genau die gleiche Quadratdifferenz $501^2 - 75^2$ wie die etwas umgestellte Klammermultiplikation mit $A = 500$ als Bezugszahl.

In allen Fallen, wo einige Zwischenglieder besonders einfach berechnet werden können, ist die Klammerformel anzuwenden Die Bezugszahl *A* ist eben so zu wahlen, daß die Zwischenrechnungen so einfach wie moglich werden Der Grenzfall, wo das Produkt schon durch zwei Glieder dargestellt wird ist durch die Formel der Quadratdifferenz

$$u \quad v = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$$

gegeben

5 619 421

Man erkennt hier ohne weiteres, daß $\frac{u+v}{2} - 520$, $\frac{u-v}{2} = 99$ wird Bei einiger Übung gewinnt man in nicht zu komplizierten Fallen also wenigstens bei dreistelligen Faktoren, die Hilfsgroßen $\frac{u-v}{2}$ und $\frac{u=v}{2}$ ohne eigentliche Rechnung, etwa durch Fixierung der Werte in einem linearen Zahlendiagramm, wie es von *O Kroh* in seiner Schrift beschrieben ist Fur unser Beispiel kommt

$$619 \quad 421 = (520 + 99)\,(520 - 99) = 520^2 - 99^2 = 520^2 - (100 - 1)^2$$
$$= 270\,400 - 10\,000 + 199 = \underline{260\,599}$$

Diese Durchfuhrung der Subtraktion zeigt, daß auch bei der algebraischen Addition zweckmaßig mit Zerlegungen in Komponenten, also mit passenden Bezugszahlen gearbeitet wird Das Ziel ist in allen Fallen, in einem Minimum von Zeit einen Naherungswert des Resultats zu gewinnen, an dem nur noch kleine Korrekturen anzubringen sind zur Festlegung des genauen Resultats

In dieser Hinsicht ist das Rechenverfahren ein durchaus mathematisches im Gegensatz zu dem ublichen Verfahren des ziffernmaßigen Ausmultiplizierens, das in erster Linie und mit dem gleichen Arbeitsaufwand die unwesentlichen Endziffern behandelt wie die wesentlichen Vorderziffern Peinlich genaues Rechnen aller Ziffern schutzt nicht vor einem groben Fehler zum Schluß bei der Verknupfung der im Wert uberwiegenden linken Ziffern der Zahlen Die mathematische Methode gibt sofort, und das ist von großer Wichtigkeit einen Annaherungswert, der die Großenordnung des Produkts veranschaulicht wobei grobe Fehler durch eine selbsttatige Kritik vermieden werden Die Herstellung des genauen Ergebnisses durch die Korrektionsrechnung ist eine reizvolle Arbeit, die keine Ermudung aufkommen und oft eine fast asthetische Wirkung entstehen laßt

$$6 \quad 743 \quad 819 = 781^2 - 38^2 = 609\,961 - 1444 = 608\,517$$

$$7 \quad 821 \quad 614 = 821\,(600 + 14) = 492\,600 + 11\,494 = 504\,094$$

$$8 \quad 882 \quad 512 = 882\,(500 + 12) = 441\,000 + 12 \quad 900 - 12 \quad 18$$
$$= 451\,800 - 216 = 451\,584$$

Hier hatte man bei richtiger Betrachtung der Aufgabe besser wie folgt gerechnet:

9. $882 = 2 \cdot 21^2; \quad 512 = 2 \cdot 16^2$

$$P = 2 \cdot 21^2 \cdot 2 \cdot 16^2 = (2 \cdot 16 \cdot 21)^2 = 672^2 = 451584)$$

10. $943 \cdot 856 = (900 + 43)\,(900 - 44) = 900^2 - 900 - 1 - 43 \cdot 44$
$= 810\,000 - 900 - 1892 = \underline{807\,208}$

Hier lohnt sich wie folgt zu rechnen:

$$943 = 950 - 7 = \frac{1900}{2} - 7$$

$$943 \cdot 856 = \left(\frac{1900}{2} - 7\right) \cdot 856 = 1900 \cdot 428 - 7 \cdot 856 = 42\,800 \cdot 19$$
$$- 7 \cdot 856 = 813\,200 - 5992 = 807\,200 + 8 = 807\,208$$

11. $853 \cdot 746 = \left(\frac{1700}{2} + 3\right) 746 = 1700 \cdot 373 + 3 \cdot 746$
$= 634\,100 + 2238 = \underline{636\,338}$

12. $647 \cdot 926 = (650 - 3)\,926 = \frac{1300}{2} \cdot 926 - 3 \cdot 926 = 46\,300 \cdot 13$
$- 3 \cdot 926 = 601\,900 - 3 \cdot 1000 + 3 \cdot 74 = \underline{599\,122}$

Die Beispiele 11. und 12. lassen erkennen, wie durch kleine Transformationen der Faktoren die Rechnung oft sehr erleichtert wird.

13. $997 \cdot 968 = (1000 - 3)\,(1000 - 32) = 1000^2 - 1000\,(32 + 3)$
$+ 3 \cdot 32 = \underline{965\,096}$

Bei den Umformungen der Faktoren sind von großem Nutzen die Teilbarkeitseigenschaften, die wir in Teil I betrachtet haben. Treten z. B. in einem Produkt eine Anzahl von Faktoren p, q, r auf, die sich zu einer Teilerfunktion $t = g^k + d$, also im allgemeinen $t = 10^k + d$ zusammenfassen lassen, so ist $p \cdot q \cdot r = 10^k + d$ als ein Faktor zu wählen, da es eine besonders einfache Multiplikation gestattet.

Beispiele:

1. $767 \cdot 493 = 13 \cdot 59 \cdot 17 \cdot 29 = 13 \cdot 29\,(17 \cdot 59) = 377 \cdot 1003$
$= 378\,131$

2. $868 \cdot 572 = 7 \cdot 124 \cdot 4 \cdot 11 \cdot 13 = 124 \cdot 4\,(7 \cdot 11 \cdot 13)$
$= 496 \cdot 1001 = 496\,496$

3. $851 \cdot 729 = 23 \cdot 37 \cdot 27^2 = 23 \cdot 27\,(37 \cdot 27) = 621 \cdot 999 = 620\,379$

4. $1479 \cdot 1173 = 29 \cdot 51 \cdot 23 \cdot 51 = 17 \cdot 51\,(3 \cdot 23 \cdot 29) = 867 \cdot 2001$
$= \underline{1\,734\,867}$

5. $20\,413 \cdot 5183 = (143^2 - 6^2) \cdot 71 \cdot 73 = 149 \cdot 137 \cdot 71 \cdot 73$
$= 149 \cdot 71 \cdot 10\,001 = 10\,579 \cdot 10\,001 = 105\,800\,579$

Beim schriftlichen Rechnen wird man derartige Abkurzungen der Arbeit verhaltnismaßig leicht finden während beim Kopfrechnen an spannende Arbeit zum Erkennen der Faktorenzusammenhange erforderlich ist

Ich fuge noch einige Beispiele an, bei denen durch geschickte Faktorenanordnung die Rechnung vereinfacht werden kann

$$6 \quad 6667 \quad 39\,759 = (3 \quad 6667) \quad \frac{39\,759}{3} = 20\,001 \quad 13\,253 = 265\,073\,253$$

7 Bei der Bestimmung der Quadrate sechsstelliger Zahlen kommt es oft darauf an im doppelten Produkt die richtige Faktorenfolge zu finden

Ich schreibe die sechsstellige Zahl in der Form $Z = 1000\,u + v$ und es ist $P = 2 \quad 1000 \quad u \quad v$ in geeigneter Weise anzuordnen

$7 \quad 458\,329^2 \mid \quad P = 2 \quad 1000 \quad 458 \quad 329$

Die Zusammenfassung $2\,v = 2 \quad 329 = 658$ gibt die bequeme Form

$$P = 1000 \quad 458 \quad 658 = 1000\,(558^2 - 100^2)$$

$$\begin{aligned} 8 \quad P &= 3157 \quad 89\,271 = 41 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 6867 = 6867 \cdot 1001 \quad 41 \\ &= 6873\,867 \quad 41 = 281\,828\,547 \end{aligned}$$

In vielen Fällen ist es eine große Erleichterung bei der Multiplikation, wenn durch Abspaltung kleiner Faktoren das Produkt die Form erhalt

$$P = u \quad v \quad f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad ,$$

wo die beiden wesentlichen Faktoren u und v sich bequem multiplizieren lassen Hierfur gebe ich noch ein Beispiel

$$\begin{aligned} 9 \quad P &= 147\,378 \quad 221\,307 = 2 \quad 73\,689 \quad 3 \quad 73\,769 \\ &= 6\,\{73\,729^2 - 40^2\} = 6\,\{5\,435\,965\,441 - 1600\} \\ &= 6 \quad 5\,435\,963\,841 = 32\,615\,783\,046 \end{aligned}$$

Da $73\,729$ von der Form $73\,k - 1$ ist so wird $73\,729^2$ von der Form $73\,k + 1$, es laßt sich durch Reduktion mit $10^4 + 1$ leicht prufen

$$\begin{array}{c|c|l} 54 & 3596 & 5441 \\ - & 54 & 3542 \\ & \overline{3542} & \overline{1899} = 2 \quad 13 \quad \underline{\underline{73}} + 1 \end{array}$$

$$3 \quad 43\,734 \qquad 393\,696 \quad 3$$

$$\begin{aligned} 10 \quad 43\,734 \quad 393\,696 &= 131\,202 \quad 131\,232 = 131\,217^2 - 15^2 \\ &= 17\,217\,901\,089 \end{aligned}$$

Derartige Umformungen lassen sich beim Kopfrechnen nicht leicht erkennen, bringen aber auch da viel Erleichterung der Rechnung Auch additive Umformungen vereinfachen die Multiplikation

$$1.\quad 279\ 971 = 279\,(700 + 271) = 195\,300 + (275^2 - 4^2)$$
$$= 195\,300 + 75\,609 = 270\,909$$

$$2.\quad 462\ 968 = 462\,(500 + 468) = 231\,000 + (465^2 - 3^2) = 447\,216$$

$$3.\quad 3438\ 8432 = 3438\,(5000 + 3432) = 17\,190\,000 + (3435^2 - 3^2)$$
$$= 17\,190\,000 + 11\,799\,216 = \underline{28\,989\,216}$$

Die Darstellung $u \cdot v = u \cdot (A + v)$ lohnt sich natürlich immer am meisten, wenn A eine Bezugszahl ist mit der einfach zu rechnen und das Teilprodukt $u \cdot v$ leicht bestimmbar ist.

§ 2. Potenzen und ihre Endziffereigenschaften.

Es ist schon angedeutet worden, daß die Quadrate und allgemein die Potenzen mit geradem Exponenten besonders behandelt werden sollen.

Bei dem Ausrechnen von Potenzen bieten sich die bekannten Binomialformeln dar, auf die ich nicht näher eingehen will. Eine Frage soll dagegen hier etwas eingehender behandelt werden, das ist die nach dem Zusammenhang zwischen den Endziffern von Grundzahl und Potenz, der wesentlich von der Grundzahl des Zahlensystems abhängt.

Nach dem im Abschnitt I zitierten ersten *Fermat*schen Satz gilt für eine Primzahl p und jede beliebige Zahl a die Gleichung

$$a^p - a = l \cdot p$$

Insbesondere gilt also

$$a^5 - a = l \cdot 5$$

Der Primzahlexponent p kann von der Form $p = 4e + 1$ oder $p = 4e + 3$ sein. Sei zunächst $p = 4e + 1$, so kommt

$$a^{4e+1} - a = a(a^{4e} - 1) = k \cdot 5$$

Für gerades a sieht man sofort die Teilbarkeit der Differenz durch $2 \cdot 5 = 10$ ein, für ungerades a gilt das gleiche, da in diesem Falle $a^{4n} - 1$ durch 2 teilbar ist. Es ist also die Differenz der Potenz a^{4e+1} und der Grundzahl a immer durch 10 teilbar, d. h. die Potenz $a^p = a^{4e+1}$ und die Grundzahl a stimmen in den Einern, also in den Endziffern überein. Ist der Exponent $p = 4e + 3$, so gilt die genau gleiche Schlußweise für die Differenz $a^{4e+3} - a^3$, so daß die Endziffer von a^{4e+3} mit der von a^3 übereinstimmt.

Diese kleine Überlegung zeigt, daß das einfache Endziffergesetz dadurch zustande kommt, daß die halbe Grundzahl 5 unseres Zahlensystems eine Primzahl ist und nur die beiden Klassen $4n + 1$ und $4n + 3$ von Exponenten bedingt.

Die hier abgeleitete Tatsache ist ein gutes Hilfsmittel beim Ausziehen von ungeraden Wurzeln aus entsprechenden vollständigen

Potenzen mit gleichen ungeraden Exponenten. Für Exponenten $e = 4n + 1$ ergibt sich die Endziffer der Wurzel direkt aus der der Potenz, während für Exponenten $e = 4n + 3$ die Betrachtung der Endziffer der Kuben von 1 bis 9 genügt, um die Endziffer der Wurzel zu bestimmen.

Beispiele. Um Wurzeln mit Exponenten der Form $e = 4n + 3$ bequem ausziehen zu können, ist es angebracht, sich die 9 Endziffern der 9 dritten Potenzen der einstelligen Zahlen einzuprägen, wozu das folgende kleine Täfelchen vollkommen ausreicht:

$$1^3 = 1,\quad 2^3 = 8,\quad 3^3 = 27,\quad 4^3 = 64,\quad 5^3 = 125,\quad 6^3 = 216,\quad 7^3 = 343,$$
$$8^3 = 512,\quad 9^3 = 729.$$

1. $\sqrt[5]{229\,345\,007}$. Teilt man von rechts den Radikanden fünfstellig ab, so erkennt man, daß die Wurzel eine zweistellige Zahl wird, da die $\sqrt[5]{2293}$ zwischen 4 ($4^5 = 1024$) und 5 ($5^5 = 3125$). Die Wurzel liegt demnach zwischen 40 und 50, und sie wird wegen der Endzifferbedingung für den Exponenten 5, gleich 47, was man bei einigem Überblick im Bruchteil einer Sekunde feststellen kann.

2. $\sqrt[7]{117\,471\,|\,1\,139\,837}$. Es wird $5^7 = 78\,125$, $6^7 = 279\,936$, also liegt die Wurzel zwischen 50 und 60, und muß nach der Endzifferbedingung $= 53$ werden. Die Abschätzung der Lage des Radikanden zwischen den Potenzen der einstelligen Zahlen erfordert eine etwas mühsame Rechnung oder bedingt das angenäherte Einprägen eine Reihe von Potenzen der einstelligen Zahlen. Die Rechnung kann besser durchgeführt werden mit Hilfe der ganz oberflächlichen Kenntnis einiger Logarithmenwerte, wie das folgende Beispiel zeigen wird.

3. $\sqrt[7]{1\,104\,739\,|\,8\,519\,097}$. Der Radikand $R = 1\,104\,739\,|\,8\,519\,097$ hat 14 Stellen. Sein Logarithmus wird (unter Forderung der Kenntnis von $\log 11 = 1{,}04139$ auf 2 Stellen) $\log R = 13{,}04$. Der Logarithmus der Wurzel wird $\log w = \frac{1}{7} \log R = 1{,}86|$. Da $\log 7 = 0{,}845$, $\log 8 = 0{,}903$, so liegt die Wurzel zwischen 70 und 80. Die Endzifferbedingung verlangt nach dem Hilfstäfelchen der Kuben $\underline{w = 73}$.

Die Logarithmenmethode läßt sich natürlich sehr viel weiter ausdehnen als die Interpolationsverfahren, außerdem arbeitet sie um vieles schneller und hat den großen Vorteil, die Einprägung von viel Zahlenballast (auswendig gelernte Potenzen einstelliger Zahlen) zu vermeiden. Im Teil III wird das Logarithmenverfahren eingehend besprochen und auf erheblich kompliziertere Aufgaben angewandt.

Die logarithmische Abschätzung läßt besonders einfach erkennen, daß das Wurzelziehen aus vollständigen Potenzen mit wachsendem Exponenten leichter wird. Je größer der Divisor des abgeschätzten Radikandenlogarithmus, desto weniger genau braucht dieser bekannt zu sein, um eine hinreichend zuverlässige Eingrenzung des Wurzel-logarithmus zu sichern Dazu kommt was in Teil I schon gestreift worden ist, daß man bei solchen Exponenten kaum jemals uber zwei stellige Wurzeln hinausgeht aus Scheu vor der Rechenarbeit beim Potenzieren

Geht man bei der Potenzbildung von einer dreistelligen Grundzahl aus, so wird das Verfahren sehr viel schwieriger und es muß wirklich uberlegt und gut gerechnet werden

Man wird nach diesen kurzen Ausfuhrungen meine Bemerkung in Teil I verstehen daß man auf diesem Felde als Rechenkunstler" glanzen kann ohne rechnen zu konnen Die Behauptung ist wahr so paradox sie klingen mag, daß die Bestimmung der Quadratwurzel im Kopf das schwierigste Wurzelziehen ist Es macht keine große Schwierigkeit drei-, vier- funf- oder sechsstellige Zahlen zu quadrieren, so daß fur das Resultat also die Quadratwurzel eine ganze Anzahl von Ziffern zu bestimmen ist

Der Bedeutung halber, die die Struktur der Quadratzahlen speziell fur Fragen zahlentheoretischer Art hat, soll der nachste Abschnitt uberschrieben werden

§ 3. Die Struktur der Quadratzahlen.

Die hier zu besprechenden Eigenschaften der Quadratzahlen sind von der besonderen Grundzahl 10 unseres Zahlensystems unabhangig

Wir leiten die Resultate deswegen fur eine Grundzahl $g = 2q$ ab, wo q eine beliebige ungerade Primzahl sein soll

Es wird dann $g^2 = 4q^2 \quad \frac{g^2}{2} = 2q^2$

Ich betrachte die vier Zahlen

$$a < q^2 \qquad 2q^2 - a, \qquad 2q^2 + a \qquad g^2 - a = 4q^2 - a$$

Diese vier Zahlen liegen in einem Intervall $[a \quad g^2 - a]$ das kleiner als g^2 ist was im gebrauchlichen Zahlensystem bedeutet, daß diese vier Zahlen m_1, m_2, m_3 m_4 zwischen zwei Zahlen eingeschlossen sind deren Differenz unter allen Umstanden unterhalb 100 liegt

Fur die vier entsprechenden Quadratzahlen ergibt sich

$$\begin{aligned}
m_1^2 &= a^2 & &= & & a^2 \\
m_2^2 &= (2q^2 - a)^2 &= 4q^4 - 4q^2 a + a^2 &= 4q^2(q^2 - a) &+ a^2 \\
m_3^2 &= (2q^2 + a)^2 &= 4q^4 + 4q^2 a + a^2 &= 4q^2(q^2 + a) &+ a^2 \\
m_4^2 &= (4q^2 - a)^2 &= 16q^4 - 8q^2 a + a^2 &= 4q^2(4q^2 - 2a) &+ a^2
\end{aligned}$$

Da $4q^2 = g^2$ wird, so erkennt man, daß die beiden letzten Stellen der vier Quadratzahlen m_1^2, m_2^2, m_3^2 m_4^2 durch die Zahl a^2 bestimmt werden, da alle Vielfachen von g^2 mindestens in die drittletzte Stelle fallen mussen im gewohnlichen dekadischen System Hunderter geben

Wir fassen dieses Ergebnis so zusammen: Sei A eine beliebige ganze Zahl, sei $g = 2q$ die Grundzahl des Zahlensystems, so gibt es zwischen A und $A = A + g^2$ stets vier Zahlen $m_1 = a < q^2$, $m_2 = 2q^2 - a$, $m_3 = 2q^2 + a$, $m_4 = 4q^2 - a = g^2 - a$, deren Quadrate in den beiden letzten Ziffern übereinstimmen, da sie durch a^2 bestimmt werden. Im dekadischen System heißt das:

Ist a eine beliebige ganze Zahl unter $q^2 = 5^2 = 25$, so haben $(50 - a)^2$, $(50 + a)^2$ und $(100 - a)^2$ dieselben beiden letzten Ziffern wie a^2.

Beispiel:

1. $17^2 = 289$, $(50 - 17)^2 = 33^2 = 1089$, $(50 + 17)^2 = 67^2 = 4489$, $(100 - 17)^2 = 83^2 = 6889$.
2. $13^2 = 169$, $37^2 = 1369$, $63^2 = 3969$, $87^2 = 7569$.
3. $16^2 = 256$, $34^2 = 1156$, $66^2 = 4356$, $84^2 = 7056$.

Ich habe gleich drei Beispiele hingeschrieben, da diese ein verschiedenes Verhalten zeigen, das in vielen Fällen ein Kriterium dafür abgibt, ob eine Zahl Quadratzahl sein kann oder nicht. Von Bedeutung ist dabei die drittletzte Ziffer.

Der Kürze halber will ich für das folgende vier in der angegebenen Weise zusammengehörige Zahlen: konjugierte Zahlen, oder eine Vierergruppe nennen.

Man sieht bei 17 und seinen drei konjugierten Zahlen, daß die drittletzte Ziffer, die im folgenden kurz mit Z_3 bezeichnet werden soll, durchwegs gerade ist, bei der 13-Gruppe (13, 37, 63, 87) ist sie durchwegs ungerade, während bei 16 die mittleren Zahlen 34 und 66 der Vierergruppe ein anderes Verhalten zeigen als das äußere Zahlenpaar 16 und 84. Das läßt sich natürlich leicht aus der Formel $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ für den Fall $g = 10 = 2 \cdot 5$ ableiten, doch ist es für die geläufige Anwendung dieser Tatsachen fast besser, wenn man empirisch auf diese Eigenschaften aufmerksam geworden ist.

Beispiele: 1. Jemand verlangt die $\sqrt{47\,526\,789}$ und behauptet, dieser Radikand sei eine Quadratzahl, d. h. die Wurzel werde ganzzahlig. Man kann ihm seine falsche Rechnung unmittelbar nachweisen, indem man bemerkt, daß Quadrate mit dem Endkomplex 89, die nach Beispiel 1 der 17-Gruppe angehören, zur drittletzten Ziffer Z_3 notwendig eine ***gerade*** Zahl haben.

2. Verlangt wird die $\sqrt{42\,693\,156}$. Man sieht sofort, daß die Wurzel zwischen 6500 und 6600 liegt, denn $65^2 = 4225$, $66^2 = 4356$. Die Ziffern 56 am Ende des Radikanden deuten auf die 16-Gruppe. Da die drittletzte Ziffer Z_3 ungerade ist, so kommen von den vier möglichen Zahlen 6516, 6534, 6566, 6584 nur die beiden mittleren in Frage, zwischen denen durch eine Größenbetrachtung (Interpolation) zu entscheiden ist.

Man erkennt daß die Schwierigkeiten fur das Quadratwurzelziehen aus vollstandigen Quadraten nicht unerheblich sind insofern als bestimmte Kriterien zur Festlegung der richtigen Wurzel anzuwenden sind

Die folgende einfache Betrachtung zeigt daß das Verhalten der drittletzten Ziffer Z_3 des Quadrats fur eine Vierergruppe (m_1 m_2, m_3 m_4) wesentlich davon abhangt, ob m_1 ungerade $= 2b + 1$ oder gerade $= 2b$ ist

Ich zeige im Falle $m_1 = 2b$, daß ein Wechsel der drittletzten Ziffer Z_3 der Quadratzahlen zwischen dem inneren Paar (m_2 m_3) und dem außeren Paar (m_1, m_4) der Gruppe (m_1 m_2 m_3 m_4) auftreten muß

Es wird

$$m_1 = 2b \qquad m_2 = 2q^2 - 2b \qquad m_3 = 2q^2 + 2b, \quad m_4 = 4q^2 - 2b$$

Die Quadrate werden

$$\begin{aligned}
m_1^2 &= && 4b^2 \\
m_2^2 &= (2q^2 - 2b)^2 &&= 4q^4 - 4q^2\ 2b + 4b^2 \\
m_3^2 &= (2q^2 + 2b)^2 &&= 4q^4 + 4q^2\ 2b + 4b^2 \\
m_4^2 &= (4q^2 - 2b)^2 &&= 16q^4 - 8q^2\ 2b + 4b^2
\end{aligned}$$

Dafur konnen wir in leichter Umformung schreiben

$$\begin{aligned}
m_1^2 &= && 4b^2 \\
m_2^2 &= g^2(\ q^2 - 2b) && + 4b^2 \\
m_3^2 &= g^2(\ q^2 + 2b) && + 4b^2, \\
m_4^2 &= g^2(2q^2 + b)\ 2 && + 4b^2
\end{aligned}$$

Diese Schreibweise laßt unmittelbar erkennen, daß zu m_1^2 bei der Bildung von m_2^2, m_3^2, m_4^2 Komponenten hinzutreten, die Vielfache von g^2 sind, also erst in der drittletzten Ziffer auftreten wie es nach unserer Ableitung sein muß

Die Koeffizienten von g^2 sind in den drei Fallen

1 fur m_2 $\quad q^2 - 2b$,
2 „ m_3 $\quad q^2 + 2b$
3 „ m_4 $\quad 2(2q^2 + b)$

Beachtet man, daß q ungerade ist so wird $q^2 - 2b$ und $q^2 + 2b$ ungerade, wahrend der Koeffizient von g^2 im Falle von m_4^2 offenbar gerade ist Zu $m_1^2 = 4b^2$, dessen drittletzte Ziffer Z_3 sein moge werden also fur die Bildung von m_2^2 und m_3^2 ungerade drittletzte Ziffern addiert, so daß ein gerades Z_3 ungerade, ein ungerades Z_3 gerade wird, wahrend fur m_4^2 eine gerade drittletzte Ziffer addiert wird, die gerade Z_3 von m_1^2 gerade ungerades Z_3 ungerade läßt Fur m_1^2 und m_4^2 sind demnach die drittletzten Ziffern gleichzeitig gerade oder ungerade

Beispiel

1 $8^2 = 64$, $(50-8)^2 = 42^2 = 1\underline{7}64$, $(50+8)^2 = 58^2 = 3\underline{3}64$, $(100-8)^2 = 92^2 = 8\underline{4}64$

2 $18^2 = 324$, $(50-18)^2 = 32^2 = 1\underline{0}24$, $(50+18)^2 = 68^2 = 4\underline{6}24$, $(100-18)^2 = 82^2 = 6\underline{7}24$

Wir schließen daraus Ist die Wurzel eine gerade Zahl, so kann ihre Bestimmung durch das Verhalten der drittletzten Ziffer des Quadrats verschärft werden

Beispiele zur Bestimmung der Quadratwurzel aus vollständigen Quadraten.

1 $\sqrt{4614\,|\,4849}$ Die Wurzel aus 4614 liegt sehr nahe bei $68^2 = 4624$ der Endkomplex des Radikanden (49) deutet auf die 7 Gruppe (7 43, 57 93) Die Wurzel wird auf Grund der Größenabschatzung von 4614 sofort als $\underline{6793}$ erkannt

2 $\sqrt{3403\,|\,5556}$ Es ist $58^2 = 3364$, $59^2 = 3481$ Der Endzifferkomplex 56 deutet auf die 16-Gruppe, so daß die Endzifferpaare der Wurzel sein konnen 16, $34 = 50 - 16$, $66 = 50 + 16$, $84 = 100 - 16$ Die ungerade $Z_3 = 5$ im Quadrat zeigt, daß nur 34 und 66 in Frage kommen konnen Ein Blick auf die Lage von 3403 zwischen $3364 = 58^2$ und $3481 = 59^2$ zeigt daß 34 zulassig ist Die Wurzel wird also $\underline{5834}$

Man kann die Interpolationsbetrachtung auch rein rechnerisch machen, indem man genau das Verfahren anwendet das die elementare Bestimmung der Quadratwurzel leistet Einfacher bedient man sich dabei einer rohen Naherungsformel, die wir später bei nicht aufgehenden Quadratwurzeln wieder antreffen werden Ist d ein im Vergleich zu A kleiner Wert so gilt die Entwicklung

$$\sqrt{A^2 \pm d} = A \pm \frac{d}{2A} \mp$$

Denn es wird

$$\left(A + \frac{d}{2A}\right)^2 = A^2 + d + \left(\frac{d}{2A}\right)^2 \qquad \left(A - \frac{d}{2A}\right)^2 = A^2 - d + \left(\frac{d}{2A}\right)^2$$

Die Bedingung $\frac{d}{2A}$ klein gegen 1 ist aber immer erfullt wenn ich die vierstellige Quadratwurzel in zwei zweistellige Komplexe abteile, also in unserem Beispiel schreibe $A^2 = 5800^2$, $d = \text{Radikand} = A^2$

Erganzend ist zu bemerken, daß wir nur eine ganz rohe Abschatzung brauchen, da die genaue Bestimmung der beiden letzten Ziffern der Wurzel unmittelbar aus dem Endziffergesetz folgt

$$\begin{array}{r} \sqrt{3403\,|\,5556} \\ -\,3364 \\ \hline 39\,55 \end{array} \qquad \frac{39{,}55}{2\cdot 58} \sim 3$$

Die Wurzel liegt in der Umgebung von 5830, sie muß also 5834 sein, da nur 34 und 66 als Endzifferpaare fur die Wurzel in Betracht kommen

Man sieht an diesem Beispiel, daß die Bestimmung der Quadratwurzel aus einer Quadratzahl bei Kenntnis der Endziffereigenschaften der Quadrate rein rechnerisch eine sehr kleine Arbeit ist, zum wenigsten immer dann, wenn die vier oder zwei konjugierten Wurzeln der Vierergruppe nicht zu dicht beieinander liegen Dann wird die durch Interpolation vorzunehmende Großenabschatzung immer sehr einfach, wie das Beispiel zeigt

Sie laßt aber auch erkennen, daß bei nahe zusammenliegenden Werten der Zahlen m_1, m_2, m_3, m_4 der Vierergruppe die Bestimmung der Quadratwurzel schwierig wird, da die Interpolationsbetrachtung nicht mehr mit einer rohen Abschatzung abgetan werden kann

Ich setze fur diesen Fall $m_1 = q^2 - d$ wo d eine ganze Zahl ist Dann werden die drei anderen Zahlen der Gruppe $m_2 = 2q^2 - a = q^2 + d$, $m_3 = 2q^2 + a = 3q^2 - d$, $m_4 = 4q^2 - a = 3q^2 + d$ m_1 und m_2 einerseits und m_3 und m_4 andererseits liegen nahe zusammen, so daß auch die zugehorigen Quadratzahlen verhaltnismaßig nahe beieinander liegen Beispiele mit Zahlen aus dem gebrauchlichen dekadischen Zahlensystem mit $q = 5$ $q^2 = 25$ werden die Betrachtung erleichtern

Es ist $q^2 = 25$ Fur m_1 kommen dann die Werte 21 22, 23, 24, fur m_2 29, 28, 27, 26 etwa in Betracht

Kritische Werte-Wurzeln

m_1	21,	22	23,	24,	26	27	28	29
m_2	29,	28,	27	26	24,	23	22,	21
m_4	71,	72,	73	74,	76,	77	78,	79
m_3	79,	78,	77	76	74,	72	71	

Oder aber

m_1	1	2	3	4	5	6,	7
m_4	99,	98,	97	96	95	94	93
m_2	49,	48,	47	46	44	43	
m_3	51,	52,	53	54	56	57	

Man erkennt ohne weiteres daß die Hauptschwierigkeit fur die Trennung der benachbarten Paare fur die ungeraden Wurzelwerte besteht, wahrend die geraden Wurzeln durch die drittletzte Ziffer der Quadratzahlen getrennt werden

Beispiele

1 $\sqrt{4254\,|\,9529}$ Unmittelbar ergibt sich aus $R = 4254 \cdot 10^4$, daß die Wurzel zwischen 6500 und 6600 liegt Die Endziffern 29 des Radikanden R zeigen, daß die 23-Gruppe (23 27 73, 77) fur die Wurzel in Frage kommt, also die Werte 6523, 6527, 6573, 6577 Die Lage

des Radikanden Hauptwertes 4254 zwischen $65^2 = 4225$ und $66^2 = 4356$ zeigt sofort daß nur das Paar $m_1 = 6523$ $m_2 = 6527$ in Frage kommen kann Quadriert man 6523 nach der Formel $(a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, so kommt allgemein $(6500 + b)^2 = 6500^2 + 2 \cdot 6500 \cdot b + b^2$

Da das doppelte Produkt $2 \cdot 6500 \cdot b$ den Faktor 1000 hat so werden die drei letzten Ziffern der Quadratzahl von ihm nicht beeinflußt, werden also einzig und allein durch b^2 bestimmt Da $23^2 = 529$, $27^2 = 729$ ist so zeigt unser Radikand sofort, daß 6523 die gesuchte Quadratwurzel ist Die kleine Überlegung zeigt, wie man in kritischen Fallen zu verfahren hat Man setzt fur die Wurzel $w = A + b$, wo A eine Bezugszahl ist, die ein doppeltes Produkt $2A \cdot b$ liefert mit einem Faktor 10^e wo $e \geqq 3$ ist Dann werden die letzten drei Ziffern des Quadrats nur von b^2 beeinflußt, die gegebene Quadratzahl (d h der Radikand R) zeigt welcher der noch moglichen Werte fur b zu nehmen ist

Es muß zugegeben werden, daß bei diesem Beispiel die Sache in sofern sehr einfach lag als 6500 schon eine geeignete Bezugszahl war und dadurch die Entscheidung durch ein zweistelliges b namlich 23 getroffen werden konnte Im allgemeinen wird b dreistellig sein

2 $\sqrt{6761 \mid 7729}$ Der Radikand-Hauptwert $\overline{R} = 6761 \cdot 10^4$ zeigt, daß die Wurzel zwischen 8200 und 8300 liegt Da $82^2 = 6724$ $83^2 = 6889$ ist, so liegt die Wurzel nahe bei 8200 Der Endkomplex 29 des Radikanden deutet auf die 23 Gruppe, so daß 8223, 8227 8273 8277 zunachst mogliche Wurzelwerte sind, von denen die letzten beiden wegen der uber die Großenordnung des Radikanden gemachten Bemerkung ausscheiden Es bleibt also zwischen 8223 und 8227 zu entscheiden Um uber die drittletzte Ziffer der Quadrate von 8223 und 8227 zu entscheiden, rechne ich die Quadrate von 223 und 227 von der nachstliegenden geeigneten Bezugszahl aus, die hier unmittelbar als 250 erkannt wird Der Dreierkomplex 729 des Radikanden zeigt daß $b = 27$ wird also fur die Wurzel $w = 8000 + (250 - 27) = 8223$ kommt Kurzer hatte man so schließen konnen Da $27^2 = 729$, so kann 227^2 nicht den Endkomplex 729 haben, wie die Entwicklung von $(200 + 27)^2$ sofort zeigt

3 $\sqrt{7093 \mid 0084}$ Der Radikanden-Hauptwert $7093 \cdot 10^4 = \overline{R}$ zeigt, daß die Wurzel zwischen 8400 und 8500 liegt Der Endkomplex von R, 84, deutet auf die 22 Gruppe, so daß zunachst 8422, 8428, 8472, 8478 als mogliche Wurzelwerte in Betracht kommen Da die Z_3 gerade ist (084), so kommen nur 8422, 8478 in Frage, von denen der Großenordnung wegen ($84^2 = 7056$, $\overline{R} = 7093$, $85^2 = 7225$) 8478 sofort ausscheidet Demnach ist 8422 die gesuchte Wurzel Man kann auch umgekehrt so schließen 7093 zeigt, daß nur das bei 8400 liegende Paar 8422, 8428 in Betracht kommt 8428 wird wegen der Z_3 des Radikanden aus-

geschieden so daß 8422 als Wurzel bleibt Man erkennt die Erleichterung bei geraden Wurzelwerten durch das Z_3 Kriterium, auf die wir früher schon hingewiesen haben

4 $\sqrt{3531\,|\,092\,929}$ Der Radikanden Hauptwert $\overline{R} = 3531 \cdot 10^6$ zeigt daß die Wurzel zwischen 59 000 und 60 000 liegt

Eine kleine Näherungsrechnung auf Grund der Formel

$$\sqrt{A^2 + d} = A + \frac{d}{2\,A}$$

zeigt, daß die Wurzel zwischen den Grenzen 59 400 und 59 500 liegt, so daß der Endgruppe 29 des Radikanden wegen die Vierergruppe 59 423, 59 427, 59 473, 59 477 in Frage kommt

Für die dreistelligen Zahlen 423, 427 473 477 ist 500 die gegebene Bezugszahl $(500 - b)^2 = 500^2 - 1000 \cdot b + b^2$ gibt für alle Werte b die letzten drei Ziffern des Quadrats allein durch b^2

Da $23^2 = 529$ $27^2 = 729$ $73^2 = 5329$, $77^2 = \underline{5929}$, so kann für unseren Radikanden b nur gleich 77 werden, d h $\overline{500 - 77} = 423$ die dreistellige Zahl sein, so daß 59 423 die gesuchte Wurzel ist

§ 4. Über die Wahl der Bezugszahl.

