PRINCIPIELLE
DARSTELLUNG DES RECHENUNTERRICHTES
AUF HISTORISCHER GRUNDLAGE.

I. TEIL.

GESCHICHTE
DER
RECHENKUNST

VON

MATTHÄUS STERNER,
K. B. KREISSCHOLARCH UND KREISSCHULINSPEKTOR DER OBERPFALZ
IN REGENSBURG.

MÜNCHEN UND LEIPZIG.
DRUCK UND VERLAG VON R. OLDENBOURG,
ABTEILUNG FÜR SCHULBÜCHER.

Vorrede.

---

1. Hat der Wanderer einen Höhepunkt erreicht, steht er stille, nicht um sich aufzuhalten, sondern um neue Kräfte für die bevorstehenden Anstrengungen zu sammeln. Und selbst in diesem Augenblicke der Ruhe findet er Arbeit: er überblickt den zurückgelegten Weg; er läfst die durchschrittenen Gegenden, die nun hinter dem Horizonte liegen, im Geiste an sich vorüberziehen; er gedenkt mit Bedauern seiner Irrwege. Vorwärtsblickend überschaut er das weite Thal, das sich seinem Auge öffnet, und er sucht sich auf der Strecke zu orientieren, die zwischen seinem Standpunkte und dem Ziele liegt.

Solch einem Wanderer ist der rastlos strebende Schulmann zu vergleichen. Inmitten der anstrengenden Tages- und Jahresarbeit mufs es im Lehrerleben Augenblicke der Rast, der Sammlung und Besinnung geben mit der Frage: War ich bisher auf dem rechten Wege, und irre ich nicht in der Richtung, in welcher ich zu wandeln und meine Schüler zu führen gedenke?

Den Rückblick auf die pädagogische Vergangenheit, nicht minder den Ausblick auf die Zukunft, eröffnet die Geschichte der Pädagogik. Leider zeigt der historische Teil der pädagogisch-didaktischen Litteratur trotz der schätzbaren Arbeiten von Raumer, Heppe, Kellner, Schmid, Specht u. a. noch weite Lücken, und die Geschichte der einzelnen Unterrichtsfächer ist ein fast noch unangebautes Feld. Für unsern Gegenstand, das Rechnen, finden sich ungezählte Leitfäden, Anweisungen, Übungsbücher;

aber wo ist seine Geschichte? Man greife nur hinein in seine Bibliothek, man prüfe die Litteraturverzeichnisse, um sich von der Richtigkeit dieser Behauptung sofort zu überzeugen. Ist doch dem Verfasser trotz eifrigster Umschau nur eine ganz geringe Zahl solcher Schriften bekannt geworden, welche die historische Entwicklung der gemeinen Arithmetik behandeln oder sich doch gelegentlich darüber verbreiten. Es ist hier zu nennen der treffliche Aufsatz über das Rechnen von Prof. Wildermuth im 6. Bande der Schmidschen Encyklopädie, welche Arbeit für das vorliegende Buch Muster und Grundlage geworden ist; die mathematischen Beiträge zum Kulturleben der Völker des verdienstvollen Forschers Dr. Moriz Cantor, denn ohne dieses phänomenale Werk könnte eine Geschichte der Rechenkunst überhaupt nicht geschrieben werden; die Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter von Professor Dr. Günther; Arneths Geschichte der reinen Mathematik; die kleine Schrift von Villicus, Zur Geschichte der Rechenkunst, und Jänickes Abhandlung über die Geschichte des Rechenunterrichts in Kehrs Geschichte der Methodik. Alles übrige mufste, wie ein Blick in das Litteraturverzeichnis ausweist, aus alten und neuen Rechenbüchern zusammengetragen werden — ein Umstand, der sich allerdings auch in der mosaikartigen Form der äufseren Darstellung nicht verleugnet. Eine ausführliche Geschichte der Rechenkunst, welche die Entwicklung dieses Gegenstandes von den ältesten Zeiten bis auf den heutigen Tag samt den Formen ihrer Übertragung auf den Lernenden verfolgt, war bisher nicht vorhanden, und deshalb rechtfertigt sich vorliegende Arbeit, möge sie immerhin nur als ein Versuch zur Lösung der umfassenden und schwierigen Aufgabe erachtet werden, von selbst. Wenn dieselbe nichts weiter erreicht hätte, als für eine spätere Arbeit aus berufener Feder Material bereitgestellt zu haben, so wäre das schon ein Erfolg. Es lassen sich aber an rechengeschichtliche Abhandlungen weitergehende Hoffnungen knüpfen. Die Methode des Unterrichts ist bekanntlich noch nicht so weit gefördert, dafs sie in jedem Falle die unumstöfslichen Gründe für ihre Mafsnahmen nachweisen könnte. Insbesondere geben die vorhandenen Rechenbücher angesichts der lebhaft diskutierten Streitfragen und Differenzen mancherlei Bedenken über die Zuverlässigkeit und Richtigkeit der herrschenden

Lehrmethode Raum, und man wird kaum fehlgehen in der Annahme, dafs sie noch in vielen Punkten im Banne der Willkür und des Zufalls befangen sei. Daraus kann sie nur erlöst werden, durch die Psychologie und Geschichte. Nun aber ist die Geschichte des Rechnens in gewissem Sinne auch seine Psychologie. Die Mathematik erscheint nämlich als ein gewaltiges, genial ausgeführtes Riesengebäude von Ideen, an dem alle Kulturvölker aller Zeiten nach einem wunderbar einheitlichen Plane gearbeitet haben, nach einem Plane, den der Baumeister der Welt selbst entworfen und in die Natur des Menschen gelegt hat. Die Geschichte der Mathematik (und der Elementar-Arithmetik) ist deshalb auch zugleich Entwicklungsgeschichte des Geisteslebens der Menschheit. Und wenn es wahr ist, dafs sich in der psychischen Entfaltung des Kindes die geistige Entwicklung des Menschengeschlechtes reflektiert, und dafs die Kulturstufen des Menschengeschlechtes im Leben des Individuums sich wiederholen (Stephani, Ziller), dann mufs das Kind auf dieselbe Weise zum Rechnen gelangen, wie die Menschheit, wenn auch auf bequemeren und kürzeren Wegen. Hieraus ergibt sich, dafs die Geschichte der Rechenkunst die verlässigste Grundlage zum Aufbau der Rechen-Lehrmethode ist. Und in der That führt sie die Lehrstoffe auf, welche die Psychologie nicht nachweisen kann; sie zeigt, in welcher Reihenfolge dieselben in Arbeit zu nehmen, wie und mit welchen Hilfsmitteln sie zu behandeln sind; sie deckt die Irrwege auf, welche früher gemacht wurden, und bewahrt vor Wiederholung derselben; sie lehrt das Neue vorsichtig prüfen und bringt uns, indem sie den Kreis der möglichen Irrtümer einschränkt, der Wahrheit näher. In allen schwierigen Fragen der Lehrmethode gibt sie noch den besten Aufschlufs, so dafs das Wort eines neueren Rechenmethodikers: Die Geschichte eines Unterrichtsfaches lehrt seine beste Methode — hier vollständig zutrifft.

Das Studium der Geschichte der Rechenkunst wird auch auf das individuelle Lehrverfahren fruchtbar einwirken. Wir verteilen eine Million Mark unter 10 Personen — mit einem einzigen Federstrich (Null ab). Eine Arbeit, die zu ihrer thatsächlichen Ausführung Tage erfordert, wird im Denken in einer Sekunde mit vollster Sicherheit vollzogen und semiotisch bezeichnet. Das Bewufstsein für diese wunderbare Einfachheit, die

Vorstellung von der Riesenarbeit, die erforderlich war, um zu dieser kunstvollen Einfachheit vorzudringen, der Gedanke, dafs wir in unseren simplen Grundrechnungsarten die Resultate einer durch Jahrtausende sich erstreckenden Denkarbeit aller Zeiten und Völker vor uns haben, ist dem Alltagsleben fast vollständig verloren gegangen. Der Lehrer aber, welcher sich von solcher Erkenntnis leiten läfst, welcher weifs, dafs noch vor 1000 Jahren eine Division, die jetzt ein zehnjähriges Kind in wenigen Minuten fertig bringt, für einen Gelehrten eine Halbtagsarbeit war, und dafs derjenige, der dividieren konnte, schon als Mathematiker galt, wird in seinen Forderungen an das Kind nüchtern und mafsvoll bleiben, ihm das Lernen erleichtern und die Geduld bewahren. Wir alle aber werden einen Unterrichtsgegenstand lieb gewinnen, von dem wir die Mittel und Wege kennen, durch welche er seine grofsartigen Erfolge erzielt hat. Die Geschichte der Rechenkunst mahnt den Methodiker zur Bescheidenheit, denn sie zeigt ihm nicht selten, dafs vieles von dem, was er durch eigenes Nachdenken gefunden hat und als neu erachtet, schon lange vor ihm von anderen gedacht, aufgezeichnet und verwertet worden ist. Auch in anderer Weise wirkt das Studium der Rechengeschichte veredelnd auf die Gesinnung. Wenn wir die heimgegangenen Lehrmeister in ihrer Werkstätte belauschen und ihre redlichen Bemühungen verfolgen, um unsern Lehrgegenstand in die Höhe zu bringen; wenn wir uns stets gegenwärtig halten, dafs wir auf den Schultern unserer Väter stehen und von dem reichen, ehrwürdigen Erbe der Vergangenheit zehren: dann werden wir auch geneigt sein, dieses Erbe als wahres, unvergängliches Gut zu bewahren und auf unsere Kinder, die folgende Generation, zu übertragen. Endlich weist die Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts nach, dafs dieses Fach und seine Lehrart trotz mancher Irr- und Umwege im unaufhaltsamen Fortschritte die gegenwärtige Stufe der Entwicklung erklommen hat. Ein im Laufe von Jahrtausenden mit zahllosen Kräften aufgeführter, festgefügter Bau kann und darf nicht eingerissen werden, um etwa an seiner Stelle einen andern aufzuführen. Dieser Gedanke gibt uns das freudige Bewufstsein, dafs der Methodiker nur vorsichtig die bessernde Hand anlegen und an der weiteren Ausführung des bestehenden Gebäudes in treuer und hingebender Arbeit sich beteiligen kann.

2. Die Geschichtsforschung auf dem Gebiete der Arithmetik ist noch sehr jung. Erst in den letztvergangenen Jahrzehnten ist ihr die gebührende Pflege zu teil geworden. Es darf daher nicht überraschen, wenn von grofsen Perioden dieses Gegenstandes noch alle Nachrichten fehlen. Selbst die in Bibliotheken und Archiven ruhenden Schätze sind noch nicht so weit gehoben, dafs für die jüngere Geschichte der Rechenkunst eine möglichst breite Unterlage an historischem Material gewonnen wäre. Diese Sachlage und die Unmöglichkeit, dafs Einzelne die rückständigen Vorarbeiten bewältigen, schliefst zur Zeit den Gedanken an eine im Stoffe möglichst vollendete Geschichte der Rechenkunst aus. Nur ein grofser Kreis thätiger Kräfte kann auf dem hier betretenen Wege endlich ein reiches Ergebnis erzielen. Möchte diese bescheidene Arbeit hierzu eine Anregung sein!

Um den Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung, das Warum des objektiven Thatbestandes nachzuweisen, waren vielfach allgemein geschichtliche und kulturhistorische Beziehungen anzuknüpfen. Man mufste sich hierin aber auf Fingerzeige beschränken und dem Leser überlassen, die weitere Ausführung der angerufenen Wissensgebiete in einem Geschichtswerke oder einer Geschichte der Pädagogik nachzuschlagen.

Im Leben der Völker tritt das Neue nicht urplötzlich auf, sondern wird regelmäfsig von langer Hand vorbereitet, meist auf wechselndem Schauplatze weiter geführt, bis es eine gewisse Höhe der Vollkommenheit erreicht hat. Daneben besteht das Alte fort, es tritt allmählich vor dem besseren Neuen zurück, verschwindet, taucht da und dort wieder auf, bis es endlich, durch das Neue entbehrlich gemacht, ganz erlischt. Diese Erscheinung können wir am Linienrechnen, an der Division und Multiplikation mit dem dekadischen Komplement, am Übersichdividieren, an der Neunerprobe etc. beobachten. Daraus ergibt sich, wie schwer es ist, den Ursprung des Neuen nachzuweisen, Ort und Zeit sicher zu bestimmen, wo und wann es zum ersten Male auftritt. Wenn deshalb vorliegendes Buch auf neue Erscheinungen hinweist, geschieht es immer mit dem stillen Vorbehalte, dafs die Möglichkeit, ältere Quellen aufzufinden, gegeben sei.

Die benutzten Quellenschriften wurden im Texte nur ausnahmsweise citiert, um das Lesen nicht zu erschweren, den

Umfang des Buches nicht zu sehr zu vergröfsern und die Anschaffungskosten nicht zu vermehren. Aus dem gleichen Grunde mufste von einem Namen- und Sachregister Umgang genommen werden. Dagegen wurde ein ausführliches Inhalts- und Litteraturverzeichnis beigegeben.

Jenen Männern, welche in dem Litteraturnachweise ihre Werke, im Buche selbst aber ihre eigenen Gedanken wiederfinden, sei hiermit für ihre Mitarbeit der geziemende Dank ausgesprochen. Denen aber, welchen dieser Dank gleichfalls gebührt, denselben jedoch, weil sie aus dieser Zeitlichkeit bereits abgerufen sind, nicht mehr empfangen können, möge durch dieses Buch ein ehrendes Denkmal dankbarer Erinnerung gesetzt sein.

Für alle Winke und Mitteilungen, welche die hier begonnene Arbeit in einer etwa notwendig werdenden 2. Auflage zu fördern geeignet sind, wird gleichfalls im voraus der geziemende Dank ausgesprochen.

Regensburg, am 8. August 1891.

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

---

[1]) Die Ziffern weisen auf die Seiten des Buches.

5. Die Rechenkunst der alten Inder 57.

6. Die Rechenkunst der Römer 73.

7. Die Rechenkunst der Araber 90.

II. Das Rechnen im christlichen Abendlande.

1. Notizen über das Rechnen der Altgermanen.

2. Das Rechnen in den Klosterschulen des frühen Mittelalters.

3. Die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst im christlichen Abendlande. 12.—14. Jahrhundert.

4. Weitere Entwicklung und Verbreitung der Rechenkunst im 15. und 16. Jahrhunderte 159.

5. Die Rechenkunst im 17. Jahrhunderte.

6. Die Rechenkunst im 18. Jahrhunderte.

Mutmaßungen über die vorgeschichtliche Entwicklung der Rechenkunst.

Das riesenhafte Lehrgebäude der Mathematik, von den fundamentalen Zahlbegriffen bis zu den Höhen der Differential- und Integralrechnung samt der vielseitigen Anwendung der mathematischen Lehrsätze auf den bürgerlichen, gewerblichen und landwirtschaftlichen Verkehr, auf die Astronomie, Physik, Statik, Statistik etc., ist nicht allein das Werk der Neuzeit, sondern das Ergebnis einer durch Jahrtausende fortgesetzten Denkarbeit des Menschengeschlechts.