Der Kern der Methode besteht darin, daß bei der Bildung der Quadratzahl die Wurzel $w = A + b$ so in zwei Teile zerlegt wird daß das Quadrat $w^2 = R = A^2 + 2\,A \cdot b + b^2$ in einer Reihe der letzten Ziffern nur von b^2 abhängt Ist A so gewählt, daß $2\,A \cdot b$ durch eine Potenz der Grundzahl g^e mit $(e > 2)$ teilbar ist, so soll A eine Bezugszahl genannt werden Man erkennt unmittelbar nebenbei, daß das Produkt $2\,A \cdot b$ in diesem Falle besonders einfach zu berechnen ist Ich brauche kaum besonders zu bemerken daß die schnelle Berechnung einer Quadratzahl ganz wesentlich von der geschickten Wahl der Bezugszahl abhängt

Beispiel $6467^2 = (6500 - 33)^2 = 6500^2 - 2 \cdot 6500 \cdot 33 + 33^2$ Als Bezugszahl A wird 6500 genommen, da $2 \cdot 6500 = 13000$ das doppelte Produkt durch die Multiplikation zweier zweistelligen Zahlen gewinnen läßt, zu denen der Faktor 10^3 hinzutritt

Man kann diese Betrachtung natürlich ebenso leicht auf eine allgemeine Grundzahl $g = 2\,q$ des Zahlensystems erstrecken, doch ist damit für unsere Beispiele nichts gewonnen Die richtige additive Zerlegung der Faktoren spielt schon bei den einfachsten Multiplikationen eine vereinfachende und darum wichtige Rolle

Beispiel $932 \cdot 753 = 932\,(750 + 3) = 932 \cdot \frac{3}{4}\,1000 + 932 \cdot 3$
$= 233 \cdot 3 \cdot 1000 + 3 \cdot 1000 - 3 \cdot 68 = \underline{701\,796}$

Der Faktor 753 fordert zur Bildung einer Bezugszahl $A = \frac{3}{4} \cdot 1000$ heraus, um so mehr als der andere Faktor 932 sofort als durch 4 teilbar erkannt wird.

Die Einzelrechnung wird dadurch auf kleine Werte beschrankt, während ein Naherungswert des Produktes sofort gefunden wird. Bei größeren Quadraten, etwa bei der Bestimmung des Quadrates einer sechsstelligen Zahl, wird man im doppelten Produkt außer dem Faktor 2 noch zwei dreistellige Zahlen haben, und hier kommt es darauf an die 2 mit dem geeigneten dreistelligen Faktor zu verbinden.

Beispiel

$$\begin{aligned}
862\,747^2 &= (862\,000 + 747)^2 = 862^2 \cdot 10^6 + 2 \cdot 747 \cdot 862\,000 + 747^2 \\
&= 862^2 \cdot 10^6 + (1500 - 6)\, 862\,000 + 747^2 \\
&= 862^2 \cdot 10^6 + \frac{3}{2} \cdot 1000 \cdot 862\,000 - 6 \cdot 862\,000 + 747^2 \\
&= 862^2 \cdot 10^6 + \frac{3}{2} \cdot 10^6 \cdot 862 - 6 \cdot 862\,000 + 747^2 \\
&= 862^2 \cdot 10^6 + 1293 \cdot 10^6 - 5\,172\,000 + (750 - 3)^2 \\
&= 743\,044 \cdot 10^6 + 1293 \cdot 10^6 - 5\,172\,000 + 558\,009 \\
&= 744\,337 \cdot 10^6 - 5\,172\,000 + 558\,009 \\
&= 744\,331\,828\,000 + 558\,009 = \underline{744\,332\,386\,009}
\end{aligned}$$

Man verbindet die 2 mit 747, damit die Bezugszahl $\frac{3}{2} \cdot 1000 - 6$ entsteht, mit der sich sehr bequem das Produkt $2\,A \cdot b$ bilden läßt.

Bei der Ausrechnung von Quadraten und in gleicher Weise bei der Bestimmung der Quadratwurzel aus Quadratzahlen spielt die Bezugszahl A in der Hinsicht eine besondere Rolle, als sie den Aufbau der Quadratzahl aus den Summanden a^2, $2\,a\,b$, b^2 erkennen und bei richtig gewähltem A moglichst einfach darstellen und erkennen laßt. Die Wurzelbestimmung tritt hierbei besonders klar als die inverse Operation der Quadratberechnung hervor. Wir werden diese Bemerkung so zusammenfassen: Richtige, d. h. besonders leistungsfahige Quadratwurzelbestimmung wird dann bewirkt, wenn die Zerlegung des Radikanden $R = A^2 \pm 2\,A\,b + b^2$ so ausgefuhrt wird, wie sie der besten Rechenmethode bei der Bestimmung der Quadratzahl entspricht. Fragen wir uns jetzt, warum die Wurzelbestimmung aus entsprechenden vollständigen Potenzen in den meisten Fallen so muhelos durchfuhrbar ist, so ist allgemein zu sagen, daß dies seinen Grund darin hat, daß die Bedingung fur den Radikanden eine vollständige Potenz von bestimmtem Exponenten zu sein, folgerichtig ausgenutzt werden kann. Das gibt Endziffereigenschaften, die in bestimmter Weise die Endkomplexe von Radikand und Wurzel miteinander verknupfen, wodurch bestimmte Grenzen fur die Lage der Wurzeln gefunden werden. Besonders leicht ist die Bestimmung fur großen Wurzelexponenten, bei dem die Radikanden der Wurzeln w, $w + 1$, $w + 2$ gut isoliert sind. Dann genügt eine kleine Interpolation oder besser eine rohe logarithmische Abschätzung, um die richtige Wurzel zu isolieren.

Bei den Quadratwurzeln sind einerseits die Endziffereigenschaften verwickelter, andererseits handelt es sich durchweg um die Bestimmung einer Reihe von Ziffern für die Wurzel. Bei dem Ansatz $w = A + b$ für die Wurzel kommt es darauf an, in der Formel $w^2 = R = (A + b)^2 = A^2 + 2\,A\,b + b^2$ das Glied b- möglichst gut zu isolieren, was durch die geschickte Wahl der Bezugszahl A erreicht wird.

Beispiele. Kritische Fälle können auftreten, wenn die Quadrate benachbarter Wurzeln in mehr als zwei Endziffern übereinstimmen, z. B. $123^2 = 15\,129$, $127^2 = 16\,129$, $371^2 = 137\,641$, $379^2 = 143\,641$, $621^2 = 385\,641$, $629^2 = 395\,641$. Man erkennt an den Beispielen sofort, um welche Zahlen es sich dabei handelt. Wir sehen, daß die in Frage kommenden Zahlen symmetrisch liegen um $125 = \frac{1}{8} \cdot 1000$, $250 = \frac{1}{4} \cdot 1000$, $375 = \frac{3}{8} \cdot 1000$, $500 = \frac{1}{2} \cdot 1000$, $625 = \frac{5}{8} \cdot 1000$, $750 = \frac{3}{4} \cdot 1000$, $875 = \frac{7}{8} \cdot 1000$. Es fragt sich, wie man in solchen Fällen zu verfahren hat, um die Wurzel zu bestimmen.

1. $\sqrt{7435 \mid 6129}$. Der Hauptwert des Radikanden $\overline{R} = 7435 \cdot 10^4$ zeigt, daß die Wurzel zwischen 8600 und 8700 gelegen ist. Die Endziffern des Radikanden zeigen, daß die 23-Gruppe für die Wurzel in Betracht kommt, also die Vierergruppe 8623, 8627, 8673, 8677. Da $86^2 = 7396$, $87^2 = 7569$, so kommen nur 8623 und 8627 in Frage, deren Quadrate wie der Ansatz $8623 = 8500 + 123$, $8627 = 8500 + 127$ zeigt, in den drei letzten Ziffern übereinstimmen. Allgemein kommt

$$(8500 + b)^2 = 7225 \cdot 10^4 + 2 \cdot 8500 \cdot b + b^2 = 72\,250\,000 + 17\,000 \cdot b + b^2.$$

Ist b irgendeine ungerade Zahl, so ist $2\,A\,b = 17\,000 \cdot b$ ein ungerades Vielfaches von 1000, so daß $A^2 + 2\,A\,b$ gleichfalls ein ungerades Vielfaches von 1000 wird. Hat dann b^2 ein ungerades Vielfaches von 1000, so wird die Tausenderstelle im Radikanden gerade, und ungerade, sobald b^2 ein gerades Vielfaches von 1000 hat. Unser Radikand $R = 74\,3\underline{56}\,129$ zeigt, daß b^2 eine ungerade Tausenderstelle hat, so daß von den beiden möglichen Werten von b 123, 127 mit $123^2 = \underline{15}\,129$, $127^2 = \underline{16}\,129$ nur $123 = b$ richtig sein kann. Die Wurzel ist demnach $w = \underline{8623}$. Zur Durchführung einer derartigen Betrachtung beim Kopfrechnen gehört natürlich ein gutes Vorstellungsvermögen für die Zahlen, und einige Übung bei derartigen Betrachtungen gestalten diese leicht und sicher.

Da die kritischen Zahlen in der Umgebung von Zahlen der Form $B \cdot 1000 + \frac{k}{2^3} \cdot 1000$ liegen, so kann man leicht den Entscheid dadurch bringen, daß man die Symmetriezahl der Wurzeln, in unserem Falle also $\bar{w} = 8625$, quadriert und zusieht, ob der Radikand R unterhalb oder oberhalb von $\bar{w}^2$ liegt, das nach Lage der Sache immer besonders leicht bestimmbar ist, z. B. wird hier

$$8625^2 = \left(8000 + \tfrac{5}{8}\cdot 1000\right)^2$$
$$= 64\,000\,000 + 2\cdot 5\,000\,000 + 625^2 = 74\,000\,000 + 390\,625$$

so daß $8623 = w$ sofort als die richtige Wurzel aus $R = 74\,356\,129$ erkannt wird.

2. $\sqrt{1216\;12|6\;129}$. Die Betrachtung des Radikanden-Hauptwertes $\bar{R} = 121\,612\cdot 10^4$ zeigt nach kurzer Interpolationsrechnung, daß die Wurzel zwischen $34\,800$ und $34\,900$ liegt. Da weiter $348^2 = 121\,104$, $349^2 = 121\,801$, so werden von der durch den Endkomplex 29 des Radikanden bedingten 23-Vierergruppe $34\,823$, $34\,827$, $34\,873$, $34\,877$ die ersten beiden Werte aus Gründen der Größenordnung ausgeschieden, so daß zwischen $34\,873$ und $34\,877$ zu entscheiden ist.

Als Bezugszahl bietet sich unmittelbar $A = 35\,000$ dar. Weiter hat, da b ungerade ist, $(35\,000 - b)^2 = 1225\cdot 10^6 - 70\,000\cdot b + b^2$ nur dann eine gerade Tausenderziffer, sobald b^2 eine solche hat. Es muß also $b = 127$ werden, da $127^2 = 16\,129$, während $123^2 = 15\,129$ ist. Die Wurzel ist also $w = 35\,000 - 127 = 34\,873$.

Man wird auch hier mit Leichtigkeit den zweiten Weg gehen können, indem man die Symmetriezahl $\bar{w} = 35\,000 - \frac{1}{8}\cdot 1000$ quadriert und zusieht, wie der Radikand zu dem leicht bestimmbaren Quadrat gelegen ist.

Es kommt

$$\left(35\,000 - \tfrac{1}{8}\cdot 1000\right)^2 = 1225\cdot 10^6 - \tfrac{35}{4}\cdot 10^6 + 15\,625$$
$$= 1\,216\,250\,000 + 15\,625,$$

womit die Frage ohne Mühe zugunsten von $35\,875 - d = 34\,873$ entschieden ist.

3. $\sqrt{4\;175\;77|3\;641}$. Der Radikanden-Hauptwert $R = 417\,577\cdot 10^4$ zeigt, daß die Wurzel zwischen $64\,600$ und $64\,700$ gelegen ist. Da weiter $646^2 = 417\,316$, $647^2 = 418\,609$, so kommt von der durch den Endkomplex 41 des Radikanden bedingten Vierergruppe $64\,621$, $64\,629$, $64\,671$, $64\,679$ nur das kleinere Paar $64\,621$, $64\,629$ in Frage. Als Bezugszahl wähle ich $A = 64\,500$, so daß $(A + d)^2 = 64\,500^2 + 2\cdot 64\,500\,d + d^2 = 64\,500^2 + 129\,000\,d + d^2$ wird. Hier tritt die weitere Schwierigkeit auf, daß $121^2 = 14\,641$, $129^2 = 16\,641$, so daß die bisher als Kriterium verwendete Entscheidung mit der Tausenderziffer des Radikanden nicht mehr stand hält. Es läßt sich auch hier eine schärfere Entscheidung finden, die aber für das Kopfrechnen etwas mühsam wird, da sie ruhige Überlegung erfordert. Die Symmetriezahl

ist $\bar{w} = 64\,625 = 64\,000 + \frac{5}{8} \cdot 1000$. Das Quadrat bestimmt sich ungemein einfach, denn es kommt $64\,625^2 = 64^2 \cdot 10^6 + 80 \cdot 10^6 + 625^2 = (4096 + 80) \cdot 10^6 + 390\,625 = 4176 \cdot 10^6 + \ldots$, so daß die Entscheidung für 64 621 fällt. Der Vergleich des Radikanden mit dem Quadrat der Symmetriezahl ist unter allen Umständen anwendbar und erfordert nur eine kaum ins Gewicht fallende Zwischenrechnung, so daß dieser Weg zur allgemeinen Anwendung empfohlen werden kann. Die kritischen Gebiete liegen um die als Symmetriezahlen bezeichneten Werte $\bar{w} = A \cdot 1000 \pm \frac{k}{2^3} \cdot 1000$ herum. Es liegt eine Art ausgleichender Gerechtigkeit darin, daß die Quadrate der Symmetriezahlen, die wir zur Entscheidung über die Wurzel brauchen, außerordentlich leicht bestimmbar sind. Ich füge die zweite Entscheidung über die Wurzel bei, die sich auf die Struktur des Radikanden stützt. Ich gehe von den beiden zunächst möglichen Wurzelwerten 64 621 und 64 629 aus, die ich nach der Formel $(64\,500 + e)^2 = 64\,500^2 + 129\,000 \cdot e + e^2$ ins Quadrat erhebe, wobei e eine ungerade Zahl der Form $4k + 1$ ist, die für $e = 121$ und $e = 129$ gilt. Es wird $(64^1/_2 \cdot 1000)^2 = 4160^1/_4 \cdot 10^6$, also enthält es außer dem ganzzahligen Vielfachen von 10^6 noch den Restbetrag $^1/_4 \cdot 10^6 = 250\,000$. Hinzu tritt das doppelte Produkt $129\,000 \cdot e = 129\,000\,(4k + 1) = (4m + 1) \cdot 1000$, so daß, da 250 eine Zahl der Form $4m + 2$ ist, die Summe $= (4k + 3) \cdot 1000$ wird.

Da der Tausenderkoeffizient im Radikanden $R = 773$, also von der Form $4n + 1$ ist, so folgt als Bedingung, daß der Tausenderkoeffizient von e^2 von der Form $4k + 2$ und nicht von der Form $4k$ sein muß. Damit ist klar entschieden, daß $e = 121$ mit $e^2 = \underline{14}\,641$ und nicht $e = 129$ mit $e^2 = \underline{16}\,641$ werden muß. Beim schnellen Kopfrechnen erscheint es nicht immer möglich, eine derartige Überlegung durchzuführen, und deswegen habe ich auf die Betrachtung des Quadrates der Symmetriezahl als einer zweckmäßigen Rechenmethode hingewiesen. Vom zahlentheoretischen Standpunkt aus sind natürlich die Betrachtungen vorzuziehen, die sich auf die Struktur des Radikanden und die daraus folgenden Bedingungen für die Wurzel stützen, zumal dieser Schluß bei anderen Untersuchungen, z. B. bei der Bestimmung der Primfaktoren der ganzen Zahlen mit Erfolg angewandt werden kann. In vielen Fällen ist es zweckmäßig, eine Faktoreneigenschaft der Wurzel im Radikanden aufzusuchen, die sich natürlich in der angenommenen Wurzel wiederfinden muß, falls diese richtig ist.

4. $\sqrt{6\,029\,36\,|\,7\,201}$. Der Radikanden-Hauptwert $\bar{R} = 602\,936 \cdot 10^4$ zeigt, daß die Wurzel zwischen 77 600 und 77 700 liegt. Da $776^2 = 602\,176$, $777^2 = 603\,729$ ist, so muß die Wurzel in der Mitte des Intervalls liegen. Von der aus dem Endkomplex 01 des Radikanden folgenden Vierergruppe 77 601, 77 649, 77 651, 77 699 kommt also

nur das mittlere Paar 77 649, 77 651 in Betracht. Die im Teil I auseinandergesetzte Probe mit 7, 11, 13 zeigt, daß 77 649 durch 11 und 13, 77 651 durch 7 teilbar ist.

Ich führe die gleiche Probe für den Radikanden durch:

$$\begin{array}{r|r|r|r} 6 & 029 & 367 & 201 \\ & -\underline{6} & -\underline{23} & -\underline{344} \\ & 23 & 344 & 143 = 11 \cdot 13 \end{array}$$

Die einfache Probe zeigt, daß $w = 77\,649$ die richtige Quadratwurzel ist.

§ 5. Neunerprobe und andere Kontrollmethoden für die Multiplikation.

Das letzte Beispiel weist darauf hin, in welcher Weise man die bekannte Prüfungsmethode bei der Multiplikation, die Neunerprobe, ergänzen und verschärfen kann, um die nun nur notwendige Bedingung zu möglichst hinreichenden Bedingungen auszubauen. Die sehr nützliche Neunerprobe, die in früheren Zeiten auch in der Volksschule gelehrt wurde, ist fast ganz in Vergessenheit geraten, seitdem die angehenden Lehrer sie nicht mehr auf dem Seminar lernen.

Es seien z_1 und z_2 zwei beliebige ganze Zahlen, die multipliziert werden sollen. Jede ganze Zahl kann man offenbar darstellen als ein Vielfaches von 9 plus einem Rest r, der die Werte 0, 1, 2, 3, ..., 8 annehmen kann. Ich kann demnach schreiben:

$$z_1 = 9 \cdot q_1 + r_1\,, \qquad z_2 = 9\,q_2 + r_2\,,$$

wo q_1 und q_2 ganze Zahlen sind. Das Produkt P wird dann

$$P = z_1 \cdot z_2 = (9 \cdot q_1 + r_1)(9\,q_2 + r_2) = 9^2 \cdot q_1 q_2 + 9\,(r_1 q_2 + r_2 q_1) + r_1 \cdot r_2\,.$$

Man erkennt sofort, daß P ein Vielfaches von 9 ist plus einem Rest r, der gleich dem Produkt der Reste r_1 und r_2 ist. Die Bedingung $r = r_1 r_2$ muß das Produkt *notwendigerweise* erfüllen, so daß eine *notwendige Bedingung* für das Produkt gewonnen ist.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 4873 \cdot 5138 &= (5000 - 127)\,(5000 + 138) \\ &= 5000^2 + 5000\,(138 - 127) - 138 \cdot 127 \\ &= 25\,000\,000 + 55\,000 - 17\,526 = \underline{25\,037\,474}\,. \end{aligned}$$

Die Neunerreste werden nach dem aus den Anfangsgründen bekannten Teilbarkeitsgesetz durch 9 dadurch gefunden, daß man die Quersumme bildet. Das gibt in unserem Falle:

$$r_1 = 4 + 8 + 7 + 3 = 22 = 2 \cdot 9 + 4\,, \quad \text{also} \quad r_1 = 4\,,$$

$$r_2 = 5 + 1 + 3 + 8 = 17 = 1 \cdot 9 + 8\,, \quad \text{also} \quad r_2 = 8\,.$$

woraus folgt, daß r der Neunerwert von P sein muß

$$r = r_1 \cdot r_2 = 4 \quad 8 = 32 = 3 \quad 9 + 5 = \underline{\underline{5}}$$

Zählt man am Produkt ab so kommt

$$r = 2 + 5 + 3 + 7 + 4 + 7 + 4 = 32 = 3 \quad 9 + \underline{\underline{5}}$$

Unser Produkt P erfullt demnach die notwendige Bedingung der Neunerprobe Zur Technik dieser Probe mache ich noch die fast selbstverstandliche Bemerkung, daß man die einzig in Betracht kommenden *kleinsten Reste* r_1 r_2 *und* r nach 9 durch geschickte Zusammenfassung bei der Bildung der Quersummen sehr leicht finden kann ohne noch einmal nach 9 reduzieren zu mussen

Es war $r_1 = 4 + 8 + 7 + 3$ Man sieht sofort, daß $8 + 7 + 3 = 18$ ist und weggelassen werden kann, so daß $r_1 = 4$ wird $r_2 = 5 + 1 + 3 + 8$ es ist $5 + 1 + 3 = 9$, kann also weggelassen werden was $r_2 = 8$ ergibt $P = 25\,037\,474$ es wird $2 + 7 = 9$, $3 + 7 + 4 + 4 = 18$ also $r = \underline{\underline{5}}$ Uberall kommt es darauf an, die Kontrollrechnung so sicher als moglich und sehr rasch durchzufuhren, was bei geschickter Reduktion, die bei einiger Übung eine muhelose Arbeit wird immer erreichbar ist

Die Neunerprobe gibt naturlich *keine hinreichende Bedingung* fur die Richtigkeit der Rechnung, denn jeder Fehler der die Rechnung um ein Vielfaches von 9 verandert, bleibt unbemerkt Verbindet man mit dieser Probe eine entsprechende die sich auf einen anderen Faktor stutzt, so wird die Wahrscheinlichkeit richtiger Rechnung bei Erfullung beider Proben sehr erhoht Der Neunerprobe analoge Proben bieten sich sofort dar, wenn wir unsere in I auseinandergesetzten Teilbarkeitseigenschaften fur andere Primzahlen heranziehen, z B die Gruppe 7, 11, 13 oder 37

Beispiele 1 $59\,763 \quad 86\,537 = 5\,171\,710\,731$

a) Neunerprobe $r_1 = 3$ $r_2 = 2$ $r = 6$, was vom Resultat erfullt wird

b) Dreizehnerprobe

$$\begin{array}{rl} 59 \mid & 763 \\ & -59 \\ \hline & 704 = 650 - 54 \mid R_1 = 2 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 86 \mid & 537 \\ & -86 \\ \hline & 451 = 390 + 61 \mid R_2 = +9 \end{array}$$

$$R = 2 \quad 9 = 18 = +\underline{\underline{5}}$$

$$\begin{array}{l|r|r|l} P - 5 & 171 & 710 & 731 \\ & -5 & -166 & 544 \\ \hline & 166 & 544 & 187 = 14 \quad 13 + \underline{\underline{5}} = R \end{array}$$

Naturlich ist das Prinzip bei 13 dasselbe wie bei 9 nur die Restbestimmung ist so durchzufuhren, wie wir es in Teil I kennengelernt haben Geschickte Reduktion ist leicht möglich, sobald man einigermaßen das Einmaleins mit 13 im Kopfe hat Da die Operationen mit den Resten nach 9 und nach 13 vollkommen unabhängig voneinander vor sich gehen, so kommt dem Resultat ein hoher Grad von Gewißheit zu sobald beide Proben erfüllt sind Bei umfangreichen Zahlenrechnungen scheint es die Mühe zu lohnen, wenn man beide Proben durchführt Doch wird es genügen, wenn man *eine* Probe durchführt, sobald diese auf eine nicht zu kleine Primzahl gegründet ist Dazu eignet sich am besten 37

Beispiel mit der 37-Probe

2 $P = 751\,829 \quad 587\,638 = 441\,803\,289\,902$

$$
\begin{array}{rrr@{\qquad}rr}
 & 751 & \mid\ 829 & 587 & \mid\ \underline{638} \\
 & & \underline{+\,751} & +\,32 & -\,28 \\
 & & 1580 & & \underline{+\,32} \\
-\,2 & 777 & \mid\ 1554 & R_2 = & +\ \ 4 \\
\hline
 & & R_1 = \underline{26} & &
\end{array}
$$

$$R = R_1\,R_2 = 26 \quad 4 = 104 = 2 \quad 37 + \underline{30}$$

$$\underline{R = 30}$$

$$
\begin{array}{lrrr}
P = 441 & \mid\ 803 & 289 & \mid\ 902 \\
 & \underline{441} & \underline{+\,23} & \underline{+\,16} \\
 & 1244 & \underline{312} & 918 = 888 + \underline{30} \\
 & \underline{-\,1110} & +\,16 & \\
 & 134 & & \underline{R = 30} \\
 & = 23 & &
\end{array}
$$

§ 6. Einleitende Bemerkungen über die Primfaktorenzerlegung.

Ein Kapitel für sich bilden die Aufgaben der Primfaktorenzerlegung sechsstelliger Zahlen Wie für manche grundlegenden Zahlenprobleme gibt es keinen bestimmten Satz, keine abgeschlossene Theorie die mit Hilfe von Kriterien es erlaubt den Primzahl- bzw den Zerlegungscharakter einer ganzen Zahl festzustellen Man ist, wie es bei zahlentheoretischen Fragen oft vorkommt, auf das Probieren angewiesen Die Zahlenwissenschaft zeigt in manchen Teilgebieten das Gepräge einer Experimentalwissenschaft, und es hängt wohl damit zusammen, daß eine gute Beherrschung des Zahlengebietes nur durch unermüdliches Studieren, durch die immer wieder neu aufgenommene Lösung von Zahlenaufgaben gewonnen werden kann

Können wir uns bei der Bestimmung der Primfaktoren einer ganzen Zahl auch nicht auf eine in sich abgeschlossene Methode stützen so gibt es doch einige zahlentheoretische Sätze, die uns die Aufgabe sehr erleichtern, sobald sie in der richtigen Weise angewandt werden. Daneben ergibt sich, daß die genaue Kenntnis der Struktur der Quadratzahlen die Lösung solcher Aufgaben ganz besonders fördert.

Diese Tatsache ist der Grund dafür, daß wir uns mit der Struktur der Quadratzahlen im Rahmen dieser referierenden Arbeit etwas reichlich eingehend beschäftigt haben.

Die zahlentheoretischen Sätze, auf die wir unsere Betrachtung zu gründen haben, gehören der elementaren Zahlentheorie an, dem Gebiete der quadratischen Formen mit ganzen rationalen Koeffizienten, wenngleich sie allgemein in der Theorie des quadratischen Zahlkörpers wurzeln.

Für die Frage der Primfaktorenzerlegung der ganzen Zahlen kommt es wesentlich auf zwei besonders einfache Formen zweiten Grades an, die mit f_1 und f_2 bezeichnet werden und Hauptformen genannt werden sollen.

Es wird

$$f_1 = u^2 - v^2 \qquad f_2 = u^2 + v^2$$

Die Betrachtung der f_1 für unsere Zwecke der Faktorenzerlegung ist unmittelbar einleuchtend. Hat man für die zu zerlegende Zahl A eine Darstellung gefunden $A = f_1 = u^2 - v^2$, so gilt die Zerlegung $A = (u + v)(u - v)$ und die Aufgabe ist gelöst. Um die Bedeutung der $f_2 = u^2 + v^2$ festzulegen, müssen wir einige grundlegende Sätze der Zahlentheorie anführen, die uns bei der Lösung unserer Aufgabe von Nutzen sind.

1. Für das folgende wird angenommen, daß die Zahl A keine quadratischen Faktoren hat, also keine Darstellung gilt $A = q^2 \cdot b$.

2. Für die Primfaktoren p_1, p_2 usw. sind zwei Klassen zu unterscheiden, die zahlentheoretisch verschiedene Eigenschaften zeigen, worauf wir im Teil I schon hingewiesen haben bei der Untersuchung der $K^{(5)} = 2^{32} + 1$.

a) $p^{(I)} = 4n + 1$

b) $p^{(II)} = 4n + 3$

Die $p^{(I)}$ haben die Zahl -1 zum quadratischen Rest, die $p^{(II)}$ haben -1 zum quadratischen Nichtrest. Damit hängt eng zusammen der grundlegende, auf *Euler* zurückgehende Satz, daß eine Primzahl $p^{(I)} = 4n + 1$ stets auf eine und nur auf eine Weise in die Summe zweier Quadratzahlen zerlegt werden kann: $p^{(I)} = u^2 + v^2$.

Für Zahlen $p^{(II)}$ gilt eine solche Zerlegung nicht.

Da wenigstens eine der Zahlen u, v der Zerlegung $p^{(I)} = u^2 + v^2$ unterhalb einer Grenze liegt, die von der Größenordnung $\sqrt{p}$ ist, wie aus der Theorie der quadratischen Reste folgt, so ist der Primzahlcharakter einer Zahl $p^{(I)}$ leicht festzustellen.

3. Allgemein gilt der Satz von *Gauß*:

Zerlegungen $A = u^2 + v^2$ gelten nur, wenn $A = p_1 p_2 p_3 \ldots = \Pi p_k$, wo die p_k beliebige Primzahlen der Form $4n + 1$ sind und Π ein Produktzeichen bedeutet $A = p_1 p_2 p_3 \ldots p_{k-1} \cdot p_k$. Ist k die Anzahl dieser Primfaktoren, so ist es auf 2^{k-1} Arten möglich, die Zahl A darzustellen in der Form $\overline{A = u^2 + v^2}$. Der *Euler*sche Satz über die Primzahl $4n + 1 = p$ folgt aus diesem allgemeinen Satz sofort wenn man $k = 1$ setzt, was $2^{k-1} = 1$ zur Folge hat. Wie der *Gauß-Euler*sche Satz benutzt werden kann, um den Primzahlcharakter einer Zahl festzustellen, soll das folgende kleine Beispiel zeigen.

Es ist $A = 3581$. Man wird leicht feststellen, daß Zahlen mit dem Endzifferkomplex 81 nur so in die Summe zweier Quadrate zerlegt werden können, daß die Endkomplexe der Quadrate 00 und 81 oder 56 und 25 sind.

Da gewisse Eigenschaften der auf 25 endenden Quadratzahlen immer wieder gebraucht werden, so seien sie hier zusammengestellt.

1. Für alle auf 25 endigenden Quadratzahlen ist die drittletzte Ziffer gerade $Z_3 = 2l$.

2. Die Z_3 kann nie 4 oder 8 sein.

Es wird

$$(10b + 5)^2 = 100b^2 + 100b + 25 = 100(b^2 + b) + 25 = 100b(b + 1) + 25$$

Da von den in der Zahlenreihe aufeinander folgenden Faktoren b und $b + 1$ einer immer gerade sein muß, so ist der Faktor von 100 gerade, wie es in 1. behauptet worden ist. Wäre die drittletzte Ziffer des Quadrats eine 4, so gälte

$$100b^2 + 100b + 25 = 100(10c + 4) + 25,$$

oder es müßte

$$b^2 + b = 10c + 4 \quad \text{oder aber} \quad b^2 + b - 4 = 10c$$

sein.

Nun ist $b^2 + b - 4$ immer durch 2 teilbar, dagegen *nie* durch 5, was sich durch Einsetzen der Restzahlen von 5: 0, 1, 2, 3, 4 in die Funktion $b^2 + b - 4$ leicht ergibt. Denn es wird

$$\begin{array}{rrrrrr} b = & 0, & 1 & 2, & 3 & 4, \\ b^2 + b - 4 = & -4, & -2 & +2 & 8 & 16 \end{array}$$

Das gleiche gilt für die Funktion $b^2 + b - 8$, womit die Behauptung 2 bewiesen ist. Nach diesem Exkurs gehe ich zu dem einfachen Beispiel $A = 3581$ zurück. Es kann nach dem früher Bemerkten $3581 = u^2 + v^2$ sein, wenn $u = 10\bar{u}$, und v eine Zahl der Gruppe 9, 41, 59, 91 ist, für die u^2 auf 00 und v^2 auf 81 endigt. Da alle Quadratzahlen des Endkomplexes 81 als Z_3 eine gerade Zahl haben, so muß u^2 eine ungerade Z_3 haben, d. h. u muß der Reihe $(2k + 1) \cdot 10$ angehören. $u = 10$ ergibt sofort, $v^2 = 3481$, also $v = 59$, womit *eine* Zerlegung $A = u^2 + v^2$ gefunden ist. $v = 9$, $v^2 = 81$ gibt $u^2 = 3500$, $v = 41$, $v^2 = 1681$,

$u^2 = 1900$, also beide keine rationale Lösung, während $v = 91$, $v^2 = 8281$ den Wert von A schon übersteigt. Es bleibt also noch die Möglichkeit einer Lösung mit den Quadrat-Endkomplexen 56 und 25 zu untersuchen. Da die Z_3 der Quadrate auf 25 immer gerade ist, so muß die Z_3 der Quadrate auf 56 ungerade sein, d. h. es kommt aus der zu 56 gehörigen Vierergruppe 16, 34, 66, 84 nur das mittlere Paar in Betracht.

Es wird $66^2 = 4356$ bereits größer als A, während $34^2 = 1156$ ein v^2 liefert mit einem Endkomplex 425, der nach der Feststellung (2) unmöglich ist. 3581 hat nur *eine* Zerlegung $A = u^2 + v^2$, es ist also Primzahl.

1. $A = 59^2 + 40^2$	$u = 59$	$u^2 = 3481$
2. $A = 5081$	$v = 40$	$v^2 = 1600$

Von der zu 56 gehörigen Gruppe 16, 34, 66, 84 kommt jetzt nur das äußere Paar in Betracht, da das mittlere für die mögliche Quadratzahl auf 25 eine ungerade Z_3 lieferte. Außerdem ist $84^2 = 7056$ größer als A, so daß nur noch $16^2 = 256$ in Frage kommt, das eine unmögliche Komplexendung 825 ergibt. 5081 wird $= 59^2 + 40^2$; eine weitere Zerlegung $A = u^2 + v^2$ ist als unmöglich nachgewiesen, womit 5081 als Primzahl festgestellt ist.

3. $A = 16\,369$. Der Komplex 69 kann durch die Zusammensetzung der beiden Quadratendungen 69, 00 oder 44 und 25 entstehen, wie denn allgemein die Tatsache zu Recht besteht, daß jede Zahl A, deren zweistelliger Endkomplex eine mögliche Quadratendziffer ist, auf zwei Arten in die Summe von zwei Quadratendkomplexen zerlegbar ist. Nach dem Vorigen bemerken wir sofort, daß bei der Zerlegung 44 + 25 wegen der geraden Z_3 von 25 die Z_3 von 44 ungerade sein muß, d. h. die dem Endkomplex 44 zugeordnete Vierergruppe (12, 38, 62, 88) kann nur mit dem äußeren Paar (12, 88) in Frage kommen. Man erkennt bei $A = 16\,369$ sofort die eine Zerlegung $12\,769 + 3600 = A = 113^2 + 60^2$. Die zweite Möglichkeit ist zu untersuchen für $v = 12, 88, 112$; $v^2 = 144, 7744, 12\,544$. Diesen Werten v^2 entsprechen Werte $A - v^2$: 16 225, 7625, 3825, die keine Quadrate sind. Außer $A = 16\,369 = 113^2 + 60^2$ ist keine Zerlegung $A = u^2 + v^2$ möglich, d. h. 16 369 *ist Primzahl*.

Ich wähle noch ein Beispiel einer Zahl A, die keine mögliche Quadratendziffer hat: $A = 5477$. Die Endziffer 7 der Zahl A kann zustande kommen, durch die Addition zweier Quadrate u^2 und v^2, die auf 6 und 1 endigen. Man hat es also jetzt mit einer weit größeren Reihe von Möglichkeiten als vorher zu tun, so daß die Bestimmung der Zerlegungseigenschaft der Zahl A sehr erschwert erscheint.

Diesem Übelstand helfen wir durch einen mathematischen Kunstgriff ab.

1 Es gilt die Identität $2A = (u + v)^2 + (u - v)^2$ sobald $A = u^2 + v^2$ ist Oder umgekehrt Ist gefunden $2A = x^2 + y^2$ so wird $A = \left(\frac{x + y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x - y}{2}\right)^2$

2 Bilde ich aus $A = 5477$ $2A = 10\,954$ so zeigt sich, daß $2A$ ***nur auf eine*** Art in die Summe von zwei Quadratendkomplexen zerlegt werden kann, da 54 nur durch die Addition 29 + · 25 zustande kommen kann

Dieses Ergebnis gilt ganz allgemein für jede Zahl A der vorhin festgesetzten Beschaffenheit Wir müssen, um die vorhin angewandte Ausscheidungsmethode wieder gut benutzen zu können allerdings mit der doppelten Zahl $2A$ arbeiten, haben dafür aber statt zwei Gruppen von Möglichkeiten nur noch eine zu untersuchen

Es ist $2A = 10\,954$ Ich bilde die Vierergruppe (23 27 73 77) $123^2 = 15\,129$ ist schon größer als $2A$ Es wird $23^2 = 529$ $2A - 23^2 = 10\,425$ ($Z_3 = 4$ ist unmöglich) $27^2 = 729$ $2A - 27^2 = 10\,225$ das keine Quadratzahl ist, da $10\,201 = 101^2$ wird $77^2 = 5929$ liefert $2A - 77^2 = 5025$, das keine Quadratzahl wird da $70^2 = 4900$, $75^2 = 5625$ ist

Endlich kommt für $u = 73$, $u^2 = 5329$, $2A - u^2 = 5625 = 75^2 = v^2$

Es wird $2A = 10\,954 = 75^2 + 73^2$, also nach der allgemeinen Formel

$$A = 5477 = \left(\frac{75 - 73}{2}\right)^2 + \left(\frac{75 - 73}{2}\right)^2 = \underline{74^2 + 1^2}$$

Da nun diese *eine* Zerlegung $A = u^2 + v^2$ existiert, so ist 5477 als Primzahl erkannt

2 $A = 9473$ $2A = 18\,946$ Die Endung 46 kann nur durch die Addition der beiden Endkomplexe 21 25 von Quadraten entstehen 21 entspricht der 11 Gruppe, also die Reihe 11 39, 61 89, 111, $139^2 = 19\,321$ ist größer als $2A$ Die Quadrate v^2 werden 121, 1521 3721, 7921, 12 321, die Reste $2A - v^2$ werden also 18 825 17 425, 15 225, 11 025, 6625

18 825 und 17 425 scheiden sofort aus, da die $Z_3 = 4$ $Z_3 = 8$ nie Quadratzahlen entsprechen können 15 225 ist keine Quadratzahl, da $125^2 = 15\,625$ ist Es wird $11\,025 = 105^2$ während 6625 keine Quadratzahl ist Also kommt $2A = 89^2 + 105^2$, $\underline{\overline{A = 97^2 + 8^2}}$ Da dies die einzig mögliche Zerlegung $A = u^2 + v^2$ ist, so wird $A = 9473 = 97^2 + 8^2$ Primzahl

Die hier an Beispielen durchgeführte Art der Untersuchung zeigt, daß die Entscheidung über den Primzahlcharakter sich für die Zahlen $A = 4n + 1$ verhältnismäßig rasch ausführen läßt, sobald man die Methoden der möglichen Quadratsummenzerlegungen gut beherrscht und rasch entscheiden kann, ob eine Zahl $A - v^2$ oder $2A - v^2$ Quadratzahl sein kann oder nicht Dabei können wir uns ganz auf das stützen, was wir über die Struktur der Quadratzahlen bereits ausgeführt haben

Beim schriftlichen Rechnen wird eine Quadrattabelle gute Dienste leisten Für den Kopfrechner bedeutet die Primfaktorenzerlegung nicht zu kleiner Zahlen einen Höhepunkt der Leistung, da Gedächtnis Kombination und mathematische Überlegung fortwährend zusammen wirken müssen, um ein Resultat zu erzielen Das wird sich später bei der Beschreibung eines größeren Beispiels zeigen

Als Anwendung der allgemeinen Ausführungen soll die Zerlegung der im Vortrag gegebenen sechsstelligen Zahlen in Primzahlen ausgeführt werden, wobei sich weitere Hilfsmittel einstellen werden

1 164 009

Die Anwendung des *Euler-Gauß*schen Satzes über die Zerlegung $A = u^2 + v^2$ kann in vielen Fällen dazu dienen die Art der Primteiler von A zu erkennen Sobald eine Zerlegung $A = u^2 + v^2$ gefunden ist steht fest, daß A nur Primteiler der Form $4n + 1$ haben kann Dabei ist vorausgesetzt, daß $A = u^2 + v^2$ eine *eigentliche oder primitive Zerlegung* ist was darauf hinauskommt, daß u und v ohne gemeinsamen Teiler sind Diese Festsetzung deckt sich mit der früher getroffenen daß A keinen quadratischen Teiler haben soll Bei der Lösung von Aufgaben kann das Verfahren der Quadratsummen ein guter Wegweiser sein zum raschen Finden einer Zerlegungsmethode Werden rasch zwei verschiedene Lösungen gefunden, $A = u^2 + v^2$ und $A = x^2 + y^2$ so bietet sich die Aufgabe dar, eine Verbindung zwischen diesen beiden additiven Darstellungen und der Faktorendarstellung $A = p \cdot q$ zu finden Diese Verbindung wird, wie später ausgeführt werden soll in sehr einfacher Weise durch den Zahlkörper der imaginären Einheit $k(\sqrt{-1}) = k(i)$ hergestellt In den meisten Fällen wird die Zerlegung $A = p\ q$ durch die Darstellung $A = u^2 - v^2$ gewonnen

1 Bei der Untersuchung der Möglichkeit einer Darstellung $A = u^2 - v^2$ oder $A + v^2 = u^2$ tritt die Beurteilung, ob eine Zahl Quadratzahl sein kann oder nicht, wieder in den Mittelpunkt der Betrachtung so daß wir auch weiterhin die Ausführungen über die Struktur der Quadratzahlen werden sehr gut gebrauchen können

2 Es sei C die der im allgemeinen irrationalen Quadratwurzel aus der zu untersuchenden Zahl A zunächst gelegene ganze Zahl Ist $A = p\ q$ so kann ich setzen $p = C + d$, $q = C - e$ $A = p\ q = C^2 + (d - e)\,C - d\,e$ Für die Darstellung $A = u^2 - v^2$ kommt dann

$$u = \frac{p+q}{2} = C + \frac{d-e}{2}, \quad v = \frac{p-q}{2} = \frac{d+e}{2}$$

Man erkennt sofort, daß die Darstellung

$$A = u^2 - v^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)$$

um so schneller gewonnen wird, je kleiner $v = \frac{d-e}{2}$ wird, d. h. je weniger die beiden Primfaktoren p und q von der Zahl $C \sim \sqrt{A}$ abweichen. Nehme ich den entgegengesetzten Fall, daß p groß gegen C, $p = n \cdot C$, also q klein gegen C, $q \sim \frac{1}{n} \cdot C$, so muß man die Quadratdifferenzformel $A = u^2 - v^2$ für viele Werte u, v durchrechnen. Das zeigt am besten die Betrachtung des Grenzfalls, daß A Primzahl ist, $A = p \cdot 1 = A \cdot 1$, wo die Darstellung wird

$$A = u^2 - v^2 = \left(\frac{A+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-1}{2}\right)^2.$$

Bei der Untersuchung der Möglichkeit der Darstellung $A = w^2 - v^2$ bzw. $w^2 = A + v^2$ hat man bis $v = \frac{A-1}{2}$ zu gehen, was eine sehr langwierige Arbeit ist, bei der man Rechenfehlern ausgesetzt ist.

Wir werden sagen: Ist $A = p \cdot q$ und sind p und q wenig voneinander verschieden, so daß $\frac{p-q}{2}$ klein gegen $C \sim \sqrt{A}$ ist, so ist die Differenzformel $A = u^2 - v^2$ mit großem Erfolg anzuwenden. Ist dagegen einer der Faktoren p, q groß gegen $\sqrt{A}$, der andere klein gegen $\sqrt{A}$, so macht die Darstellung $A = u^2 - v^2$ sehr viel Arbeit, und es lohnt sich, den kleinen Faktor q durch Probieren zu finden, was nach unseren früheren Auseinandersetzungen über Teilbarkeitseigenschaften leicht ausführbar ist.

Im allgemeinen kommt es darauf an, die von den beiden Grenzfällen geforderten Methoden in geschickter Weise zu kombinieren, um mit einem Minimum von Arbeit Erfolg zu haben.

1. $A = 71\,201$. Die Teilermethode gibt sofort $A = 13 \cdot 5477$. Die Darstellung $A = u^2 - v^2$ ergibt

$$A = \left(\frac{5477+13}{2}\right)^2 - \left(\frac{5477-13}{2}\right)^2 = 2745^2 - 2732^2$$

und erfordert eine mühselige Arbeit.

Im allgemeinen hat man so vorzugehen, daß man zunächst bis zu einer gewissen Grenze $\bar{p}$ die Teilermethode anwendet, also die zu untersuchende Zahl A auf die Teilbarkeit durch alle Primzahlen untersucht, die unterhalb $\bar{p}$ liegen. Dann bestimmt man die Grenze für v und sucht die Darstellung $u^2 - v^2$ auf. Man hat dann einen Überblick über die durchzuführende Arbeit, die man sich möglichst zweckmäßig einrichten wird.

2. $A = 814\,733$ ergibt

$$A = 903^2 - 26^2 = (903 + 26)(903 - 26) = \underline{929 \cdot 877}.$$

Bei geschickter Überlegung der Möglichkeiten der Quadratstruktur sind derartige Aufgaben sehr rasch losbar. Das läßt sich quantitativ so zusammenfassen: Es sei $A = p \cdot q$, und es sei auf alle Primteiler $p_1, p_2, \ldots, p_n$ untersucht, die unterhalb w liegen, d. h. A hat keinen

Teiler (außer dem selbstverständlichen Teiler 1), der kleiner als w ist, dann gilt folgendes

$$A = u^2 - v^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-q}{2}\right)^2 \qquad q = \frac{A}{p} > w$$

da q als Teiler von A größer als w sein muß Dann wird

$$v = \frac{p-q}{2} < \frac{p-w}{2} < \frac{p - \frac{A}{p}}{2}$$

und damit ist eine Grenze für v in der Darstellung $A = u^2 - v^2$ d h $w = A + v^2$ gegeben

Beispiel Zu untersuchen ist $A = 267\,977$

Sei w die Grenze, bis zu der A auf Teilbarkeit direkt untersucht ist, so wird jedenfalls $q > w$,

$$p = \frac{A}{q} < \frac{A}{w}, \qquad \frac{p-q}{2} < \frac{\frac{A}{w} - w}{2}$$

Führt man die Teilbarkeitsuntersuchung direkt durch für alle Primzahlen, die kleiner als 100 sind so erhält man als Grenze für v in der Darstellung $u^2 = A + v^2$

$$v < \frac{\frac{A}{100} - 100}{2} < \frac{2680 - 100}{2} < 1290$$

so daß eine mühselige Rechenarbeit bei der Untersuchung der Möglichkeit von $u^2 = A - v^2$ zu leisten bleibt

Geht man bei der Teilbarkeitsuntersuchung bis $w = 200$ so kommt $v < \frac{1340 - 200}{2}$, also $v < 570$

$$u \backsim \frac{1340 + 200}{2} \backsim 770$$

Da A etwa $= 520^2$ ist, so wird die Rechnung jetzt nicht mehr sehr umständlich

A ist eine Zahl der Form $4n + 1$, man wird also zusehen ob eine Darstellung der Form $A = x^2 + y^2$ gefunden werden kann Existiert eine solche, so genügt es, A nur auf Primzahlen der Form $4n + 1$ zu untersuchen Man kann die Grenze für w bequem höher setzen, da die Primzahlen der Form $4n + 1$ etwa die Hälfte aller Primzahlen ausmachen, also die Teilbarkeitsuntersuchung ungefähr auf die Hälfte an Arbeit herabgesetzt wird Nach den früheren Ausführungen ist es zweckmäßig, zu bilden $2A = 535\,954$, das *nur* durch Addition der Quadratendungen 25 und 29 zustande kommen kann Da die Endung 29 nur bei vier Zahlen in einem Intervall von 100 vorkommen kann nämlich bei der 23-Gruppe (23, 27, 73, 77), so beginne ich die Untersuchung von $2A = 535\,954$ damit, daß ich die Quadrate der Zahlen in der Umgebung $U^2 \backsim 2A$ bilde, wo die U der 23-Gruppe angehören

Da $\sqrt{2A} < 733$, so kommen zunächst 727, 723 in Betracht. Es wird $727^2 = 528\,529$, also $2A - 727^2 = 7425$, das wegen $z_3 = 4$ kein Quadrat sein kann. Dagegen liefert $723^2 = 522\,729$ den Wert $2A - 723^2 = 13\,225 = 115^2$, womit eine Zerlegung

$$2A = 723^2 + 115^2$$

oder

$$A = \left(\frac{723 + 115}{2}\right)^2 + \left(\frac{723 - 115}{2}\right)^2 = \underline{419^2 + 304^2}$$

gefunden ist.

In der Tat wird

$$\begin{aligned} 419^2 &= 175\,561 \\ -\,304^2 &= \underline{92\,416} \\ &= \underline{267\,977 = A} \end{aligned}$$

und A enthält demnach nur Primfaktoren der Form $4n + 1$.

Die Primzahlen der Form $4n + 1$ unterhalb 200 sind 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 73, 89, 97, 101, 109, 113, 137, 149, 157, 173, 181, 193, 197.

Die Untersuchung auf 5, 13, 17, 29, 37, 41 erledigt sich rasch nach der Methode in Teil I. Bei den folgenden Primzahlen wird mit der Division von rechts gearbeitet, außerdem werden zur Gewinnung geeigneter Endziffern gelegentlich Primzahlen paarweise zu Produkten verknüpft, was wir in Teil I bei der Untersuchung von $K^{(5)} = 2^{32} + 1$ schon auseinandergesetzt haben.

Da $53 \cdot 9 = 477$, so verbinde ich 53 mit 509, da $53 \cdot 509 = 26\,977$ wird. Es kommt dann

$$\begin{aligned} &267\,977 \\ -\,&\underline{26\,977} = 241 \cdot 10^3 \\ &241\,000 \end{aligned}$$

Die Nichtteilbarkeit von A durch die drei Primzahlen 53, 241, 509 ist dadurch mit einem Schlage entschieden, wobei folgende Schlußweise immer wieder benutzt wird.

Sind p_1, p_2, p_3 drei Primzahlen und c_1, c_2 Faktoren, die durch keine dieser Primzahlen p_1, p_2, p_3 teilbar sind, so sagt die Darstellung

$$A = c_1 p_1 + c_2 p_2 \cdot p_3$$

aus, daß A durch keine der drei Primzahlen p_1, p_2, p_3 teilbar ist.

Beispiel. $A = 267\,977 = 241 \cdot 10^3 + 53 \cdot 509$.

Im Verfolg der Teilbarkeitsbetrachtung wird 61 mit 157 und 257 verbunden. Es ist

$$\begin{aligned} &61 \cdot 157 = 9577 \\ &267\,977 \\ -\,&\underline{9\,577} \\ =\,&\underline{2584 \cdot 10^2 = 2^3 \cdot 10^2 \cdot 17 \cdot 19}, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &61 \cdot 257 = 15\,677 \\ &267\,977 \\ -\,&\underline{15\,677} \\ =\,&\underline{2523 \cdot 10^2 = 10^2 \cdot 3 \cdot 29^2} \end{aligned}$$

73 wird mit 149 und dieses gleich mit 173 verbunden Dann kommt

$$\begin{array}{lll} 73 \cdot 149 = 10\,877 & \qquad & 149 \cdot 173 = 25\,777 \\ \;267\,977 & & \;267\,977 \\ -\;\;\underline{10\,877} & & -\;\;\underline{25\,777} \\ = 2571 \cdot 10^2 = 10^2 \cdot 3 \cdot 857 & & = 2422 \cdot 10^2 = 10^2 \cdot \underline{2 \cdot 7 \cdot 173} \end{array}$$

Damit ist der Primfaktor 173 gefunden, und es wird

$$A = 267\,977 = 173\,(149 + 2 \cdot 700) = \underline{173 \cdot 1549}$$

Es wird $1549 = 35^2 + 18^2$ und die sofort erkennbare Unmoglichkeit einer zweiten Darstellung $p = 1549 = x^2 + y^2$ zeigt daß $p = 1549$ Primzahl ist

Die Kombinationsmethode hat recht schnell zum Ziele gefuhrt

Um das Verfahren zu vervollstandigen, sollen einige der im Vortrag gelosten Aufgaben besprochen werden, die meist durch die Darstellung $A = u^2 - v^2$ erledigt werden konnen

1 $A = 164\,009$ Es soll werden $A + v^2 = u^2$ Es zeigt sich, daß $A = 164\,009$ nur durch zwei Gruppen von v^2 zur Summe $A + v^2$ ein Quadrat u^2 werden kann

$$\begin{array}{rrcrr} 1 & 009 & \qquad & 2 & 0\,|\,09\,| \\ + & \underline{00} & & - & 16 \\ & \underline{09} & & & \underline{25} \end{array}$$

Da alle auf 09 endigenden Quadrate, die der Vierergruppe (3, 47, 53, 97) angehoren, eine gerade Z_3 haben, so muß das auf 00 endigende v^2 eine gerade Z_3 haben, also $v = 20, 40, 60,$ sein Man wird aber zweckmaßigerweise von geeigneten Werten fur u^2 und u ausgehen, da diese nur zu je vier im Intervall um 100 vorkommen Da $\sqrt{A} > 404$, so sind mogliche Werte von u 447 453, 497, 503,

Es wird $447^2 = 199\,809$, $453^2 = 205\,209$, $497^2 = 247\,009$, $503^2 = 253\,009$ Daraus folgt fur $u^2 - A$ die Reihe

35 800, 41 200, 83 000, 89 000

Man erkennt sofort, daß keine der vier Differenzen ein Quadrat sein kann

Es ist zweckmaßig, nach der ersten Reihe moglicher Werte von u gleich die zweite anzusetzen, da anderenfalls unter Umstanden viel uberflussig gerechnet wird bei der einen Reihe, wahrend die andere gleich anfangs zum Ziel fuhrt

Da die Quadrate auf $\cdots 25$ eine gerade Z_3 haben, so muß die Z_3 der Quadrate auf 16 ebenfalls gerade sein, d h von der Vierergruppe (4 46, 54 96) kann nur das außere Paar in Frage kommen

Jetzt wird man von A ausgehend, mit der Addition der v^2 beginnen, da in jedem Intervall von 100 nur zwei mogliche Werte v vorkommen

Es wird $164\,009 + 16\ (= 4^2) = 164\,025$

$$\begin{array}{r} 164\,009 \\ +\quad 9\,216 = 96^2 \\ \hline = 173\,225 \end{array}$$

Man findet sofort $164\,025 = 405^2$ woraus folgt

$$A = 405^2 - 4^2 = (405 + 4)\,(405 - 4) = \underline{409 \cdot 401}$$

Die Zerlegung $164\,009 = 401 \cdot 409$ zeigt, daß $164\,009$ auf zwei Arten in der Form $A = x^2 + y^2$ darstellbar sein muß. Der Endkomplex 09 setzt sich zusammen aus

$$1.\quad 09 = \begin{array}{r} 09 \\ + \cdot 00 \\ \hline \end{array} \qquad \text{oder} \qquad 2.\quad 09 = \begin{array}{r} 84 \\ \cdot\ 25 \\ \hline \end{array}$$

Der gewiesene Weg ist, da A in der Nähe von 400^2 liegt, mit den Quadraten $(400 + 3)^2 = 403^2$ und $(400 - 3)^2 = 397^2$ zu beginnen, die Endkomplexe $\cdot\,09$ aufweisen.

Es wird $403^2 = 162\,409$ und

$$1.\quad A = 403^2 + 40^2 \qquad 397^2 = 157\,609$$

$$2.\quad A = \underline{397^2 + 80^2}$$

2. *Beispiel.* $A = 176\,399$ zeigt auf den ersten Blick die Darstellung

$$A = 176\,400 - 1 = 420^2 - 1^2 = 421 \cdot 419$$

3. *Beispiel.* $A = 405\,721 \quad = u^2 - v^2$. Zu bestimmen ist $u^2 = 405\,721 + v^2$.

Damit $405\,721 + v^2$ eine mögliche Quadratendung erhält, muß v^2 entweder die Endung $\cdot\,00$ oder die Endung $\cdot\,04$ haben. Da die Z_3 der im zweiten Falle entstehenden möglichen Quadrate auf $\cdot\,25$ gerade ist, so wird die Z_3 des auf $\cdot\,04$ endigenden v^2 notwendig ungerade, und es kommt aus der zu $v^2 = \cdot\,04$ gehörenden Vierergruppe (2, 48, 52, 98) nur das mittlere Paar in Betracht, das eine ungerade Z_3 aufweist. Man geht zweckmäßig von den v-Werten aus, von denen im Intervall von je 100 nur zwei vorkommen können. Die zunächst zu untersuchenden Werte v sind 48, 52, 148, 152, 248, 252. Das gilt für $u^2 = A + v^2$

$$\begin{array}{lrrrrrr} A = & 405\,721 & 405\,721 & 405\,721 & 405\,721 & 405\,721 & 405\,721 \\ v^2 = & 2\,304 & 2\,704 & 21\,904 & 23\,104 & 61\,504 & 63\,504 \\ \hline & 408\,025 & 408\,425 & 427\,625 & 428\,825 & 467\,225 & 469\,225 = 685^2 \end{array}$$

Die Entscheidung darüber, ob $A + v^2$ Quadrat sein kann, läßt sich sehr rasch treffen, wenn man die Eigenschaften der auf $\cdot\,25$ endigenden Quadrate beachtet.

Es wird $u^2 = A + 252^2 = 685^2$, woraus für die Zerlegung von A folgt

$$A = u^2 - v^2 = 685^2 - 252^2 = (685 + 252)\,(685 - 252) = \underline{937 \cdot 433}$$

Da 937 und 433 Primzahlen der Form $4n + 1$ sind, so muß es zwei Darstellungen $A = x^2 + y^2$ geben, die wir als Ergänzung zu der Zerlegung noch bestimmen wollen

Die Zusammensetzung von $A = 405\,721 = x^2 + y^2$ kann auf zwei Arten erfolgen, durch die Quadratzerlegungen von x^2 und y^2

$$1 \quad \begin{array}{r} \cdot\,21 \\ 00 \\ \hline \cdot\quad 21 \end{array} \qquad 2 \quad \begin{array}{r} 96 \\ \cdot\,25 \\ \hline 21 \end{array}$$

Die erste Zerlegung findet man leicht, wenn man von *den Zahlen* x der zu $x^2 =$ 21 gehörigen Vierergruppe (11 39, 61 89) ausgeht die der $\sqrt{A}$ benachbart sind Es ist $\sqrt{A} < 639$ und man findet unmittelbar als erste Zerlegung $A = 611^2 + 180^2$

$$\begin{array}{r} 611^2 = 373\,321 \\ 180^2 = 32\,400 \\ \hline A = 405\,721 \end{array}$$

Da die zweite Zusammensetzung $\begin{array}{r} \cdot\quad 96 \\ \cdot\quad 25 \\ \hline 21 \end{array}$ eine ungerade Z_3 nämlich die 7 in 405 $\underline{7}$21 ergeben soll, so muß wegen der Geraden Z_3 der auf 25 endigenden Quadrate die Z_3 der auf 96 endigenden Quadrate gerade sein d h es kommt von der zu ·· 96 gehörenden Vierergruppe (14 36, 64 86) nur das mittlere Paar in Frage

Da die zu $\sqrt{A}$ nächstliegende Zahl 637 ist so fange ich mit der nächsten möglichen Zahl x^2 der ·· 96-Gruppe (14 $\overline{36 \quad 64}$ 86) an, also mit 636 Es wird $636^2 = 404\,496$ $A - 404\,496 = 1225 = 35^2$ womit die zweite Zerlegung $A = 636^2 + 35^2$ gefunden ist

4 *Beispiel* $A = 432\,811$ Damit $A + v^2 = u^2$ ein Quadrat werden kann muß v^2 entweder die Endung 89 haben oder die Endung 25 Im ersten Falle entstehen Quadrate $u^2 = A - v^2$ mit der Endung 00, deren Z_3 ungerade ist, da die Z_3 aller auf 89 endigenden v^2 gerade wird Es wird also $u = (2k + 1)$ 10 Da $u^2 > A$ und $A > 657$, so fange ich mit $u = 670$ 690 an

2 v^2 endigt auf 25 und liefert Werte von u^2 auf 36 mit gerader Z_3, so daß aus der zu 36 gehörigen Vierergruppe (6, 44, 56, 94) das äußere Paar in Betracht kommt Die Rechnung mit der Annahme 1 ergibt

$$\begin{array}{lll} 670^2 = 448\,900 & 690^2 = 476\,100 & 710^2 = 504\,100 \\ \hline -A \quad = 432\,811 & \quad - 432\,811 & \quad - 432\,811 \\ \hline v_2 \quad\; = 16\,089 & \quad = 43\,289 & v^2 = 71\,289 = 267^2 \end{array}$$

Es kommt also

$$A = 710^2 - 267^2 = (710 + 267)\,(710 - 267) = \underline{977 \quad 443}$$

5 *Beispiel* $\underline{A = 393\,233}$ Man erkennt, daß v^2 auf 6 endigen muß damit $\overline{A + v^2 = u^2}$ werden kann Da die mogliche Quadratzahl u^2 auf 9 endigt so kommen alle Zahlen u, die auf 3 und 7 endigen in Frage Es ist $A < 628^2$ also kommen als nachste Werte fur u 633, 637 643, 647, 653, 657

Nach einiger Rechnung erhalt man

$$\begin{aligned} 657^2 &= 431\,649 \\ -A &= \underline{393\,233} \\ &= \overline{38\,416} = 196^2 \end{aligned}$$

also kommt

$$A = 657^2 - 196^2 = (657 + 196)(657 - 196) = \underline{853 \quad 461}$$

Da 853 und 461 Primzahlen der Form $4n + 1$ sind, so muß A auf zwei Arten in der Form $A = x^2 + y^2$ darstellbar sein Nach den fruheren Ausfuhrungen wird man die Zerlegung fur

$$2A = (x + y)^2 + (x - y)^2$$

ausfuhren

Die Zerlegung $2A = 786\,466 = (x + y)^2 + (x - y)^2$ kann nur durch die Zusammensetzung der Quadratendkomplexe $\cdot 41$ und 25 zustande kommen Eine kleine Rechnung gibt die beiden Zerlegungen $2A = 829^2 + 315^2$ und $2A = 729^2 + 505^2$ woraus unmittelbar die beiden Zerlegungen fur A folgen

1 $A = 572^2 + 257^2$, 2 $A = 617^2 + 112^2$

In der Tat ist

$$\begin{array}{rcl} 572^2 = 327\,184 & \qquad & 617^2 = 380\,689 \\ +\,257^2 = 66\,049 & & +\,112^2 = 12\,544 \\ \hline = A = 393\,233 & & = A = 393\,233 \end{array}$$

Man gewinnt den Eindruck, daß die Produkte aus Primzahlen der Form $4n + 1$ mit Hilfe der Quadratsummendarstellungen $A = x^2 + y^2$ leichter zerlegbar seien als die ubrigen Zahlen Ganz abgesehen davon, daß Beziehungen zwischen den beiden Darstellungen $A = x^2 + y^2$ und $A = u^2 - v^2$ bestehen, die wir in Teil III des Berichtes behandeln wollen, reduziert die Auffindung einer Summendarstellung $A = x^2 + y^2$ den Bereich der zu untersuchenden Primzahlen ungefähr auf die Halfte dadurch daß alle Faktoren der Form $4n + 3$ durch sie ausgeschieden sind

Demgegenuber zeigt sich daß bei der Darstellung durch die Quadratdifferenz $A = u^2 - v^2$ die Zahlen der Form $4n + 3$ insofern leichter zu behandeln sind als die der Form $4n + 1$, als die Reihe der möglichen u-Werte ($u^2 = A + v^2$) nur halb so dicht ist wie bei den Zahlen der Form $4n + 1$

Diese Tatsache erkennt man zunächst empirisch, wenn man zwei Beispiele der beiden verschiedenen Typen $A = 4n - 1$ und $A = 4n + 3$ nebeneinander behandelt. Nehmen wir zunächst unser letztes Beispiel $A = 393\,233$ heran, so ergibt die Durchrechnung, daß nach der Feststellung der auf ..9 endigenden Quadratzahlen u^2 man die Quadrate $u^2 > A$ so wählen kann, daß u auf 3 oder 7 endigt. Im übrigen führt die Gleichung $A + v^2 = u^2$ immer zu Werten von u^2, die zunächst nicht unmöglich sind. Für das folgende empfiehlt es sich, die Zahlen A nach ihren Resten gegen $2^3 = 8$ in Klassen zu bringen. Da die A alle ungerade sind, so kommen die vier Typen $8n + 1$, $8n + 3$, $8n + 5$, $8n + 7$ in Betracht, von denen $8n + 1$ und $8n + 5$ der Klasse $4n + 1$, $8n + 3$ und $8n + 7$ der Klasse $4n + 3$ angehören.