Wollen wir den Anfängen der Arithmetik nachgehen, sind wir zunächst auf die spärlichen Nachrichten angewiesen, welche uns von den alten Kulturvölkern durch die Schrift überkommen sind. Die Erfindung und Anwendung von Schriftzeichen setzt aber schon eine bedeutende Kulturhöhe voraus; auch sind die Bauten und Landesvermessungen der Ägypter, Handel und Schifffahrt der Phönizier, wovon uns die ersten Seiten der Geschichte berichten, ohne arithmetische, geometrische und astronomische Kenntnisse nicht denkbar. Was uns also von dem mathematischen Wissen der ältesten Kulturvölker bekannt geworden ist, und was immer noch aus den Trümmern untergegangener Städte und den Gräbern altersgrauer Vorzeit hervorgeholt und entziffert werden möge, das sind nicht die Uranfänge, sondern die hinteren Glieder einer lange voraufgegangenen Entwicklungsreihe, die in ihrer ganzen Ausdehnung von der Geschichtsforschung wohl niemals erreicht werden wird. So muſs es dem Rückschlusse überlassen bleiben, in das geheimnisvolle Dunkel dieser lehrreichen Anfänge einen Schritt zu wagen. Ein Blick auf die Zähl- und Berechnungsweisen der noch jetzt lebenden unzivilisierten und halbkultivierten Völker mag dabei manche interessante Lehre geben.

Die Analyse der sinnlichen Anschauung führt zu dem Resultat, daſs in ihr Zahl und Form der Dinge unmittelbar gegeben sind. Die Wahrnehmung gleichartiger Dinge muſste dem mit Vernunft begabten Menschen den Gegensatz der Einheit zur Vielheit aufdrängen. Die Erkenntnis dieses Gegensatzes führte naturgemäſs zu dem »Wieviel?«, zur Aussonderung der bestimmten Zahlbegriffe aus der unbestimmten Vielheit. Hiernach fallen die Anfänge des Rechnens mit den Anfängen des Denkens überhaupt zusammen, sohin ist das Rechnen so alt als das Menschengeschlecht. Thatsächlich liegt in der biblischen Schöpfungsurkunde das Grundprinzip alles Rechnens ausgesprochen. Wenn der dem Schoſse der Erde entstiegene Mensch jedem Tiere einen Namen gibt, so ist die Auffassung der Form und Zahl der Dinge, die Unterscheidung des Individuums aus seiner Art a priori vorausgesetzt, wie denn auch der Befehl in Hinsicht auf den Baum der Erkenntnis des Guten und Bösen ohne das Vorhandensein der vollständigen und klaren Erkenntnis der Raumverhältnisse, ohne die Fähigkeit, eine bestimmte Einheit aus der Vielheit zu erkennen, eine des allgütigen Schöpfers unwürdige Härte gewesen wäre.

Die vorhandenen Zahlsysteme weisen auf die Glieder der Extremitäten als Ausgangspunkte in Erstellung der ersten Zahlbegriffe. Doch war es dem mit Vernunft und Selbstbewuſstsein ausgestatteten Menschen eher angemessen, sich selbst als Einheit zu setzen, den gegenüberstehenden als zweiten, den fernerstehenden als dritten, und es ist wohl mehr als Zufall, wenn Pronomina und Numeralia noch übereinstimmen. So viel darf als gewiſs angenommen werden, daſs sich aus dem verschwommenen Begriffe der Vielheit durch wiederholte Setzung der Einheit zuvor die bestimmten Begriffe zwei, drei etc. herausgebildet haben, und daſs erst später der Übergang zu gröſseren Zahlen erfolgte.

Wie dieser Prozeſs mutmaſslich sich vollzog, können wir noch an Indianern und Negern beobachten. Die Rechenkunst dieser Völker befindet sich im allgemeinen noch in dem Zustande, in welchem sie sich bei den derzeitigen Kulturvölkern vor Jahrtausenden befunden hat. Die Tamanaki-Indianer zählen an den Fingern und Zehen. Das Zahlwort für 1 heiſst Finger, für 5: die ganze Hand; für 6: an der andern Hand eins; für 7: an der andern Hand zwei; für 10: zwei Hände; für 11: vom

Fufs eins; für 15: ein Fufs und zwei Hände; für 20: ein Indianer oder ein Mann; für 21: vom andern Mann oder Indianer an den Händen eins; für 30: vom andern Mann an beiden Händen; für 40: zwei Indianer; für 100: fünf Indianer. Auch die Eskimos gebrauchen statt 20 das Wort Mensch, d. i. 10 Finger und 10 Zehen, statt 100 setzen sie gleichfalls den Ausdruck: fünf Menschen. Die Karaïben auf den Antillen und am Orinoko haben für die Zahlen von 1 bis 4 besondere Namen; 2 heifst ein Paar, 5 heifst vier und der andere, 6: die Hand und eins mehr, 7: die Hand und zwei mehr, 10: zwei Hände der Person, 20 so viel als Hände und Füfse, 30 soviel als Hände und Füfse und zwei Hände mehr.

Indianer und Neger nehmen beim wirklichen Zählen ihre Finger und Zehen zu Hilfe. Wenn der Indianer eine Zahl ausspricht, so zeigt er sie auch; er sagt niemals fünf, ohne die eine Hand, nie zehn, ohne beide Hände auszustrecken. Will der Vilela-Indianer 40 darstellen, dann spreizt er die Beine und streckt beide Hände mit auseinandergezogenen Fingern weit aus und sagt ukebè, d. h. 20 zweimal.

Die Zulukaffern zählen, indem sie mit dem kleinen Finger der linken Hand beginnen und jeden der gezählten Finger ausstrecken. Der zweite Zehner wird mit dem kleinen Finger der rechten Hand begonnen. Werden an der rechten Hand die drei äufseren Finger gestreckt, so bedeutet dies 3 über 10, also 13, selbst wenn die Finger der linken Hand nicht gestreckt werden. Nach jedem vollendeten Zehner schlagen sie beide Hände mit ausgestreckten Fingern zusammen. Werden die Hände zweimal zusammengeschlagen und der Daumen der rechten Hand vorgezeigt, so bedeutet dies $10+10+5+1$, also 26.

Mit dem geistigen Prozesse der Zahlbildung ging die Bildung der Zahlwörter Hand in Hand, denn es liegt in der Natur des Menschen, die Erzeugnisse seiner Denkthätigkeit auch sprachlich zu fixieren. Kaum hat sich der Verstand zur Höhe eines Begriffs erhoben, gibt die semiotische Einbildungskraft auch schon den Namen, und durch diesen tritt der Begriff erst so recht ins Dasein. Die ursprünglichen Zahlnamen wurden wahrscheinlich von den Dingen hergenommen, an welchen die Zahl sich dem Blicke darstellte. Der Sachname war dann zugleich der Zahlname. Es wurde z. B. die Zahl 2 durch das Wort Auge bezeichnet, wie das die Inder heute noch thun. Die Abipone-Indianer haben nur drei eigentliche Zahlwörter; die übrigen Zahlwörter sind gleichlautend mit konkreten Substantiven. In seinen Fingern erkannte der Mensch die primitiven Einheiten und in ihrer Zusammenfassung an der Hand, im Fünfer, die höchste überschaubare Kollektiveinheit. Darum übertrug er in den Anfängen der Zahlbildung den Namen der Hand auf die Zahl »Fünf«. Die Malaien auf Java haben heute noch für Hand und Fünf ein und dasselbe Wort, lima. In slavischen Sprachen ist das Zahlwort fünf verwandt mit dem Worte Faust. Im Sanskrit heifst pánčan (pàntschan) fünf, und paniča die Hand. Auch bei den Ägyptern läfst sich der Gebrauch von Sachnamen an Stelle der Zahlwörter nachweisen. Die Anwendung gleichlautender Wörter für Zahlen und Sachen gab aber zu Mifsverständnissen Anlafs. Um Irrungen zu vermeiden und den reinen Zahlbegriff zu erhalten, mufsten die Sachnamen aus der Reihe der Zahlwörter ausgeschieden, bezw. eigene Zahlwörter gebildet werden. Der Gebrauch besonderer Zahlwörter ist aber schon sehr alt und greift jedenfalls in jene Zeit zurück, in welcher die Verbreitung des Menschengeschlechts sich noch auf einen verhältnismäfsig kleinen Teil der Erdoberfläche beschränkte. Betrachten wir nämlich die Zahlwörter aus verschiedenen Sprachen, so finden wir bei den Wörtern für ein und dieselbe Zahl eine auffallende Ähnlichkeit. Nachstehende Tabelle, welche die Zahlwörter von 1 bis 10 in nur sechs Sprachen darstellt, läfst diese Ähnlichkeit schon erkennen.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Sanskrit	eka	dva (dvi)	tri	catvâr	páncan	sas	sáptan	ástan	návan	dásan
Hindostanisch	yek	do (du)	tin (ce)	char (cihar)	panch	cha sax	sat haft	atth	nao (noh)	dass (dah)
Keltisch	unan (un)	daou	tri	peuar	pemp	cheab	seis	eis	nao	dek
Altgriechisch	heis	dyo	treis	tessares	pente	hex	hepta	okto	ennea	deka
Lateinisch	unus	duo	tres	quatuor	quinque	sex	septem	octo	novem	decem
Gotisch	ain ains aina ainata	twai twôs tva	thrija	fidvôr	fimf	saihs	sibun	ahtan	niun	taihun
Althochdeutsch	ein einêr einin einaz	zwêne zwô zwei	drî driu	fior	fimf	sehs	sîbun	ahtô	niun	zehan
Mittelhochdeutsch	ein einer einiu einez	zwêne zwo zwei	drî driu	vier	vimf	sehs	siben	aht	niun	zehen

In den meisten Sprachen fangen die Zahlwörter für 6 und 7 mit s an. Villicus, dessen Schrift »Zur Geschichte der Rechenkunst« vorstehende Übersicht entnommen ist, hat eine Tabelle der Grundzahlen von 33 Sprachen zusammengestellt, aus welcher hervorgeht, dafs das Zahlwort sechs in 24 Sprachen und das Zahlwort sieben in 26 Sprachen mit s beginnt. Mehrere Sprachen, welche in den Grundzahlwörtern für 6 und 7 den Anlaut s nicht mehr haben, weisen ihn noch in den Zusammensetzungen auf. Auch die Zahlwörter für 10 sind bei jenen Völkern ähnlich, die nach Zehnern rechnen. Da es aber nicht denkbar ist, dafs über weite Fernen zerstreute Völker sich geeinigt hätten, gleiche oder ähnliche Zahlnamen einzuführen, so erübrigt nur die Annahme, dafs jene Völker, bei welchen diese Ähnlichkeit hervortritt, ursprünglich beisammen wohnten, und dafs die Bildung der Zahlnamen schon erfolgt war, ehe sie sich trennten und ihre Urheimat verliefsen.

Nachdem die Menschen die ersten Zahlbegriffe erworben und denselben einen sprachlichen Ausdruck gegeben hatten, trat das Bedürfnis zur Erweiterung der Zahlreihe ein. Hier war aber eine Schwierigkeit eigentümlicher Art zu überwinden. Die Zahlwörter bezeichnen nämlich nicht blofs eine gewisse Zahl von Einheiten, sondern auch den mathematischen Punkt, den eine Zahl in der Reihe einnimmt, weil jede Zahl die vorhergehende um eine Einheit überragt. Die Auffindung bestimmter Zahlwörter und die Festhaltung ihrer Folge mufste um so schwerer werden, je mehr die Reihe sich ausdehnte. Denken wir uns in den Fall, wir hätten nur für jede Zahl innerhalb der Reihe von 1 bis 100 ein selbständiges Zahlwort mit der ihm gebührenden Folge zu merken, wie dies innerhalb der Reihe von eins bis zehn in der That der Fall ist, so wäre dies für das Gedächtnis des Normalmenschen schon eine ungeheure Zumutung. In Überwindung dieser Schwierigkeit zeigt sich die geniale Findigkeit des Menschengeistes in lichtvollster Weise: man fafste eine Zahlreihe als Einheit höherer Ordnung zusammen und benutzte sie als Mafs für die folgenden Teile der Reihe, und ganz diesem Prozesse entsprechend suchte man nicht etwa nach neuen Zahlwörtern, sondern bildete diese durch Zusammensetzung aus den bereits vorhandenen. So ist dreizehn der Ausdruck für zehn und drei, 72 für 7 mal zehn und zwei. Nur für Hauptdurchgangspunkte der Reihe, für 100 und 1000, hatte man noch eigene selbständige Zahlwörter. Dieser Prozefs sendet seine letzten Ausklänge sogar bis in die neueste Zeit, denn es sind kaum zweihundert Jahre her, seitdem man in Deutschland für tausendmaltausend das Wort Million einführte. Mit einem Worte, man bildete Zahlsysteme, deren Konstruktion auch äufserlich in den Zahlnamen hervortrat.

Wie wir gehört haben, waren beim primitiven Zählen Finger und Zehen die nächstliegenden Ausgangspunkte. Man konnte nun, den fünf Fingern der einen Hand entsprechend, die Fünf, oder nach der Zehnzahl der Finger die Zehn, oder aber nach der Gesamtzahl der Finger und Zehen die Zwanzig als Mustergruppe oder Mafs für die folgenden Zahlen der Reihe annehmen. Naheliegende Zahlsysteme waren demnach das Fünfer-, Zehner- und Zwanzigersystem. Und in der That lassen sich diese Systeme bei verschiedenen Völkern nachweisen.

Das Fünfersystem war das ursprüngliche, denn Reste desselben finden sich noch in den vorhandenen Zehnersystemen. Die Kaffern auf Mozambique zählen: 1 moassa, 2 pili, 3 thara, 4 ssessé, 5 thana, 6 thana moassa d. i. $5+1$, 7 thana pili d. i. $5+2$, 8 thana thara, also $5+3$. Die Fulah-Neger zählen: $1 =$ guh, $2 =$ didy, $3 =$ taty, $4 =$ naye, $5 =$ guive, $6 =$ guieguh, d. i. $5+1$, $7 =$ guie-didy, d. i. $5+2$, $10 =$ sappo, $11 =$ sappoe-guh, d. i. $10+1$. Diese Völker bilden also nach Abzählung der Finger einer Hand die folgenden Zahlnamen durch Wortzusammensetzung, ähnlich wie es in der deutschen Sprache von 10 an geschieht. Solche quinäre Zahlsysteme sind noch üblich bei den meisten afrikanischen Völkern und bei den Bewohnern der Südseeinseln. Doch sind diese Systeme als quinär nur im linguistischen, nicht im mathematischen Sinne, aufzufassen, denn letzterenfalls müfsten sie Potenzen aus 5 haben, also 5^2, 5^3, wie im Zehnersystem $10^2 = 100$ und $10^3 = 1000$ ist.

Das Zehner- oder Decimalsystem ist verbreitet in Mittelamerika, in China und Europa. Die Araukaner (in Chili) haben von 1 bis 10 besondere Namen: 2 epu, 3 kula, 10 mari, 20 epumari, d. i. zweizehn, 30 kulamari, d. i. drei (mal) zehn. Die Zahlwörter der Aimara-Indianer weisen darauf hin, dafs dieser Stamm vom Fünfer- zum Zehnersystem übergegangen ist.

Das Zwanziger- oder Vigesimalsystem findet sich in Spuren noch im nordwestlichen Afrika, in Albanien; herrschend ist es bei verschiedenen Völkern am Nordostrande Asiens, am ausgebildetsten in Süd- und Mittelamerika, z. B. bei den Maya-Indianern und den Azteken Mexikos. Auch in den kaukasischen und keltischen Sprachen sind Reste des Vigesimalsystems erhalten geblieben. In Dänemark ist $50 = 2\frac{1}{2}$ mal 20. Die Franzosen, Abkömmlinge der Kelten, gingen mit der Zeit zum Zehnersystem über und bildeten ihre Zahlwörter aus dem Lateinischen; aber die Ausdrücke quatre-vingt (80, d. i. 4 Zwanziger) und quatre-vingt-dix (90, d. h. 10 über 4 Zwanziger) weisen noch auf das keltische Zwanzigersystem zurück. Mit der steigenden Kultur hat das Zehnersystem die übrigen Systeme mehr und mehr verdrängt.

Die Bildung der Zahlsysteme läfst noch einen andern bedeutsamen Umstand erkennen. Es ist gesagt worden, das ursprüngliche Rechengeschäft war rohes Zählen. Was ist aber das Zählen? Offenbar r e c h n e n; denn die Zahlreihe 1, 2, 3, 4 . . . . 10 ist identisch mit den Rechensätzen $1+1 = 2$; $2+1 = 3$; $3+1 = 4$ . . . $9+1 = 10$, und diese Rechensätze sind früher gedacht worden als die Zahlnamenreihe, denn diese ist nur die Abkürzung der vorbezeichneten elementarsten Additionsreihe. Erinnern wir uns noch, dafs im Lateinischen un-decim $= 1+10$, duo-decim $= 2+10$; duo de viginti $= 2$ (ab) von 20 d. i. 18; un-de centum 1 (ab) von 100 oder 99 ist, dafs im Deutschen 11 = ein-lif oder 1 über 10, 12 = zwo-lif, d. i. 2 über 10 heifst, so liegt auf der Hand, dafs die Zahlreihe durch R e c h n e n gebildet wurde, dafs also die einfachsten Operationen des Zu- und Abzählens schon bekannt waren, ehe man sich die Zahlreihe als unendlich dachte.

Die Entstehung der ersten Zahlbegriffe und ihre lautliche Bezeichnung ist in der Natur des Menschen oder, wollen wir sagen, in seiner psychischen Organisation begründet. Wie aber aus dem Kern des Apfels kein Apfelbaum erwächst, wenn wir das Samenkorn in einem Schächtelchen verwahren, wie der Same vielmehr in fruchtbares Erdreich versenkt werden und hier die Bedingungen zu seiner Entwicklung finden mufs, so ist es auch bei den Anlagen des Menschen. Diese müssen von aufsen angeregt und von aufsen in ihrer Entfaltung gefördert werden. Was war nun bei den vorgeschichtlichen Völkern, die wir uns als Jäger, Fischer, als Ackerbauer ohne staatliche Einrichtung denken mögen, die Veranlassung zum Rechnen? Offenbar die Macht und Einwirkung der äufseren Verhältnisse. Von dem Augenblicke an, als die Menschen in gesellschaftliche Vereine irgendwelcher Art zusammentraten, machte sich das Bedürfnis zum Rechnen mit der Gewalt einer Naturerscheinung geltend. Mufste doch das Haupt der Familie oder der Karawane Nahrungsmittel unter die Seinigen verteilen, es mufsten die Zeltstangen, die Tiere der Herde gezählt werden. Die Beschaffung der notwendigen Lebensbedürfnisse und Gebrauchsgegenstände führte in uralter Zeit zum Tauschhandel. Dieser erforderte aber wenigstens die einfachen Operationen des Zu- und Abzählens. Letzteres wurde durch die Verminderung der Gebrauchsgegenstände veranlafst. Da aber diese Operationen noch nicht frei im Kopfe erfolgen konnten, waren äufsere Hilfsmittel notwendig. Solche boten sich nun allerdings zunächst in den Tauschobjekten selbst. Diese Gegenstände liefsen sich aber als ständige Hilfsmittel nicht immer gebrauchen, denn ein verzehrter Fisch, ein abgebrannter Heuhaufen konnte nicht als Rechenmittel dienen. Man mufste daher nach Stellvertretern suchen, und darin liegt eine wichtige Erkenntnis, nämlich die, dafs die Zahlordnung unveränderlich bleibt im Wechsel der verschiedenen Dinge. So lange man es mit kleinen Zahlen zu thun hatte, konnten die Finger als Repräsentanten der Zahlordnung genügen, und lange mochten sie als alleiniges Hilfsmittel gebraucht worden sein. Ja, manche Völker mögen sich mit den Fingern allein beholfen haben, wie das bei südafrikanischen Stämmen noch geschieht. Da helfen nämlich, wenn Gegenstände, deren Zahl über 100 geht, abgezählt werden sollen, drei Personen zusammen. Der eine beginnt mit dem kleinen Finger der linken Hand und streckt einen Finger um den andern aus bis zu 10; dann zählt er den zweiten Zehner ab. Der zweite zählt, wie viele Zehner der erste gezählt hat; der dritte überwacht das Rechnen des zweiten und zählt die von diesem aus den Zehnern gebildeten Hunderter. Dieses Verfahren beansprucht gewifs keinen geringen Grad von Aufmerksamkeit. Deshalb treffen wir an Stelle der Finger noch andere Rechendinge. So führen z. B. die Handelsleute halbzivilisierter Völker ein Säckchen mit Maiskörnern bei sich, welche im Bedarfsfalle als Rechenkörper verwendet werden. Je nach der Aufgabe werden Mais- oder Weizenkörner, Steinchen oder

Muscheln in Häufchen geordnet. Dieses Häufchenrechnen, wie wir es nennen wollen, ist den Negern ein so zuverlässiger Behelf, dafs sie sich im Handel nicht übervorteilen lassen, obwohl sie weder lesen noch schreiben können. Sie führen damit selbst Rechnungen aus, die nach unseren Begriffen zum Rechnen mit mehrfach oder mehrsortig benannten Zahlen gehören. Wenn der Neger gröfsere Summen in Bezahlung zu nehmen hat, die er in verschiedenen Sorten berechnen soll, z. B. einen Sklaven für 5 Benda, so zählt er so viele Bofs [1]), Bohnen oder Maiskörner ab, als diese 5 Benda in Cabes betragen, nämlich 15 mal 16. Den Preis der Ware weifs er genau, und so legt er bei jedem Stücke, das er bekommt, so viele Bofs zurück, als die einzelnen Stücke der Ware kosten; nach dieser Weise mufs die Rechnung des Käufers mit der des Negers übereinstimmen. (Villicus.)

Auch bei den Indianern ist das Häuflein-Rechnen im Gebrauche. Soll z. B. die Summe aus 57 und 39 bestimmt werden, zählt der Indianer 57 und 39 Rechenkörper ab; dann nimmt er von dem kleineren Häufchen ein Korn, eine Muschel um die andere und zählt: 58, 59, 60 bis 96. Die Aufgabe 43—18 wird so berechnet: Man zählt 43 Steinchen oder Muscheln, hiervon zählt man 18 Steinchen bezw. Muscheln ab, dann wird der Rest gezählt. Für kleine Multiplikationsaufgaben werden von Steinchen oder Getreidekörnern etc. gleiche Häuflein gemacht. Jedes Häuflein enthält so viele Körner als der Multiplikand Einheiten hat, und es werden so viele Häufchen formiert, als der Multiplikator verlangt. Schliefslich werden die Häufchen zu einem vereinigt und die Körner etc. abgezählt. Um den 5. Teil von 67 zu finden, wird der Indianer 67 gezählte Getreidekörner zu einem Häuflein vereinigen, davon 5 Stück wegnehmen und in entsprechenden Zwischenräumen reihenweise hinlegen; sodann nimmt er von der zu teilenden Menge wieder 5 Stück und legt zu jedem der reihenweise aufgelegten Körner eins. Nach Wegnahme der letzten

[1]) Bofs oder Kauris sind die sog. Schlangenkopfmuscheln (Cypraea), wovon es verschiedene Species gibt: C. tigris, caput serpēntis, arabica, lynx, caurīca, erōsa, monēta. Letztere Art ist gemein an den ostindischen und afrikanischen Küsten und wird von Negern und Hindu als Münze (moneta) gebraucht. 40 Kauris sind eine Schnur, 50 Schnüre ein Kopf, 10 Köpfe ein Korb. Gröfsere Beträge werden in Körben gemessen. Leunis bemerkt, dafs 30—40 Stück solcher Schlangenköpfchen einen Pfennig gelten, Villicus gibt den Wert von 800 Stück mit 3 Franken an.

Fünferpartie findet er zwei als Rest. Jedes der einzelnen Häuflein wird schliefslich 13 Stück enthalten, und das ist der Quotient. Wir haben hier eine Divisionsmethode, die an Anschaulichkeit nichts zu wünschen übrig läfst. Solche stellvertretende Rechendinge waren nachweislich bei allen alten Kulturvölkern in Gebrauch, und teilweise hat man sie noch. Der bequemeren Handhabung halber wurden die Rechenkörper an Schnüre gefafst, und so entstanden die ersten Zähl- oder Rechenmaschinen, der Suanpan der Chinesen, der Tschotü der Russen etc., die uns in der Folge noch weiter beschäftigen werden.

Der Tauschhandel gab auch zur Erfindung der Mafse und Gewichte, später der Münzen als allgemeines Tauschmittel Veranlassung. Die Kauris sind natürliche Münzen. Da sich nicht alle Dinge zählen lassen, mufste man Mafsgröfsen für Raum und Schwere suchen. Dabei wurden selbstverständlich naheliegende und allgemein vorkommende Gegenstände von bestimmten Gröfsenverhältnissen gewählt, der Fufs (Schuh), der Arm (Ellenbogen — Elle), die Schale einer Kokosnufs u. dgl.

An die Stelle körperlicher Dinge traten später andere Symbole, namentlich Knotenschnüre und das Kerbholz. Letzteres bildet den Übergang zur schriftlichen Zahlbezeichnung.

Über den Gebrauch dieser Hilfsmittel erzählt uns Suevus (1593) in der nüchternen und schlichten Weise der damaligen Zeit folgendes: »Petrus Cieza, Histor. Indorum, schreibt von den Anthropophagis, das sie stat jhres Calenders oder Zeitregisters ein lang Seil oder schnuren brauchen/ auff ein jedes Jahr einen Knopff oder Knotten dran knüpfen/ Inn welchem Jahre aber ein König stirbet/ eine Feldschlacht oder sonsten etwas gedenkwirdiges geschicht/ so pflegen sie dasselbe mit einem sonderlichen grossen Knopff zu zeichnen/ eine Krone/ ein Schwerdt/ oder sonsten was sich darzu reimet/ daran zu binden/ wie auch jener gute Mann/ im ôbern Deutschlande/ im Regiment wie in seiner Haufshaltung alles mit Kerbhölzern verrichten wollte.« Ungebildete Völker bezeichnen die Zahl der Dinge, welche sie merken wollen, durch Striche oder Einschnitte. Der Indianer macht an einem leicht bemerkbaren Baume jedesmal einen Stricheinschnitt, so oft er einen Skalp erbeutet. Und heute noch ist das Kerbholz als Schuldbuch nicht aufser Gebrauch. Es hat sich also die primitivste Form der Zahlbezeichnung forterhalten, weil sie sich praktisch verwerten liefs.

Eine sehr alte sinnbildliche Zahlbezeichnung hatten die Azteken Mexikos, ein hochgebildetes Kulturvolk, welches sein Sonnenjahr mit 18 Monaten 20 Tagen genauer als die Griechen und Römer berechnet hatte. Sie bedienten sich zur Zahldarstellung der Punkte und der Bilderschrift: (Fig. 1.)

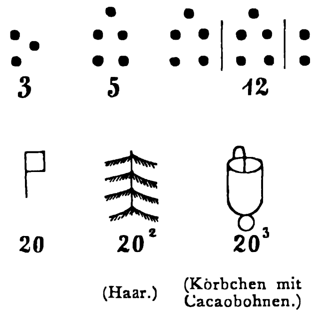


Fig. 1.

Wenden wir nun unsere Aufmerksamkeit einer andern verwandten Erscheinung im Geistesleben der Völker zu, der mutmafslichen Entstehung der *ersten geometrischen Begriffe.*

Die Anfänge der Geometrie sind späteren Ursprungs als die der Arithmetik. Zwar liegt die Form der Gegenstände, wie die Zahl, unmittelbar in der Sinneswahrnehmung; ja, die *Form* der Gegenstände mufste früher zum Bewufstsein kommen als die *Zahl* derselben, denn zwischen eins und mehr kann man nur unterscheiden, wenn die Gegenstände *an sich* aufgefafst und als unterschiedliche Dinge gleicher Art erkannt worden sind. Das hat aber die Auffassung der *Form* der Gegenstände zur Voraussetzung. Allein die Vorstellung der Form *als etwas für sich Bestehendes*, die begriffliche Ablösung derselben vom Gegenstande, war weit schwieriger als die Konstruktion der Zahl; denn das Denken mathematischer Formen konnte erst *nach* der räumlichen Nachbildung derselben erfolgen; diese Nachbildung erfordert aber eine Kulturhöhe, in welcher die Arithmetik längst aus den Elementen herausgearbeitet sein mufste.

Zu den Erscheinungen, welche in frühester Zeit die Aufmerksamkeit der Menschen erregten, gehören unzweifelhaft der gestirnte Himmel und der Wechsel von Tag und Nacht. Die Erkenntnis, dafs Tag und Nacht von dem (scheinbaren) Laufe der Sonne abhänge, lag sehr nahe, und damit war der Impuls zur Zeitrechnung gegeben. Der aufstrebende Menschengeist mufste die Zahlvorstellungen zur Zeitbestimmung anwenden, weil die Natur selbst die Mittel an die Hand gab. Der Wechsel der Jahreszeiten führte auf den Gedanken, dafs derselbe vom Stande der Sonne abhängig sei, was die Fixierung des Begriffs *Jahr* zur Folge hatte. Durch längere, fortgesetzte Beobachtung fand man, dafs die Sonne ungefähr in 360 Tagen wieder an den Ort am Himmelsgewölbe zurückkomme, von dem sie ausgegangen war. Ihr Kreislauf gab Anlaſs zur Konstruktion des Kreises und zur Einteilung der Kreislinie in 360 Bogen oder Grade. Die Vergleichung des Mondlaufes mit der Umlaufszeit der Sonne führte zur Zwölfteilung des Jahres (12 Zeichen) und zur Begründung des zwölfteiligen Zahlensystems. Die Zeitbestimmung war das ursprüngliche Ziel der Astronomie. Die Wiederkehr der gleichen Erscheinung konnte nicht allein dem Gedächtnisse überlassen bleiben, daher wurden schriftliche Aufzeichnungen notwendig. Erst nachdem durch eine Reihe von Menschenaltern die gleichen Beobachtungen gemacht und schriftlich verzeichnet worden waren, konnte die Wiederkehr derselben Erscheinung vorausbestimmt werden. Die Einteilung des Tages in 4 Tageszeiten ist der Einteilung des Jahres in 4 Jahreszeiten, weil in der Natur der Sache gelegen, vorausgegangen. Die Einteilung des Tages in 12 Stunden erfolgte wohl nach Analogie der Jahreseinteilung in 12 Monate. In der Länge des Schattens hatte man einen Stundenmesser, welcher zur lotrechten Aufstellung künstlicher Gegenstände (Obelisken) und zur weit späteren Erfindung der Sonnenuhren Veranlassung gab. Der senkrechte Gegenstand, der Schatten und der begrenzende Sonnenstrahl bildeten ein rechtwinkeliges Dreieck. Kreis und rechtwinkeliges Dreieck waren die ersten geometrischen Figuren, welche sich der Betrachtung darstellten. Einige Eigenschaften dieser Figuren drängten sich der Beobachtung von selbst auf, andere wurden durch Versuche gefunden. So kennen alle Völker, welche eine gewisse Kulturhöhe zu erreichen vermochten, den Pythagoreischen Lehrsatz und die Thatsache, daſs der Radius eines Kreises sich sechsmal in seinem Umfange auftragen läſst.

Wir sehen also, daſs nicht bloſs die gewöhnlichen Lebensbedürfnisse den Weg zur Mathematik eröffneten, sondern vielmehr der dem vernünftigen Menschen eingeborene Drang nach Erkenntnis der Wahrheit. Ihm folgend geht der Mensch sinnend den Erscheinungen der Natur nach, und der Erkenntnistrieb erhebt ihn in überirdische Regionen zum Urquell alles Daseins und Lebens.

Die Rechenkunst der alten Ägypter.