Es soll werden $A + v^2 = u^2$. Die Quadrate aller ungeraden Zahlen haben die Form $(2k + 1)^2 = 8n' + 1$.

1. Ist A von der Form $8n + 1$, so muß v^2 durch 8 teilbar sein, also v ein Vielfaches von 4 sein, damit $A + v^2$ ein mögliches u^2 wird. Im übrigen ist u an keine einschränkende Bedingung gebunden. Ist A von der Form $8n + 5$, so muß $v = 2(2k + 1) = 4k + 2$ sein, damit $A + v^2 = u^2$ die Form $8n + 1$ erhält, auch hier ist u an keine Bedingung gebunden.

2. $A = 4n + 3$.

a) $A = 8n + 3$. Wählt man ein gerades v, so kann kein u^2 entstehen, da $A + v^2$ die Form $4n + 3$ erhält. Ein ungerades v gibt

$$A + v^2 = (8n + 3) + 8n' + 1 = 8(n + n') + 4 = 2^2[2(n + n') + 1]$$

die Bedingung, daß u durch 2, aber nicht durch 2^2 teilbar ist. Von der zunächst möglichen Reihe gerader Zahlen für u fällt die Hälfte weg, da u nicht von der Form $4k$ sein darf.

b) $A = 8n + 7$. Es wird

$$A + v^2 = 8n + 7 + 8n' + 1 = 2^3(n + n' + 1),$$

d. h. u muß durch 2^2 teilbar sein, und es fällt wieder die Hälfte der zunächst möglichen u-Werte aus. Damit ist gezeigt, daß für die Zahlen A der Form $4n + 3$ die aus der Quadratbedingung folgenden Werte $u^2 = A + v^2$, $u = 2n$ nur in halber Dichte in Betracht kommen. Zur Hälfte werden sie durch Bedingungen ausgeschieden, die aus der Struktur der Quadratzahlen oder genauer aus dem zweiten Ergänzungssatz der Theorie der quadratischen Reste folgen.

Beispiel. $A = 462\,523$. Man erkennt sofort, daß alle u^2, die auf 4 endigen, mögliche v^2 ergeben, $v^2 = -A + u^2$, die den Werten von v^2 die Endziffer 1 zuordnet. Es wird u die Endziffer 2 oder 8 haben müssen. Zunächst ist $u^2 > A$ zu nehmen. Da $\sqrt{A} < 681$ ist ($681^2 = 463\,761$), so wird die u-Reihe

u	682	688,	692	698,
u^2	465 124	473 344	478 864	487 204
$-A$	$-$ 462 523	$-$ 462 523	$-$ 462 523	$-$ 462 523
v^2	2 601	10 821	16 341	24 681
	$= 51^2$			
u	702	708	712,	718
u^2	492 804	501 264	506 944	515 524
$-A$	$-$ 462 523	$-$ 462 523	$-$ 462 523	$-$ 462 523
v^2	30 281	38 741	44 421	53 001

Die Zerlegung findet sich rasch aus

$$A = 682^2 - 51^2 = (682 + 51)\,(682 - 51) = \underline{733 \cdot 631}$$

Betrachtet man die Reihe der Differenzen $u^2 - A$, die v^2 ergeben sollen, so erkennt man, daß die Zahlen $u = 4\,n'$ (688, 692, ...) durch die Z_3 der Differenz $u^2 - A$ erkennen lassen, daß $u^2 - A$ nicht Quadratzahl werden kann. Z. B. 10 821, 16 341. Das stimmt damit überein, daß $A = 8\,n + 3$ ist.

2 $A = 387\,103$. Wieder muß u^2 auf 4 endigen, u also auf 2 oder 8. Da $\sqrt{A} < 624$, so kommt als zunächst mögliche u-Reihe

u	628,	632	638,	642,	648
u^2	394 384	399 424	407 044	412 164	419 904
$-A$	$-$ 387 103	$-$ 387 103	$-$ 387 103	$-$ 387 103	$-$ 387 103
v^2	= 7 281	12 321	19 941	25 061	32 801
u	652,	658,	662,	668,	
u^2	425 104	432 964	438 244	446 224	
$-A$	$-$ 387 103	$-$ 387 103	$-$ 387 103	$-$ 387 103	
v^2	= 38 001	45 861	51 141	59 121	

In der Reihe für v^2 sind die möglichen Quadratzahlen ganz unterstrichen, die unmöglichen Werte sind durch Unterstreichen der unmöglichen Z_3 charakterisiert.

Hier zeigt sich, daß die Werte $u = 4\,n'$ allein möglich sind, während die Werte $u = 2\,k\,(2\,k + 1)$ unmöglich sind. Es entspricht dies vollständig dem Umstand, daß $A = 387\,103$ von der Form $8\,n + 7$ ist, wie es in der allgemeinen Betrachtung dargetan ist. Man wird diese Unterscheidung für das praktische Rechnen, zumal für das Kopfrechnen, etwas kompliziert finden, und es sei deswegen auf ein einfaches Hilfsmittel für diesen Fall hingewiesen. Im übrigen darf sich jemand, der solche Aufgaben im Kopfe lösen will, vor einer Anzahl von Kriterien nicht fürchten, die er jederzeit zur leichten Verfügung hat, denn es handelt sich um Aufgaben, die nur durch eingehende Überlegung losbar sind. Bei unserer Fallunterscheidung kann man sich folgendermaßen helfen.

Man nimmt die zunächst oberhalb A gelegenen, der Endziffer nach möglichen Werte von u^2 und sieht zu, ob $u^2 - A$ als Quadratzahl überhaupt möglich ist, ob also die Z_3 keinen Widerspruch zeigt. Ist das zunächst über A liegende $u = u_1$ ungeeignet, so ist die folgende Zahl $u = u_2$ der u-Reihe geeignet.

Von dieser ersten brauchbaren Zahl $u = u_2$ aus wird die Reihe der in Betracht kommenden u so gefunden, daß man u an der folgenden durch 10 teilbaren Zahl „spiegelt", d. h. die in bezug zur Zahl $w = 10\,k$ symmetrisch zu u gelegene Zahl $\bar{u}$ nimmt. Beispiel: $\underline{632} \mid \underline{640} \mid \underline{648}$ $650 \mid \underline{652} \mid 660 \mid \underline{668}$.

Es war in unserem letzten Beispiel, das die Zerlegung $A = 632^2 - 111^2$ liefert, $A = (632 + 111)(632 - 111) = 743 \cdot 521$ die Zahl 632 ein geeigneter Wert für u. Die Zahl $w = 10\,k$, an der u zu „spiegeln" ist, wird $w = 640$. $632 = 640 - 8$. Die Zahl $640 + 8 = 648$ ist dann wieder ein möglicher u-Wert. Die Fortsetzung des Prinzips liefert dann ohne alle Mühe die Reihe der zu untersuchenden u-Werte $u = 632, 648, 652, 668, 672, 688, 692, 708, \ldots$, was an dem letzten Beispiel leicht nachzuprüfen ist. Das Verfahren beruht natürlich auf der Darstellung von u in den Formen $u = 4\,\bar{u}$ oder $u = 4\,\bar{\bar{u}} + 2$.

§ 7. Quadratsummenzerlegung in vier, drei oder zwei Quadrate. Satz von Fermat-Lagrange.

Eine oft den Kopfrechnern gestellte zahlentheoretische Aufgabe ist noch zu besprechen. Ihr liegt zugrunde der auf *Fermat* zurückgehende, von *Lagrange* und dann von *Gauß* in den Disquisitiones Arithmeticae bewiesene Satz, daß jede ganze rationale Zahl A in die Summe von 4 oder weniger als 4 Quadraten zerlegbar ist.

Wir teilen die Zahlen A in Restklassen nach dem Modul $2^3 = 8$ ein, setzen also $A = 8\,k + r$, wo $0 \leq r \leq 7$ wird.

Zunächst betrachten wir die Zahlen der Form $8\,N + 1$ und $8\,N + 5$.

Enthalten Zahlen dieser Form keine Primzahlen der Form $4\,n + 3$ oder solche nur in einer geraden Potenz, so sind diese Zahlen schon in die Summe von 2 Quadratzahlen zerlegbar, auf eine oder mehrere Weisen, je nachdem die Zahl $A = 8\,N + 1$ oder $A = 8\,N + 5$ Primzahl oder das Produkt von Primzahlen der Form $4\,n + 1$ ist. Es zeigt sich, daß in den Fällen, wo sie Faktoren der Form $4\,n + 3$ enthält, durch Verminderung von A um das Quadrat einer geraden Zahl immer eine Zahl $A' = A - (2\,a)^2$ gewonnen werden kann, die in die Summe von nur zwei Quadratzahlen zerlegt werden kann, so daß die Zahlen $A = 8\,N + 1$, $8\,N + 5$ sicher in die Summe von 3 Quadraten zerlegt werden können. *Gauß* beweist im Abschnitt 5 seiner Disquisitiones

Arithmeticae mit Hilfe seiner Theorie der quadratischen Formen, daß jede Zahl $A = 8M + 3$ in die Summe von drei ungeraden Quadraten zerlegt werden kann. Er gibt mit Hilfe dieses Satzes einen sehr einfachen Beweis eines anderen Theorems von *Fermat*, das besagt, daß jede ganze rationale Zahl in die Summe von drei Trigonalzahlen zerlegbar ist

$$M = \frac{1}{2} x(x+1) + \frac{1}{2} y(y+1) + \frac{1}{2} z(z+1)$$

Gilt nämlich allgemein

$$A = 8M + 3 = (2x+1)^2 + (2y+1)^2 + (2z+1)^2$$

so folgt

$$8M = (2x+1)^2 - 1 + (2y+1)^2 - 1 + (2z+1)^2 - 1$$

$$8M = 2(x+1)\cdot 2x + 2(y+1)\,2y + 2(z+1)\cdot 2z,$$

$$2M = x(x+1) + y(y+1) + z(z+1),$$

oder wie verlangt

$$M = \frac{1}{2} x(x+1) + \frac{1}{2} y(y+1) + \frac{1}{2} z(z+1)$$

Ich setze die Betrachtung der Zahlen $A = 8N + r$ fort.

Zahlen der Form $A = 8N + 2$ sind immer dann schon in die Summe von zwei Quadraten zerlegbar, wenn $4N + 1$ keine Faktoren der Form $4n + 3$ in ungerader Potenz enthält. Denn dann gilt auf eine oder mehrere Weisen

$$4N + 1 = x^2 + y^2$$

woraus unmittelbar folgt

$$A = 8N + 2 = (x+y)^2 + (x-y)^2$$

Durch Subtraktion eines Quadrates $B^2 = (2n)^2$ läßt sich immer eine Zahl $A' = A - B^2$ gewinnen, die $A' = 2(4N' - 1)$ wird, wo $4N' + 1$ keinen Faktor $4n + 3$ in ungerader Potenz enthält. Daraus folgt $A = 8N + 2 = B^2 + u^2 + v^2$, also die Zerlegung der Zahlen der Form $8N + 2$ in die Summe von drei Quadratzahlen. Die Zahlen $A = 8N + 3$ sind durch den Satz von *Gauß* erledigt und zerfallen in die Summe von drei Quadraten mit ungeraden Grundzahlen.

Die Zahlen der Form $A = 8N + 4$ lassen sich durch Abspaltung des Faktors 2^2 auf die schon betrachteten Fälle zurückführen. Für die Zahlen der Form $A = 8N + 6$ gilt es stets ein Quadrat $y^2 = [2(2n+1)]^2$ derart, daß $A' = A - v^2 = 8N' + 2$ schon in die Summe von zwei Quadratzahlen zerlegbar wird, so daß auch hier gilt $A = 8N + 6 = y^2 + u^2 + v^2$.

Eine Ausnahme bilden die Zahlen der Form $8N + 7$. Zunächst ist das Quadrat einer ungeraden Zahl abzuziehen, das die Form

$(2y + 1)^2 = 8\overline{N} + 1$ hat. Es bleibt eine Zahl der Form $A = 8N' + 6$ übrig, die in die Summe von drei Quadratzahlen zerlegbar ist, so daß die Zahlen der Form $8N + 7$ vier Quadrate zu ihrer Zerlegung erfordern.

Beispiel: A: 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359.

$353 = 17^2 + 8^2$, $354 = 4^2 + 13^2 + 13^2$, $355 = 3^2 + 11^2 + 15^2$,

$356 = 2^2 \cdot 89 = 2^2 (8^2 + 5^2) = 16^2 + 10^2$, $357 = 16^2 + 10^2 + 1^2$,

$358 = 14^2 + 9^2 + 9^2$, $359 = 5^2 + 334 = \underline{5^2 + 18^2 + 3^2 + 1^2}$.

Diese Darstellung läßt eine Bemerkung verständlich erscheinen, die gelegentlich von Psychologen über die Lösungszeiten solcher Aufgaben gemacht worden sind. Einer Lösungszeit von 1 Minute steht eine solche von 15 Minuten bei einer ähnlichen Aufgabe gegenüber.

Wird die Aufgabe ohne zahlentheoretische Überlegung angefaßt, und zieht man von einer Zahl $A = 8N + 7$ ein $y^2 = (4n)^2$ zunächst ab, so bleibt immer wieder ein $A' = A - y^2$, das von der Form $8N' + 7$ und wieder vier Quadrate zur Zerlegung erfordert. Man kommt mit vier Quadraten nicht aus. Eine besondere Schwierigkeit können die Zahlen $A = 2^u A'$ machen.

Zieht man von einer solchen Zahl zunächst das Quadrat einer geraden Zahl ab, so bleibt der unangenehme Charakter von A gewahrt. Zieht man dagegen das Quadrat einer ungeraden Zahl ab, $y^2 = (2m + 1)^2$, das immer von der Form $8m + 1$ ist, so bleibt als Rest eine Zahl $A' = A - y^2 = 8M + 7$, die allein schon vier Quadrate zur Darstellung erfordert. Man kommt mit vier Quadraten nicht aus. Daher bleibt für den Rechner die Forderung:

1. Bei Zahlen der Form $A = 8N + 7$ ist zunächst eine ***ungerade*** Quadratzahl $y^2 = (2k - 1)^2$ zu subtrahieren.

2. In allen Fällen gerader Zahlen A ist die höchstmögliche gerade Potenz von 2 als Faktor abzuspalten.

Ist

$$A = 2^{2u+1} A' = 2^{2u} \cdot 2A',$$

so kann eine Zerlegung

$$2A' = u^2 + v^2 + w^2 + z^2$$

gefunden werden, woraus für A folgt

$$A = (2^u \cdot u)^2 + (2^u \cdot v)^2 + (2^u \cdot w)^2 + (2^u \cdot z)^2.$$

Ich glaube, daß diese Sonderfälle die Schwierigkeiten erklären, die bei einzelnen Aufgaben eine auffallend große Lösungszeit der Zahlenvirtuosen verursacht haben. Es ist die Sache des denkenden Rechners, sich über die schwierigen Sonderfälle in jeder Gruppe von Aufgaben klar zu werden. Dann läßt sich fast immer Abhilfe schaffen.

Wir schließen mit dieser Betrachtung den Teil II des Berichtes, der zwar nicht alle im Vortrag behandelten Arten von Aufgaben besprochen hat, aber bei der gründlichen Behandlung solche Aufgaben herangezogen hat, die einerseits grundlegend für viele andere sind und andererseits Gelegenheit bieten, mathematisch formulierte Gesichtspunkte zu geben, die überall ihren vollständigen Wert haben und bei der Lösung von Zahlenaufgaben die richtigen Methoden geben können.

Der Teil III soll im ersten Teil die Primfaktorenzerlegung weiter behandeln, u. a. den Zusammenhang zwischen den Darstellungen $A = u^2 - v^2$ und $A = x^2 + y^2$ geben, außerdem soll er einige isoliert stehende Identitäten in naturgemäßer Weise herleiten. In seinem zweiten Teil soll er Beispiele von approximativen Rechnungen bringen, Wurzeln beliebiger Art bestimmen, und soll zeigen, inwiefern es möglich ist, logarithmische Rechnungen ohne Tafel auszuführen.

Dritter Abschnitt.

Bei der Betrachtung der Primzahlzerlegung der ganzen Zahlen sind noch einige allgemeine Fragen zu erledigen, daneben sind noch einige Fragen von besonderem Interesse zu behandeln.

§ 1. Zusammenhang zwischen Primfaktoren- und Quadratsummenzerlegung. Zerlegung von Zahlen besonderer Struktur.

Es ist schon darauf hingewiesen worden, daß es von Wichtigkeit ist, den formelmäßigen Zusammenhang zwischen den Darstellungen $A = x^2 + y^2$ und $A = u^2 - v^2$ herzustellen. Es kommt der Fall nicht selten vor, daß für eine Zahl $A = p \cdot q$ (p und q Primfaktoren der Form $4n + 1$) die aus dem Satz von *Gauß* folgenden beiden Darstellungen $A = x^2 + y^2$ und $A = u^2 + v^2$ sehr leicht gefunden werden können. Wie heißen dann die Faktoren p und q?

Um Resultate zu finden, ist es oft ein nutzbringender Weg, wenn man bei der Betrachtung von besonderen Fällen ausgeht, d. h. in unserem Falle Zahlen A untersucht, bei denen der Zusammenhang zwischen der Darstellung $A = u^2 - v^2$ und der oder den Darstellungen $A = x^2 + y^2$ besonders klar zutage tritt.

Beispiel 1. $A = 40\,001$.

Man erkennt unmittelbar wegen $40\,000 = 200^2$, daß A nur Primfaktoren der Form $4n + 1$ hat. Man sieht dann weiter, daß neben der Darstellung $A = 200^2 + 1^2$ die zweite existiert

$$A = (200 - 1)^2 + 20^2 = 199^2 + 20^2,$$

und weiter sieht man, daß ganz entsprechend dieser letzten Identität die weitere bestehen muß $A = (200 + 1)^2 - 20^2$ und damit ist die Zerlegung $A = p \cdot q$ gefunden.

2. $A = 640\,001$.

a) $A = 800^2 + 1^2$, b) $A = 799^2 + 40^2$, c) $A = 801^2 - 40^2$.

Wir stellen die Frage nach den Bedingungen, die eine Zahl A erfüllen muß, damit solche drei Zerlegungen nebeneinander bestehen können.

Ich setze zunächst
$$A = m^2 + 1$$
Dann müssen die Identitäten bestehen
$$(m-1)^2 + b^2 = m^2 + 1 \text{ und außerdem } (m+1)^2 - b^2 = m^2 + 1$$
Daraus folgt nach einer kleinen Umrechnung $2\,m = b^2$
$$A = \frac{b^4}{4} + 1 = 4\,\bar{b}^4 + 1\,,$$
wo $b = 2\,\bar{b}$ gesetzt ist.

Ist die Zahl A von der Form $A = 4\,\bar{b}^4 + 1$, so hat sie die Quadratdifferenzenzerlegung
$$A = m^2 + 1 = (m+1)^2 - 2\,\bar{b})^2 = (m + 2\,\bar{b} + 1)\,(m - 2\,\bar{b} + 1)\,,$$
d. h. wenn alle Größen durch $b = 2\,\bar{b}$ ausgedrückt werden
$$A = \frac{b^4}{4} + 1 = \left(\frac{b^2}{2} + b + 1\right)\left(\frac{b^2}{2} - b + 1\right),$$
oder in $\bar{b}$ ausgedrückt
$$A = 4\,\bar{b}^4 + 1 = (2\,\bar{b}^2 + 2\,b + 1)\,(2\,b^2 - 2\,b + 1)$$

Die hier gegebene Beziehung ist unter dem Namen der *Identität von d'Aurifeuille* in der Zahlentheorie bekannt. Daß wir sie nicht zufällig, sondern auf Grund einer Überlegung fanden, die sich fast notwendigerweise aus dem Zusammenhang ergab, ist jedenfalls ein Vorteil, da solche Identitäten meist eine isolierte Stellung einnehmen und wie vom Himmel gefallen aussehen.

Es wird zweckmäßig sein, ein Beispiel durchzuführen, als welches wir $A = 640\,001$ wählen.

Es wird
$$641\,601 = 801^2$$
und
$$A = 801^2 - 40^2 = 841 \cdot 761 = 29^2 \cdot 761$$
Aus der Darstellung von *d'Aurifeuille* erkennt man auch die Quadratsummendarstellung der beiden Faktoren von A, denn es wird
$$2\,b^2 + 2\,b + 1 = (b+1)^2 + b^2 \quad \text{und} \quad 2\,b^2 - 2\,b + 1 = (b-1)^2 + b^2$$
$$A = 640\,001 = 4 \cdot 20^4 + 1 \qquad b = 20$$
$$A = 801^2 - 40^2 = 841 \cdot 761$$
$$841 = 29^2 = 21^2 + 20^2 = (b+1)^2 + b^2$$
$$761 = 20^2 + 19^2 = b^2 + (b-1)^2$$
1. $A = 800^2 + 1^2 = (2\,b^2)^2 + 1^2$

2. $A = 799^2 + 40^2 = (2\,b^2 - 1)^2 + (2\,b)^2$

Es kommt darauf an, zwischen den beiden Quadratsummenzerlegungen von A und den beiden Zerlegungen $p = u^2 + v^2$ und $q = x^2 + y^2$

der beiden Faktoren von $A = p\ q$ Beziehungen zu finden Zu diesem Zwecke stelle ich die vier Quadratsummenzerlegungen noch einmal zusammen

$$1\quad A = (2\,b^2)^2 + 1^2, \qquad\qquad 2\quad p = (b+1)^2 + b^2$$
$$= (2\,b^2 - 1)^2 + (2\,b)^2 \qquad\qquad q = (b-1)^2 + b^2$$

Des besseren Überblickes wegen setze ich

$$A = p\ q \qquad A = U^2 + V^2 \quad \Big| \quad p = u^2 + v^2$$
$$= S^2 + T^2 \quad \Big| \quad q = s^2 + t^2$$

Es wird dann

$$U = 2\,b^2, \qquad V = 1 \qquad u = b \qquad v = b - 1\,,$$
$$S = 2\,b^2 - 1 \qquad T = 2\,b \quad | \quad s = b \qquad t = b - 1$$

Man erkennt leicht die folgenden Beziehungen

$$1\quad \frac{U+T}{2} = b^2 + b = b(b+1) = s\ v$$

$$2\quad \frac{S+V}{2} = b^2 = u \cdot s\,,$$

$$3\quad \frac{S-V}{2} = b^2 - 1 = v\ t$$

Man erkennt in unserem besonderen Beispiel den Zusammenhang [1]) der Quadratsummenzerlegungen von Produkt und Faktoren Insbesondere lassen sich die Faktoren p und q, bzw ihre Komponenten u, v, s, t durch einfache diophantische Gleichungen aus den Komponenten W, V, S, T der beiden Quadratsummenzerlegungen des Produkts herleiten, womit ein neuer Weg zur Bestimmung der Primfaktoren angedeutet erscheint Außerdem gibt die spezielle Darstellung Veranlassung, den in Frage stehenden Zusammenhang allgemein zu suchen

Im folgenden wird mit i in üblicher Weise die imaginare Einheit $i = \sqrt{-1}$ bezeichnet

Es wird immer eine Zerlegung in nur zwei Faktoren angenommen, denn alle anderen Fälle werden durch das Auffinden *einer* Zerlegung $A = p \cdot q$ immer ganz wesentlich vereinfacht

Es handelt sich um eine Zerlegung $A = p\ q$ wo p und q entweder Primzahlen der Form $4n+1$ oder aber einer der Faktoren, etwa $q = q_1\,q_2\ \cdot$ ein Produkt von Primzahlen der Form $4n+1$ ist In beiden Fällen gelten Quadratsummenzerlegungen folgender Art

$$A = U^2 + V^2 \qquad p = u^2 + v^2,$$
$$= S^2 + T^2 \quad \Big| \quad q = s^2 + t^2$$

Bei der folgenden Darstellung wird das Gebiet der rationalen Zahlen insofern erweitert, als wir Zerlegungen der Art

$$u^2 + v^2 = (u + i\,v)\,(u - i\,v),$$

[1]) Dieser Zusammenhang ist wohl zuerst von *L Euler* dargestellt worden

d. h. durch Adjunktion der imaginären Einheit $i = \sqrt{-1}$ den Zahlbereich oder Körper der Zahlen $\alpha = x + iy$ heranziehen.

Das gibt für unsere Quadratsummenzerlegungen

$$A = (U + iV)(U - iV) = (S + iT)(S - iT),$$

$$p = (u + iv)(u - iv), \qquad q = (s + it)(s - it).$$

Wir bilden die Produktgleichung

$$A = p\cdot q = (u + iv)(u - iv)(s + it)(s - it).$$

Der Umstand, daß man die vier komplexen ganzen Faktoren $u + iv$, $u - iv$, $s + it$, $s - it$ *in zweifacher Weise* in ein Produkt $(P + iQ)(P - iQ)$ zusammenfassen kann, ist die Quelle des Satzes von *Gauß*, wonach eine Zahl $A = p\cdot q$ zwei Zerlegungen der Form $u^2 + v^2$ hat, sobald p und q Primzahlen der Form $4n + 1$ sind und dementsprechend p eine Zerlegung $p = u^2 + v^2$, $v = s^2 + t^2$ zulassen.

Man wird zunächst zusammenfassen zu *einem* komplexen Faktor die Werte

$$(u + iv)(s + it) = us - vt + i(vs + ut) = P + iQ.$$

Die beiden übrigen der vier Faktoren, in die $A = p\cdot q$ zerlegt war, also $u - iv$ und $s - it$ sind zu den oben zu einem Produkt vereinigten $u + iv$ und $s + it$ konjugiert komplex, so daß ihr Produkt $(u - iv)(s - it) = P - iQ$, der zu $P + iQ$ konjugiert komplexen Zahl werden muß. Es kommt dann

$$A = (u + iv)(u - iv)(s + it)(s - it) = (P + iQ)(P - iQ) = P^2 + Q^2,$$

wo die P und Q gegeben sind durch

$$P = us - vt, \qquad Q = vs + ut.$$

Man kann die Zusammenfassung der vier komplexen Faktoren auch in folgender Weise vornehmen:

$$(u + iv)(s - it) = S + iT$$

und zu diesem Produkt durch die Umwandlung von $+i$ in $-i$ konjugiert komplex

$$(u - iv)(s + it) = S - iT.$$

Die Zahl A wird dann

$$A = (S + iT)(S - iT) = S^2 + T^2,$$

womit die zweite Quadratsummendarstellung für A gefunden ist. Im einzelnen wird

$$S + iT = (u + iv)(s - it) = us + vt + i(vs - ut),$$

so daß

$$S = us + vt, \qquad T = vs - ut$$

wird.

Die Darstellung von P, Q, S, T zeigt unmittelbar, daß die beiden Zerlegungen $A = P^2 + Q^2$ und $A = S^2 + T^2$ voneinander verschieden sind.

Die Nebeneinanderstellung der beiden Systeme zeigt deutlich den Zusammenhang von P, Q, S, T mit den Komponenten der Faktoren p, q, also den u, v, s, t:

$$P = u\cdot s - v\cdot t \qquad Q = v\cdot s + u\cdot t,$$
$$S = u\cdot s + v\cdot t \qquad T = v\cdot s - u\cdot t.$$

Daraus ergeben sich Gleichungen für die Komponentenprodukte der u, v, s, t:

$$\left.\begin{array}{ll} 1. & \dfrac{P+S}{2} = u\cdot s, \quad \dfrac{S-P}{2} = v\cdot t \\ 2. & \dfrac{Q+T}{2} = v\cdot s \quad \dfrac{Q-T}{2} = u\cdot t \end{array}\right\} \quad \text{Durch Division folgt daraus} \quad \frac{u}{v} = \frac{P+S}{Q+T}, \quad \frac{v}{u} = \frac{S-P}{Q-T}$$

Das Produkt ergibt

$$\frac{S^2 - P^2}{Q^2 - T^2} = 1,$$

d. h. $S^2 - P^2 = Q^2 - T^2$ oder $P^2 + Q^2 = S^2 + T^2$, wie es sein muß.

Die einfachen diophantischen Gleichungen zweiten Grades für u, v, s, t lassen sich sehr leicht auflösen, wie die zu betrachtenden Beispiele zeigen werden.

Die Methode der Faktorenbestimmung p, q aus den beiden Darstellungen $A = P^2 + Q^2$, $A = S^2 + T^2$ kommt immer dann in Frage, wenn sich die Quadratsummendarstellungen leicht finden lassen oder wenn eine Darstellung $A = P^2 + Q^2$ von vornherein gegeben ist.

Beispiele. 1. $A = 23\,701$. Leicht gefunden wird

1. $A = 151^2 + 30^2$
2. $A = 135^2 + 74^2$

1. $\dfrac{P+Q}{2} = 143 = 11\cdot 13 = u\cdot s,$

$\dfrac{P-S}{2} = 8 = v\cdot t,$

$\dfrac{T-Q}{2} = 52, \quad \dfrac{T-Q}{2} = 22$

Man findet unmittelbar

$$u = 13 \quad s = 11, \quad t = 4 \quad v = 2$$
$$p = u^2 + v^2 = 173 = 13^2 + 2^2$$
$$q = s^2 + t^2 = 11^2 + 4^2 = 137$$

2. $A = 96\,409$. Man findet leicht

1. $A = 253^2 + 180^2$	$P = 253, \quad Q = 180$
2. $A = 197^2 + 240^2$	$S = 197, \quad T = 240$

Es findet sich hieraus ohne Mühe

$$\frac{P+S}{2} = 225 = u \cdot s, \quad \frac{T+Q}{2} = 210 = v \cdot s, \quad u = 15, \quad v = 14,$$

$$\frac{P-S}{2} = 28 = v \cdot t, \quad \frac{T-Q}{2} = 30 = u \cdot t, \quad s = 15, \quad t = 2$$

Also kommt die Zerlegung $A = p \cdot q$, wobei

$$p = u^2 + v^2 = 15^2 + 14^2 = 421,$$

$$q = s^2 + t^2 = 15^2 + 2^2 = 229$$

3. $A = 2^{32} + 1 = 65\,536^2 + 1^2 = 4\,294\,967\,297$

Als zweite Quadratsummendarstellung wird gefunden

$$A = 62\,264^2 + 20\,449^2$$

In der Tat wird

$$\begin{array}{rl} 62\,264^2 = & 3\,876\,805\,696 \\ +\ 20\,449^2 = & 418\,161\,601 \\ \hline = A \quad = & \underline{4\,294\,967\,297} \end{array}$$

Hier wird also

$$P = 65\,536, \quad Q = 1$$

$$S = 62\,264, \quad T = 20\,449$$

1. $\dfrac{P+S}{2} = 63\,900 = u \cdot s, \quad \dfrac{T+Q}{2} = 10\,225 = v \cdot s$

$$\frac{P-S}{2} = 1\,636 = v \cdot t, \quad \frac{T-Q}{2} = 10\,224 = u \cdot t$$

Aus $u \cdot s = 63\,900$ und $u \cdot t = 10\,224$ folgt $u \cdot s = 2556 \cdot 25$ und $u \cdot t = 2556 \cdot 4$

$$u = 2556, \quad s = 25, \quad t = 4,$$

also

$$v = \frac{1636}{4} = 409 = \frac{10\,225}{25}$$

Es kommt bei der kleinen Rechnung darauf an, eine Bestimmung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen geschickt durchzuführen und die kleinen diophantischen Gleichungen in der richtigen Reihenfolge zu verwenden.