Aus dem Dunkel der vorhistorischen Zeit treten wir nun in das geschichtliche Zeitalter ein. Es bedarf keiner langen Untersuchung, wohin wir uns bei unseren Betrachtungen zuerst zu wenden haben: der Orient ist die Wiege aller menschlichen Kultur, und darum mufs die Geschichte des Rechnens bei den orientalischen Völkern beginnen.

Die ältesten Kulturstätten liegen an den Ufern des Nil und Euphrat. Die Frage, ob die ägyptische oder babylonische Kultur die ältere sei, kann hier nicht entschieden werden. Wahrscheinlich ist, dafs die alten Ägypter von Asien her eingewandert sind und sich mit den schon sefshaften äthiopischen Einwohnern vermischten. Während in anderen Gegenden der Erde junge Völkerschaften noch von der Jagd und Fischerei lebten, lud der fruchtbare Boden Ägyptens zum Ackerbau ein; denn die mit Nilschlamm gedüngten Ländereien erforderten keine andere Arbeit, als die Aussaat und Ernte. Der Ackerbau ist der Entwicklung der Kultur und geselligen Ordnung günstig, denn er verlangt friedfertiges Nebeneinanderwohnen. Der kostbare Boden mufste durch Dämme vor der Gewalt der Strömung bewahrt, das Nilwasser aber durch Kanäle möglichst weit verbreitet werden; die menschlichen Wohnungen mufste man, vor der Überschwemmung gesichert, auf künstlichen Höhen anlegen, das überflutete Land dem Eigentümer wieder zumessen. In diesen von der Natur gegebenen Umständen liegt der Antrieb zur Entwicklung der Baukunst zu Wasser und zu Lande, zur Feldmessung, zur Geometrie. Das fruchtbare Land nährte auf verhältnismäfsig engem Raume eine zahlreiche Bevölkerung; gleichwohl waren gröfsere Anstrengungen notwendig, um die Bedürfnisse eines grofsen, gedrängt wohnenden Volkes zu befriedigen, und diese Anstrengungen führten zu einer wuchtigen und ausdauernden Kraft, die wir in den erhaltenen Riesenbauten heute noch bewundern. Der Ackerbau setzte eine Menge von Gewerben in Bewegung; der Überschufs der Ernten verlangte weiteren Absatz und rief Handel und Schiffahrt ins Leben, welche durch die Verhältnisse des Landes (Nil, Rotes Meer, Mittelländisches Meer) begünstigt wurden.

Sowohl die Schiffahrt als auch die Nilüberschwemmungen mufsten zur Astronomie führen. Da diese Überschwemmungen periodisch eintreten und der Pflanzenwuchs mit überraschender Schnelligkeit und Üppigkeit erfolgt, so war man auf die rechte Benutzung des Augenblicks angewiesen, auf die Berechnung des regelmäfsig verlaufenden Jahres, welche auf der Beobachtung des Laufes der Gestirne beruht. Die Ägypter haben nach unserer Kenntnis zuerst die Gestirne des Himmels zu festen Sternbildern verbunden und so eine Topographie des Himmels begründet. Sie teilten den Himmel in 4 Zonen, in 36 Dekaden und in 360 Grade, welche sie am Äquator abzählten. Sie kannten die Hauptplaneten und verfolgten ihre Bewegungen; sie knüpften die Zeitrechnung an die Gestirne, verbanden die Bewegungen der Sonne und des Mondes zu den mannigfaltigsten Perioden, legten im Gegensatze zu den asiatischen Völkern zuerst ihrer Jahresrechnung nur die Bewegung der Sonne zu Grunde und hielten vom Mondlaufe lediglich die Zahl von 12 Monaten zu je 30 Tagen fest, denen sie dann 5 Ergänzungstage zufügten. So erhielten sie ein Jahr von 365 Tagen, dessen sie sich im allgemeinen Kalender bedienten, wodurch es zu einem Wandeljahr wurde. Sie kannten aber auch das genauere Jahr zu $365\frac{1}{4}$ Tagen und die vierjährige Schaltperiode, welche später Julius Cäsar von ihnen entlehnte. Durch die Verbindung beider Jahre erhielten sie die wichtige Sothisperiode (Sothis, d. i. der Sirius) von 1460 julianischen oder 1461 Wandeljahren. Durch fortgesetzte genaue Beobachtung fanden sie die wahre Länge des tropischen Jahres.[1]) Die Existenz eines Kulturvolkes ist aufserhalb eines geordneten Staatswesens nicht denkbar. Und in der That hatten die Ägypter weise ausgebildete Staatseinrichtungen und eine zweckmäfsige Administration. Die Gesetze der Ägypter zeugen von hoher Intelligenz, wie denn überhaupt der im Altertum weitverbreitete Ruhm von der äthiopischen Macht und Weisheit den Ägyptern gebührt. Mehrere ägyptische Gesetze wurden von Pythagoras und Solon nach Griechenland gebracht. Die Ägypter hatten schon zur Zeit der Patriarchen eine erbliche Monarchie und Könige mit gröfserem Hofstaat, zudem einen hochgebildeten Priesterstand als Träger der Wissenschaft. Die Ägypter waren die Lehrer der Griechen, und indem griechische Kultur auf die

---

[1]) In dem sog. Memnonium auf der Westseite von Theben ist ein Bibliothekzimmer mit astronomischen Deckengemälden aus der Zeit des Sesostris (Rhamses II.), 1500 v. Ch., noch erhalten.

Römer und direkt auf andere Völker des Abendlandes übergegangen ist, wurden sie mittelbar auch unsere Lehrer.

Nach all dem läfst sich vermuten, dafs die Ägypter schon eine ausgebildete Rechenkunst hatten. Und wirklich hat uns die eigentümlich konservierende Natur des Landes ein geschriebenes uraltes Rechenbuch erhalten. Bevor wir hierauf eingehen, ist es notwendig, die Schrift- und Zahlzeichen der alten Ägypter kennen zu lernen.

Die Ägypter hatten drei verschiedene Schriftarten, die hieroglyphische oder Bilderschrift, die hieratische oder Priesterschrift und die demotische oder Volksschrift.

Die Hieroglyphenschrift besteht aus etwa 900 kleinen Abbildungen von sinnlich wahrnehmbaren Gegenständen. Menschen in verschiedener Stellung, Vierfüfsler, Vögel, Gerätschaften des häuslichen Lebens, Pflanzen und einzelne Teile des Tier- und Pflanzenkörpers spielen dabei eine Hauptrolle. Diese Zeichen bedeuteten entweder das Ding selbst, z. B. die Hieroglyphe für eine Göttin ein weibliches Götzenbild, das Zeichen des Halbmondes den Mond; in diesem Falle waren die Hieroglyphen Wortschrift, oder sie bezeichneten nur den Anfangsbuchstaben des Wortes, dann waren sie Buchstabenschrift. So bedeutet der Löwe, ägyptisch labu, das L; der Adler, ägyptisch achem, das A; die Mütze, klaft, das K.

Die hieratische Schrift war vermutlich eine zum Schreiben bequemere Form der Hieroglyphen, die namentlich in den Papyrusrollen, welche den Mumien mitgegeben wurden, noch erhalten sind. Manche Zeichen lassen sich aus den Hieroglyphen wieder erkennen. (Fig. 2.)

Die demotische Schrift war die von Diodor und Herodot erwähnte gewöhnliche Brief- und Kursivschrift, welche in den ägyptischen Schulen zuerst erlernt wurde und in Dokumenten, die sich auf Angelegenheiten des bürgerlichen Lebens beziehen, noch erhalten ist. Diese Schrift war die einfachste und jüngste und hat sich vermutlich aus der hieratischen Schrift entwickelt, wie diese aus den Hieroglyphen.

Der dreifachen Schrift entsprechend war bei den Ägyptern auch eine dreifache schriftliche Zahlbezeichnung im Gebrauche. Die hieroglyphische Schrift hatte für die Zahlen 1, 10, 100, 1000 und Million je ein besonderes Zeichen. Die Hieroglyphe für 1 soll eine Mefsstange bedeuten; die Hieroglyphe für 10 gleicht einem Hufeisen, vielleicht um die beiden verbundenen Arme darzustellen, welche die Zehnzahl der Finger an sich tragen, die Hieroglyphe für 100 deutet auf ein zusammengerolltes Palmblatt.[1]) Die Hieroglyphe für 1000 ist die Lotosblume, das Sinnbild des Nil, dem Ägypten seine Fruchtbarkeit verdankt, zugleich das dem Osiris und der Isis geweihte Sinnbild des Überflusses. (Auch den Indern war die weichhaarige Lotosblume das Sinnbild des Ganges.) Die Hieroglyphe für die Million ist der Frosch, welcher bei den periodischen Nilüberschwemmungen in ungeheurer Anzahl erscheint.

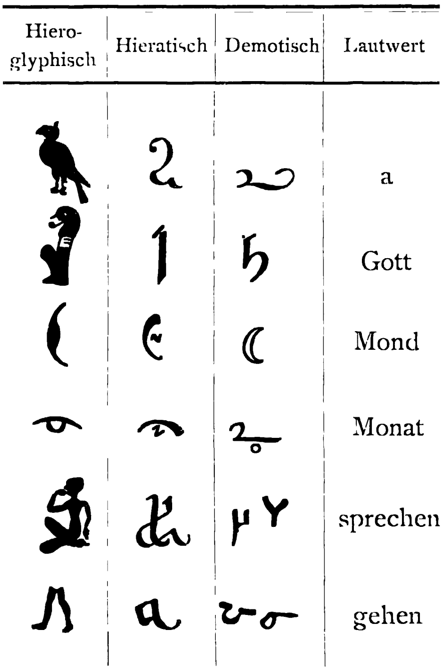


Fig. 2.

Mit Hilfe der hieroglyphischen Zeichen wurden die Zahlen so geschrieben, dafs man das Zeichen der Einheit einer jeden Ordnung so oft wiederholte, als es vorkommen sollte. Um die Zahl 9 auszudrücken, setzt man das Zeichen der Eins, um 90 zu

[1]) Die Blätter der Palmen entwickeln sich aus einer Gipfelknospe, indem sich aus ihr die jungen Herztriebe herausschieben und schliefslich eine mächtige Blätterkrone bilden. Bei der Neigung der Ägypter, die Zahlen zur Natur in Beziehung zu setzen, ist eine naturgeschichtliche Deutung der Hieroglyphen nicht unzulässig.

schreiben das Zeichen der Zehn je neunmal. Zur besseren Übersicht bediente man sich einer eigentümlichen Gruppierung dieser Zeichen, indem nicht mehr als höchstens vier Zeichen derselben Art dicht nebeneinander geschrieben wurden. Die Gruppe, welche aus der geringeren Anzahl von Zeichen derselben Art besteht, befindet sich immer rechts. Die Bezifferungsweise innerhalb der

1. 2. 3.

10. 11. 12.

20. 32.

100. 200. 122.

1000. 2000. 112000.

10000. 20000. 10514.

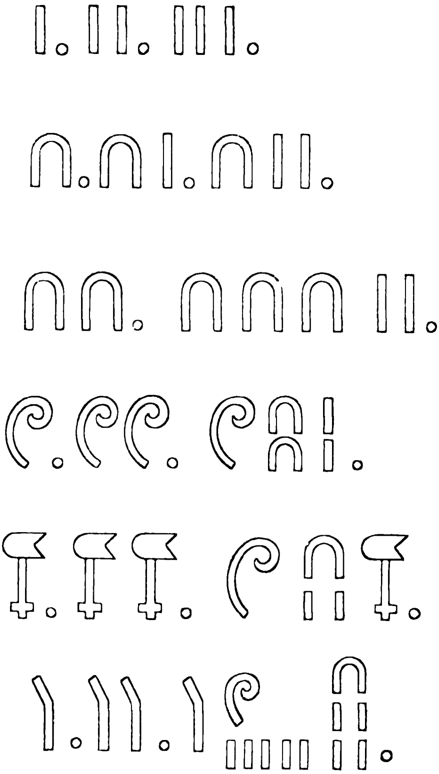


Fig. 3.
Hieroglyphische Zahlzeichen der alten Ägypter.

einzelnen Gruppen ist also eine einfach additive, d. h. die Zeichen werden addiert, wie sie nebeneinander stehen. Vielfache der höheren Zahlen von 50000 an wurden in multiplikativer Form dargestellt, indem man das Zeichen für die 10000, einen Finger, einmal setzte und darunter so viele Einheiten schrieb, als der Multiplikator anzeigte. (Fig. 3.)

Die hieratische Schriftmethode unterschied Ordnungs- und Hauptzahlen. Erstere hatten besondere Zeichen für 1, 2, 3, 4 und 9; 5, 6, 7 und 8 drückte man durch die kombinierten Ziffern 3 und 2, 3 und 3, 3 und 4, 4 und 4 aus. Aufserdem war ein Zeichen für 10 gebräuchlich (Fig. 4).

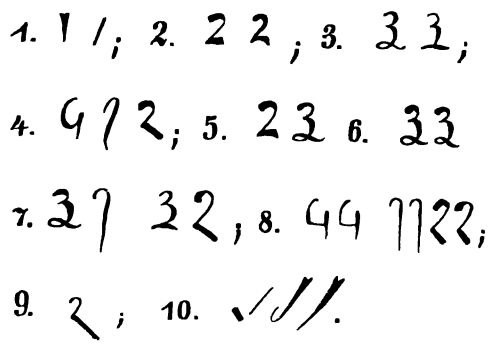


Fig. 4.
Hieratische Ordnungszahlen mit Varianten.

Die hieratischen Hauptzahlen wurden wie folgt geschrieben (Fig. 5):

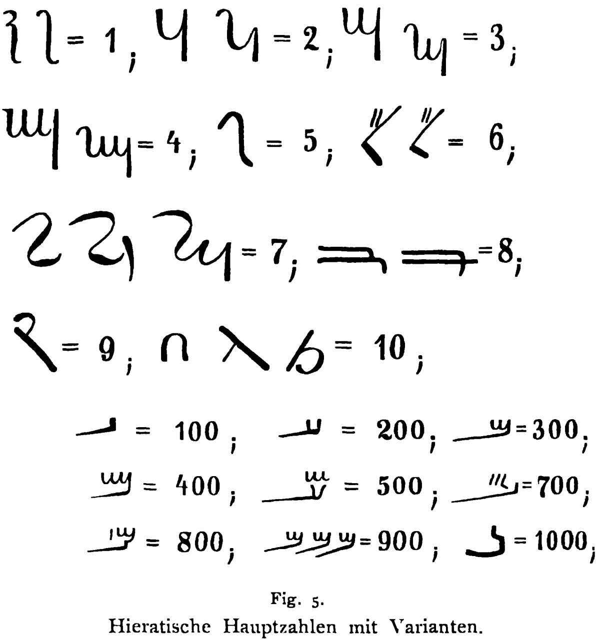


Fig. 5.
Hieratische Hauptzahlen mit Varianten.

Um zweimal, dreimal, viermal zehn zu schreiben, fügte man die Ziffer der Einheiten bei. Ebenso verfuhr man bei 100, 1000 und 10000, für welche Zahlen ebenfalls besondere Ziffern gebraucht wurden. Wollte man eine noch höhere Zahl ausdrücken, so vereinigte man die Ziffern für 100 und 1000 oder 10000 und las dazu 100mal 1000 oder 100000. Dasselbe Zahlensystem findet sich in der demotischen Schrift, und man bediente sich der Zeichen desselben für alle Gegenstände; nur zur Vermerkung der Monatsdaten hatte man andere Zeichen.

Die Ägypter ordneten ihre Zahlzeichen so, dafs die mit den niedersten Zeichen rechts anfingen und progressiv zu den höchsten nach links vorrückten, dem Anscheine nach im Einklange mit dem modernen Bezifferungsmodus. Die Zahl 15379 wurde wie folgt dargestellt (Fig. 6):

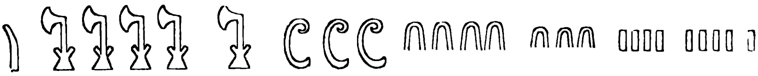


Fig. 6.

Rechts steht 1 Einer, dann kommt eine Gruppe von 4 Einern, nach einem neuen Zwischenraume eine weitere Gruppe von 4 Einern, nach einem neuen Zwischenraume eine weitere Gruppe von 4 Einern, hierauf folgen 3 Zehner, von diesen etwas entfernt 4 Zehner, weiter 3 Hunderter, dann 1 Tausender, dann 4 Tausender, endlich der Finger als Zehntausender. Aus dieser Anordnung darf aber die Folgerung nicht gezogen werden, dafs die Ägypter die Positionsarithmetik kannten; diese Ordnung ist vielmehr begründet in der Schriftordnung der Orientalen überhaupt, welche die Schriftzeichen meist von rechts nach links aufreihen. Später wurde die Ordnung umgekehrt. In der Übergangsperiode finden sich Zahlen, die nach dem einen, und solche, die nach dem andern Prinzip geordnet sind. Nach der Arithmetica delle nazioni del Lorenzo Hervas 1786 gebrauchten die Ägypter beim R e c h n e n auch nachstehende Zahlzeichen (Fig. 7 S. 20).

Gehen wir nun auf das Rechnen der alten Ägypter selbst ein.

Die Ägypter kannten das Fingerrechnen, und zwar hatten sie schon symbolische Fingerzeichen, in welchen die Zahl der gestreckten Finger die Zahl der Einheiten nicht mehr repräsentierte. Herodot meldet: »Die Ägypter schreiben Schriftzüge und rechnen mit Steinen, indem sie die Hand von rechts nach links bringen, während die Hellenen sie von links nach rechts führen.« Das ist der älteste historische Bericht über das Rechnen. Hiernach waren die Ägypter auch im instrumentalen Rechnen erfahren.

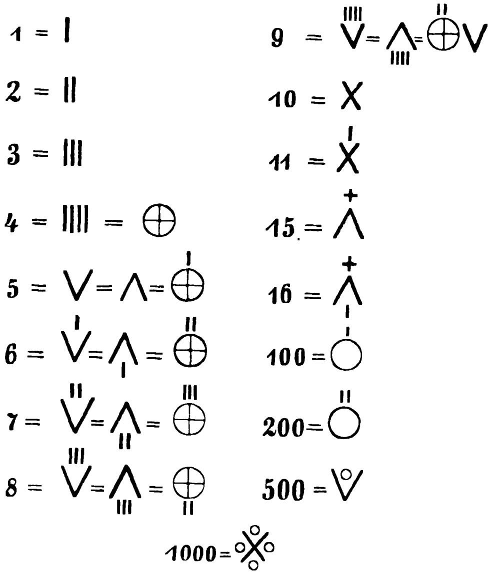


Fig. 7.

Von direkten Nachrichten aus Inschriften ist bekannt geworden, dafs ziemlich häufig Summierungen vorkommen, wobei Zeichen gebraucht werden, welche dem Sinne nach mit unserem Plus- und Gleichheitszeichen übereinstimmen. Die Summanden sind teils Ganze, teils Brüche.

Das schönste bis jetzt aufgefundene Denkmal ägyptischer Rechenkunst ist uns in einem Papyrus erhalten, welcher unter dem Namen »Papyrus Rhind« der ägyptischen Abteilung des brittischen Museums einverleibt wurde. Man mufs sich darunter eine Rolle gelbbraunen, beschriebenen Papiers von etwa 30 cm Breite und bis zu 20 m Länge vorstellen, welche in einer Kapsel aufbewahrt ist. Das Papier, aus dem Marke der Papyrusstaude hergestellt, besteht aus äufserst fein geschnittenen, aufeinander geklebten Blättchen. Der Inhalt dieser Schrift wurde 1872 von Professor Dr. Eisenloher übersetzt und festgestellt, dafs die

Verabfassung derselben in die Regierung des Königs Ra-â-us (Amenemha 2221—2179 v. Chr.) fällt. Der Verfasser oder Schreiber dieses Papyrus hiefs Ahāmesu.

Das Buch ist die Kopie eines älteren Originals und stellt sich als eine Aufgabensammlung dar.

Die Aufgaben sind nach immer wechselnden Angaben aufzulösen, dabei bleibt es dem Schüler überlassen, die Regeln der Auflösung aus den Beispielen zu finden. Die Wörter Aufgabe und Auflösung sind durch bestimmte Redewendungen angedeutet, z. B. »Wenn dir gesagt ist, Mache bei dir, Mache wie geschieht.« Die Zahlen, mit denen gerechnet wird, sind teils ganze Zahlen, teils Brüche und zwar gröfstenteils Brüche, woraus sich ergibt, dafs das Publikum, für welches das Buch verfafst war, die eigentlichen Anfangsgründe der Rechenkunst bereits hinter sich hatte. Zur Ausführung der Bruchrechnungen gebrauchte Ahāmesu, wie später Heron, die Stammbrüche. Es waren insbesondere 2 Aufgaben, welche abwechselnd bei den verschiedenartigsten Rechnungen und Rechnungsproben bewältigt werden mufsten. Man mufste imstande sein, einen gewöhnlichen Bruch in eine Summe von Stammbrüchen zu zerlegen und gleicherweise eine Summe von Stammbrüchen zu einem gewöhnlichen Bruche zu vereinigen, oder man mufste beispielsweise wissen, dafs $\frac{3}{7}$ die Summe von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{28}$ war; man mufste ebenso wissen, dafs $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{7}$ und $\frac{1}{28}$ die Summe von $\frac{3}{7}$ hervorbringen. Die Addition von Stammbrüchen behandelt Ahāmesu in fast moderner Weise durch Zurückführung auf einen gemeinsamen Nenner; ja, er geht gewissermafsen über das moderne Verfahren hinaus, indem er beispielsweise $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{14}$, $\frac{1}{28}$, $\frac{1}{28}$ in 42stel verwandelt, also: $\frac{6}{42}$, $\frac{5\,{}^1/_4}{42}$, $\frac{3}{42}$, $\frac{1\,{}^1/_2}{42}$, $\frac{1\,{}^1/_2}{42}$, welche zusammen $\frac{17\,{}^1/_4}{42}$ oder $^1/_2$ geben, an dem jedoch noch $\frac{3,\ {}^1/_2 \text{ und } {}^1/_4}{42}$ fehlen (denn $\frac{17\,{}^1/_4 + {}^1/_4 + {}^1/_2 + 3}{42} = \frac{21}{42}$), wie es zum Zweck weiterer Benutzung heifst. Die erste Aufgabe, die Zerlegung in Stammbrüche, geht von einer Tabelle aus, welche die Zerlegung jener

Brüche lehrt, die 2 zum Zähler haben, während der Nenner eine der ungeraden Zahlen von 3 bis 99 ist. War nämlich eine solche Tabelle gegeben, so konnte durch wiederholte Anwendung derselben jede beliebige Zerlegung ausgeführt werden. Dr. Cantor, aus dessen Beschreibung des Papyrus Rhind gegenwärtige Notizen entnommen wurden, gibt hiezu folgendes Beispiel. Es sei die Zerlegung von $^7/_{11}$ verlangt. Dieser Bruch zerfällt sofort in $\frac{1}{11}$ und in das Dreifache von $\frac{2}{11}$ d. h. tabellenmäfsig von $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{66}$, oder es ist $\frac{7}{11} = \frac{1}{11} + \frac{3}{6} + \frac{3}{66}$. Bei der ursprünglichen Bildung der Tabelle mag der Umstand, Zerlegungen zu bekommen, welche Stammbrüchen mit geraden, selbst wieder durch 2 teilbaren Nennern den Ursprung gaben, bestimmend gewesen sein.

Die Zerlegung in Stammbrüche und die Addition solcher treten jedesmal auf, wo es sich um Addition, Subtraktion und um Multiplikation handelt. Die Division, seit urdenklicher Zeit nicht nur das Kreuz der anfangenden Rechenschüler, sondern lange genug auch der Mathematiker, war jenem Verfahren ähnlich, das Kinder anwenden, wenn sie einen Haufen von Gegenständen, etwa Kirschen, unter sich verteilen. Es wird auf gut Glück jedem eine gleiche Anzahl gegeben, bis alles verteilt ist, ein etwaiger Rest geniert nicht weiter. Ähnlich verfährt Ahāmesu, nur mit dem Unterschiede, dafs er eine vollständig aufgehende Division durch mittelbare Vervielfältigung des Divisors anstrebt und auch erreicht. Ahāmesu sagt nicht: Teile 70 durch $93^1/_3$, sondern: Vervielfältige $93^1/_3$ um 70 zu finden; nimm die Hälfte der Zahl, gibt $46^2/_3$; nimm ihr Viertel, gibt $23^1/_3$; d. h. also, um die Zahl 70 in $93^1/_3$ Teile zu teilen, gewährt er jedem der hier allerdings in gebrochener Zahl vorhandenen Teilhaber erst $^1/_2$, dann $^1/_4$ und erschöpft dadurch die 70, welche geteilt werden sollen. Ähnlich verfuhr dieser ägyptische Rechenmeister in zusammengesetzteren Fällen, z. B. wenn 2 durch $1^1/_3$, $^1/_4$ geteilt werden sollte. Er vervielfachte nämlich $1\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ der Reihe nach mit 1, mit $\frac{1}{6}$, mit $\frac{1}{12}$, mit $\frac{1}{144}, \frac{1}{288}$, worauf die Summe aller dieser Vielfachen sich als 2 ergab. Es gehörte zu diesem Verfahren eine grofse Übersicht der gewonnenen Teilprodukte. Die Summe derselben wurde dadurch erlangt, dafs in der letzten Aufgabe z. B. nach Vervielfältigung des Divisors mit $1\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$ eine vorläufige Zusammenfassung vorgenommen wurde, welche alsdann zeigte, wieviel zur verlangten Summe 2 noch fehlte, also durch ergänzende Vervielfachung mittels der kleinen Werte $\frac{1}{144}$ und $\frac{1}{288}$ noch beigebracht werden mufste. Um 2200 v. Ch. waren hiernach die 4 Rechnungsarten in ganzen und gebrochenen Zahlen vollständig bekannt. Die gebrauchten Tabellen erscheinen als Vorbilder der logarithmischen. und trigonometrischen Tafeln. Nach Ahāmesus Aufgabensammlung waren die alten Ägypter zu den Zeiten des Moses nicht blofs Arithmetiker, sondern in der That schon Mathematiker. Wir finden in dem Aufgabenbuche des Ahāmesu Gleichungen I. Grades, die in moderner Form, wie folgt, sich darstellen:

$$\frac{x}{7} + x = 19;$$

$$\frac{2}{3}x + \frac{x}{2} + \frac{x}{7} + x = 37;$$

$$x + \frac{2}{3}x - \tfrac{1}{3}\left(x + \tfrac{2}{3}x\right) = 10;$$

$$\frac{1}{3}\left[x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right)\right] = 10$$

Die Auflösung besteht darin, dafs die links vom Gleichheitszeichen befindlichen Glieder vereinigt werden, dafs man durch die Zahl, welche wir heute den Koeffizienten der Unbekannten nennen würden, in die Einheit dividiert und den so erlangten Quotienten mit der rechts vom Gleichheitszeichen allein stehenden bekannten Zahl vervielfacht, ein gleichmäfsiges Verfahren, dem man Wert und Name einer Auflösungsmethode nicht versagen kann.

Ahāmesus Schrift enthält Gesellschaftsrechnungen, z. B. »Vorschrift zu verteilen 700 Brote unter 4 Personen, $\frac{2}{3}$ für einen, $\frac{1}{2}$ für den andern, $\frac{1}{3}$ für den dritten, $\frac{1}{4}$ für den vierten; lafs du mich wissen den Anteil eines jeden von ihnen. Addiere du $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, das gibt nun $1\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, teile du 1 durch $1\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, das gibt nun $\frac{1}{2}, \frac{1}{14}$. Nimm du $\frac{1}{2}, \frac{1}{14}$ von 700, das ist 400. Nimm du $\frac{2}{3}$ von 400, d. i. $266\frac{2}{3}$, die Hälfte von 400, d. i. 200, $^1/_3$ von 400 d. i. $133\,^1/_3$, $^1/_4$ von 400 d. i. 100, dieses ist der Betrag eines jeden von ihnen.

Weiterhin enthält der Papyrus arithmetische Reihen. Ahāmesu kannte die Formel, mit welcher aus Anfangsglied, Differenz und Gliederzahl die Summe zu bilden ist, und die andere Formel, welche aus Summe, Differenz und Gliederzahl das Anfangsglied ableitet, und nach diesen Formeln rechnet er, ohne irgendwelche Begründung seines Verfahrens für notwendig zu erachten.

Ahāmesu berechnet endlich auch den Flächeninhalt geradlinig und kreisförmig begrenzter Felder, den Rauminhalt von Fruchtspeichern. Die ausgemessenen geradlinig begrenzten Felder sind teils Rechtecke, teils gleichschenkelige Dreiecke und gleichschenkelige Paralleltrapeze. Das Rechteck mifst Ahāmesu durch das Produkt zweier aneinanderstofsender Seiten, das gleichschenkelige Dreieck durch das halbe Produkt zweier aneinanderstofsender Seiten, das Paralleltrapez durch das Produkt der zweimal in der Figur auftretenden Seite in die halbe Summe der beiden anderen einander parallelen Seiten. Für das Rechteck ist die so gefundene Zahl richtig, für die beiden andern Figuren bekanntlich nicht. Ein genaueres Resultat konnte nicht erzielt werden, so lange die Ausziehung der Quadratwurzel unbekannt war. Den Kreisinhalt mifst Ahāmesu so, dafs er die Fläche des Kreises in ein ihr gleiches Quadrat umwandelt, dessen Seite als $^8/_9$ des Durchmessers angenommen wird. (Bei einem Kreise von 3 m Durchmesser gibt $r^2\pi = 7{,}0684$, dagegen $(^8/_9 d)^2 = 7{,}11\ldots$, also einen unter Umständen erheblich abweichenden Näherungswert.)

Die alten Ägypter scheinen schon ein geordnetes Schulwesen gehabt zu haben, »wie wir dann bei dem Diodoro Siculo in seinem andern Buch von den Ägyptern lesen/ deren Priester die Jugend gantz fleifsig in der Rechenkunst instituirten/ zu welchen dann alle weisen aus gantz Griechenlandt/ als zu einer gewerbschafft vnd marck aller weifsheit/ gezogen.« (Suevus). Auch Herodot und Plato berichten, dafs bei den Ägyptern das Rechnen allgemein üblich und Gegenstand des Elementarunterrichts gewesen sei.

Die Rechenkunst der Chaldäer.

Wie im Nilthale und dem gegenüberliegenden Palästina, so eröffnete sich auch in den Flufsthälern des Euphrat und Tigris eine gesegnete Natur. Diese Thäler waren von den angrenzenden Hochländern, wie auch vom Meere aus zugänglich. Darum wurde Babylon zu einem Hauptverkehrsplatze ältester Zeit. Von hier aus zogen sich nach allen Himmelsgegenden Handelsstrafsen, auf welchen sich zahllose Karawanen drängten. Hier kamen der Onyx der Tibetaner, der Lapis der Sarder, die Weine Mesopotamiens und die Gewürze, Perlen und feinen Holzarten der Insel Ceylon zum Verkaufe. Darum sagt der Prophet Jesaias: Siehe, diese werden von ferne kommen, jene von Mitternacht, und diese vom Meer und jene vom Lande Sinim (China). Der Reichtum des Landes lockte aber auch fremde Heere an, und dieser Umstand erklärt den raschen Wechsel der Nationalitäten und der in denselben wurzelnden Dynastien. Darum sehen wir, wie in kurzen Zwischenräumen und nur wenige Meilen von einander entfernt die Hauptstädte Babylon, Seleucia, Ktesiphon und Bagdad entstehen und wieder verschwinden. Jede der siegreich eindringenden Dynastien brachte auch ihre Sprache mit, und deshalb weisen die historischen Überreste jener Gegenden so grofse Differenzen auf. Weniger wurden von diesem Wechsel die Ziffern berührt, weil sie gewissermafsen ein Gemeingut der nebeneinander wohnenden und miteinander handelnden Völker bildeten.