Es folgt aus den gefundenen Werten der vier Komponenten u, v, s, t

$$\begin{array}{rl} p = u^2 + v^2 = 2556^2 + 409^2 = & 6\,533\,136 \\ + & 167\,281 \\ \hline = & \underline{6\,700\,417 = p} \end{array}$$

$q = s^2 + t^2 = 25^2 + 4^2 = 641$, so daß $A = 2^{32} + 1$, das wir früher mit $K^{(5)}$ bezeichneten, die folgende Zerlegung in Faktoren hat

$$K^{(5)} = 2^{32} + 1 = 641 \cdot 6\,700\,417$$

Da wir in Teil I durch andere Überlegungen den Faktor 641 von $K^{(5)} = 2^{32} + 1$ gefunden haben, so erscheint es angebracht von der Zerlegung $A = p\ q$ auszugehen und die nur durch zeitraubende Rechnung auffindbare zweite Quadratsummendarstellung zu bestimmen

Sofort gegeben ist $p = 641 = 25^2 + 4^2$

Beim Aufsuchen der Zerlegung $q = s^2 + t^2$ wird man nach den fruheren Ausfuhrungen ausgehen von der Zahl $2q$, die nur in *einer* Kombination von Quadratendkomplexen zusammengesetzt werden kann

Es wird $2q = 13\,400\,834$ Die moglichen Komponenten $\bar{u} = s + t$ und $\bar{v} = s - t$ der Zerlegung $2q = (s+t)^2 + (s-t)^2 = 2(s^2 + t^2) = \bar{u}^2 + \bar{v}^2$ werden diese zu den beiden Quadratendungen $\cdot\cdot$ 09 und 25 gehorigen Zahlengruppen sein, d h die Vierergruppen (3, 47, 53, 97) und die auf 5 endigenden Zahlen

Die Rechnung soll hier einigermaßen eingehend durchgefuhrt werden, da sie die Methode der Zahlenrechnung in solchen Fallen aus einandersetzt

Man wird als erste Komponente des Ansatzes $2q = x^2 + y^2$ die Reihe der x wahlen, die der Vierergruppe (3, 47, 53, 97) angehort und im Intervall von p 100 nur vier Reprasentanten hat Dann ist ein geeigneter Ausgangswert von x festzusetzen, der wie folgt gewonnen wird

Ich gehe von einer runden Zahl L aus die in der Umgebung von $\sqrt{2q} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{q}$ gewahlt wird L wird Bezugszahl fur die Berechnung der Quadrate x^2 Man rechnet also wenn e_1, e_2, e_3, e_4 die Vierergruppe der x ist immer gleich paarweise aus $(L \pm e_1)^2$, $(L \pm e_2)^2$, $(L \pm e_3)^2$, $(L \pm e_4)^2$ Das bringt einen zweifachen Vorteil 1 kommen die doppelten Produkte gleich zu zweifacher Verwendung, 2 ist die einseitige ermudende Rechnung in einer einzigen Richtung des Intervalls vermieden, die in vielen Fallen sehr viel unnutze Werte ausrechnen muß

Es wird $\sqrt{2q}\ \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{q} \sim 2500$, denn es ist $\sqrt{6\,700\,417} < 2600$ Ich wahle also $L = 2500$ als Bezugszahl und bilde die Reihe $L \pm e_1$ $L \pm e_2$, $L \pm e_3$, $L \pm e_4$, wo die e_k der Reihe 3 47, 53, 97, 103, 147, 153, 197, 203, entsprechen Die zusammengehorigen Werte $L \pm e_k$, die gleichzeitig berechnet werden können werden untereinander geschrieben Dann kommt die Reihe

$$L = 2500$$

± 3	2503	± 47	2547	± 53	2553	2597	2603	2647	2653	2697
	2497		2453		2447	2403	2397	2353	2347	2303

Man rechnet die Differenz $2q - x^2$ fur die großere des Zahlenpaares $L \pm e_i$ aus, und addiert zum Rest den Wert $2L\ e_i = 5000\,e_i$ Das ergibt die folgende Rechnung, wenn mit $Z^{(+)}$ durchgehends die größere Zahl des Paares $L \pm e_i$ bezeichnet wird

$2q^1 =$	13400834	13400834	13400834	13400834	13400834	13400834
$z^{(+)2} =$	6265009	6487209	6517809	6744409	6775609	7006609
$z^{(+)} =$	2503	2547	2553	2597	2603,	2647
$2q - z^{(+)2}$	—	7913625	7883025	—	6625225	6394225
$+ 2 Le_1$	—	+ 15000	+ 235000	—	+ 515000	+ 735000

Bei der Rechnung wird man zunächst alle die Differenzen $2q - z^2$ außer Diskussion lassen, bei denen die Z_3 zeigt, daß $2q - z^2$ nicht Quadratzahl sein kann. Das ist bei unserer Reihe durch einen wagerechten Strich in den beiden Fällen angedeutet, wo einmal $Z_3 = 8$, das andere Mal $Z_3 = 4$ wird. Beachtet man weiter, daß die Endkomplexe $\underline{225}$ Quadrate sein können von Zahlen der Endkomplexe 15, 35, 65, 85, die Endkomplexe $\underline{625}$ Quadrate sein können von Zahlen der Endkomplexe 25, 75 und die Endkomplexe $\underline{025}$ Quadrate sein können von Zahlen der Endkomplexe 05, 45, 55, 95, so läßt sich die Endscheidung darüber, ob eine Differenz $\Delta = 2q - z^2$ Quadrat werden kann oder nicht, in allen Fällen durch eine sehr einfache Größenabschätzung erbringen.

Beispiel. $2q - z^2 = 7313625$. Da $2700^2 = 7290000$ ist, so könnte 7313625 nur 2725^2 sein (wegen der Quadratendung 625). Es wird aber $2725^2 = 2700^2 + 5 \cdot 27000 + 625 > 7313625$. 7548625 könnte nur gleich 2775^2 sein, das aber $= (2800 - 25)^2 = 7840000 - 5 \cdot 28000 + 625 = 7700625$ wird. Die Weiterführung der Rechnung bringt schließlich den Wert $z = L - 353$:

$$z^2 = (2500 - 353)^2 = 6250000 - 5000 \cdot 353 + 353^2 = 4609609.$$

Dem entspricht die Differenz $\Delta = 2q - z^2 = 8791225 = 2965^2$, womit die Zerlegung gefunden ist:

$$2q = 2965^2 + 2147^2$$

oder

$$q = \left(\frac{2965 + 2147}{2}\right)^2 + \left(\frac{2965 - 2147}{2}\right)^2 = \underline{2556^2 + 409^2}$$

Es ist also

$$K^{(5)} = 2^{32} + 1 = p \cdot q = 641 \cdot 6700417$$

$$p = 641 = 25^2 - 4^2 = u^2 + v^2, \quad u = 25 \quad v = 4,$$
$$q = 6700417 = 2556^2 + 409^2 = s^2 + t^2, \quad s = 2556, \quad t = 409$$

Nach unserem Formelsystem, das die Komponenten U, V, S, T mit den u, v, s, t verknüpft, ergeben sich daraus die Quadratsummenzerlegungen von $\underline{A = p \cdot q}$:

1. $P = u \cdot s - v \cdot t = 63900 - 1636 = 62264,$
$Q = v \cdot s + u \cdot t = 10224 + 10225 = 20449$
$S = u \cdot s + v \cdot t = 65536, \qquad T = v \cdot s - u \cdot t = 1$

Damit sind die beiden Quadratsummenzerlegungen der $K^{(5)}$ wieder gefunden

Wir haben schon im Teil I davon gesprochen, daß fur die Untersuchung der bei der Kreisteilung ausgezeichneten Zahlen $K^{(n)} = 2^{2^n} + 1$ noch viel zahlentheoretische Arbeit zu leisten ist Es scheint kein aussichtsloser Weg zu sein zunachst die Zahlen $L^{(2)} = 2^{2^2+1} + 2^{2^2-1} + 1$ auf ihre Eigenschaften, etwa die Dezimalbruchentwicklung, Quadratsummenzerlegung usw zu untersuchen

Es war insbesondere

$$641 = 2^{2^3+1} + 2^{2^3-1} + 1 \qquad 41 = 2^{2^2+1} + 2^{2^2-1} + 1 \text{ usw}$$

Ich betrachte den zweiten Faktor $q = 6\,700\,417$ der Zerlegung von $2^{2^5} + 1 = 641 \cdot q$

Es war $q = 6\,700\,417 = 2556^2 + 409^2 = s^2 + t^2$

Die beiden Komponenten s und t zeigen merkwurdige Beziehungen zu den Zahlen $L^{(2)}$ Es wird $s = 2556 = 2^2(L^{(3)} - 2)$ und $t = 409 = 2 \cdot 5 \cdot L^{(2)} - 1$

Es laßt sich die Fragestellung nicht abweisen, ob es besondere Zahlen gibt, bei denen es zwischen den Zerlegungen $K = u^2 + v^2$ und $K = x^2 - y^2$ bestimmte innere Gesetzmaßigkeiten gibt Da in dieser Richtung bisher keine allgemeinen zahlentheoretischen Gesetze und keine Methoden gefunden sind so bleibt der empirischen sagen wir der numerisch experimentellen Arbeit noch viel Raum zur Betatigung, und es erscheint die Ausbildung numerischer Methoden auf exakter Grundlage nicht zwecklos

Die letzte Betrachtung fuhrt auf eine Reihe anderer Zahlen die Primfaktoren bestimmter Struktur haben mussen Eine dieser Zahlen ist uns schon bei den Teilbarkeitsbetrachtungen begegnet, namlich die Zahl $11\,111 = \frac{10^5 - 1}{3^2} = 41 \cdot 271$

Leute mit einigem Interesse fur Zahlen wunschen zuweilen zu wissen, ob z B die mit 11 Einern beschriebene Zahl 11 111 111 111 eine Primzahl ist oder wie ihre Faktoren aussehen

Ehe man zu rechnen anfangt wird man sich eine solche Zahl erst etwas naher ansehen Zunachst ist die Zahl als Summe absteigender Potenzen der Grundzahl 10 dargestellt, und wir wollen statt 10 die allgemeine Grundzahl g nehmen

Der Exponent p in $A = \frac{10^p - 1}{3^2}$ soll eine Primzahl sein da fur zusammengesetzte Exponenten $m = p \cdot q$ sofort Zerlegungen gefunden werden konnen, denn es ist allgemein $x^{p \cdot q} - 1$ immer durch $x^p - 1$ und durch $x^q - 1$ teilbar

Es bleiben also zu betrachten, wenn g die Grundzahl des Zahlensystems ist, die Zahlen der Form

$$M^{(p)} = \frac{g^p - 1}{g - 1} = g^{p-1} + g^{p-2} + g^{p-3} + \cdots + g + 1$$

Nach einem grundlegenden Satz aus der Theorie der Kreiskörper kann die Funktion

$$K(g) = g^{p-1} + g^{p-2} + \cdots + g + 1$$

nur ganze rationale Faktoren der Form $l = 2k \cdot p + 1$ haben, wo k eine beliebige ganze rationale Zahl ist. Da diese Tatsache für jede Grundzahl g gilt, so sind auch diese Zahlen der Form

$$10^{p-1} + 10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10 + 1,$$

d. h. die im dekadischen Zahlensystem mit p Einsen geschriebenen Zahlen nur durch Primzahlen der Form $P = 2k \cdot p + 1$ teilbar, womit die Zerlegungsuntersuchung solcher Zahlen sehr vereinfacht ist. Zu bemerken ist noch, daß außer den Faktoren der Form $2kp + 1$ noch der Faktor p, und zwar in der zweiten Potenz auftreten kann.

Beispiele

$$\frac{10^3 - 1}{3^2} = 3 \cdot 37 \qquad \underline{(37 = 2^2 \cdot 3 \cdot 3 + 1)},$$

$$\frac{10^5 - 1}{10 - 1} = 11111 = 41 \cdot 271 \qquad \underline{(41 = 2 \cdot 4 \cdot 5 + 1, \quad 271 = 2 \cdot 27 \cdot 5 + 1)},$$

$$\frac{10^7 - 1}{10 - 1} = 1111111 = 239 \cdot 4649$$

$$(239 = 2 \cdot 17 \cdot 7 + 1, \quad 4649 = 2 \cdot 332 \cdot 7 + 1),$$

$$\frac{10^{11} - 1}{10 - 1} = 11111111111 = 21649 \cdot 513239$$

$$(21649 = 2 \cdot 984 \cdot 11 + 1, \quad 513239 = 2 \cdot 23329 \cdot 11 + 1).$$

Die genaue Betrachtung der beiden Faktoren

$$p = 21649 = 2 \cdot 984 \cdot 11 + 1 = 2 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot \underline{41} \cdot 11 + 1,$$

$$q = 513239 = 2 \cdot 23329 \cdot 11 + 1 = 2 \cdot \underline{41} \cdot 569 \cdot 11 + 1$$

zeigt im Aufbau von p und q das beidesmalige Auftreten des für

$$\frac{g^5 - 1}{g - 1} = \frac{g^{\frac{p-1}{2}} - 1}{g - 1}$$

charakteristischen Faktors 41.

Es ist zu vermuten, daß zwischen den Teilern von Zahlen so ausgezeichneter Struktur, die besonders einfach gebaute Funktionen der Grundzahl g sind, Beziehungen bestehen, daß also wie hier für den Aufbau der Faktoren von

$$\frac{g^p - 1}{g - 1} = g^{p-1} + g^{p-2} + g^{p-3} + \cdots + g + 1$$

die Faktoren eine Rolle spielen, die der Funktion

$$\frac{g^{\frac{p-1}{2}} - 1}{g - 1}$$

entstammen Es gibt auf diesem Gebiet was bei der Muhe der numerischen Arbeit verstandlich ist, vor allem wenig Material das man zum Auffinden allgemeiner Gesetze verwenden konnte Außerdem steht zu vermuten daß die Beweise fur so gefundene Gesetze große Schwierigkeiten machen werden, wie man dies in der Zahlentheorie bei dem Nachweis experimentell gefundener Tatsachen gewohnt ist

Bei unserer Zahl $K^{(11)} = 11\,111\,111\,111 = 21\,649 \cdot 513\,239$ fallt außerdem die Übereinstimmung der dreistelligen Endkomplexe der Faktoren mit denen der $K^{(7)} = 1\,111\,111 = 239 \quad 4649$ auf Die Bestimmung der Zerlegung von $K^{(11)}$ ist nach den gemachten Bemerkungen nicht mehr schwierig, doch soll hier die ins einzelne gehende Rechnung nicht durchgefuhrt werden

§ 2. Die Lösung einer kubischen Gleichung mit rationalen Wurzeln.

Eine derartige Aufgabe bei der numerische Rechnung mit mathematischer Überlegung gut verknupft ist, ist im Vortrag vom 18 April nicht gestellt worden Ich greife deswegen auf eine Aufgabe zuruck, die ich in einem Vortrag am 28 November 1913 im Physikalischen Verein zu Frankfurt a M gelost habe und die in die psychologische Literatur[1]) ubergegangen ist

Die Gleichung lautet

$$x^3 - 649\,x^2 - 111\,009\,x + 58\,328\,361 = 0$$

Die Vorzeichenreihe der Glieder der Gleichung $(+ \ - \ - \ +)$ weist zwei Zeichenwechsel und eine Zeichenfolge auf also hat die Gleichung zwei positive und eine negative Wurzel

Setze ich versuchsweise $x = 649$, so wird der Wert der linken Seite negativ Der Wert $x = 700$ macht die linke Seite positiv, so daß eine Wurzel zwischen 700 und 649 anzunehmen ist

Die drei Wurzeln seien u, v, w dann mussen nach den Grundlehren der Algebra die Beziehungen bestehen

$$\begin{aligned} u + v + w &= +649 \\ u\,v + v\,w + w\quad u &= 111\,009\,, \\ u \quad v \quad w &= -58\,328\,361 \end{aligned}$$

Das Produkt $\Pi = u \quad v \cdot w$ der Wurzeln laßt sich in einfacher Weise in Faktoren zerlegen

1 Die Quersumme zeigt die Teilbarkeit durch 9, und es kommt

$$\Pi = u \cdot v \cdot w = -9 \cdot 6\,480\,929$$

---

[1]) Vgl *A Messer* Psychologie

2. Die (7 · 11 · 13-) Probe zeigt

$$\begin{array}{rr} 6 \mid 480 & \mid 929 \\ -\ 6 & -\ 474 \\ \hline 474 & 455 = 5 \cdot 7 \cdot 13 \end{array}$$

die Teilbarkeit durch 7 und 13. Um 6 480 929 durch $91 = 7 \cdot 13$ zu dividieren, benutzen wir einen naheliegenden Kunstgriff, indem wir den Bruch $\frac{6\,480\,929}{91}$ mit 11 erweitern und rechnen

$$\frac{6480929 \cdot 11}{1001} = \frac{71\,290\,219}{1001} = \frac{71\,290\,219}{1000} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{1000}} = 71\,290\,219 \left\{1 - \frac{1}{1000}\right\} = \underline{71\,219}$$

Der hier benutzte Kunstgriff steht in enger Beziehung zu der Bildung von Ausdrücken, die wir in Teil I Teilerfunktionen genannt haben und die wir in allgemeiner Form bei der näherungsweisen Lösung nicht aufgehender Divisionsaufgaben später noch zu benutzen haben werden. Hier bei der Lösung der Gleichung kommt es darauf an, den Faktor 71 219 des Produktes $\Pi = u \cdot v \cdot w$ weiter zu zerlegen.

Man erkennt unmittelbar die Quadratdifferenz

$$71\,219 = 72\,900 - 1681 = 270^2 - 41^2 = 311 \cdot 229,$$

so daß die Zerlegung des Produktes Π wird

$$\Pi = u \cdot v \cdot w = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 229 \cdot 311.$$

Da nach der Abschätzung der Größen eine der Wurzeln als nahe unterhalb 700 gelegen bestimmt war, nämlich im Intervall (649 — 700), so ist diese Wurzel $= 3 \cdot 229 = 687$ zu setzen, also $u = 687$.

Man wird diese Annahme rechtfertigen können, einmal dadurch, daß man die linke Seite der Gleichung erst für $x = 649$ und dann für $x = 700$ näherungsweise ausrechnet und interpoliert, das andere Mal, indem man für den Endkomplex 87 der angenommenen Wurzel eine kleine Endzifferrechnung durchführt.

Es wird

$$\begin{array}{rlll} 87^3 = & 658\,503 & \quad 87^2 = 7569 \mid 569 \cdot 649 = 609^2 - 40^2 = 369\,\underline{481} \\ & -\ 481 & \\ \hline & -\ 783 & \quad 111\,009 \cdot 87 = \cdot\cdot\ 783 \\ l = & 61 & \end{array}$$

Es wird, wie die kleine Näherungsrechnung zeigt, die Differenz durch 10^2 teilbar, womit die Richtigkeit der Annahme des Endkomplexes 87 für die Wurzel u in hohem Grade wahrscheinlich wird.

Die angekündigte Interpolationsbetrachtung macht sich so

$$1.\ \bar{u} = 649 \quad \underbrace{\bar{u}^3 - 649\,\bar{u}^2}_{0} - 111\,009 \cdot 649 + 58\,328\,361$$

$$= -72\,040\,000 = -13\,712\,000$$
$$\underline{+58\,328\,361}$$

$2\;\; \overline{\overline{u}} = 700$

$$
\begin{array}{rrrr}
\overline{\overline{u}}^3 = & 343\,000\,000 & -\,111\,009 \cdot 700 = & -\,7\;\;11\;\;101\,000 \\
-\,649\,\overline{\overline{u}}^2 = & -\,318\,010 & & = -\,77\,707\,000 \\
\hline
 & +\;\;24\,990\,000 & 83\,318\,000 & \\
 & +\;\;58\,328\,361 & -\,77\,107 & \\
\hline
 & +\;\;83\,318\,000 & +\;\;5\,600\,000 = F(\overline{\overline{u}}) &
\end{array}
$$

Daraus folgt

$$F(\overline{\overline{u}}) - F(\bar{u}) = 20\,300\,000 \qquad \overline{\overline{u}} - \bar{u} = 700 - 649 = 51$$

Bei linearer Interpolation folgt in roher Annäherung hieraus für die Lage der Wurzel

$$u = 649 + 51 \cdot \frac{13.7}{20.3} = 649 + 34.4$$

Also liegt u etwas oberhalb 683, womit unsere Annahme $u = 687$ gestützt wird.

Es wird $u = 687$ und demnach

$$v \cdot w = -3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 311 = -273 \cdot 311 = -84\,903$$

Da $u + v + w = 649$, so wird $v + w = 649 - 687 = -38$, und es ergibt sich sofort für v, w die quadratische Gleichung

$$y^2 + 38\,y - 84\,903 = 0 \qquad y = -19 \pm \sqrt{\begin{matrix}84\,903 \\ -\,361\end{matrix}}\,,$$

$$y = -19 \pm \sqrt{85\,264}\,,$$

$$y = -19 \pm 292 \quad \Big| \quad y_1 = v = +273 \qquad y_2 = w = -311$$

Die drei Wurzeln der kubischen Gleichung werden also

$$u = +687 \qquad v = +273\,, \qquad v = -311$$

In der Tat baut sich die kubische Gleichung richtig aus diesen drei Wurzelwerten auf, denn es wird

1. $u + v + w = 649$, so daß der Koeffizient von x^2 richtig $= -649$ wird.

2. $u \cdot v \cdot w = -58\,328\,361$, also das absolute Glied richtig $= +58\,328\,361$.

3. $u\,v + v \cdot w + w \cdot u = u(v + w) = 687 \cdot (-38) - 273 \cdot 311$ $= -26\,106 - 84\,903 = -111\,009$, also der Koeffizient von x richtig gleich $-111\,009$, womit alle Koeffizienten der Gleichung dritten Grades richtig aus den drei Wurzeln bestimmt sind. Damit ist die Richtigkeit der Lösung vollständig nachgewiesen.

Die Bestimmung der Wurzeln der kubischen Gleichung zeigt, wie man durch richtige Überlegung auch bei großen Zahlen mit sehr wenig annähernder Rechnung auskommt und wie die Kenntnis der Teilbarkeitseigenschaften der Zahlen fördernd auf die Rechnung einwirkt.

§ 3. Einiges über approximatives Rechnen. Einfache Rechnung mit der Zahl π.

In der Funktionentheorie und in der Zahlentheorie ist man bestrebt, komplizierte Funktionen bzw. Zahlen durch möglichst einfache darzustellen. Man versucht, die komplizierten Größen durch solche anzunähern, die sich in einfacher Weise aus ganzen rationalen Funktionen oder aus rationalen Zahlen aufbauen.

Die Darstellung der Funktionen und der algebraischen Zahlen durch Potenzreihen, die Theorie der Kettenbrüche z. B. sind Folgen dieser Bestrebungen.

Bei der numerischen Rechnung mit rationalen und transzendenten Zahlen ist deren Darstellung durch rationale Näherungswerte mit kleinen Korrektionsgliedern von erheblichem Vorteil.

Das gilt besonders für solche transzendente Zahlen, die in den numerisch auszuwertenden Formeln immer wieder vorkommen. Man wird sofort an die Zahlen e und π denken.

Will man z. B. Kreis, Kugel, Zylinderberechnungen mit einiger Genauigkeit im Kopfe, aber ohne Anwendung von Logarithmen, ausrechnen, so ist eine Darstellung $\pi = a + \delta$ von großem Vorteil, wenn a eine rationale Zahl, mit der sich leicht rechnen läßt, und δ eine kleine Korrektion ist, so daß in der Form $\pi = a\,(1 \pm \varepsilon)$, ε ein gegen 1 kleiner Bruch ist.

Ich gehe aus von dem Näherungswert $\bar{\pi}$ des Archimedes für die Zahl π. Es ist $\bar{\pi} = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$, und es ist $\bar{\pi} > \pi$ ein zu großer Wert, so daß die anzubringende Korrektion δ negativ ausfällt. Dann kommt

$$\begin{aligned} \bar{\pi} = \frac{22}{7} = 3\frac{1}{7} &= 3{,}142\,857\,|\cdots \\ \pi &= 3{,}141\,593\,|\cdots \\ \hline \delta &= 0{,}001\,264 \end{aligned}$$

Es ist $4\pi = 12{,}5664$, und der Korrektionswert δ ist mit sehr guter Annäherung $\delta = \frac{4\pi}{10^4}$. Multipliziert man $\frac{22}{7}$ mit $(1 - 0{,}00004) = 0{,}9996$, so kommt

$$\frac{22}{7} \cdot \frac{9996}{10000} = \frac{22 \cdot 1428}{10000} = 3{,}1416,$$

so daß unsere Korrektionsrechnung der Durchführung der Rechnung mit dem sehr guten Näherungswert $3{,}1416$ für π entspricht.

Aufgaben mit der Konstanten π, die sonst schwierig erscheinen, werden dadurch dem Kopfrechner zugänglich.

Beispiele.

1. Der Radius eines Kreises ist $r = 773$ m, zu bestimmen ist die Kreisfläche.

Es wird

$$J = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 773^2\,\text{qm} = \left(\frac{22}{7} + \delta\right)\ 597\,529\,,$$

$$\begin{array}{rrl}
3 & 597\,529 = & 1\,792\,587 \\
+\frac{1}{7} & 597\,529 = & 85\,361 \\
\hline
 & = & 1\,877\,948 \\
-0{,}4^0/_{00} & = & -751 \\
\hline
 & J = & 1\,877\,197\ \text{qm}
\end{array}$$

Die Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen ergibt

$$\begin{array}{rl}
\log \pi = 0{,}49715 & \log r = 2\,88818 \\
+2 \cdot \log r = 5\,77636 & \\
\hline
\log J = 6{,}27361 & \\
J = 1\,877\,600\ \text{qm} &
\end{array}$$

2. Der Radius einer Kugel ist $r = 397$ m, zu bestimmen ist die Oberfläche und der Inhalt der Kugel Es wird

$$1\ \ O = 4\,\pi\,r^2, \quad 2\ \ V = \frac{4}{3}\pi\,r^3\,,$$

oder für die Rechnung besser geeignet $V = \frac{\pi}{6}\ d^3$, wenn $d = 2r$ der Kugeldurchmesser ist Es kommt

1 $O = 4\,\pi\,r^2 = \pi \cdot d^2$

$$\begin{array}{rr}
d^2 = 794^2 = & 630\,436 \\
3\,d^2 = & 1\,891\,308 \\
\frac{1}{7}\,d^2 = & -90\,062 \\
\hline
\pi\ d^2 = & 1\,981\,370 \\
-0{,}4^0/_{00} = \delta\ \ d^2 = & -793 \\
\hline
 & O = 1\,980\,577\ \text{qm}
\end{array}$$

2 $V = \frac{\pi}{6}\ d^3$

$$\begin{array}{rl}
d^3 = & 500\,566\,184 \\
\frac{1}{6}\ d^3 = & 83\,427\,697 \\
3\ \ d^3 = & 250\,283\,091 \\
\frac{1}{7} \cdot d^3 = & 11\,918\,242 \\
\hline
\pi \cdot \frac{d^3}{6} = & 262\,201\,233 \\
-\delta \cdot \frac{d^3}{6} = & -104\,880 \\
\hline
 & 262\,096\,353
\end{array}$$

$V = 262\,096\,353$ cbm

Die Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen ergibt

1. $\log d = 2{,}89982$

$$\begin{aligned} \log \pi &= 0{,}49715 \\ 2\ \log d &= 5{,}79964 \\ \hline \log O &= 6{,}29679 \\ O &= 1\,980\,500 \text{ qm} \end{aligned}$$

2. $\log d = 2{,}89982$

$$\begin{aligned} \log d^3 &= 8{,}69946 \\ \log 6 &= 0{,}77815 \\ \hline \log \frac{d^3}{6} &= 7{,}92141 \\ \log \pi &= 0{,}49715 \\ \hline \log V &= 8{,}41856 \end{aligned} \qquad V = 262\,160\,000 \text{ cbm}$$

Es braucht nicht besonders nachgewiesen zu werden, daß dieses im Kopfe gut durchführbare Rechenverfahren mindestens die Genauigkeit sechsstelliger Logarithmen gewährleistet. Wichtig ist, daß die Methode mit der gleichen Leichtigkeit auch auf die Umkehrungsaufgaben anwendbar ist, da die Division mit $\pi = \bar{\pi} - \delta$ gleich einfach durchführbar ist wie die Multiplikation. Es wird allgemein

$$\frac{A}{\pi} = \frac{A}{\bar{\pi}(1-\delta)} = \frac{A}{\bar{\pi}}(1+\delta) = \frac{7}{22} A (1 + 0{,}00004)$$

Beispiel. Der Inhalt eines Kreises ist $J = 2\,159\,016$ qm. Wie groß ist der Radius?

Es wird

$$\frac{J}{\pi} = \frac{7}{22} \cdot 2\,159\,016 (1 + 0{,}00004) = 687\,234$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{22} J &= 98\,137 \\ \frac{7}{22} J &= 686\,959 \\ +0{,}00004 \cdot P &= 275 \\ \hline r^2 &= 687\,234 \end{aligned}$$

Da $829^2 = 687\,241$, so wird r mit großer Genauigkeit

$$r = 829$$

Die Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen ergibt

$$\begin{aligned} \log J &= 6{,}33425 \\ -\log \pi &= 0{,}49715 \\ \hline \log (r^2) &= 5{,}83710 \\ \log r &= 2{,}91855 \\ r &= 829 \text{ m} \end{aligned}$$

2 Der Inhalt einer Kugel ist $V = 2\,373\,449$ cbm wie groß ist der Durchmesser?

Es wird

$$J = \frac{\pi}{6} d^3, \quad d = \sqrt[3]{\frac{6J}{\pi}}$$

Es wird $\frac{6J}{\pi} = 6J \cdot \frac{7}{22} = 2\left(J - \frac{1}{22} J\right)$

$$\begin{aligned} J &= 2\,373\,449 \\ -\tfrac{1}{22} J &= -107\,884 \\ \hline \Delta &= 2\,265\,565 \\ 2\Delta &= 4\,531\,110 \\ +0{,}0004 \quad &= \quad 1\,812 \\ \hline R &= 4\,532\,922 \end{aligned}$$

$$d = \sqrt[3]{4\,532\,922}$$

Es ist $165^3 = 4\,492\,125$, also kommt

$$d = \sqrt[3]{165^3 - 40\,797}$$

so daß nach der Näherungsformel

$$\sqrt[3]{A^3 + d} = A + \frac{d}{3A^2}$$

in erster Näherung sich d bestimmen läßt

$$d = 165 + \frac{40\,797}{3 \cdot 165^2} = 165 + \frac{40\,797}{81\,675} = 165 + 0{,}5 = \underline{165{,}5}$$

Der Durchmesser d wird also $\underline{d = 165{,}5 \text{ m}}$

Mit fünfstelligen Logarithmen ergibt sich

$$\begin{aligned} \log V &= 6{,}37538 \\ +\log 6 &= 0{,}77815 \\ \hline \log Z &= 7{,}15353 \\ -\log \pi &= 0{,}49715 \\ \hline \log R &= 6{,}65638 \\ \log d &= 2{,}21879 \\ \underline{d} &\underline{= 165{,}5 \text{ m}} \end{aligned}$$

Bei der Durchführung der Zahlenrechnung habe ich von einer Näherungsformel Gebrauch gemacht, auf die wir schon früher hingewiesen haben die natürlich im binomischen Lehrsatz wurzelt und in ihrer angenäherten Form oft mit Vorteil bei Zahlenrechnungen angewandt werden kann Für Quadrat und Kubikwurzeln lautet die Formel in ihrer einfachsten Form

1 $\sqrt{A^2 + d} = A + \frac{d}{2A} - + \cdots$

2 $\sqrt[3]{A^3 + d} = A + \frac{d}{3A^2} - + \cdots$

Man erkennt die naherungsweise Richtigkeit der beiden Formeln, wenn man die Gleichungen in die zweite bzw. in die dritte Potenz erhebt. Dann kommt

$$\left(A + \frac{d}{2A}\right)^2 = A^2 + d + \frac{d^2}{4A^2} + \cdots,$$

also ist

$$A + \frac{d}{2A} > \sqrt{A^2 + d},$$

und man kann, wenn großere Genauigkeit verlangt wird, leicht ein weiteres Korrektionsglied anfugen, was wir im einzelnen nicht weiter ausfuhren wollen. Es kommt bei Anwendung dieser Formeln darauf an, die dem Radikanden R naheliegende Bezugszahl $B = A^k$ zu finden, was einige Rechnung erfordert, während die Bestimmung der $k$ten Wurzel aus

$$\sqrt[k]{A^k - d}$$

eine leichte Arbeit ist.

§ 4. $w = \sqrt[q]{A^q + d}$.