Zu den ältesten geschichtlichen Urkunden gehören die Funde von Tello (das alte Sir-tillo), an einem Seitenkanale des Euphrat gelegen. Diese Funde geben Aufschlufs darüber, dafs die Sumero-Akkader, ein altaisches Volk, schon im Zeitalter der Patriarchen ein über 100 reichendes Zahlensystem hatten. Die Zahlen für 1, 2, 3, 4, 5, 10 und 100 wurden durch selbständige Zahlwörter bezeichnet; für die übrigen Grundzahlen und die Zehner wurden zusammengesetzte Ausdrücke gebraucht. Diese uralten Zahlwörter lauten: 1 = gish und daneben ash, 2 = min daneben kas, 3 = bish, vish, ish, 4 = shimu, nin, 5 = a (ursprünglich Hand), daneben var, vas; 6 = âsh (aus a + ash d. i. 5 + 1); 7 = im inna (aus a + min d. i. 5 + 2); 8 = ussa (aus a + bish d. i. 5 + 3); 9 = is himu (aus a + shimu d. i. 5 + 4); 10 = = gun (vun, un und daraus u); 30 = ishin und shivu, beide aus ish und vun d. i. 3 mal 10 entstanden; 40 = ninnavi = (4 mal 10) und blofs nin; 50 = ninnu d. i. 40 + 10 und parab d. i. 50 mal 10.

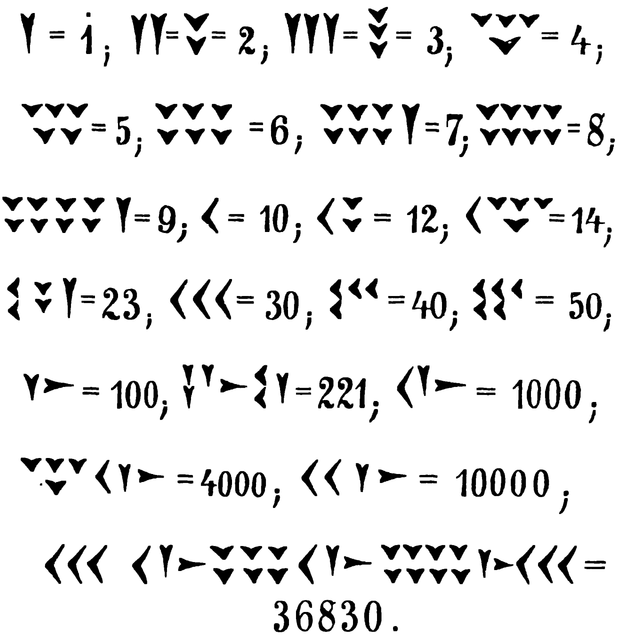


Fig. 8.

In einem Schutthügel von Niniveh wurde ein Saal aufgegraben, im modernen Sinne eine Bibliothek, welche im 7. Jahrhundert v. Ch. auf Befehl des Königs Sardanapal zur öffentlichen Belehrung hier aufgestellt worden war. Die hier aufgespeicherten Bücher in Form verschiedengefärbter, gebrannter Thontafeln, welche sich jetzt im Brittischen Museum befinden, enthielten Lehren über Mythologie, Geschichte, Geographie, Statistik, Botanik, Zoologie, Astronomie, Astrologie, Architektur, Grammatik, über den Kalender und die Arithmetik.

Die in den Ruinen der babylonischen Hauptstädte aufgefundenen Reste weisen nach, dafs die Babylonier zur Zahlbezeichnung sich ihrer Keilschrift bedienten. Die Keilschrift ist eine Buchstabenschrift und zeichnet sich durch den absoluten Mangel aller gerundeten Züge aus. Man unterscheidet drei verschiedene Schriftarten, die jüngste derselben ist die einfachste. Es tritt also hier ein ähnliches Verhältnis zu Tage, wie bei den drei verschiedenen Schriftarten der Ägypter; auch hier ist die jüngste (demotische) Schrift die einfachste. Die neun ersten Einheiten stellten die Babylonier durch Keilstriche dar (Fig. 8 S. 26), welche neben oder senkrecht übereinander gruppiert wurden; für 10 hatten sie ein eigenes Zeichen, einen nach links stehenden Winkelhaken. Sie fafsten also die Zahlen von 1 bis 9 als Summen ihrer Einheiten, die Zahl 10 als eine Kollektiveinheit höherer Ordnung auf. Die Vielfachen der Zehn wurden durch wiederholte Setzung des Zehnerzeichens dargestellt. Die Einheiten schrieben sie rechts neben die Zehner, so dafs die Ziffern in aufsteigendem Werte von rechts nach links standen, wie bei unserer Numeration. Diese Anordnung erklärt sich, wenn man berücksichtigt, dafs die Babylonier überhaupt von rechts nach links schrieben, was aus den aufgefundenen Schriftdenkmalen zu ersehen ist. (Die Zeilen brechen links ab, während rechts alle genau untereinander beginnen.) Ein eigenes Zeichen hatten die Babylonier auch für 100, einen wagrechten Keil, rechts neben einen senkrechten gesetzt. Sie fafsten also den Hunderter gleichfalls als eine Einheit höherer Ordnung auf im Gegensatze zu Zehnern und Einern. Mehrere Hunderter drückten sie dadurch aus, dafs sie vor das Zeichen des einfachen Hunderters so viele Einheiten setzten, als Hunderter geschrieben werden sollten. Je nach Stellung der Zeichen trat ein Funktionswechsel ein, indem die kleinere Zahl, wenn sie rechts von der gröfseren steht, sich ihr addiert, links dieselbe multipliziert. Um anzudeuten, dafs der Hunderter zehnmal zu denken sei, wurde das Zeichen des Zehners vor den Hunderter gesetzt. Sohin war den Babyloniern auch die Multiplikation bekannt, und wurde diese zur Bildung der Zahlreihe und Weiterführung derselben in höhere Potenzen benutzt. Die höheren Zahlordnungen wurden von den Babyloniern klarer erfafst und besser überschaut als von den Ägyptern. Überhaupt scheint in Babylon, dem Haupthandelsplatze der Alten Welt, das Rechnen mit Vorliebe gepflegt worden zu sein, während die Ägypter den Verhältnissen gemäſs den Nachdruck auf die Geometrie und Astronomie legten. Herodot deutet an, daſs die Ägypter, um den Lauf der Gestirne zu verfolgen, sich konstruktiver Methoden bedienten, während die Chaldäer rechneten. Bei Ausführung ihrer Rechnungen gebrauchten die Babylonier das Rechenbrett, wahrscheinlich auch die Finger.

Das Rechenbrett, der Urahn unserer (der russischen) Zählmaschine, war in verschiedenen Modifikationen unter den Völkern der Alten Welt verbreitet. In einem Rahmen ist eine Anzahl von Schnüren ausgespannt, jede derselben enthält 10 bewegliche Rechenkörper, die wir der Kürze halber Kugeln nennen wollen. Die Kugeln am Ende A werden, als in Rechnung stehend, am Ende B als nicht vorhanden gedacht und die Schnüre als 1., 2., 3. u. s. w. unterschieden. Denkt man sich die Kugeln auf der ersten Schnur als Einer, auf der zweiten als Zehner, auf der dritten als Hunderter, so bietet die Versinnlichung groſser Zahlen keine Schwierigkeit. So viele Kugeln das Ende A der Zählrahme aufweist, so viele Einer der treffenden Zahlsorte sind gemeint. Wenn z. B. auf der ersten Schnur 5, auf der zweiten 7, auf der dritten keine, auf der vierten 2 an das Zählende des Rahmens gerückt sind, so ist die Zahl 2075 dargestellt. Beim Rechnen selbst ergab sich eine Schwierigkeit, nämlich die Umwandlung, wenn z. B. zwei Zahlen addiert werden, bei welchen die Summe der Einheiten irgendwelcher Ordnung über 10 hinausging. Sollte man die Zahlen 706 und 813 addieren, muſsten 10 Hunderter der dritten Schnur gegen einen Tausender der vierten Schnur ausgewechselt werden. Auch beim Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren kamen selbstverständlich solche Umwandlungen vor. Es war dasselbe Verfahren, das wir heute noch beim schriftlichen Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren gröſserer Zahlen einhalten, nur mit dem Unterschiede, daſs man hier bei den Einern beginnt, um nachträgliche Korrekturen zu vermeiden. Das instrumentale Rechnen konnte bei jeder Schnur anfangen, und die nachträglichen Korrekturen erforderten keine gröſsere Arbeit als die anfänglichen. In dieser Rechnungsweise ist die Positionsarithmetik vorgebildet. Die Stelle der Null vertrat damals die leerbleibende Schnur. Und dennoch dauerte es viele Jahrhunderte, bis der Stellenwert auf die Ziffern überging und die längst geübte Rechenmethode auch in der Schrift zum Ausdruck kam.

Die Semiten bedienten sich zur Zahlbezeichnung der Buchstaben ihres Alphabets, so daſs die Zahlen von 1 bis 9 mit den 9 ersten Buchstaben nach ihrer alphabetischen Folge, die Zehner mit den 9 folgenden, die 4 ersten Hunderter mit den letzten Buchstaben, die 5 nächsten Hunderter mit den 5 Endzeichen der Buchstaben Kaph, Mem, Nun, Phe, Tsade geschrieben wurden.

Einheiten				Zehner				Hunderter			
Aleph	א	a	1	Jod	י	i	10	Koph	ק	q	100
Beth	ב	b	2	Caph	כ	c	20	Resch	ר	r	200
Gimel	ג	g	3	Lamed	ל	l	30	Schin	ש	sch	300
Daleth	ד	d	4	Mem	מ	m	40	Thau	ת	th	400
He	ה	h	5	Nun	נ	n	50	Endcaph	ך		500
Waw	ו	v	6	Samech	ס	s	60	Endmem	ם		600
Zaïn	ז	z	7	Aïn	ע	ö	70	Endnun	ן		700
Cheth	ח	ch	8	Phe	פ	ph	80	Endphe	ף		800
Teth	ט	ts	9	Tsade	צ	ss	90	Endtsade	ץ		900

Die Tausender wurden wie die Einer mit zwei darüber gesetzten Punkten geschrieben, die Zahlen bis zu 10000 aber durch Nebeneinanderstellung ausgedrückt.

Die Rechenkunst der Chinesen.

Wenn auch die naturgesetzlichen Prinzipien, nach welchen die Entwicklung des Rechnens erfolgte, bei allen Völkern dieselben sind, so ist doch die Zahlbezeichnung verschieden, denn sie ist abhängig von der Sprache und Schrift eines Volkes. Die chinesische Sprache ist sehr arm an Wörtern. Es werden daher die vokalreichen Stämme in verschiedener Weise accentuiert, und damit ändert sich auch die Bedeutung derselben. Gleichwohl reicht die Zahl der so erhaltenen Wörter nicht aus; es muſs deshalb die Wortzusammensetzung eintreten. Diese dient aber nicht der Bildung neuer Begriffe, wie z. B. bei uns die Wörter Apfel und Baum das einen neuen Begriff bezeichnende Wort Apfelbaum geben, sondern die Wortzusammensetzung hat nur den Zweck, aus der Vieldeutigkeit der Wörter die richtige Deutung zu bestimmen.

Das Wort dao hat (nach Cantor) neun Bedeutungen: führen, entwenden, erreichen, einstürzen, bedecken, Fahne, mit Füſsen treten, Getreide, Weg. Das Wort lú hat sieben Bedeutungen, darunter auch das Wort Weg, aber nur diese Bedeutung ist beiden Gruppen gemeinsam, deshalb heiſst dao-lú der Weg.

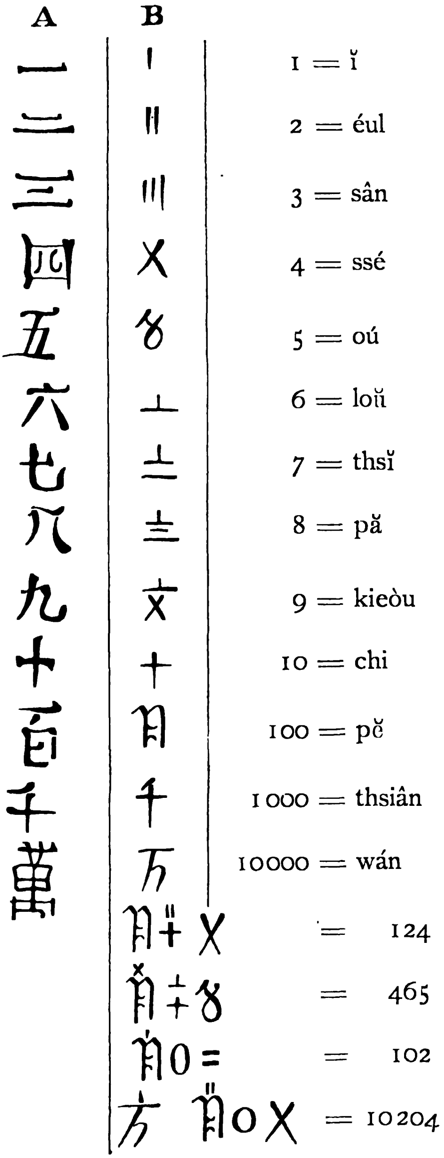


Fig. 9.
A. Altchinesische, B. Neuchinesische oder Kaufmannsziffern nach Abel-Remusat (Dr. Cantor).

In ältester Zeit sind von den Chinesen Knotenschnüre statt der Schriftzeichen verwendet worden. Später wurden die Knotenschnüre graphisch dargestellt, wodurch man die sog. Kouas erhielt, welche einen Übergang zur Schrift bildeten. Die chinesische Schrift war ursprünglich eine den Hieroglyphen ähnliche Bilderschrift, setzte also für jeden Gegenstand ein besonderes Zeichen, das seinen Umrissen entsprach. Ein solches Zeichen konnte in verschiedener Weise ausgesprochen werden, wenn der Gegenstand verschiedene Benennung zulieſs. Im Laufe der Zeit hat diese Schrift ihren Typus geändert, um den Forderungen der Schnell- und Schönschrift zu entsprechen, so daſs die ursprünglichen Bilder nicht mehr darin zu erkennen sind.

Weil die chinesische Schrift Wortschrift ist, so war die Möglichkeit, die Zahlen durch die Buchstaben des Alphabets zu bezeichnen, wie das andere Völker, Semiten, Griechen, Inder thun, nicht gegeben. Es mufsten daher besondere Zeichen für die einzelnen Zahlwörter erfunden werden, und es war hier kein Ende abzusehen, wollte man das Prinzip streng verfolgen. Wie aber der Chinese mit einer geringen Zahl von Wörtern auszukommen versteht, so auch mit wenigen Zahlzeichen. Er hat in dem ausgebildeten Zehnersystem Namen für die Zahlen von 1 bis 10, für 100, 1000 und 10000. Weiter geht der alltägliche Bedarf nicht. Höhere Zahlen werden als Vielfache von 10000 bezeichnet. Weil die chinesische Sprache die Wörter nicht flektiert, eine Zusammensetzung der Zahlwörter wie zehn und drei zu 13, oder dreimal zehn zu 30 auch nicht möglich war, so erübrigte nur, die gegenseitige Beziehung der Zahlwörter zu einander durch die Stellung der Wörter auszudrücken; man mufste daher bestimmen, dafs drei zehn 30, dagegen zehn drei 13 zu bedeuten habe. Es war also die Funktionsveränderung von der Addition und Multiplikation das grofse Hilfsmittel, um mit wenigen Zahlwörtern auszureichen. Wörter und Zahlnamen werden von oben nach unten und die Zeilen von rechts nach links geschrieben.

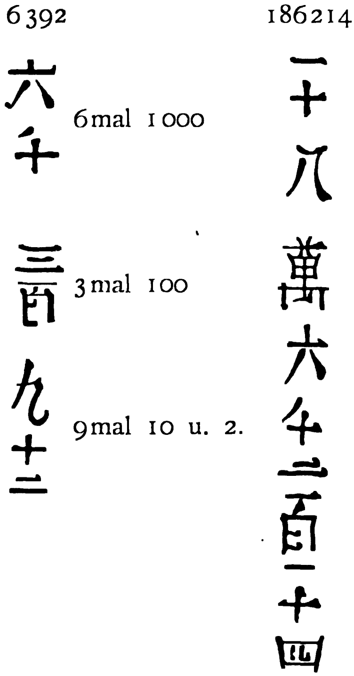


Fig. 10.
Altchinesischer Bezifferungsmodus nach Dr. Cantor.

Aufser den altchinesischen Zahlzeichen (Fig. 9, Rubr. A S. 30 und Fig. 10 S. 31) gibt es noch andere Gattungen von Ziffern, welche merkwürdigerweise nicht vertikal, sondern horizontal, und zwar so geschrieben werden, dafs die höchste Ordnung am weitesten nach links steht, ähnlich wie in der Keilschrift. Zu diesen Ziffern gehören die Ziffern der Kaufleute (Fig. 9 Rubr. B. S. 30) und Gelehrten.

Bei den Kaufmannsziffern steht die multiplikative Ziffer, welche angibt, wie viele Zehner, Hunderter etc. zu denken sind, links vor dem Zeichen der betreffenden Einheit, sonst meist über demselben. Die wissenschaftliche Bezifferungsmethode (Fig. 11.) erscheint als die primitivste; denn die Zahlen von 1 bis 5 werden lediglich durch Striche bezeichnet, welche der jeweiligen Anzahl der Einheiten entsprechen, wobei es anscheinend dem Belieben überlassen ist, dieselben vertikal, horizontal oder kreuzweise zu ordnen. Die Zahlen von 6 bis 9 werden in ähnlicher Weise ausgedrückt; nur für die Zahl 5 wird ein horizontaler Strich gebraucht, welcher die Zusammenfassung von fünf Einheiten repräsentiert. Beide Systeme stehen dem Positionssystem sehr

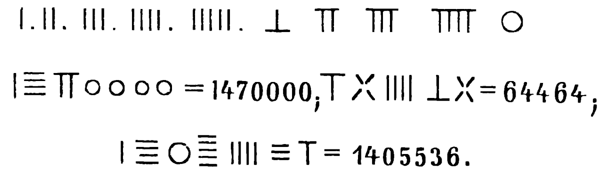


Fig. 11.
Wissenschaftliche Ziffern der Chinesen nach Biot und Biernatzky (Dr. Cantor).

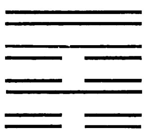
nahe, denn die Rangordnung der Ziffern wird nicht besonders bezeichnet, sondern aus dem Platze erkannt, welchen die Ziffer in einer Zahlreihe einnimmt. Das ist aber nur möglich, wenn ein Zeichen angewendet wird, welches die Funktion unserer Null übernimmt. Und wirklich wird in beiden Systemen ein Kreis gebraucht, um anzudeuten, dafs Einheiten einer gewissen Ordnung nicht vorhanden sind. Die kaufmännische und wissenschaftliche Bezifferungsweise sind jüngere Methoden, letztere ist wahrscheinlich von Nachbarvölkern angenommen. Es ist auch nachgewiesen, dafs die Chinesen im Altertume mit Ägypten, Indien und Babylon Handel trieben. Um 250 v. Ch. fand der Buddahismus in China Eingang, wodurch die Beziehungen der Chinesen zu den Indern aufser Zweifel gestellt sind. Möglicherweise sind die Chinesen infolge der Gesandtschaftsreisen, welche seit dem Jahre 222 v. Ch. zwischen China und Indien stattfanden, mit dem Gebrauche der Null bekannt geworden.

Über die Rechenkunst der Chinesen sollen viele bis ins höchste Altertum hinaufreichende Schriften vorhanden sein. Zu den ältesten litterarischen Werken gehören die neun arithmetischen Sektionen, deren Verabfassung in das 27. Jahrhundert v. Ch. gesetzt wird. Sie enthalten einen vollständigen Kursus über praktische Arithmetik, algebraische Gleichungen und die Trigonometrie. Kaiser Tschaoakong, welcher 1100 v. Ch. regierte, war ein besonderer Freund der Mathematik und verfafste eine noch erhaltene Schrift mit 22 Paragraphen in der Form eines Dialogs. In dieser Schrift findet sich auch der pythagoreische Lehrsatz für den speziellen Fall: $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Eine der merkwürdigsten Urkunden aus alter Zeit ist jedoch das Buch Ye-kim oder Y-kin. Diese kleine Schrift, eigentlich nur ein Blatt, wird Fohi, dem Stifter und ersten Kaiser des chinesischen Reiches (2952 v. Chr.), zugeschrieben. Sie enthält 64 paarweise geordnete Figuren, welche aus sechs übereinandergesetzten geraden, ganzen oder gebrochenen Linien bestehen. Fohi hat mit keinem Worte gemeldet, was er unter diesen Figuren verstanden wissen wolle. Nach Philipp Couplet hat sich 1800 Jahre später König Wen-wang und dessen Sohn Tschun-kong, und nach weiteren 600 Jahren Kon-fu-tse mit der Auslegung der Fohischen Figuren beschäftigt. Konfuzius erklärt die ganze Linie als Zeichen des Vollkommenen, die in der Mitte gebrochene Linie als das Zeichen des Unvollkommenen und findet in ihrer Zusammenstellung die Ausdrücke: Himmel, Bergwasser, Feuer, Donner, Winde, Wasser, Berge, Erde. Hiernach hätten die Fohischen Figuren eine physikalische Bedeutung. Auch in Europa, wohin dieselben durch Abschriften gekommen waren, nahm ihre Auslegung den Scharfsinn der gröfsten Gelehrten in Anspruch. Der eine fand darin logische Schlufsfiguren, der andere arithmetische Verhältnisse, Leibnitz ein zweigliedriges Zahlensystem. Im Jahre 1753 veröffentlichte der preufsische Kirchen- und Schulinspektor Joh. Thomas Haupt eine Schrift[1]), in welcher er die Gesichtspunkte feststellte, die bei der Erklärung dieser Figuren mafsgebend sind. Hiernach müsse 1. bewiesen werden, warum jede Figur gerade aus 6 Linien bestehe; 2. eine willkürliche Zerreifsung derselben darf bei einer Auslegung nicht stattfinden; 3. die ursprüngliche Ordnung derselben sei beizubehalten. 4. Es müsse nachgewiesen werden, warum es gerade 64 Figuren

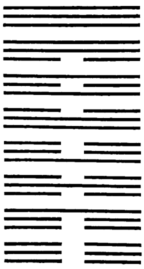
[1]) S. das Literaturverzeichnis.

seien, 5. warum immer zwei derselben beisammenstehen. 6. Die Bedeutung, welche der ganzen und dann der gebrochenen Linie zugesprochen ist, müsse an dem Orte, den sie in der Figur einnehmen, festgehalten werden; 7. endlich dürfe die Erklärung mit der bei den Chinesen üblichen Schreibweise nicht im Widerspruch stehen. Haupt weist nach, dafs keine der bisherigen Erklärungen diesen prinzipiellen Forderungen entspreche. Bei der Auslegung des Konfuzius stimmen Zeichen und Sache nicht überein, und Konfuzius war später mit derselben selbst nicht mehr zufrieden. Auch die Leibnitz'sche Erklärung sei nicht haltbar, wenn auch höchst scharfsinnig; denn es geht daraus nicht hervor, warum die einzelnen Figuren gerade aus 6 Linien zusammengesetzt sind. Haupt erklärt nun selbst: Man denke sich die ganze Linie als Zeichen einer allgemeinen Gröfse, z. B. als a, die gebrochene Linie als b, beide sohin als Binom $a + b$. Erhebt man $a + b$ auf die dritte Potenz und multipliziert den so erhaltenen Ausdruck mit sich selbst, so erhält man genau die 64 Figuren des Fohi. In der That erfüllt diese Auslegung die von Haupt aufgestellten Forderungen. Der gerade und der in der Mitte gebrochene Strich erscheinen als durchaus passende Zeichen für die allgemeinen Gröfsen a und b. Sechs Striche sind es, weil jedes Produkt aus 6 Faktoren besteht. 64 Liniensysteme erscheinen, weil der Satz $((a + b)^3)^2$ eben 64 Produkte gibt, von denen jedes einzelne 6 Faktoren enthält. Der Kaiser hat die beiden unbestimmten Gröfsen, die er mit ——— und — — bezeichnet, und die wir durch $a + b$ ausdrücken, mit sich selbst multipliziert und daraus folgendes Facit erhalten:



$$\left.\begin{array}{l} aa = a^2 \\ \left.\begin{array}{l} ab \\ ba \end{array}\right\} 2ab \\ bb = b^2 \end{array}\right\} = a^2 + 2ab + b^2$$

Dieses Quadrat mit der zweiteiligen Wurzel ——— + — — oder $a + b$ multipliziert, gibt den Kubus:



$$\left.\begin{array}{l} aaa = a^3 \\ \left.\begin{array}{l} aab \\ aba \\ baa \end{array}\right\} = 3a^2b \\ \left.\begin{array}{l} bba \\ bab \\ abb \end{array}\right\} = 3ab^2 \\ bbb = b^3 \end{array}\right\} = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Wird der Kubus mit sich selbst multipliziert, so ergeben sich folgende 64 Facta (Fig. 12):

Der Kubus wird multipliziert:

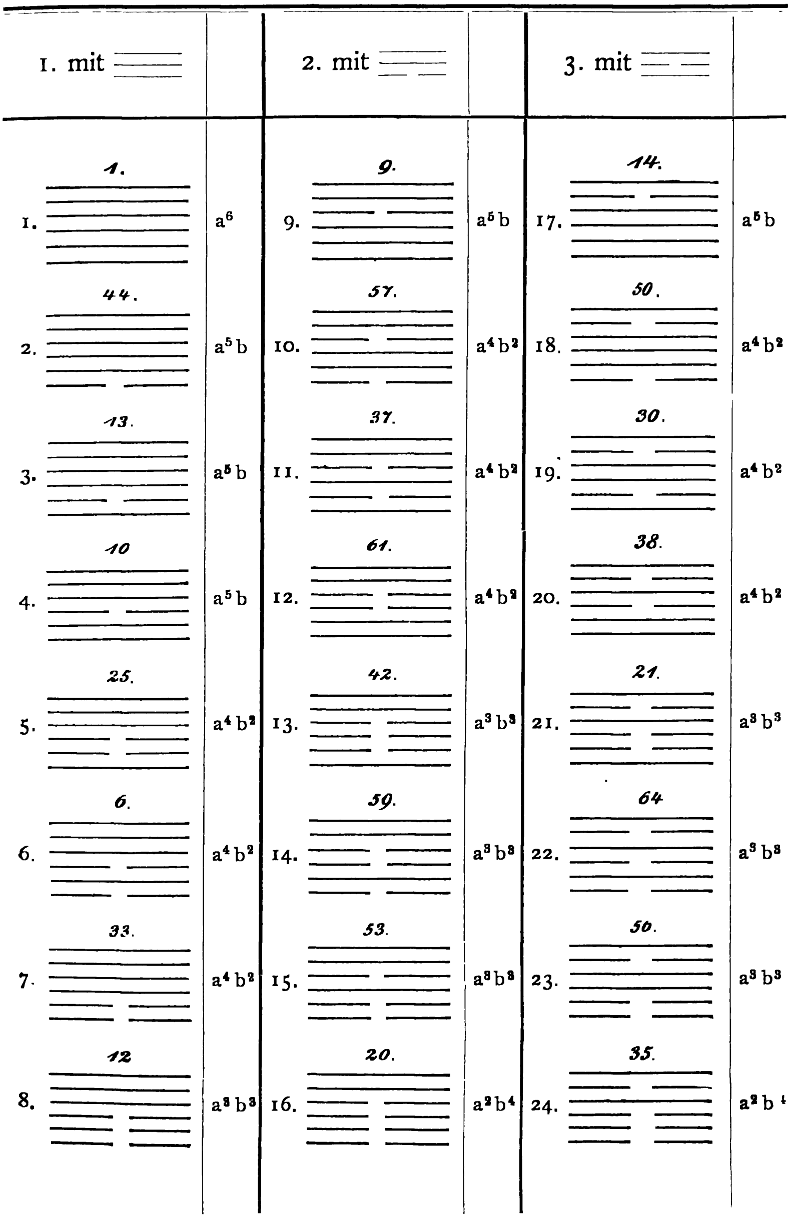


Fig. 12.

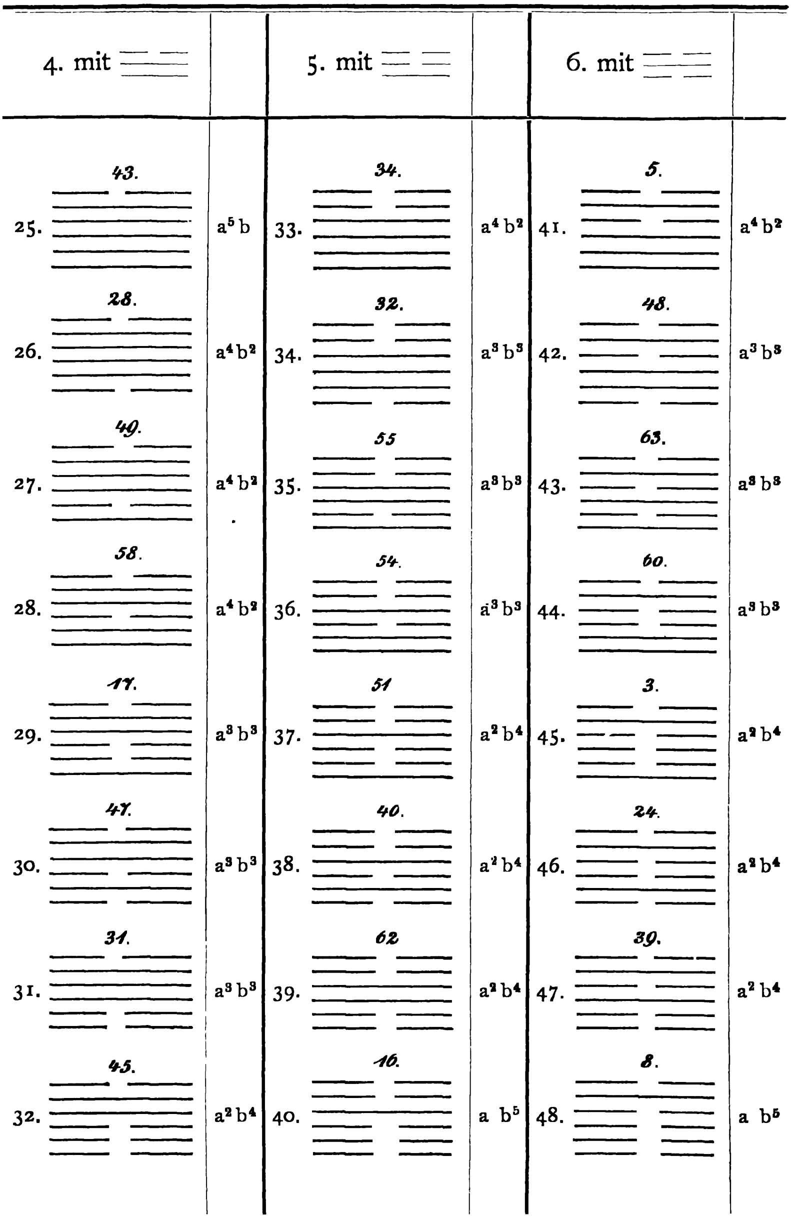


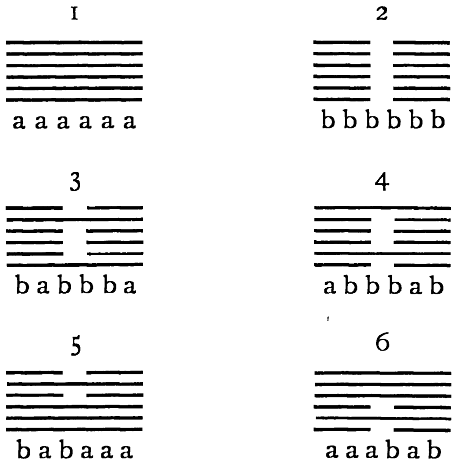
Fig. 12. (Fortsetzung.)