Allgemein beruht die naherungsweise Bestimmung der n-Wurzel auf der *binomischen Entwicklung, die fur* $|\varepsilon| < 1$ *gultig ist*

$$\left(1+\varepsilon\right)^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n}\cdot\varepsilon + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\cdot 2}\cdot\varepsilon^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-1\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^3 + \cdots$$

$$= 1 + \frac{\varepsilon}{n} - \frac{n-1}{2n^2}\varepsilon^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot n^3}\varepsilon^3 - + \cdots$$

und auf der entsprechenden fur negatives ε

$$(1-\varepsilon)^{\frac{1}{n}} = 1 - \frac{1}{n}\varepsilon - \frac{n-1}{2n^2}\cdot\varepsilon^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\, n^3}\varepsilon^3 - \cdots$$

Ist zu bestimmen $\sqrt[n]{R}$, wo $R = A^n + d$ ist, so kommt dann einfach

$$\sqrt[n]{R} = \sqrt[n]{A^n + d} = A\cdot\sqrt[n]{1 + \frac{d}{A^n}} = A\,(1+\varepsilon)^{\frac{1}{n}}$$

$$= A\left\{1 + \frac{d}{n\cdot A^n} - \frac{n-1}{2n^2}\left(\frac{d}{A^n}\right)^2 + - \cdots\right\}$$

$$= A + \frac{d}{n\,A^{n-1}} - \frac{n-1}{2n^2}\,\frac{d^2}{A^{2n-1}} + - \cdots$$

und die entsprechende Formel fur negatives d

$$\sqrt[n]{A^n - d} = A - \frac{d}{n\,A^{n-1}} - \frac{n-1}{2n^2}\,\frac{d^2}{A^{2n-1}} - \cdots$$

Diese Formeln sind in mancher Richtung in geeignete Form gebracht worden, um zur genaherten schnellen Bestimmung von Wurzeln brauchbar zu sein. Das ist nicht immer mit der nötigen Kritik geschehen, wie die im Jahre 1913 von Paris aus mit großer Reklame bekannt gemachten neuen Rechenmethoden von Professor *Quinton* zeigen, der ein Verfahren angibt, das in einem engbegrenzten Bereich Gültigkeit hat und im allgemeinen zu großen Rechenfehlern führt. Die mit der zur Lösung im Kopf von *Quinton* benötigten Zeit angegebenen Beispiele[1]) lassen die *Quinton*sche Methode zu, da sie im geeigneten Bereich ausgewählt sind.

Beispiele für die Wurzelbestimmung mit den aus der binomischen Reihe fließenden Näherungsformeln.

$$1.\quad \sqrt[3]{80\,165} = \sqrt[3]{43^3 + 658} = 43 + \frac{658}{3 \cdot 43^2} = 43 + \frac{658}{5547} = \underline{43{,}12}$$

$$2.\quad \sqrt[5]{8\,619\,572\,829} = \sqrt[5]{97^5 + 32\,232\,572} \quad (\text{es ist } 97^5 = 8\,587\,340\,257)$$

$$= 97 + \frac{32\,232\,572}{5 \cdot 97^4} = 97 + \frac{32\,232\,572}{442\,646\,405} = \underline{97{,}07}$$

$$3.\quad \sqrt[13]{9\,904\,578\,216\,740\,596} = \sqrt[13]{17^{13} + 353\,834\,659} = 17 + \frac{d}{13 \cdot 17^{12}}$$

$$= 17 + \frac{353\,834\,659}{13 \cdot 582\,622\,227\,229\,761}$$

$$= 17 + \frac{27\,218\,051}{582\,622\,227\,229\,761} = \underline{17{,}000\,000\,5}$$

Bei den hohen Wurzelexponenten macht die Bestimmung der Bezugszahl $B = A^n$ viel Arbeit, und die logarithmische Abschätzung führt schneller und müheloser zum Ziel, wie die ergänzende Bestimmung der Wurzel im letzten Beispiel zeigen wird.

Es ist der Radikand R eine 16stellige Zahl, und da der $\log 99 = 1{,}99\,564$ ist, so kommt mit einiger Annäherung $\log R = 15{,}9958$, also für den log der Wurzel

$$\log w = \frac{1}{13} \log R = 1{,}23045\,,$$

was gerade der log 17 ist. Also ist 17 der gesuchte Näherungswert der 13. Wurzel aus R.

Ich gehe mit einer kurzen Betrachtung auf das von *Quinton* angewandte, aber nirgends klar auseinandergesetzte Verfahren ein, weil es ein Musterbeispiel dafür ist, wie man Formeln zur Abkürzung von Rechenprozessen ***nicht*** aufstellen soll. In einer nicht veröffentlichten Arbeit aus dem Jahre 1913 habe ich gezeigt, welcher mathematische Gedanke dem *Quinton*schen Verfahren zugrunde liegt und inwiefern die Methode im allgemeinen unbrauchbar ist. Veranlassung gab mir dazu die Arbeit von *René Merle* im Maiheft 1913 der Pariser Zeitschrift „La Nature", die mir der Verfasser im Juni 1913 freundlichst zuschickte. *Merle* beschreibt in seinem Aufsatz Leistungen von *R. Quinton* im Bestimmen von Wurzeln, und zwar auch solcher, die nicht aufgehen, er

[1]) Vgl. die Zeitschrift „La Nature", Mai 1913, Aufsatz von *René Merle*.

gibt die Zeiten für die Lösungen an und sagt, daß der Kreis von Sachverständigen, vor dem die Demonstration stattfand, von der glänzenden Methode sehr eingenommen war. Die Grundlage der *Quinton*schen Methode gibt auch *R. Merle* nicht. Ich mußte aus den kurzen Angaben und den angegebenen Beispielen mir *Quintons* Gedankengang aufbauen und fand bald, daß es sich um eine sehr einfache Sache handelt, die bedauerlicherweise nur in einem beschränkten Bereich ihre richtige Gültigkeit hat.

Es wird angebracht sein, den *Quinton*schen Gedanken für einen beliebigen ungeraden Wurzelexponenten $q = 2n + 1$ auszusprechen und sein Rechenverfahren an dem gut übersehbaren Fall $q = 3$ zu erläutern.

Wir gehen aus von den beiden Binomialentwicklungen:

$$1.\quad \sqrt[q]{A^q + d} = A\sqrt[q]{1 + \frac{d}{A^q}} = A\left\{1 + \frac{d}{qA^q} - \frac{q-1}{2q^2}\left(\frac{d}{A^q}\right)^2 + \cdots\right\}$$

$$= A + \frac{d}{qA^{q-1}} - \frac{q-1}{2q^2}\,\frac{d^2}{A^{2q-1}} + \cdots,$$

$$2.\quad \sqrt[q]{A^q - d} = A - \frac{d}{qA^{q-1}} - \frac{q-1}{2q^2}\,\frac{d^2}{A^{2q-1}} \cdots$$

Um die Behandlung der Formeln möglichst kurz zu gestalten, schreibe ich:

$$1.\quad \sqrt[q]{R} = A + g_1 - g_2 + \cdots,$$

$$2.\quad \sqrt[q]{R} = A - g_1 - g_2 - \cdots$$

Quinton geht darauf aus, das erste Zusatzglied g_1 in zwei Komponenten $g_1 = G + g$ der Art zu zerlegen, daß es sich mit G sehr leicht rechnen läßt, während g nach Möglichkeit das zweite Zusatzglied $-g_2$ kompensiert. Eine solche Forderung läßt sich natürlich in einem gewissen Bereich, d. h. für die Umgebung eines gewissen Quotienten $\frac{d}{A^q} = \lambda$ erfüllen.

Außerhalb dieses Bereiches, dessen Grenzen offenbar durch die vorgeschriebenen Genauigkeitsbedingungen bestimmt sind, wird die *Quinton*sche Rechenmethode falsch. Man kann etwa so verfahren:

1. Für den Nenner qA^{q-1} von g_1 setze ich $qA^{q-1} = D + \delta$, wo D eine Zahl ist, mit der sehr einfach dividiert werden kann, also etwa $D = k \cdot 10^a$. Dann kommt, wenn wir der Einfachheit halber nur den Fall $d > 0$, also $\sqrt[q]{A^q + d}$ behandeln:

$$\sqrt[q]{A^q + d} = A + \frac{d}{D + \delta} - \frac{q-1}{2q^2}\,\frac{d^2}{A^{2q-1}}$$

$$= A + \frac{d}{D} - \frac{d}{D}\,\frac{\delta}{D} - \frac{q-1}{2q^2}\,\frac{d^2}{A^{2q-1}} + \cdots$$

Man erkennt, daß zum Zwecke der angestrebten Kompensation mit g_2 das Zusatzglied $\delta < 0$, also $q \cdot A^{q-1} = D - \delta$ sein muß.

Dann erfolgt als Bedingung der Kompensation des ersten Korrektionsgliedes $\frac{d}{D} - \frac{\delta}{D}$ mit dem Glied $-g_2$ der Binomialentwicklung

$$\frac{d}{D} - \frac{\delta}{D} = \frac{q-1}{2q^2} \cdot \frac{d^2}{A^{2q-1}},$$

woraus folgt

$$\frac{d}{A} = \frac{2}{q-1} (q A^{q-1})^2 \cdot \frac{\delta}{D^2}$$

Hier kann für $q A^{q-1}$ sein Wert $D - \delta$ gesetzt werden, dann kommt

$$\frac{d}{A} = \frac{2}{q-1} (D - \delta)^2 \frac{\delta}{D^2} = \frac{2}{q-1} \delta \left(1 - \frac{\delta}{D}\right)^2,$$

oder

$$\frac{d}{A^q} = \frac{2}{q-1} \frac{\delta}{A^{q-1}} \left(1 - \frac{2\delta}{D}\right)$$

Aus dieser Formel ist zu schließen: Der Bereich des Quotienten $\lambda = \frac{d}{A}$, innerhalb dessen in dem oben auseinandergesetzten Sinne Kompensation bei der Bestimmung von $w = \sqrt[q]{A^q + d}$ stattfindet, ist als Funktion von q und den beiden Komponenten D und δ des ersten Gliedes g_1 der Binomialreihe gegeben.

Man erhält, wie zu erwarten, für die verschiedenen Wurzelexponenten q auch verschiedene Rechenvorschriften. Der Hauptsache nach kommt es auf die geeignete Zerlegung $q A^{q-1} = D + \delta$ an, die außer von q noch sehr bestimmt von A abhängt. Man erhält je nach dem Wert von A verschiedene Rechenvorschriften im Falle des gleichen Exponenten q. Von einem einheitlichen Verfahren, das den Namen Methode verdient, kann demnach nicht die Rede sein. Das Verfahren wird für den einfachsten Fall $q = 3$ weiter auseinandergesetzt und auf seinen Gültigkeitsbereich untersucht.

Die Binomialformel wird dann

$$\sqrt[3]{A^3 + d} = A + \frac{d}{3A^2} - \frac{1}{9} \cdot \frac{d^2}{A^5} + \cdots$$

Ich behandele ein Zahlenbeispiel

1. $A = 800 \qquad d = 10\,000\,000$

$$\sqrt[3]{800^3 + 10\,000\,000} = \sqrt[3]{522 \cdot 10^6} = 800 + \frac{10^7}{3 \cdot 800^2} - \cdots +$$

Es wird $3 \cdot 800^2 = 1\,920\,000$, und es drängt sich die Zerlegung $3A^2 = 2\,000\,000 - 80\,000$ auf, so daß

$$D = 2 \cdot 10^6, \qquad \delta = +80\,000$$

wird.

Quinton nimmt an, daß die besprochene Kompensation in einem großen Bereich stattfindet, und rechnet, ohne sich um die Abgrenzung des Gültigkeitsbereiches zu kümmern, in folgender Weise

$$R = A^3 + d, \quad \sqrt[3]{R} = \sqrt[3]{A^3 + d} = A + \frac{d}{2 \cdot 10^6}$$

Beispiel

1 $\sqrt[3]{564\,000\,000} = \sqrt[3]{512\,000\,000 + 52 \cdot 10^6} = 800 + 26 = 826{,}0$,

2 $\sqrt[3]{572\,834\,529} = 800 + \dfrac{60{,}834 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^6} = 800 + 30{,}42 = 830{,}42$

Da es sich um eine kleine Rechnung handelt, bestimmen wir den Gültigkeitsbereich der *Quinton*schen Methode durch die Aufstellung einer kleinen Tafel, deren Einrichtung ohne weiteres verständlich sein wird

Radikand R	$\sqrt[3]{R}$ Quinton	$\sqrt[3]{R}$ Logarithmisch	Fehler
$518 \cdot 10^6$	803,0	803,12	−0,12
$520 \cdot 10^6$	804,0	803,14	−0,14
$522 \cdot 10^6$	805,0	805,2	−0,20
$524 \cdot 10^6$	806,0	806,2	−0,20
$526 \cdot 10^6$	807,0	807,2	−0,20
$528 \cdot 10^6$	808,0	808,2	−0,20
$530 \cdot 10^6$	809,0	809,3	−0,30
$532 \cdot 10^6$	810,0	810,3	0,30
$534 \cdot 10^6$	811,0	811,3	−0,30
$536 \cdot 10^6$	812,0	812,3	−0,30
$538 \cdot 10^6$	813,0	813,3	−0,30
$540 \cdot 10^6$	814,0	814,3	−0,30
$542 \cdot 10^6$	815,0	815,3	−0,30
$544 \cdot 10^6$	816,0	816,3	−0,30
$546 \cdot 10^6$	817,0	817,3	−0,30
$548 \cdot 10^6$	818,0	818,3	−0,30
$550 \cdot 10^6$	819,0	819,3	−0,30
$552 \cdot 10^6$	820,0	820,3	−0,30
$554 \cdot 10^6$	821,0	821,3	−0,30
$556 \cdot 10^6$	822,0	822,3	−0,30
$558 \cdot 10^6$	823,0	823,3	−0,30
$560 \cdot 10^6$	824,0	824,25	−0,25
$562 \cdot 10^6$	825,0	825,24	−0,24
$564 \cdot 10^6$	826,0	826,20	−0,20
$566 \cdot 10^6$	827,0	827,20	0,20
$568 \cdot 10^6$	828,0	828,17	−0,17
$570 \cdot 10^6$	829,0	829,12	−0,12
$572 \cdot 10^6$	830,0	830,10	−0,10
$574 \cdot 10^6$	831,0	831,08	−0,08
$576 \cdot 10^6$	832,0	832,03	−0,03
$578 \cdot 10^6$	833,0	832,98	+0,02
$580 \cdot 10^6$	834,0	833,97	+0,03
$582 \cdot 10^6$	835,0	834,92	+0,08
$584 \cdot 10^6$	836,0	835,88	+0,12
$586 \cdot 10^6$	837,0	836,82	+0,18
$588 \cdot 10^6$	838,0	837,78	+0,22
$590 \cdot 10^6$	839,0	838,72	−0,28
$592 \cdot 10^6$	840,0	839,68	−0,32
$594 \cdot 10^6$	841,0	840,62	+0,38
$596 \cdot 10^6$	842,0	841,55	+0,45
$598 \cdot 10^6$	843,0	842,50	+0,50
$600 \cdot 10^6$	844,0	843,42	+0,58
$602 \cdot 10^6$	845,0	844,36	+0,64
$604 \cdot 10^6$	846,0	845,30	+0,70
$606 \cdot 10^6$	847,0	846,24	+0,76
$608 \cdot 10^6$	848,0	847,17	+0,83
$610 \cdot 10^6$	849,0	848,08	+0,92
$612 \cdot 10^6$	850,0	849,02	+0,98
$614 \cdot 10^6$	851,0	849,94	+1,06
$616 \cdot 10^6$	852,0	850,86	+1,14
$618 \cdot 10^6$	853,0	851,78	+1,22
$620 \cdot 10^6$	854,0	852,70	+1,30
$622 \cdot 10^6$	855,0	853,68	+1,32
$624 \cdot 10^6$	856,0	854,54	+1,46
$626 \cdot 10^6$	857,0	855,44	+1,56
$628 \cdot 10^6$	858,0	856,34	+1,66
$630 \cdot 10^6$	859,0	857,24	−1,76
$632 \cdot 10^6$	860,0	858,16	+1,84
$634 \cdot 10^6$	861,0	859,08	−1,92
$636 \cdot 10^6$	862,0	859,98	+2,02
$638 \cdot 10^6$	863,0	860,88	+2,12
$640 \cdot 10^6$	864,0	861,76	+2,24
$642 \cdot 10^6$	865,0	862,68	+2,32
$644 \cdot 10^6$	866,0	863,58	+2,42

Zum Vergleich der Tafel mit der allgemeinen Entwicklung gehen wir auf die Gültigkeitsformel der Kompensation zurück, die für den allgemeinen Exponenten q entwickelt worden ist und wie folgt lautete

$$\frac{d}{A^q} = \frac{2}{q-1} \cdot \frac{\delta}{A^{q-1}} \left(1 - \frac{2\delta}{D}\right)$$

Für unseren Fall ist $q = 3$, $A = 800$, $\delta = 80000$, $D = 2 \cdot 10^6$

$$\frac{d}{A^3} = \frac{80\,000}{800^2} \left(1 - \frac{2 \cdot 80\,000}{2 \cdot 10^6}\right) = \frac{80\,000}{800^2} \cdot 0{,}92 = 0{,}115$$

$$d = 800^3 \cdot 0{,}115 = 512 \cdot 0{,}115 \cdot 10^6 = 58{,}88 \cdot 10^6$$

d. h. nach unserer allgemeinen Betrachtung muß der Bereich, innerhalb dessen das *Quinton*sche Verfahren brauchbar ist, in der Umgebung von $R = 800^3 + 58{,}88 \cdot 10^6$, also in der Nähe von $\underline{R = 570 \cdot 10^6}$ liegen, was die Tafel bestätigt.

Von einer allgemeinen Brauchbarkeit der *Quinton*schen Methode kann nicht die Rede sein, wie die ausgerechnete Tafel zeigt. Selbst bei sehr geringen Ansprüchen an die Genauigkeit ist mit dem Verfahren nichts anzufangen. Dazu kommt, daß mit dem Radikanden R die Näherungsmethoden wechseln, von einer mathematischen Methode also nicht die Rede sein kann.

In der Umgebung von $R = 700^3 + d$ wird man folgendes Verfahren anwenden, wie es *Quinton* nach den von *René Merle* gemachten Angaben auch tut. Es wird

$$3 \cdot 700^2 = 1\,470\,000 = 1{,}5 \cdot 10^6 - 30\,000$$

also

$$D = 1{,}5 \cdot 10^6, \quad \delta = 30\,000$$

Ich füge eine weitere kleine Tafel bei, um anschaulich zu machen, was *Quinton* in diesem Bereich zu leisten vermag.

Für $R = 900^3 + d$ kommt $3 \cdot 900^2 = 2\,430\,000 = 2{,}5 \cdot 10^6 - 70\,000$

$$D = 2{,}5 \cdot 10^6 \qquad \delta = 70\,000$$

Für $R = 600^3 + d$ kommt $3 \cdot 600^2 = 1\,080\,000 = 1\,100\,000 - 20\,000$

$$D = 1{,}1 \cdot 10^6 \qquad \delta = 20\,000 \text{ usw.}$$

Für $R = 900^3 + d$ wird das Rechenverfahren *Quintons* auch recht einfach.

Beispiel

$$\sqrt[3]{753 \cdot 10^6} = \sqrt[3]{729 \cdot 10^6 + 24 \cdot 10^6} = 900 + \frac{24}{2{,}5} = \underline{909{,}6}$$

Die logarithmische Rechnung ergibt

$$w = \sqrt[3]{753 \cdot 10^6} = \underline{909{,}76}$$

Die folgende Tabelle gibt einen Überblick über die Leistungsfähigkeit der *Quinton*schen Methode im Gebiet $R = 900^3 + d$

Radikand R	$\sqrt[3]{R}$ Quinton	$\sqrt[3]{R}$ Logarithmisch	Fehler	Radikand R	$\sqrt[3]{R}$ Quinton	$\sqrt[3]{R}$ Logarithmisch	Fehler
$741 \cdot 10^6$	904 8	904 92	−0 12	$821 \cdot 10^6$	936 8	936 38	+0 42
$743 \cdot 10^6$	905 6	905 74	−0 14	$823 \cdot 10^6$	937 6	937 13	+0 47
$745 \cdot 10^6$	906 4	906 54	−0 14	$825 \cdot 10^6$	938 4	937 88	+0 52
$747 \cdot 10^6$	907 2	907 34	−0 14	$827 \cdot 10^6$	939 2	938 64	+0 56
$749 \cdot 10^6$	908 0	908 16	−0 16	$829 \cdot 10^6$	940 0	939 40	+0 60
$751 \cdot 10^6$	908 8	908 98	−0 18	$831 \cdot 10^6$	940 8	940 16	+0 64
$753 \cdot 10^6$	909 6	909 76	−0 16	$833 \cdot 10^6$	941 6	940 92	+0 68
$755 \cdot 10^6$	910 4	910 58	−0 18	$835 \cdot 10^6$	942 4	941 68	+0,72
$757 \cdot 10^6$	911 2	911 36	−0 16	$837 \cdot 10^6$	943 2	942 40	+0 80
$759 \cdot 10^6$	912 0	912 18	−0 18	$839 \cdot 10^6$	944 0	943 18	+0 82
$761 \cdot 10^6$	912 8	912 98	−0 18	$841 \cdot 10^6$	944 8	943 90	+0 90
$763 \cdot 10^6$	913 6	913 78	−0 18	$843 \cdot 10^6$	945 6	944 68	+0 92
$765 \cdot 10^6$	914 4	914 58	−0 18	$845 \cdot 10^6$	946 4	945 40	+1 00
$767 \cdot 10^6$	915 2	915 38	−0 18	$847 \cdot 10^6$	947 2	946 15	+1 05
$769 \cdot 10^6$	916 0	916 18	−0 18	$849 \cdot 10^6$	948 0	946 90	+1 10
$771 \cdot 10^6$	916 8	916 96	−0 16	$851 \cdot 10^6$	948 8	947 63	+1 17
$773 \cdot 10^6$	917 6	917 76	−0 16	$853 \cdot 10^6$	949,6	948 38	+1 22
$775 \cdot 10^6$	918 4	918 54	−0 14	$855 \cdot 10^6$	950 4	949 12	+1 28
$777 \cdot 10^6$	919 2	919 32	−0 12	$857 \cdot 10^6$	951 2	949 86	+1 34
$779 \cdot 10^6$	920 0	920 12	−0 12	$859 \cdot 10^6$	952 0	950 60	+1 40
$781 \cdot 10^6$	920 8	920 92	−0 12	$861 \cdot 10^6$	952 8	951 33	+1 47
$783 \cdot 10^6$	921 6	921 70	−0 10	$863 \cdot 10^6$	953 6	952 08	+1 52
$785 \cdot 10^6$	922 4	922 48	−0 08	$865 \cdot 10^6$	954 4	952 82	+1 58
$787 \cdot 10^6$	923 2	923 25	−0 05	$867 \cdot 10^6$	955 2	953 54	+1 66
$789 \cdot 10^6$	924 0	924 04	−0 04	$869 \cdot 10^6$	956 0	954 28	+1 72
$791 \cdot 10^6$	924 8	924 825	−0 025	$871 \cdot 10^6$	956 8	955 02	+1 78
$793 \cdot 10^6$	925 6	925 60	0 00	$873 \cdot 10^6$	957 6	955,74	+1 86
				$875 \cdot 10^6$	958 4	956 48	+1 92
$795 \cdot 10^6$	926 4	926 38	+0 02	$877 \cdot 10^6$	959,2	957 20	+2 00
$797 \cdot 10^6$	927 2	927 15	+0 05	$879 \cdot 10^6$	960 0	957 92	+2 08
$799 \cdot 10^6$	928 0	927 94	+0 06	$881 \cdot 10^6$	960 8	958 65	+2 15
$801 \cdot 10^6$	928 8	928 70	+0 10	$883 \cdot 10^6$	961 6	959,32	+2 28
$803 \cdot 10^6$	929 6	929 48	+0 12	$885 \cdot 10^6$	962 4	960 08	+2 32
$805 \cdot 10^6$	930 4	930 25	+0 15	$887 \cdot 10^6$	963 2	960 82	+2 38
$807 \cdot 10^6$	931 2	931 02	+0 18	$889 \cdot 10^6$	964 0	961 55	+2 45
$809 \cdot 10^6$	932 0	931 80	+0 20	$891 \cdot 10^6$	964 8	962,25	+2 55
$811 \cdot 10^6$	932 8	932 54	+0 26	$893 \cdot 10^6$	965 6	962 98	+2 62
$813 \cdot 10^6$	933 6	933 32	+0 28	$895 \cdot 10^6$	966,4	963 70	+2,70
$815 \cdot 10^6$	934 4	934 10	+0 30	$897 \cdot 10^6$	967 2	964 40	+2 80
$817 \cdot 10^6$	935 2	934 84	+0 36	$899 \cdot 10^6$	968 0	965,14	+2 86
$819 \cdot 10^6$	936 0	935,60	+0 40				

Wie im Falle $R = 800^3 + d$ stellen wir auch hier den Kompensationsbereich nach der allgemeinen Formel fest Es ist

$$d = \frac{2}{q-1}\,\delta \cdot A\left(1 - \frac{2\delta}{D}\right)$$

In unserem Falle $R = 900^3 + d$ ist $q = 3$ $A = 900$ $D = 2{,}5 \cdot 10^6$, $\delta = 70\,000$

Dann kommt

$$d = 63{,}0944 \cdot 10^6 = 59{,}472 \cdot 10^6$$

Der Bereich der Kompensation hat also seinen Mittelpunkt bei $R = 900^3 + 59{,}472 \cdot 10^6$ oder $R = 788{,}472 \cdot 10^6$, was mit der Tafel recht gut übereinstimmt Im übrigen gilt für diese Tafel das gleiche wie für die vorige und allgemein ist zu sagen

1 Rechenmethoden die keine allgemeine Gültigkeit haben, können nicht allgemeine Verwendung finden

2 Immer ist bei der Bekanntgabe solcher Verfahren der Bereich der Gültigkeit anzugeben der im besonderen Fall aus der geforderten Genauigkeit zu bestimmen ist, ehe man anfängt nach einem solchen Verfahren zu rechnen

Die beiden näher betrachteten Gruppen $R = 800^3 + d$ und $R = 900^3 + d$ zeigen, wie das *Quinton*sche Verfahren zu handhaben ist Es erscheint angebracht, noch kurz auf den Exponenten $q = 5$ einzugehen, um zu sehen, wie dort das Prinzip der Kompensation in Anwendung zu bringen ist

Der Nenner $N = q \cdot A^{q-1}$ des ersten Gliedes g_1 der Binomialentwicklung wird hier

$$\underline{N = 5\,A^4}$$

Ich betrachte zunächst die Gruppe $R = 600^5 + d$ Hier kommt

$$N = 5 \cdot 36^2 \cdot 10^8 = 64{,}8 \cdot 10^{10}$$

Ich setze $N = D - \delta$ wo

$$D = 66{,}6667 \cdot 10^{10} = \frac{200}{3} \cdot 10^{10},$$

also $\delta = 1{,}8667 \cdot 10^{10}$ wird

$$\begin{array}{r} 66{,}6667 \\ \underline{-64{,}8000} \end{array} = \delta = 1{,}8667 \cdot 10^{10}$$

Dann kommt die einfache Rechnung nach *Quinton*

$$w = \sqrt[5]{600^5 + d \cdot 10^{10}} = 600 + \frac{d \cdot 10^{10}}{\frac{200}{3} \cdot 10^{10}} = \underline{600 + 0{,}015 \cdot d}$$

Beispiel

$$w = \sqrt[5]{8033 \cdot 10^{10}} = \sqrt[5]{600^5 + 257 \cdot 10^{10}} = 600 + 257 \cdot 0{,}015,$$
$$= 600 + 3{,}855 = 603{,}86$$

Logarithmisch kommt $\underline{w = 603{,}91}$ also findet in diesem Fall gute Übereinstimmung statt

Der Kompensationswert wird

$$\bar{d} = \frac{2}{4} \cdot 1{,}8667 \cdot 10^{10} \;\; 600 \;\; 0{,}944 = 528\,649 \;\; 10^{10}$$

In ahnlicher Weise wird man im Bereich $R = 900^5 + d \;\; 10^{10}$ fur den Nenner $5 \;\; 900^4$ von g_1 setzen

$$5 \;\; 900^4 = 5 \;\; 6561 \;\; 10^8 = 32\,805 \;\; 10^8 = 33\,333 \;\; 10^8 - 528 \;\; 10^8$$

$$D = \frac{10^3}{3} \cdot 10^{10}, \qquad \delta = 5{,}28 \cdot 10^{10}$$

Im Kompensationsbereich kann *Quinton* dann in folgender Weise rechnen

$$\sqrt[3]{900^5 + d \;\; 10^{10}} = 900 + \frac{d \;\; 10^{10}}{\frac{10^3}{3} \;\; 10^{10}} = 900 + \frac{3\,d}{10^3}$$

Beispiel $\quad w = \sqrt[5]{61\,826 \;\; 10^{10}} = \sqrt[5]{900^5 + 2777 \;\; 10^{10}}$

Quinton $\quad w = 900 + 2\,777 \;\; 3 = \underline{908\,331}$

Logarithmisch $\quad \sqrt[5]{61\,826 \;\; 10^{10}} = \underline{908\,31}$

Bestimmen wir den Kompensationswert d fur diesen Bereich, so kommt

$$\bar{d} = 5 \cdot 2833 \cdot 10^{10} \cdot 900 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}999\,84 = 2377{,}5 \;\; 10^{10}$$

Es wird

$$\sqrt[5]{900^5 + d} = \sqrt[5]{(59{,}049 + 2377{,}5) \;\; 10^{10}} = \sqrt[5]{61426{,}5 \;\; 10^{10}}$$

1 *Quinton*

$$w = 900 + \frac{2377\,5 \;\; 3}{10^3} = 900 + 3 \cdot 2{,}3775 = \underline{907{,}1325}$$

2 Logarithmisch

$$\sqrt[5]{61\,426{,}5 \;\; 10^{10}} = \underline{907{,}133}$$

Es ergibt sich, wie zu erwarten war in diesem Falle vollstandige Ubereinstimmung zwischen den beiden Werten Es ist nicht moglich die Gute des Verfahrens in all den einzelnen Fallen in Tabellen zu er proben Jedenfalls genugt es nicht den Anforderungen allgemeiner Verwendbarkeit und ist darum mit der notigen Reserve aufzunehmen Darum bleibt die Frage, wie derartige Rechnungen schnell und richtig im Kopf ausgefuhrt werden können Man laßt alle Kunsteleien beiseite und geht auf die Binomialformel zuruck

Es war

$$\sqrt[q]{A^q + d} = A + \frac{d}{q\,A^{q-1}} - \frac{q-1}{2\,q^2}\,\frac{d^2}{A^{2q-1}} + - \cdots$$

In vielen Fallen wird man bei der richtigen Bestimmung der Glieder g_1 und g_2 die geforderte Genauigkeit erzielen Wir wollen nun nicht

g_1 mit bequemer Rechnung auswerten und dann g_2 mit dem Fehler von g_1 kompensieren wie es *Quinton* macht Es ergab sich ein Verfahren, das nur in engem Bereich gultig ist und im allgemeinen zu bedenklichen Fehlern fuhren kann Wir bestimmen g_1 einigermaßen genau und leiten g_2 aus g_1 ab was durch eine leichte Rechnung immer moglich ist

Es ist wie man sofort aus der Formel erkennt,

$$g_2 = -\frac{1}{2} g_1^2 \frac{q-1}{A},$$

eine Beziehung die rechnerisch sehr leicht auszuwerten ist

Beispiel

1 $\sqrt[3]{596 \cdot 10^6} = \sqrt[3]{512 \quad 10^6 + 84 \quad 10^6} = 800 + \frac{84 \quad 10^6}{3 \quad 800^2} - g_2$

Bei der Division durch 3 $800^2 = 1\,920\,000$ setzen wir

$$1\,920\,000 = 2 \quad 10^6\,(1 - 4\%)$$

und schreiben in hinreichender Annaherung

$$w = \sqrt[3]{512 \quad 10^6 + 84 \cdot 10^6} = 800 + 42\,(1 + 0\,04) - g_2$$

Es wird $g_1 = 42\,(1 + 0\,04)$, also

$$g_2 = -42^2\,(1 + 0{,}08) \cdot \frac{1}{2} \frac{2}{800} = -\frac{1}{800} \quad 1764\,(1 + 0{,}08)$$

$$= -\frac{1}{800} \quad 1905{,}12 = -\frac{19 \quad 0512}{8} = 2\,381$$

$$w = 800 + 43\,68 - 2\,381 = \underline{841{,}299}$$

Die logarithmische Rechnung ergibt

$$w = \sqrt[3]{596 \quad 10^6} = \underline{841\,53}$$

Der Fehler ist $\Delta = -0\,23$, also keine schlechte Genauigkeit

Quinton erhalt $w = 842\,0$ also einen um 0 47 zu großen Wert

2 $\sqrt[3]{757 \quad 10^6} = \sqrt[3]{729 \quad 10^6 + 28 \cdot 10^6} = w$

Es wird

$$w = 900 + \frac{28 \quad 10^6}{3 \quad 900^2} - g_2,$$

$$w = 900 + \frac{28 \quad 10^6}{2\,5 \quad 10^6 - 70\,000} = g_2 = 900 + \frac{28 \quad 10^6}{2\,5 \quad 10^6(1 - 2{,}8\%)} - g_2,$$

$$w = 900 + 11 \quad 2\,(1 + 2{,}8\%) - g_2$$

$$= 900 + 11{,}2\,(1 + 0{,}028) - \frac{2}{2 \quad 900} \cdot g_1^2$$

$$= 900 + \frac{\begin{matrix}11{,}2 \\ + \ 0{,}3136\end{matrix}}{11{,}5136} - \frac{1}{900} \quad 132{,}3$$

$$w = 900 + 11\,514 - 0\,147 = \underline{911{,}367}$$

Logarithmisch ergibt sich

$$\sqrt[3]{757 \cdot 10^6} = \underline{911,38}$$

Der Fehler ist $\Delta = +0,01$, also eine sehr gute Übereinstimmung

Quinton erhält

$$w = 900 + 11,2 = 911,2$$

also

$$\underline{\Delta = -0,18}$$

3. $\sqrt[5]{62\,773 \cdot 10^{10}} = w$

Es kommt

$$w = \sqrt[5]{900^5 + 3724 \cdot 10^{10}} = 900 + \frac{3724 \cdot 10^{10}}{5 \cdot 6561 \cdot 10^8} - g_2$$

für $5 \cdot 6561 = 32\,805$ setze ich

$$33\,333 - 528 = \frac{10^5}{3}(1 - 1,6\,\%)$$

Dann kommt

$$g_1 = \frac{3724 \cdot 10^8}{\frac{10^5}{3}(1 - 1,6\,\%)} = \frac{3 \cdot 3724}{10^3}(1 + 1,6\,\%) = 11,172\,(1 + 1,6\,\%) = 11,35$$

Es kommt also

$$w = 900 + 11,35 - \frac{1}{2} \cdot 11,35^2 \cdot \frac{4}{900} = 911,35 - \frac{128,8225 \cdot 2}{900}$$

$$= 911,35 - 0,29 = \underline{911,06}$$

Logarithmisch kommt

$$w = \underline{911,06}$$

Die Genauigkeit ist sehr gut.

Der geschickte Rechner wird das Verfahren der Binomialentwicklung noch sehr erheblich konvergenter gestalten können durch geeignete Wahl der Bezugszahl A. Je kleiner der Quotient $\varkappa = \frac{d}{A^q}$ wird, desto besser konvergiert die Reihe, so daß die Berücksichtigung der beiden ersten Glieder g_1 und g_2 schon sehr gute Werte von $w = \sqrt[q]{A^q + d}$ liefert.

Wir rechnen die paar Beispiele noch mit anderen Bezugszahlen durch.

1. $\sqrt[3]{757 \cdot 10^6}$. Wir setzen $A = 910$, $A^3 = 753\,571 \cdot 10^3$

$$d = 3\,429 \cdot 10^3$$

Dann kommt

$$g_1 = \frac{3\,429 \cdot 10^3}{3 \cdot 910^2} = \frac{3,429 \cdot 10^3}{3 \cdot 91^2 \cdot 10^2} = \frac{34\,290}{24\,843} = \underline{1,38}$$

$$\begin{array}{r} 94\,470 \\ 199\,410 \end{array}$$

$$g_2 = -\frac{1}{2} g_1^2 \cdot \frac{2}{910} = -\frac{1,38^2}{910} = -\frac{1,9044}{910} = -\frac{0,19\,044}{91}$$

Die Division durch 91 fuhren wir durch Erweiterung des Bruches mit 11 aus und erhalten

$$g_2 = -\frac{2{,}09\,484}{1001} = -\underline{0\,002}$$

Also kommt $w = \underline{911\,36}$, also eine sehr gute Ubereinstimmung mit dem logarithmischen Wert $w = \underline{911\,38}$ Erschwerend ist bei dieser scharferen Erfassung der Rechnung vor allem die schwierige Division mit den nicht immer einfach zu handhabenden Nennern Noch eine Bemerkung sei angefugt uber das Bestimmen der geeigneten Bezugszahl A was bei nicht allzu einfachen Aufgaben der Form $w = \sqrt[q]{R}$ nicht immer leicht ist

Hier leistet wie in vielen Fallen, die logarithmische Abschatzung gute Dienste

Beispiel Ich ziehe das 3 Beispiel heran $w = \sqrt[5]{62\,773 \quad 10^{10}}$ Es ist $\log R = 4, \quad + 10 = 14$

62 773 liegt etwas uber 62 500, dessen Logarithmus aus $625 = \frac{10^4}{16}$ leicht bestimmbar ist Also kommt $\log R > 14$ wo als Dezimalen der sofort zu bestimmende Logarithmus von $6\,25 = \frac{100}{16}$ zu nehmen ist Es wird $\log 6\,25 = 2 - 1\,20412 = 0\,79588$ Also kommt $\log R > 14\,79588$, was schatzungsweise in die Gleichung $\log R = 14\,80$ uberfuhrt werden kann

Dann kommt $\log w = \frac{1}{5} \log R = 2{,}96$, womit aber sofort die in die Augen springende Bezugszahl $A = 900$ erkannt ist, worauf die Rechnung in der angegebenen Weise weitergefuhrt wird

Man wird zugeben, daß gerade im Falle großer Exponenten q dieses Verfahren allein schnell und sicher uber die auszufuhrende Darstellung $R = A^q + d$ Auskunft gibt

In allen Fallen kommt es darauf an die zweckmaßigste Methode rasch herauszufinden, und es ist eine Hauptarbeit bei den im Kopfe durchgefuhrten Zahlenrechnungen daß man in sehr kurzer Zeit die richtige d h die zweckmaßigste Methode herausfindet und dann folgerichtig nach ihr handelt Das gerade ist der Teil der Rechenarbeit, der nicht nach vorgeschriebenen Schemen gelernt werden kann und der deswegen etwas an sich hat das mit Recht als Kunst bezeichnet werden darf

Ich brauche nicht besonders auszufuhren daß bei dieser selektiven Tatigkeit die Erfahrung die uns gut durchdachten fruheren Rechenleistungen folgt einen wesentlichen Teil zum Erfolg liefert Diese Erfahrung und ihre konsequente Anwendung ohne merklichen Zeitverlust charakterisiert den wirklichen Rechner, der im Gegensatz zu den Scheinrechnern steht die mnemotechnisch angequalten Ballast reproduzieren

Man erkennt wohl, daß solcher Ballast in vielen Fällen hemmend auf die rasche und sichere Inangriffnahme einer Aufgabe wirken kann, da jede auswendiggelernte Zahl sich vordrängt und die objektive Entscheidung über die anzuwendende leistungsfähige Methode stört. Wer sich gewisses Gedächtnismaterial nicht durch Arbeit, sondern durch gekünstelte Methoden angeeignet hat, sucht seinen Schatz an Kenntnissen immer wieder an den Mann zu bringen und steht der Durchführung einer Aufgabe nicht vorurteilsfrei gegenüber. Es kommt auch bei dem wirklichen Rechner oft genug vor, daß ihm bei einer Lösung zwei gute Methoden zur Verfügung stehen, die er beide gern durchführen möchte, und es haben die Versuchsarbeiten der Psychologen einwandfrei ergeben, daß in solchen Fällen die Lösung verzögert wird, da die folgerichtige Durchschreitung des zweckmäßigsten Weges gestört wird.

Es erscheint angebracht, einiges über die Ausrechnung von Divisionsaufgaben zu sagen. Wir teilen diese Aufgaben zweckmäßig in zwei Klassen, je nachdem die Aufgabe aufgeht oder ein Näherungsresultat zu bestimmen ist.

Wir haben schon Gelegenheit gehabt, einiges über aufgehende Divisionsaufgaben zu sagen bei den Teilbarkeitsbetrachtungen, wo wir darauf hinwiesen, daß die Frage nach der Teilbarkeit, d. h. nach dem restlosen Aufgehen der Division, dadurch zu entscheiden ist, daß man die Division von rechts beginnt und dem jeweiligen Rest alle Bedingungen auferlegt, die aus der Struktur des Teilers folgen. In vielen Fällen wird eine geschickte Endzifferbetrachtung sehr schnell zum Ziel führen, wofür ein kleines Beispiel durchgeführt werden soll.

1. 997331 : 127. Durch Addition eines Vielfachen von 127 soll versucht werden, eine Zahl B aus 997331 herzustellen, der man unmittelbar ansieht, welches Vielfache von 127 sie ist. Ich ergänze 997331 zu einer Zahl, die den Faktor 1000 enthält. Es muß dann eine Zahl $127 \cdot k$ addiert werden, deren letzte drei Ziffern 669 sind. Da $137^2 = 18769$, so ist in $127 \cdot 147 = 137^2 - 10^2 = 18669 = b$ eine geeignete Zahl gefunden. Dann kommt $997331 + 18669 = 1016000 = 8000 \cdot 127$, und die Division ist bestimmt zu

$$\frac{997331}{127} = (1016000 - 18669) : 127 = 8000 - 147 = 7853.$$

Als nicht gar so einfaches Beispiel soll die vorher besprochene Zahl $L^{(11)} = \frac{10^{11}-1}{10-1} = L^{(11)} = 11111111111$ durch ihren kleineren Teiler 21649 dividiert werden. Wir suchen zunächst einen Faktor, der mit 21649 multipliziert in möglichst vielen Stellen des Endkomplexes mit dem Dividenden $L^{(11)}$ übereinstimmt. Es hat $39 \cdot 49 = 1911$ den Endkomplex 11. Weiter findet man durch eine kleine Überlegung, daß man 649 mit 239 multiplizieren muß, damit die drei letzten Stellen des Produktes 111 werden. Es wird $239 \cdot 21649 = 5174111$.

$$\begin{aligned} L^{(11)} &= 11\,111\,111\,111 \\ -239 \cdot 21\,649 &= 5\,174\,111 \\ \hline L^{(11)} - \lambda \cdot p &= 11\,105\,437\,000 = R \end{aligned}$$

Der Rest R ist außer durch 10^3 durch 3^3 teilbar und es kommt

$$R = 3^3 \cdot 10^3 \cdot 411\,331$$

Bei der Untersuchung von 411 331 ist zu beachten, daß 49 mit 19 zu multiplizieren ist, damit der Endkomplex 31 herauskommt wie man sofort bemerkt, wenn man für 49 schreibt $50 - 1$ Es wird $19 \cdot 21\,649$ genau gleich 411 331

Wir hatten von $L^{(11)}$ abgezogen

1 $239 \cdot 21\,649$

2 Aus dem Rest $R = L^{(11)} - 239 \cdot 21\,649$ zogen wir die Faktoren 3^3, 10^2 und 19 heraus, bis wir auf den Teiler 21 649 kamen Es wird also

$$L^{(11)} = 11\,111\,111\,111 = 21\,649\,(239 + 1000 \cdot 27 \cdot 19) = 21\,649 \cdot 513\,239$$

womit die frühere Zerlegung wiedergefunden ist

Man erkennt daß man bei dieser Art zu rechnen frei von den Fehlern wird die durch die Eintonigkeit der Rechnung entstehen also frei von Ermüdungsfehlern

Man hat fortwährend darüber nachzudenken wie die Rechnung möglichst einfach zu gestalten ist, man arbeitet mit reizvollen Kombinationen die Interesse und Aufmerksamkeit wachhalten zum Schluß baut man den gesuchten Faktor auf, indem man die Teiloperationen zusammenfaßt

Es liegt nahe, bei den Divisionsaufgaben auf die als Teilerfunktionen bezeichneten Ausdrücke $t(g) = g^e \pm d$ zurückzugehen die bei der Multiplikation gute Vereinfachungen bewirkten Dabei leisten uns die für eine Reihe von Primzahlen in Teil I zusammengestellten Identitaten gute Dienste Ist durch einen Divisor zu teilen, der Faktor eine Teilerfunktion $t(g)$ ist, so erscheint es angebracht den die Division darstellenden Bruch mit den komplementaren Faktoren zu erweitern um eine leicht durchführbare Division zu erhalten

Es sei die Teilung $\frac{A}{p}$ auszuführen wo p Primteiler einer Funktion $t(g) = 10^e \pm d = p \cdot q \cdot s$ ist Dann schreibt man

$$\frac{A}{p} = \frac{A \cdot q}{p \cdot q} \cdot \frac{s}{s} = \frac{A \cdot q \cdot s}{10^e \pm d} = \frac{A_1}{10^e} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{d}{10^e}} = B\left\{1 \mp \frac{d}{10^e} \pm \frac{d^2}{10^{2e}} \cdots\right\}$$

Diese Rechnung ist ohne Mühe durchführbar

Beispiele

1 $\frac{5861}{137} = \frac{5861 \cdot 73}{137 \cdot 73} = \frac{427\,853}{10\,001} = 42{,}7853\left(1 - \frac{1}{10\,000}\right) = 42{,}7853$

$$\begin{aligned} &\ 42{,}7853 \\ &- 0{,}0043 \\ \hline &= 42{,}781 \end{aligned}$$

2 $$\frac{7841}{813} = \frac{\frac{7841}{3}}{271} = \frac{2613{,}667}{271} = \frac{\frac{7841}{3} \cdot 41}{271 \cdot 41} = \frac{\frac{7841 \cdot 41}{3}}{11\,111} = \frac{3 \cdot 7841 \cdot 41}{99\,999}$$

$$= \frac{964\,443}{10^5 - 1} = 9{,}64443\left(1 + \frac{1}{10^5}\right) = \begin{array}{r} 9{,}64443 \\ +\ 0{,}00010 \\ \hline = 9{,}64453 \end{array}$$

Man wird bei den Teilerfunktionen $t(g) = 10^s \pm d$ nicht stehen bleiben, sondern wird den Nenner N des Bruches durch Faktorenzusatz in eine Form bringen $\bar{N} = A \pm d$, wo A insofern eine Bezugszahl ist, als mit ihr bequem dividiert werden kann.

Beispiel.

1. $\dfrac{124\,757}{353}$

Benutzt wird die Identität $17 \cdot 353 = 6001$. Dann kommt

$$q = \frac{124\,757 \cdot 17}{6001} = \frac{2\,120\,869}{6001} = \frac{2120{,}869}{6} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{6000}}$$

$$= 353{,}478\left(1 - \frac{1}{6000}\right) = \begin{array}{r} 353{,}478 \\ -\ \ 0{,}059 \\ \hline = 353{,}419 \end{array}$$

2. $$q = \frac{66\,149}{1419} = \frac{3 \cdot 66\,149}{4257} = \frac{3 \cdot 66\,149 \cdot 4}{17\,028} = \frac{793\,788}{17\,000} \cdot \frac{1}{1 + \frac{28}{17\,000}}$$

$$= \frac{793\,788}{17}\left(1 - \frac{0{,}028}{17}\right) = 46{,}6935\,(1 - 0{,}001\,647) = \begin{array}{r} 46{,}6935 \\ -\ \ 0{,}0769 \\ \hline = 46{,}6166 \end{array}$$

3. $$q = \frac{197\,569}{4649} = \frac{197\,569 \cdot 239}{1\,111\,111} = \frac{197\,569 \cdot 239 \cdot 9}{10^7 - 1} = \frac{197\,569 \cdot 2151}{10^7 - 1}$$

$$= 42{,}4970919\left(1 + \frac{1}{10^7}\right) = \begin{array}{r} 42{,}4970919 \\ +\ \ 0{,}0000038 \\ \hline = \ 42{,}497096 \end{array}$$

Diese Art, Divisionen auszuführen, transformiert den der Division äquivalenten Bruch in eine Form, daß der Nenner $V = A \pm d$ wird, wo A eine Zahl ist, mit der leicht dividiert werden kann, während d ein gegen A kleiner ganzzahliger Wert ist, so daß man bei der Entwicklung

$$\frac{1}{A \pm d} = \frac{1}{A}\left(1 \mp \frac{d}{A} + \cdots\right)$$

mit Verwendung des ersten Reihengliedes $\mp \frac{d}{A}$ die vorgeschriebene Genauigkeit erzielt. Diese Methode gewinnt ihre ganze Bedeutung erst, wenn bei der Ausrechnung von Funktionen der Divisor N eine laufende Reihe von Werten annimmt, etwa

$$N = A \mp d \qquad A + (d + 1) \qquad A + (d + 2)$$

Dann kann die Bestimmung des Hauptwertes $N_0 = \frac{Z}{A}$ einmal ausgeführt und der Wert in einer Reihe hingeschrieben werden, so daß an den Einzelwerten N_0 nur noch die Korrektionen $Z\,\frac{d_1}{A}$ anzubringen sind, und aus deren Gang man außerdem ein Urteil über die Richtigkeit der Rechnung gewinnt. Wieder macht nicht die Zahlenrechnung die größte Arbeit, vielmehr kommt es darauf an, wie gut man die Transformation des Bruches bewerkstelligt. Immer ist die Hauptsache, daß man durch planmäßiges Denken die Rechnung so einrichtet, daß sie möglichst wenig mechanische Arbeit übrig läßt. Auch hier ist es die als wichtig postulierte Kenntnis der Eigenschaften der ganzen Zahlen und ihrer Struktur, die die Mittel an die Hand gibt, rasch brauchbare Umformungen zu finden.

Hat man insbesondere eine bestimmte mathematische Formel auszuwerten, also den Verlauf einer Funktion zahlenmäßig darzustellen, so soll man nicht eine Zahl schreiben, bis man die Funktion auf ihre Eigenschaften genau studiert hat. Erst dann ist man in der Lage, die Rechnung in einer Weise anzulegen, daß man mit einem Minimum an mechanischer Arbeit auskommt.

Man weist mit Recht immer auf die Mitberechnung von Differenzentafeln hin, die erkennen lassen, ob die Funktionswerte sich dem durch die Formel ausgedrücktem Gesetz anpassen, was im positiven Fall die Richtigkeit der Rechnung erkennen läßt, und im negativen Fall durch eine Unstetigkeit zeigt, wo ein Rechenfehler gemacht worden ist, der sich dann leicht auffinden läßt.

Bei der Lösung von Zahlenaufgaben ist immer darauf zu achten, durch welche Besonderheiten der Aufgabe der Lösung bestimmte Bedingungen auferlegt werden. Dadurch kann in vielen Fällen die Rechnung sehr abgekürzt werden, was wir an manchen Beispielen gesehen haben, z. B. an der Behandlung der kubischen Gleichung, bei der die Lösung trotz großer Zahlenkoeffizienten fast ohne eigentliche Zahlenrechnung gefunden wurde.

Die Division mit Hilfe der Reihenentwicklung für $q = \frac{1}{A \mp d}$ hat den weiteren Vorteil, daß sie den Quotienten $q = \frac{Z}{N}$ aus dem Näherungswert $q_0 = \frac{Z}{A}$ schrittweise approximiert, so daß man die vorgeschriebene Genauigkeit bequem einhalten kann, ohne eine unnötige Ziffer zu schreiben Da sie den Hauptwert $q_0 = \frac{Z}{A}$ ohne große Rechnung sofort gibt, so sind große Fehler bei diesem Verfahren ausgeschlossen

In Teil I habe ich auf die Analyse einer auswendiggelernten Ziffernreihe hingewiesen die zeigen soll in welcher Weise man beim Lernen einer langen Reihe verfahren soll wenn man gute Lernzeiten erzielen will Ich nehme als Beispiel eine Reihe von 102 Ziffern die ich bei Versuchen im Gottinger Psychologischen Institut im Oktober 1920 gelernt habe wobei die Hilfen und Kombinationen direkt nach der Reproduktion der Reihe zu Protokoll gegeben wurden

Das Beispiel wird von *O Kroh* in seiner mehrfach erwahnten Schrift gebracht Die Reihe, die mit Rucksicht auf meine Gewohnheit in sechsstelligen Komplexen zu lernen in 17 sechsstellige Zahlen gegliedert ist, lautet

798 588	154 077	124 731	551 538	983 863	809 496
225 967	918 841	246 920	822 719	522 507	167 861
103 274	481 693	343 049	506 523	455 369	

Die Lernzeit fur die fehlerlose Reproduktion dieser 102 Ziffern war 1 Minute 40 Sekunden Nach den Mitteilungen von Professor *Kroh* habe ich folgende Hilfen sofort zu Protokoll gegeben

1 Komplex 798 588 Gemeinsamer Faktor der beiden Komplexhalften ist 7, die zweite Gruppe 588 ist $= 2^2$ 3 7^2

2 Komplex 154 077 154 = 2 77 Wir werden das nach unseren fruheren Ausfuhrungen noch erganzen, indem wir bemerken, daß der unmittelbar zutage tretende Faktor 2001 auf die Primteiler 23 und 29 deutet Es laßt sich damit sogleich eine Verbindung mit dem raumlich unterhalb 154 077 stehenden Komplex 918 841 anknupfen, dessen zweiter dreistelliger Unterkomplex $841 = 29^2$ ist

3 Komplex 124 731 $124 = 2^2$ 31 $731 = 17 \cdot 43$

Der 4 Komplex 551 538 wird der Großenordnung seiner Teile wegen zur zweiten Halfte (588) des ersten Komplexes in Beziehung gebracht Die Differenz beider Teilkomplexe ist die charakteristische Primzahl 13 also wird die sechsstellige Zahl 551 538 durch 13 teilbar = 13 42 426

5 Komplex Beide Komplexhälften sind Primzahlen Ihre Differenz ist 120 983 war zudem vorher in einer anderen Zusammensetzung (es war Faktor einer in Primzahlen zu zerlegenden sechsstelligen Zahl) vorgekommen und noch in Erinnerung

6 809 schließt sich als Primzahl gleicher Großenordnung unmittelbar an 863 an Die Differenz $863 - 809 = 54 = 2$ 3^3 $809 = 28^2 + 5^2$ $496 = 4$ $124 = 2^4$ 31 wird zum 3 Komplex in Beziehung gebracht

7 Der Großenkontrast zwischen den beiden Komplexteilen fallt auf Das ungefahre Wertverhaltnis 1 4 wird registriert $225 = 15^2$ Zudem tritt 967 zu 983 in Beziehung beide sind zu 1000 benachbart Faßt

man 983 als 1000 — d auf so kann man 967 als 1000 — 2 d ansehen Daß einerseits 983^2 ungefahr gleich 967 000 ist andererseits der Logarithmus von 9 67 ungefahr gleich 0,983 werden muß, klingt dabei an

8 918 bleibt um 49 hinter 967 zuruck also um 7^2, das als Teiler von 588 auftrat Der charakteristische Teiler 17 von 918 trat in 731 = 17 43 bereits auf 841 = 29^2 haben wir schon zu den durch 2001 also auch durch die Primzahlen 23 und 29 teilbaren Komplex 154 077 in Beziehung gesetzt Die Differenz 918 — 841 = 77 der beiden Unterkomplexe zeigt, daß 918 841 die Faktoren 7 und 11 hat

9 Den Komplex halt die Beziehung 20 46 = 920 zusammen 246 hat den charakteristischen Primteiler 41

10 822 = 2 3 137 ist Vielfaches der Primzahl 137 die als Teiler von $10^4 + 1$ besonderes Interesse besitzt Die Differenz der beiden Teilkomplexe 822 — 719 = 103 tritt als erste Halfte im 13 Komplex 103 274 auf Beide Komplexe 822 und 719 erscheinen der Großenordnung nach als ahnlich (Große und benachbarte Hunderterziffer Zahlenwert der zweistelligen Endkomplexe klein und ebenfalls benachbart so daß ein leichter Übergang von 822 auf 719 möglich ist

11 Der Sechserkomplex 522 507 erinnert an den vierten 551 538 Im Vergleich zu dem vorangehenden 10 Komplex 822 719 ist 522 um 300 kleiner als 822 Differenz der Komplexe 522 — 507 = 15 522 hat den charakteristischen Primteiler 29, wahrend 507 durch 13^2 teil bar ist

12 367 861 367 ist bekannt als Primzahl und ziffernmaßig als physikalische Konstante $\alpha = \frac{1}{273}$ in der Gastheorie ist = 0 0367 Von 861 ist 367 um fast 500, genau um 494 verschieden, das den Faktor 13 enthalt 861 enthalt außer dem Teiler 7 wieder den Faktor 41

13 103 274 Die Primzahl 103 trat als Differenz der beiden Komplexhälften (822 — 719 = 103) schon bei (10) auf Außerdem ist 274 = 2 137 = $\frac{1}{3}$ 822

14 481 = 13 37 Die Differenz beider Komplexhalften wird 693 — 481 = 212 = 2^2 53

15 343 = 7^3 49 = 7^2 343 049 = 7001 7^2 7001 = $76^2 + 35^2$ ist Primzahl

16 506 523 wird zu (9) 522 507 und (4) 551 538 in Beziehung gebracht Die Differenz der beiden Teilkomplexe 523 — 506 wird gleich der Primzahl 17 Die jeweiligen Differenzen der Teilkomplexe bei (4), (9) und (16) sind 13, 15, 17, bilden also den Teil einer arithmetischen Reihe 23 steckt als Faktor im Komplex 506

17 455 hat die Primteiler 7 und 13 369 ist von annahernd gleicher Großenordnung und = 3^2 41, womit 41 zum drittenmal als charakteristischer Primfaktor auftritt 369 erinnert an und verbindet sich mit 367

Ich füge die Analyse eines kleinen Karreeversuches mit 25 Ziffern an, der ebenfalls bei den Göttinger Versuchen im Herbst 1920 gelernt und in *O. Krohs* Schrift veröffentlicht wird. Das Karree von

57 240
34 901
68 187
25 397
41 636

Die Lernzeit war 7,2 Sekunden.

1. Komplex $240^2 = 57\,600$. Das Quadrat der drei letzten Ziffern (als dreistellige Zahl betrachtet) beginnt mit den beiden ersten Ziffern des fünfstelligen Komplexes.

2. Komplex $34 = 2 \cdot 17$, $901 = 17 \cdot 53$.
3. Komplex $68 = 2^2 \cdot 17$, $187 = 11 \cdot 17$.
4. Komplex $25 = 5^2$, $397 = 19^2 + 6^2$ = Primzahl.
5. Komplex $41 = 5^2 + 4^2$, $636 = 2^2 \cdot 3 \cdot 53$.

Dabei kommt zum Bewußtsein, daß auch der 4. Komplex 25 397 infolge der Quadratsummenzerlegung $397 = 19^2 + 6^2$ den Wert $6^2 = 36$ enthält.

Diese kurze Analyse der beiden Versuche kann in Verbindung mit den allgemeinen Bemerkungen in Teil I einen Einblick geben in die Methoden, die das Auffassen und Behalten langer Ziffernreihen in auffallend kurzer Zeit ermöglichen.

Wesentlich sind es die Darstellungen $m = u^2 + v^2$ und $m = x^2 - y^2$, die allgemeine, von der Grundzahl g des Zahlensystems unabhängige Eigenschaften der ganzen Zahlen darstellen und deswegen Hilfen geben, die mathematisch logisch begründet sind. Hilfsmittel, die dem Wesen der Zahl fremd sind, treten nie auf, ebensowenig solche Hilfen und rein äußerliche Kombinationen, die an zufälligen äußerlichen Ähnlichkeiten der Komplexe haften (etwa 347 743 liest sich vorwärts und rückwärts als dieselbe Zahl).

Von hier aus erkennt man, wie sehr zielbewußte Rechenarbeit das Gedächtnis im Zahlengebiet ausbildet, indem sie den Bereich, aus dem Hilfen und Kombinationen gezogen werden, gleichzeitig erweitert und festigt.

§ 5. Logarithmisches Rechnen ohne Tafel.

Verwendung logarithmischer Methoden ohne Logarithmentafel.

Voraussetzung für logarithmisches Rechnen im Kopf ist einerseits die Kenntnis einer Anzahl Logarithmen ganzer Zahlen, besonders der der Primzahlen, aus denen die der zusammengesetzten Zahlen durch Addition hergestellt werden können, andererseits kommt es ganz wesentlich darauf an, brauchbare Interpolationsmethoden zu finden. Zahlen deren Logarithmen bekannt sind, spielen die Rolle von Bezugszahlen und sollen deswegen mit A bezeichnet werden. Dann ist die gegebene Darstellung einer beliebigen Zahl

$$A \pm e = Z = A(1 \pm \delta) \quad \text{wo} \quad e = \pm(Z - A), \quad \text{also} \quad \delta = \frac{e}{A}$$

ist

$$\log Z = \log A + \log(1 \pm \delta)$$

wo zunächst $\delta > 0$ angenommen wird. Da δ ein kleiner echter Bruch ist, so kann die logarithmische Reihe für $\log(1 + \delta)$ angesetzt werden, deren erste beiden Glieder bei geeigneter Wahl von A den erforderlichen Genauigkeitsgrad garantieren. Es kommt dann

$$\log(1 + \delta) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3}$$

$$\log(1 - \delta) = -\delta - \frac{\delta^2}{2} - \frac{\delta^3}{3}$$

Die zu bestimmende Differenz $\Delta = \log Z - \log A$ ist damit als Funktion des Quotienten $\delta = \frac{e}{A}$ gegeben, wobei noch zu beachten ist, daß die logarithmische Reihe den natürlichen Logarithmus von $1 \pm \delta$ gibt.

Zur praktischen Rechnung brauchen wir dekadische Logarithmen, also ist auch $\log(1 \pm \delta) = \Delta$ in diesem System darzustellen, was einfach durch Multiplikation mit dem Modul $M = 0{,}43429 = \log e$ der *Briggs*ischen Logarithmen geschieht. Wir erkennen auf den ersten Blick, daß dieser fortwährend gebrauchte Faktor M für Multiplikation und Division eine sehr günstige Struktur hat.

Da es sich bei Δ immer um relativ kleine Korrektionswerte handelt, so schreiben wir für M den vierstelligen Wert

$$M = 0{,}4343 = 0{,}43\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

so daß durchgehends mit 0,43 gerechnet werden kann unter Anbringung einer 1prozentigen Korrektion. Es wird also

$$\log Z = \log A + M\left(\delta - \frac{\delta^2}{2}\right) = \log A + 0{,}43\left[\frac{e}{A} - \frac{1}{2}\left(\frac{e}{A}\right)^2\right]\left(1 + \frac{1}{100}\right)$$

Beispiel 1. Zu bestimmen ist der log 379.
Ich setze $379 = 375 + 4$, also

$$379 = 375\left(1 + \frac{4}{375}\right) = 375\left(1 + \frac{0{,}16}{15}\right),$$

$$A = 375 \qquad \log A = 2{,}57403 + \Delta$$

Es wird

$$\delta = 0{,}010667$$
$$-\frac{\delta^2}{2} = -0{,}00006\text{5}$$
$$= 0{,}01061$$

$$0{,}01061 \cdot 0{,}43 = 0{,}00456 \qquad \log 1 = 2{,}57403 + \Delta$$
$$+ 1\% \quad 0{,}00005 \qquad\qquad = 2{,}57403$$
$$\Delta = 0{,}00461 \qquad\qquad + 0{,}00461 = 2{,}57864$$

Bei der Rechnung kommt es darauf an, daß man sich daran gewöhnt, entsprechend den fünfstellig gewünschten Werten abzuteilen.

Wir wollen den so gefundenen Wert von log 379 auf anderem Wege ableiten, um eine Kontrollmethode zu haben. Dabei bedienen wir uns folgender Überlegung.

Es sei zu bestimmen der Logarithmus einer Primzahl p.

Ich multipliziere diese mit einer Primzahl $\bar{p}$, die so gewählt ist, daß $p\,\bar{p}$ eine Zahl P wird, deren Logarithmus leicht bestimmt werden kann, während der Logarithmus der komplementären Primzahl $\bar{p}$ auch bekannt sein muß. Dann kommt

$$p \cdot \bar{p} = P, \quad \log p = \log P - \log \bar{p}$$

Da in unserem Beispiel 19 · 79 = 1501 ist, so empfiehlt es sich, $\bar{p} = 19$ zu wählen. Dann kommt 19 · 379 = 7201.

$$\log 7201 = \log 7200 + \frac{1}{100}(\log 73 - \log 72)$$

$$= 3{,}85733 + \left|\frac{1}{100} \cdot 599\right| = 6 = 3{,}85739$$

$$\log 7201 = 3{,}85739$$
$$-\log 19 = 1{,}27875$$
$$\log 379 = 2{,}57864$$

in genauer Übereinstimmung mit dem vorher ermittelten Wert und mit dem der Logarithmentafel, ohne die man aber auch die Kontrollrechnung muß ausführen können. Immer kommt es darauf an, Produkte $p\,\bar{p} = P = 1 + \varepsilon$ zu finden, deren Logarithmus ohne weiteren Zeitverlust aus dem von A folgt, und immer spielt die Kenntnis von Primfaktorenzerlegungen eine wichtige Rolle.

2. Zu bestimmen ist log 5437. Es wird

$$5437 = 5440\left(1 - \frac{3}{5440}\right)$$

Es ist

$$\log 5440 = \log (32 \cdot 170) = 1{,}50515$$
$$+ 2{,}23045$$
$$3{,}73560$$

$$\delta = -0{,}00055$$

$$\frac{\delta^2}{2} = - \quad - -$$

$$-\delta - \frac{\delta}{2} = -0{,}00055$$

$$l = M\left(-\delta - \frac{\delta}{2} - \quad\right) = -0{,}00002365$$

$$= - \quad \underline{24}$$

$$\log 5437 = 3\ 73560$$

$$-24 = \underline{3\ 73536}$$

Kontrollrechnung $5437 \quad 73 = 396901$

$$\underline{3969 = 63^2}$$

$$\log 63 = 1\ 79934$$

$$2 \log 63 = 3\ 59868$$

$$+\frac{1}{396900} = 0\ 000025 \qquad \log 396901 = 2{,}59869$$

$$\underline{0\ 43} \qquad \underline{-\log 73 = 1\ 86332}$$

$$= 0{,}00001075 \qquad = \underline{1\ 73537}$$

$$= \underline{\underline{+1}}$$

Der mit der Reihe errechnete Wert ist in Übereinstimmung mit der fünfstelligen Logarithmentafel. Bei der Bestimmung von log 3969 ist der Wert 2 log 63 genommen worden, wobei die 5. Dezimale nicht genau wurde.

Bestimmung des Numerus zu einem gegebenen Logarithmenwert.

Es ist

$$\log Z = \log A + M\left(\delta - \frac{\delta^2}{2} + \quad\right)$$

Zu bestimmen ist der Wert $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$, woraus $\varepsilon = \delta \cdot A$ folgt.

In etwas anderer Form schreibt sich die Gleichung wie folgt

$$\delta\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) = \frac{\log Z - \log A}{M} = \frac{\Delta}{M}$$

Ich bestimme den ersten Näherungswert

$$\bar{\delta} = \frac{\varepsilon}{A} = \frac{\Delta}{M} = \frac{\Delta}{0\ 43}$$

Dann wird der bessere Wert

$$\delta = \frac{\Delta}{M}\left(1 + \frac{\delta}{2} \quad\right) = \frac{\Delta}{0{,}43}\left(1 + \frac{\delta}{2} - 0{,}01\right)$$

Man erkennt aus dieser Darstellung, daß für alle Zahlenbereiche, in denen δ dem Wert $\frac{\delta}{2} = 0{,}01$, also $\delta = 0{,}02$ benachbart ist, die Bestimmung der Korrektion ε auf die kleine Rechnung $\frac{\Delta}{0{,}43}$ oder $\frac{100 \cdot \Delta}{43}$ hinauskommt.

$$2 \qquad \underline{\delta < 0}, \qquad Z < 1 - 1\left(1 - \frac{e}{4}\right)$$

$$Z = A(1-\delta), \ \log Z = \log 1 + \log(1-\delta) - \log A + M\left(-\delta - \frac{\delta}{2} - \quad\right),$$

womit die Formel fur die Berechnung des Logarithmus gegeben ist

Die Umkehrung ergibt

$$\log Z = \log A - M\left[\frac{e}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{A}\right)^2 - \quad\right] = \log A - M\left[\delta\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)\right],$$

$$\delta\left(1 - \frac{1}{2}\delta\right) = \frac{\log A \quad \log Z}{M} = \frac{\Delta}{0{,}43}(1 - 0{,}01)$$

Dann kommt als erster Näherungswert von δ

$$\delta = -\frac{\Delta}{0{,}43} = -\frac{100\,\Delta}{43}$$

Dann folgt, wenn in der Verbindung $1 + \frac{\delta}{2}$ fur δ der erste Naherungswert gesetzt wird

$$\delta = -\frac{\Delta}{0{,}43}\left(1 - 0{,}01 - \frac{1}{2}\bar{\delta}\right),$$

also kommt

$$\delta = \frac{e}{A} = -\frac{100\,\Delta}{43}\left(1 - 0{,}01 - \frac{1}{2}\delta\right)$$

$$e = \frac{A \quad 100 \cdot \Delta}{43}\left(1 - 0{,}01 - \frac{1}{2}\bar{\delta}\right)$$

Beispiel Gegeben ist als Logarithmus der Wert 3 73536

Es ist

$$\log 54 - 1\ 73239$$
$$\log 55 = 1\ 74036$$

also zeigt eine rohe Interpolation

$$Z = 54 - 1\ \frac{297}{797} \sim 54{,}4$$

Die Interpolation zeigt daß der Numerus zu 3 73536 in der Umgebung von $A = 5440$ liegt Ich setze $A = Z(1 + \delta) = 5440$

Es wird

$$\log A - \log(32 \quad 170) = 1{,}50515 = \underline{3{,}73560}$$
$$\underline{2{,}23045}$$
$$3\ 73560$$

Es kommt dann

$$\Delta = \log 5440 - \log x = 0{,}00024,$$

$$\delta = \frac{0{,}024}{43} = \underline{0{,}0006}$$

$$e = \frac{544 \quad 0{,}24}{43}(1 - 0\,01 - 0{,}003) = \frac{130\,56}{4} = \underline{\underline{3}}$$

$Z = A - e = 5437$, womit aufs neue die Richtigkeit unseres früher berechneten Wertes $\log 5437 = 3{,}73536$ nachgewiesen ist.

Bei einiger Übung lassen sich diese Interpolationsrechnungen bequem und sehr schnell im Kopfe ausführen.

Beispiel 1. Zu bestimmen ist $\log 58409$.

Es ist $A = 58400$, $e = 9$

$$\delta = \frac{e}{A} = 0{,}000154$$

Es wird $58400 = 73 \cdot 800$

$\log 800 = 2{,}90309$	$\delta = 0{,}00015 \mid 4$	$\log 58409 = 4{,}76641$
$+ \log 73 = 1{,}86332$	$-\frac{\delta^2}{2} = - \quad --$	$+ \quad 7$
$\log A = 4{,}76641$	$= 0{,}00015 \mid 4$	$= 4{,}76648$

$\tau M = 0{,}00006{,}6 = +7$ (in Übereinstimmung mit der Tafel).

2. Gegeben der Logarithmus $4{,}76648$, gesucht der Numerus.

Es wird

$$\log 58 = 1{,}76343$$
$$\log 59 = 1{,}77085$$
$$\Delta = 0{,}00742$$

$$A \sim 58000 + \frac{305}{742} \cdot 1000 = \underline{58400}$$

Es ist $\log A = 4{,}76641$

Als erste Annäherung kommt

$$\bar{\delta} = \frac{\overline{700}}{43} = 58400 = \frac{408{,}8}{43} = 9{,}5$$

Genauer wird daraus

$$e = \frac{58400 \quad 700}{43}(1 - 0{,}01 - 0{,}003) = 9{,}5 - \varepsilon \mid e = \underline{9},$$

$\underline{Z = A + e = 58409}$, wie es nach dem vorigen Beispiel sein muß.

Zum Schluß soll eines der mit einfacher Multiplikation mit $\tau = \bar{\tau} + \delta$ gerechneten stereometrischen Beispiele logarithmisch ohne Tabelle gerechnet werden als Probe auf die in diesem Fall erreichbare Genauigkeit.

Beispiel. Umkehrung von Beispiel 2 der Aufgaben mit der τ-Multiplikation. Das Volumen einer Kugel ist $V = 262096353$ cbm. Wie groß ist der Kugelradius? Wir bestimmen der einfachen Rechnung wegen den Kugeldurchmesser d aus der Gleichung

$$\pi \frac{d^3}{6} = V, \quad \text{also} \quad d = \sqrt[3]{\frac{6V}{\tau}}$$

Es wird $\log V = 8$ | Zunächst kommt $\log 26 = 1{,}41497$

$$26\,2096353 = 26\,(1 + 0{,}008063)$$

$$\begin{array}{rl}
\delta = & 0{,}008063 \\
-\dfrac{\delta^2}{2} = & -0{,}000325 \\
\hline
b = & 0{,}007748 \\
\Delta = b \cdot 0{,}43 = & 0{,}003313 \\
+1\% = & 0{,}000033 \\
\hline
\Delta = & 335 \\
\log V = & 8{,}41497 \\
+ & 335 \\
\hline
= & 8{,}41832 \\
+\log 6 = & 0{,}77815
\end{array}$$

Es erscheint angebracht, zur Bestimmung von $\log V$ von $A = 262$ auszugehen und zu setzen

$$V = 262 \cdot 10^6 + 96\,353 = 262 \cdot 10^6 (1 + \delta),$$

wo

$$\delta = 0{,}000368, \qquad \frac{\delta^2}{2} = 0{,}0000000677$$

$$\begin{array}{rl}
\delta = & 0{,}000368 \\
-\dfrac{\delta^2}{2} = & -\,- \\
\hline
\varepsilon = & 0{,}000368 \\
M \cdot \varepsilon = 0{,}43 \cdot \varepsilon = & 0{,}000158 \\
+\,1\% = & 0{,}000002 \\
\hline
\Delta = & +\,0{,}00016 \\
= & 16
\end{array}$$

Ferner ist $\log 262 = \log 131 + \log 2$

$$\begin{array}{rl}
\log 131 = & 2{,}11727 \\
\log 2 = & 0{,}30103 \\
\hline
\log A = & 2{,}41830 \\
+\Delta = & 16 \\
\hline
\log V = & 8{,}41846
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\log V = & 8{,}41846 \\
+\log 6 = & 0{,}77815 \\
\hline
\log Z = & 9{,}19661 \\
-\log \pi = & 0{,}49715 \\
\hline
\log R = & 8{,}69946
\end{array}$$

$$\log d = \frac{1}{3} \log R = 2{,}89982$$

Es ist

$$\begin{array}{rl}
\log 79 = & 1{,}89763 \\
\log 80 = & 1{,}40309 \\
\hline
\Delta = & 546
\end{array}$$

$$d = 790 + 10 \cdot \frac{219}{546} = 790 + 10 \cdot 0{,}4 = \underline{794\ \mathrm{m}}$$

Also wird der Radius der Kugel in Übereinstimmung mit der früheren Aufgabe $\underline{r = 397\ \mathrm{m}}$

Bei der Logarithmenrechnung ohne Tafel kommt es besonders darauf an geeignete Kombinationen bei der Darstellung der Zahlen in den Formen $Z = 4(1 \pm \delta)$ zu finden Außerdem kommt man mit einem geringen Vorrat von fest eingeprägten Logarithmen aus

§ 6. Die Gleichung $z - x^x = 0$.

Numerische Behandlung der Gleichung $z - x^x = 0$

Bei der numerischen Behandlung von Funktionen lassen sich manche Vorteile für die Rechnung durch gute Anordnung der Rechnung und durch feine Kontrollmethoden gewinnen

Allgemein bekannt ist es, daß man die rechnerischen Operationen an einer Reihe von Beispielen parallel vornimmt Zunächst werden auf diese Weise die Operationen schneller ausgeführt als bei der sukzessiven vollständigen Durchführung der einzelnen Beispiele Dann lassen sich aus Gründen der Stetigkeit fast ohne besondere Arbeit Prüfungen der Rechnung vornehmen denn jeder Fehler tritt als Unstetigkeit auf verletzt das Differenzgesetz das dem denkenden Rechner in jedem Fall in Fleisch und Blut übergeht Diese Gesichtspunkte wollen wir an dem oben gegebenen Beispiel einer einfachen transzendenten Gleichung aufsuchen, die außerdem ein Prüfstein dafür sein soll, was mit logarithmischer Rechnung ohne Benutzung der Tafel erreicht werden kann

Ich schreibe die Gleichung zunächst in logarithmischer Form

$$\log z = x \log x$$

die sofort die Differentialformel liefert

$$\frac{1}{l\,10} \cdot \frac{dz}{z} = \left(\log x + x \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{l\,10}\right) dx\,, \qquad \frac{dz}{dx} = z(2{,}30258 \log x + 1)\,,$$

wo 2 30258 der natürliche Logarithmus von 10 ist

Nützlicher als diese Differenzformel ist für die numerische Lösung der Gleichung zunächst die Aufstellung einer Hilfstafel die für einen nicht zu kleinen Bereich die Funktion $\log z = x \log x$ enthält nebst einer Differenzentafel, die einerseits die Rechnung prüft und andererseits bei der interpolatorischen Bestimmung von Näherungswerten x eine gute Hilfe ist

Ich gebe eine solche Tafel für den Bereich $x_0 = 5\,00$ bis $x = 5{,}60$ mit dem Intervall 0 01 Die Einrichtung der Tafel (S 118) ist ohne weiteres klar

Die Gleichung $z - x^x = 0$ soll gelöst werden mit Hilfe der Logarithmentafel für vier Zahlenpaare (z_1, z_2) bei denen sich eine empfindliche Prüfungsmethode für die Rechnung ergibt Dann soll die Rechnung für ein weiteres Zahlenpaar (z_1, z_2) ohne Logarithmentafel nach der entwickelten logarithmischen Rechenmethode ohne Tafel ausgeführt werden Das Ergebnis kann durch die Kontrollmethode auf seine Richtigkeit leicht geprüft werden.

x	$\log z = x \log x$	Differenz Δ	x	$\log z = x \log x$	Differenz Δ
					11 558
5,00	3,494850	11 338	5,27	3,803944	11 564
5,01	3,506188	11 346	5,28	3,815508	11 574
5,02	3,517534	11 353	5,29	3,827082	11 581
5,03	3,528887	11 365	5,30	3,838663	11 591
5,04	3,540252	11 378	5,31	3,850254	11 598
5,05	3,551620	11 384	5,32	3,861852	11 603
5,06	3,563004	11 387	5,33	3,873455	11 614
5,07	3,574391	11 398	5,34	3,885069	11 625
5,08	3,585789	11 406	5,35	3,896694	11 630
5,09	3,597195	11 412	5,36	3,908324	11 636
5,10	3,608607	11 424	5,37	3,919960	11 647
5,11	3,62003	11 431	5,38	3,931607	11 652
5,12	3,631462	11 438	5,39	3,943259	11 669
5,13	3,642900	11 450	5,40	3,954928	11 658
5,14	3,654350	11 456	5,41	3,966586	11 689
5,15	3,665806	11 468	5,42	3,978275	11 689
5,16	3,677274	11 474	5,43	3,989964	11 695
5,17	3,688748	11 476	5,44	4,001659	11 705
5,18	3,700224	11 493	5,45	4,013364	11 710
5,19	3,711717	11 499	5,46	4,025074	11 715
5,20	3,723216	11 510	5,47	4,036789	11 736
5,21	3,734726	11 517	5,48	4,048525	11 725
5,22	3,746243	11 522	5,49	4,060250	11 747
5,23	3,757765	11 529	5,50	4,071997	11 751
5,24	3,769294	11 541	5,51	4,083748	11 755
5,25	3,780835	11 551	5,52	4,095503	11 766
5,26	3,792386		5,53	4,107269	

1 Beispiel $z_1 = 5717 \quad z_2 = 5973$

Der Gang der Rechnung wird ohne ausfuhrliche Erklärung verstandlich sein Die Interpolationen werden mittels der Hilfstafel ausgefuhrt, die Multiplikationen werden im Kopf durchgefuhrt und die Ergebnisse hingeschrieben

$$
\begin{array}{rlrl}
z_1 & = 5717 & z_2 & = 5973 \\
\log z_1 & = [0\ 757168] & \log z_2 & = [0\ 776193] \\
\bar{x}_1 & = 5\ 2294 & \bar{\tau}_2 & = 5{,}2459 \\
\log \bar{x}_1 & = 0\ 718452 & \log x_2 & = 0\ 719820
\end{array}
$$

$$
\frac{718\,452 \quad 52\,294}{3{,}757073} \qquad \frac{719\,820 \quad 52\,459}{3{,}776104}
$$

Interpolation $\dfrac{95}{115{,}22} = 0\ 82 \qquad \dfrac{59}{115\ 41} - 0\ 77$

$$
x_1 = 5\ 229482 \qquad \tau_2 = 5\ 245977
$$

Arithmetisches Mittel

$$
\frac{\tau_1 + \tau_2}{2} = x = 5\ 229482
$$
$$
+\ 0{,}008248
$$
$$
\underline{= 5\ 237730}
$$

Bestimmung von $\log z = x \ \log \bar{\tau} = \underline{3\ 766678}$. soll der *transzendente* Mittelwert genannt werden Er wird mit dem geometrischen Mittelwert $\bar{z}_g = \sqrt{z_1 \ z_2}$ verglichen, dessen Logarithmus als arithmetischer Mittelwert von $\log z_1$ und $\log z_2$ sofort bestimmt ist Es wird

$$
\log \bar{z}_g = \underline{3{,}766681}
$$

Die Mittelwerte z und z_g sind sehr benachbarte Werte, und es ist

$$
\underline{z < z_g}
$$

2 Beispiel

$$
\begin{array}{rlrl}
z_1 & = 6709 & z_2 & = 6965 \\
\log z_1 & = 3\ 826658 & \log z_2 & = 3{,}842921 \\
\bar{x}_1 & = 5\ 2896 & \bar{x}_2 & = 5{,}3036
\end{array}
$$

$$
\frac{0{,}723423 \quad 52\,896}{3{,}826618} \qquad \frac{0\ 724571 \quad 53\,036}{3{,}842834}
$$

Interpolation $\dfrac{39\ 7}{115{,}74} = 0\ 34 \qquad \dfrac{86{,}2}{115\ 91} = 0\ 74$

$$
\underline{\tau_1 = 5\ 289634} \qquad \underline{\tau_2 = 5\ 303674}
$$

$$
x_1 \log \tau_1 = \underline{5{,}289634 \quad 0{,}723426} \qquad x_2 \log x_2 = \underline{5\ 303674 \quad 0\ 724577}
$$
$$
= \underline{3{,}826659} \qquad = \underline{3\ 842922}
$$

$$
1 \quad \bar{\tau} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} - 5\ 296651 \qquad \bar{\tau} \log \bar{\tau} - \log \bar{z} \quad \underline{3{,}834781}
$$

2 Geometrisches Mittel

$$\bar{z}_g = \sqrt{z_1 \cdot z_2} \quad \log z_g = \frac{1}{2}(\log z_1 + \log z_2) = \underline{3{,}834790}$$

$$\underline{\bar{z}_g = \bar{z} + \varepsilon}$$

3 Beispiel

$z_1 = 8089$ $\qquad$ $z_2 = 8345$

$\log z_1 = 3{,}907895$ $\qquad$ $\log z_2 = 3{,}921426$

$x_1 = 5{,}35$ $\qquad$ $x_2 = 5{,}37$

1 Interpolation $\frac{11\,201}{11\,630} = 0{,}96$, $\qquad$ $\frac{1466}{11\,647} = 0{,}12$,

$x_1 = 5{,}3596$, $\qquad$ $x_2 = 5{,}3712$

$x_1 \log x_1 = 729\,132 \cdot 53\,596$ $\qquad$ $x_2 \log \bar{x}_2 = 730\,071 \cdot 53\,712$

$= 3{,}907856$ $\qquad$ $= 3{,}921\,257$

2 Interpolation $\frac{39}{116{,}3} = 0{,}33$ $\qquad$ $\frac{69}{116{,}47} = 0{,}59$,

$x_1 = 5{,}359633$ $\qquad$ $\bar{x}_2 = 5{,}371259$,

$x_1 \log x_1 = 0{,}729134 \cdot 5\,359633$ $\qquad$ $\underline{x_2 = \log x_2 = 3{,}921427}$

$= \underline{3{,}907891}$

Mittelwerte

1 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \bar{x} = 5{,}365446$ $\qquad$ 2. $\bar{z}_g = \sqrt{z_1 \cdot z_2}$

$\bar{x} \log x = z = 3{,}914651$, $\qquad$ $\log z_g = 3{,}914661$,

$$\underline{\bar{z} < \bar{z}_g}$$

4 Beispiel

$z_1 = 9001$ $\qquad$ $z_2 = 9257$

$\log z_1 = 3{,}954291$ $\qquad$ $\log z_2 = 3{,}966470$

$\bar{x}_1 = 5{,}39$ $\qquad$ $\bar{x}_2 = 5{,}40$

1 Interpolation

$\frac{11\,032}{11\,669} = 0{,}94$ $\qquad$ $\frac{11\,542}{11\,658} = 0{,}99$

$\bar{x}_1 = 5{,}3994$ $\qquad$ $\bar{x}_2 = 5{,}4099$

$x_1 \log x_1 = 0{,}752346 \cdot 53\,994$ $\qquad$ $x_2 \log x_2 = 0{,}733189 \cdot 54\,099$

$= 3{,}954229$ $\qquad$ $= 3{,}966479$

2 Interpolation

$\frac{62}{116{,}69} = 0{,}53$ $\qquad$ $\Delta = -\frac{9}{116{,}58} = -0{,}08$

$x_1 = 5{,}399453$ $\qquad$ $\underline{x_2 = 5{,}409892}$

$x_1 \log x_1 = 3{,}954289$ $\qquad$ $\underline{x_2 \log x_2 = 3{,}966468}$

Mittelwerte

$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = 5{,}404673$, $\qquad$ $\log z_g = \log \sqrt{z_1 \cdot z_2} = 3960381$,

$x \log x = \log z = 3{,}960380$

Die nahe Übereinstimmung der beiden Mittelwerte z und z_g fordert dazu heraus, die beiden Werte allgemein miteinander zu vergleichen, was jetzt ausgeführt werden soll

x_1 und x_2 seien die beiden Lösungen der Gleichungen

$$x_1^{x_1} - z_1 = 0 \quad \text{und} \quad x_2^{x_2} - z_2 = 0$$

Es sei gesetzt

$$x_1 = a - \delta\,, \quad x_2 = a + \delta$$

so daß

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2}{2} = a$$

wird Vorausgesetzt wird, daß z_1 und z_2 so gewählt wird daß

$$\frac{\delta}{a} = \frac{x_2 - x_1}{x_2 + x_1}$$

klein gegen 1 ist, eine Voraussetzung, die wegen der im folgenden benutzten Reihenentwicklungen erforderlich ist

Es wird also

$$\bar{x} = a\,, \qquad \log \bar{z} = \underline{\bar{x} \log \bar{x} = a \ \log a}$$

Weiter kommt

$$\log z_g = \frac{\log z_1 + \log z_2}{2} = \frac{(a - \delta)\log(a - \delta) + (a + \delta)\log(a + \delta)}{2}$$

Dann bilde ich die Differenz

$$\log z_g - \log \bar{z} = \frac{(a - \delta)\ \log(a - \delta) + (a + \delta)\log(a + \delta)}{2} - a \log a$$

$$= a\ \frac{\left(1 - \frac{\delta}{a}\right)\log(a - \delta) + \left(1 - \frac{\delta}{a}\right)\ \log(a + \delta)}{2} - a \log a$$

Zu untersuchen haben wir die Differenz

$$\Delta = \left(1 - \frac{\delta}{a}\right)\log(a - \delta) + \left(1 + \frac{\delta}{a}\right)\log(a + \delta) - 2\log a$$

Ich setze noch $\frac{\delta}{a} = \varepsilon$, wo ε ein gegen 1 kleiner Wert ist Dann kommt bei kleinen Umformungen

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1 - \varepsilon)\{\log a + \log(1 - \varepsilon)\} + (1 + \varepsilon)\{\log a + \log(1 + \varepsilon)\} - 2\log a \\
&= -\varepsilon \log a + (1 - \varepsilon)\log(1 - \varepsilon) + \varepsilon \log a + (1 + \varepsilon)\log(1 + \varepsilon) \\
&= (1 - \varepsilon)\left(-\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} - \cdots\right) \\
&+ (1 + \varepsilon)\quad\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \frac{\varepsilon^4}{4} + \cdots\right) \\
&= -\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^4}{2} - \frac{\varepsilon^6}{6} - \cdots + 2\varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon^4}{3} + \frac{2\varepsilon^6}{5} + \cdots
\end{aligned}$$

Also kommt, wenn wir mit den Gliedern 6 Grades abbrechen

$$\Delta = \varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{6} + \frac{7}{30}\varepsilon^6 + \cdots > 0$$

Es wird, wenn wir noch mit dem abgetrennten Faktor $\frac{a}{2}$ wieder multiplizieren

$$\log \bar{z}_g - \log z = \frac{a}{2}\left\{\varepsilon^2 + \frac{\varepsilon^4}{6} + \frac{7}{30}\varepsilon^6 + \cdot \quad \right\} > 0$$

Man erkennt, daß das geometrische Mittel $z = \sqrt{z_1 \cdot z_2}$ großer, und zwar nur sehr wenig größer ist als das transzendente Mittel $\bar{z}$, dessen

$$\log z = \frac{x_1 + x_2}{2} \log \frac{x_1 + x_2}{2} = x \log x$$

ist

Diese Tatsache bildet ein sehr gutes Kriterium dafur, ob die Rechnung fur ein Gleichungspaar $x_1^{x_1} - z_1 = 0$ und $x^{x_2} - z_2 = 0$ richtig durchgefuhrt ist

Die Kombination von Losungen zur Gewinnung von Kriterium ist ein in der Theorie der Gleichungen oft mit Erfolg angewandter Kunstgriff

Ich darf an die Satze uber die Nullstellen der *Bessel*schen Funktionen, an das Oszillationstheorem an die Randwertaufgaben in der Theorie der Differentialgleichungen erinnern

Wir konnen unser Kriterium noch in Form einer Potenzgleichung schreiben, indem wir setzen

$$\frac{x_1 + x_2}{2} < \sqrt[\frac{x_1 + x_2}{2}]{x_1^{x_1} \; x_2^{x_2}},$$

und man wird auf die etwas allgemeinere Ungleichung schließen

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \quad + x_n}{n} < \left(x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} \cdot x_3^{x_3} \quad x_n^{x_n}\right)^{\frac{n}{x_1 + x_2 + x_3 + \quad x_n}}$$

Zum Schluß werden zwei Losungen der Gleichung $\underline{z - x^x = 0}$ ohne Logarithmentafel bestimmt, und ihre Richtigkeit an dem Mittelwertskriterium erprobt

1 $z_1 = 6197$, $\log z_1 = 3\,792181$
2 $z_2 = 6453$, $\log z_2 = 3\,809762$

Die Logarithmen $\log z_1$ und $\log z_2$ sind mit Hilfe der Logarithmen von 6200 und 6450 unter Anwendung der logarithmischen Reihe bestimmt

Die Rechnung geht in folgender Weise

$$\log 6197 = \log 6200 + \log\left(1 - \frac{3}{6200}\right)$$

Das Korrektionsglied

$$\log\left(1 - \frac{3}{6200}\right) = \log(1 - \delta)$$

gibt

$$\log(1 - \delta) = -\delta - \frac{\delta^2}{2}$$

Es wird

$$\frac{3}{6200} = 0{,}000484\,|$$
$$\frac{\delta^2}{2} = 0{,}000000117$$
$$l(1-\delta) = -0\ 000484117$$

Dieser naturliche Logarithmus ist mit dem Modul $M = 0{,}43429$ zu multiplizieren damit wir einen Briggischen Logarithmenwert erhalten Fur $M = 0\ 43429$ setzen wir wie fruher $M = 0\ 43\ (1 + 0{,}01)$ und schlagen den 1 prozentigen Zuschlag gleich zum Wert

$$l(1-\delta) = 0\ 000484117$$
$$484$$
$$= -\ \underline{0\ 00048896}$$

Dann wird

$$\log(1-\delta) = -0\ 000211$$

so daß

$$\log 6197 = \log 6200 - 0\ 000211 = 3\ 792181$$

wird

Ahnlich geht die Rechnung fur $\log 6453$ Den $\log 6450$ finden wir aus den Logarithmen der Faktoren 43, 5, 3 zu $\log 6450 = 3\ 809560$

Dann ist zu bestimmen

$$l(1+\delta) = l\left(1 + \frac{3}{6450}\right) = \delta - \frac{\delta^2}{2} + \qquad = \delta = +0\ 000465\,|$$
$$-\frac{\delta^2}{2} = -\qquad 108$$
$$= +0{,}000464892$$
$$+1\,\% \qquad 465$$
$$0{,}000469542$$
$$\times 0\ 43 = \quad 0{,}000202$$

$$\underline{\log 6453 = 3{,}809762}$$

Nach Bestimmung dieser beiden Logarithmen geht die Rechnung wie fruher weiter unter Benutzung der Hilfstafel zur Interpolation

Es kommt, wenn wieder $\bar{x}_1$ und x_2 die rohen Naherungswerte nach der Tafel sind,

$$\bar{\bar{x}}_1 = 5{,}25\,, \qquad x_2 = 5\ 27$$

1 Interpolation

$$\frac{10\,336}{11\,551} = 0{,}98 \qquad \frac{58\,180}{11\,564} = \underline{50}$$
$$3600$$

$$\underline{x_1 = 5{,}2598}$$

$$\log x_1 = \log 5{,}25\left(1 + \frac{0{,}0098}{5{,}25}\right)$$

$$= \log 5{,}25 = 0{,}720159$$

$$1 + \frac{0{,}0098}{5{,}25} = 1 + \frac{0{,}0392}{21} = 1 + \frac{0{,}0036}{3}$$

$$\begin{array}{rl} \delta = & 0{,}001866 \mid 7 \\ - & \qquad 1{,}74 \\ \hline -\frac{\delta^2}{2}(1+\delta) = & 0{,}001865 \\ +1\% & \qquad 187 \\ \hline & 0{,}0018837 \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{0{,}0018837 \quad 0{,}43}{0{,}000810} \cdot \log 5{,}2598 = 0{,}720969$$

$$\underline{\bar{x}_2 = 5{,}2750}$$

$$\log x_2 = 0{,}722222$$

$$x_1 \cdot \log x_1 = 3{,}792153$$

$$x_2 \quad \log \bar{x}_2 = 3{,}809721$$

2 Interpolation

$$x_1 = x_1 = 5{,}2398 + \frac{28}{115{,}5}$$

$$= 5{,}2598 - 0{,}24$$

$$\underline{x_1 = 5{,}259824}$$

$$x_2 = x_2 = 5{,}2750 + \frac{41}{115{,}64} = 5{,}2750 + 0{,}000035 = 5{,}275035$$

Eine leichte Rechnung stellt die Logarithmen von x_1 und x_2 aus denen von x_1 und x_2 her Es kommt als Zuschlag in Einheiten der sechsten Stelle bei x_1 der Wert 2 bei $\bar{x}_2$ der Wert 3, so daß wir haben

$$\log x_1 = 0{,}720971\,, \qquad \log x_2 = 0{,}722225$$

Die weitere Rechnung geht dann wie früher vor sich, und wir erhalten

$$x_1 \log x_1 = \underline{5{,}259824 \cdot 0{,}720971} \qquad x_2 \log x_2 = \underline{5{,}275035 \cdot 0{,}722225}$$

$$= \underline{3{,}792181} \qquad\qquad = \underline{3{,}809762}$$

Prüfung durch die Mittelwerte

1

$$x_2 = 5{,}275035$$

$$\underline{x_1 = 5{,}259824}$$

$$\Delta = 0{,}015212$$

$$\frac{\Delta}{2} = 0{,}007606$$

$$x = \underline{5{,}267430}$$

$$\log \bar{x} = 0{,}721599$$

$$\log z = \bar{x} \log \bar{x} = 3{,}800972$$

2

$$\frac{\log z_1 + \log z_2}{2} = 3{,}800972$$

Bei der Bildung von x haben wir die Differenz ein klein wenig vergrößert, so daß $\bar{x}$ eine halbe Einheit der sechsten Stelle zu groß ist

Das Ergebnis bestätigt vollauf die Richtigkeit unserer Rechnung ohne Logarithmentafel

2. Beispiel

$z_1 = 7261$	$z_2 = 7517$

Berechnung der Logarithmen

$z_1 = 7261 = \frac{29044}{4} = \frac{29000}{4}\left(1 + \frac{44}{29000}\right)$	$z_2 = \frac{30068}{4} = \frac{30000}{4}\left(1 + \frac{68}{30000}\right)$
$\log z_1 = 3{,}860996$	$\log z_2 = 3{,}876045$
$\bar{x}_1 = 5{,}31$	$\bar{x}_2 = 5{,}33$

1. Interpolation

$\lambda = \frac{10742}{11598} = 0{,}92$	$\lambda = \frac{2590}{11614} = 0{,}22$
$x_1 = 5{,}3192$	$x_2 = 5{,}3322$
$\log \bar{x}_1 = 0{,}725846$	$\log x_2 = 0{,}726906$
$\bar{x}_1 = 10^{-4}(53200 - 8)$	$\bar{x}_2 = 10^{-4}(53300 + 22)$
$x_1 \log x_1 = 3{,}860920$	$x_2 \log \bar{x}_2 = 3{,}876008$

2. Interpolation

$\lambda = \frac{76}{115{,}98} = 0{,}65$	$\lambda = \frac{37}{116{,}14} = \underline{0{,}32}$
64 120	2158
$x_1 = 5{,}319265$	$x_2 = 5{,}332232$
$x_1 \log x_1 = 3{,}860994$	$x_2 \log x_2 = 3{,}876047$

Mittelwerte

1. $x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 5{,}319265 + 0{,}006483 = \underline{5{,}325748}\,,$

$\bar{x} \log x = 3{,}868521$

2. $\log z_0 = \frac{\log z_1 + \log z_2}{2} = \underline{3{,}868521}$

Die Übereinstimmung der Mittelwerte $\bar{z}$ und z_0 läßt die Richtigkeit der Rechnung erkennen.

Die in einigen Beispielen behandelte Gleichung $z - x^x = 0$ zeigt, wie man bei der Behandlung solcher Zahlenaufgaben verfahrt. Man stellt das Differenzengesetz auf, dann bildet man in dem erforderlichen Umfang Hilfstafeln, die in den beigefugten Differenztafeln einerseits die Interpolationsgrundlagen fur die Bestimmung der Unbekannten liefern und andererseits die Zahlenwerte der Hilfstafeln auf ihre Richtigkeit prufen.

Wichtig ist die Auffindung einer empfindlichen Rechenkontrolle.

Unser Beispiel zeigt, in welcher Richtung diese zu suchen ist.

Man bildet zwei moglichst einfache Funktionen $f_1(x_1, x_2)$ und $f_2(x_1, x_2)$ zweier Losungen der gegebenen Gleichung $z - Q(x) = 0$

$f_1(x_1\ x_2)$ und $f_2(x_1\ x_2)$ sind so zu wahlen, daß sie auf Grund der zu losenden Gleichung $z - Q(x) = 0$ eine charakteristische einfache Bedingung zu erfullen haben In unserem Beispiel bestand diese in dem Zusammenfallen zweier einfacher Mittelwerte der Losungen x_1 und x_2 Außerdem hat dieses Beispiel gezeigt daß das Logarithmenrechnen ohne Tafel ganz gut durchfuhrbar ist Macht es auf der einen Seite etwas mehr Muhe, so wird auf der anderen Seite eine mechanische Rechnung in eine mathematisch interessante verwandelt, die Schritt fur Schritt durch kleine geschickte Erfindungen ihren Weg ebnen muß, also sicher eine gute Rechenmethode ist