7. mit			8- mit		
49.	26.	$a^4 b^2$	57.	11.	$a^3 b^3$
50.	18.	$a^3 b^3$	58.	46.	$a^2 b^4$
51.	22.	$a^3 b^3$	59.	36	$a^2 b^4$
52.	41.	$a^3 b^3$	60.	19.	$a^2 b^4$
53.	27.	$a^2 b^4$	61.	24.	$a\ b^5$
54.	4.	$a^2 b^4$	62.	7.	$a\ b^5$
55.	52.	$a^2 b^4$	63.	15.	$a\ b^5$
56.	23.	$a\ b^5$	64.	2	b^6

Sa.: $a^6 + 6a^5 b + 15 a^4 b^2 + 20 a^3 b^3 + 15 a^2 b^4 + 6 a b^5 + b^6$.

Fig. 12. (Schlufs.)

Die von Fohi eingehaltene Ordnung der Figuren[1]) ändert das Wesen der Sache nicht, denn die einzelnen Produkte können in beliebiger Folge aufgeführt werden nach dem Satze: in einer Summe ist die Anordnung der Summanden gleichgültig. Die Produkte sind im Originale paarweise geordnet, so daſs das rechtsstehende Produkt die Faktoren in der entgegengesetzten Ordnung von dem linksstehenden gibt. Durch diese Ordnung hat Fohi nicht nur die Figuren in einer den arithmetischen Gesetzen entsprechenden Weise, sondern auch in schöner, zierlicher Verbindung dargestellt. Man beachte:



Vorstehende Auseinandersetzungen über das Büchlein Ye-kim gehen fast über den Rahmen gegenwärtiger Schrift hinaus. Sie geben aber Anlaſs zu einigen interessanten Betrachtungen. Lassen wir die Zeitangabe über das Alter der Schrift dahingestellt, so geht doch aus der Thatsache, daſs 1200 Jahre vor dem Beginn der christlichen Zeitrechnung die Auslegung derselben versucht wurde, und daſs damals schon das Verständnis für die eingehaltene Darstellungsweise verloren gegangen war, hervor, daſs die Schrift in der That sehr alt ist, und wir werden nicht fehlgehen, wenn wir derselben ein eben so hohes Alter zumessen, wie es von dem Papyrus Rhind nachgewiesen worden ist.

---

[1]) Die Reihenfolge der Figuren in Fohis Schrift ist durch die Ziffern über den Linienkomplexen in Fig. 12 S. 35—37 angedeutet.

Der Erhebung einer Zahl zum Kubus mufs das Quadrieren einer Zahl, diesem das Multiplizieren, diesem das Addieren, überhaupt die elementare Arithmetik vorausgegangen sein. So ist die Annahme nahegelegt, dafs das einzelne Blatt ein Überbleibsel eines uralten Rechenbuches sei, welches selbstverständlich auf noch älteren Grundlagen ruht. Das Buch Ye-kim ist der erste bekannt gewordene Versuch, einen an absoluten Zahlen erkannten Lehrsatz in allgemeinen Gröfsen auszudrücken, was gleichfalls zu der Annahme berechtigt, dafs sich das mathematische Denken zur Zeit der Entstehung des Buches auf eine bedeutende Höhe erhoben hatte. Endlich ist die Darstellung des Satzes insofern interessant, als sie nachweist, zu welch bewunderungswürdiger Einfachheit die mathematische Bezifferungsweise sich emporgeschwungen hat. Was Fohi in 384 Zeichen ausdrückte, schreibt man heutzutage mit 4 Zeichen: $((a+b)^3)^2$ oder noch einfacher: $(a+b)^6$.

Die Chinesen sind im Besitze einer uralten Zähl- oder Rechenmaschine, Suan-pan (Fig. 13) genannt, welche über den gröfsten Teil Asiens verbreitet ist. Dieses Recheninstrument besteht aus einem hölzernen Rahmen, welcher durch ein Zwischenstück parallel mit den längeren Seiten in 2 ungleiche Teile geteilt ist. Senkrecht zu diesem Zwischenstück und den schmäleren Seiten des rechteckigen Rahmens sind 10 Eisenstäbchen in gleichen Entfernungen eingesetzt. Jeder Stab enthält in der gröfseren Abteilung 5, in der kleineren 2 bewegliche Kugeln. Jede der 5 Kugeln des ersten Stabes im gröfseren Raum bedeutet eine Einheit, jede der beiden Kugeln im kleineren Raume desselben Stabes 5 Einheiten. Jede der 5 Kugeln des zweiten Stabes bedeutet einen Zehner, und jede der beiden Kugeln desselben Stabes im kleineren Raume 50. So erhalten die Kugeln jedes folgenden Stabes immer den zehnfachen Wert der Kugeln des vorhergehenden Stabes. Die Rechnungen des alltäglichen Verkehrs werden auf diesem Rechen-

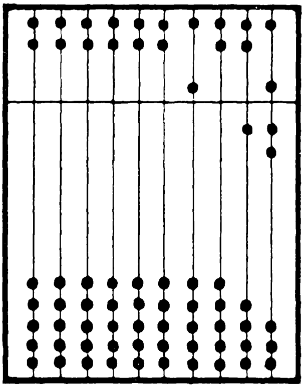


Fig. 13.
Schema des Suan-pan, die Zahl 5017 darstellend.

brette, selbst von Kindern, mit unglaublicher Schnelligkeit und Sicherheit ausgeführt. Bei der konservativen Denkweise, welche alle Verhältnisse des privaten und öffentlichen Verkehrs in China seit urdenklicher Zeit beherrscht, ist wohl anzunehmen, dafs der Suan-pan einer der ältesten Rechenapparate und das Vorbild vieler ähnlicher Instrumente ist. Der Ursprung desselben kann auf die noch älteren Knotenschnüre bezogen werden.

Überschauen wir die bisherigen Darlegungen, so ergeben sich für die Methodik des Rechenunterrichts folgende bedeutsame Sätze:

1. Der Anlafs zur Bildung von Zahlvorstellungen liegt unmittelbar in der sinnlichen Anschauung; daher ist das Rechnen so alt als das Menschengeschlecht. Weil aber in der Aufsenwelt nichts gegeben ist, das den Zahlvorstellungen kongruent wäre — es gibt kein Ding, das Vier oder Sechs oder Hundert heifst — so sind die Zahlvorstellungen Begriffe, Begriffe von Mengen, und als solche, wie die intellegiblen Begriffe, ein Erzeugnis der menschlichen Vernunft.

2. Zuerst wurde durch die Einwirkung gleichartiger Dinge im Menschengeiste der Gegensatz zwischen der Einheit und Mehrheit wachgerufen. Aus dem unbestimmten Begriffe der Vielheit sonderten sich durch wiederholte Setzung der Eins die bestimmten Begriffe der Zwei, Drei, Vier etc. ab.

3. Die Fünf- und Zehnzahl der Finger gab Anlafs, dafs die Zahlen von 6 bis 10 mit 5 verglichen und in zwei Summanden dargestellt wurden, deren erster 5 war. Die Zehnzahl der Finger gab weiterhin Anlafs, die Zehn als Einheit höherer Ordnung wiederholt zu setzen, wie die Einheiten der ersten Reihe. Durch Fortführung dieser Kombination und ihre Ausdehnung auf Hunderter, Tausender etc. entstand das dekadische Zahlsystem. Die Zahlen über 10 wurden ursprünglich als zweisortig, d. i. als aus Zehnern und Einern bestehend, aufgefafst und ebenso dargestellt.

4. Gegenstand des Rechnens waren ursprünglich die Rechendinge selbst, und an diesen vollzogen sich die Operationen. Dann wählte man Stellvertreter für alle zu berechnenden Gegenstände, weil man erkannt hatte, dafs die Zahlreihe im Wechsel der Dinge unveränderlich bleibt. Solche Stellvertreter waren die Finger, Steinchen, Muscheln, Knoten, Kugeln etc., welche aufgereiht die ersten Zählmaschinen darstellten. In der

Folge wurden die Einheiten sinnbildlich dargestellt (Hieroglyphen). Endlich gingen die graphischen Darstellungen (wie schon bei den Hebräern) in Zeichen über, welche die Zahl der Einheiten nicht mehr repräsentierten (Buchstaben, Ziffern, Ziffernsysteme). Die Zahlbezeichnung war ursprünglich weitläufig; bei der weiteren Entwicklung des Gegenstandes suchte man mit den einfachsten Mitteln das Höchste zu erreichen.

5. Das Rechnen ist aus dem eingebornen Bedürfnisse nach der Erkenntnis der Wahrheit hervorgegangen und mufste sich auf die mannigfaltigsten Verhältnisse des menschlichen Lebens und den ganzen Kreis seiner ideellen und äufseren Thätigkeit ausdehnen und in allen Sphären der Bethätigung menschlicher Kräfte seine Anwendung finden.

6. Die ursprünglichen Rechengeschäfte waren das Zusammenzählen und seine Umkehrung, das Abziehen. Vervielfachen und Teilen sind Ableitungen aus diesen beiden Grundrechnungsarten und aus dem Bedürfnisse entstanden, das mehrmalige Zu- und Abzählen gleicher Zahlen zu vereinfachen.

Auf diese Weise hat die Menschheit sich die Rechenkenntnis und Rechenkunst erworben. Und wenn es wahr ist, dafs sich im Leben des Individuums der weltgeschichtliche Entwicklungsprozefs der Menschheit widerspiegelt, dann müssen in diesen wenigen Sätzen die Grundprinzipien des Volksschul-Rechenunterrichts enthalten sein.

Die Rechenkunst der alten Griechen.

Von den geschichtlich bekannten ältesten Kulturstätten ging eine mächtige Anregung über die angrenzenden Länder und Völker aus. In Ägypten wie in den grofsen Reichen des Euphratgebietes kamen die asiatischen und afrikanischen Rassen zu friedlichem Handelsverkehr zusammen; nach Osten und Westen drangen die Heere der Babylonier und Assyrer vor, und ganze Völkerschaften wurden in andere Länder versetzt. Von diesen Kulturstätten empfingen Inder und Griechen geistige Anregung, und hier wie dort fand die junge Wissenschaft freudige Aufnahme und günstige Bedingungen zur weiteren Entwicklung: in Indien eine überreiche, grofsartige Natur; in Griechenland einen fruchtbaren Boden, eine starkgegliederte Küste, ein vielgeteiltes Staatswesen. König Psammetich I. (664—610) hatte unter dem Beistande jonischer Hilfsvölker die Dodekarchen besiegt; zum Danke dafür eröffnete er seinen Bundesgenossen Ägypten und wies ihnen hier sogar feste Wohnplätze an. Wifsbegierige Griechen zogen nun in das Land am Nil, um die Weisheit seiner Priester kennen zu lernen, und ägyptische Kolonisten siedelten sich in Griechenland und auf seinen Inseln an. So wurde die ägyptische Wissenschaft nach Griechenland verpflanzt, zugleich aber auch auf eine höhere Stufe gehoben, welche sie in ihrem Mutterlande nicht zu erreichen vermochte. Die Ägypter waren zwar frühe auf empirischem Wege zur Kenntnis geometrischer Sätze gelangt, aber sie begnügten sich mit der Erkenntnis, dafs sie zum Ziele führen; ein Bedürfnis, die einzelnen Sätze zu begründen oder zu beweisen, fühlten sie nicht, und deshalb konnte die Mathematik als System in Ägypten nicht aufkommen. Was die Ägypter erdacht und erfunden hatten, mufste auf einem andern Boden und mit neuen Kräften bearbeitet werden. Dazu waren aber die Griechen ganz besonders geeignet, denn sie wollten nicht blofs wissen, dafs etwas ist, sondern auch warum es so ist. Deshalb galten ihnen die aus Ägypten importierten Sätze lediglich als Theoreme, die erst dann wahren Wert besafsen, wenn ihre Richtigkeit durch einen wissenschaftlichen Beweis zur Gewifsheit geworden war, und mit Recht, denn die von den Ägyptern erfundenen Formeln waren nicht durchaus über allen Zweifel erhaben.

Diese geistige Richtung der Griechen wurde noch durch äufsere Momente gefördert. Athen war zum Sammelplatze der grofsen Männer Griechenlands geworden und erlangte dadurch eine erhöhte Macht und Bedeutung. 509 v. Ch. wurde allen Bürgern ohne Unterschied die Aussicht eröffnet, an der Staatsverwaltung teilzunehmen, welche früher nur einzelnen hervorragenden Familien vorbehalten war, und der Vaterlandsdienst im Kriege wie im Frieden galt von nun an als allgemeine Pflicht. Damit wurde das Bildungsbedürfnis in allen Schichten der Bevölkerung rege. Da die Handarbeit von Sklaven besorgt wurde, hatten die Bürger auch Zeit zu wissenschaftlichen Beschäftigungen, und öffentliche Vorträge leisteten den Bildungsbestrebungen Vorschub. Unter allen Wissenschaften stand bei den Griechen die

Mathematik in so hohen Ehren, dafs sie das Lob der Intelligenz spendeten, indem sie sagten: er kann zählen. Das Studium der Mathematik war ihnen die Vorschule der Philosophie; durch dieses Studium sollte die Denkkraft geweckt, gestärkt und zur Auffassung der Lehren der Philosophie befähigt werden; deshalb war ihnen das Studium der Mathematik identisch mit lernen, lernen durch Nachdenken (μανϑάνω manthano).

An der Übertragung geistigen Eigentums von einem Volke zum andern und an der Verbreitung desselben in weitere Kreise nahmen von jeher Tausende Anteil. Es sind jedoch immer nur illustre Namen, an welche sich diese Übertragung knüpft, und die sozusagen als Repräsentanten grofser Massen die Geschichte verewigt hat. Im Hinblicke auf unsern Gegenstand treten die griechischen Philosophen besonders hervor. Diese waren es vornehmlich, welche für bekannte Sätze Beweise suchten und die zerstreuten Sätze in ein System fügten, in welchem der folgende Satz des vorhergehenden zur Begründung bedurfte. Ihrem historischen Berufe getreu, sammelten diese Männer das Zerstreute, fügten das, was in losen Teilen vorhanden war, zu einem harmonischen Ganzen und führten planmäfsig ein schönes Gebäude auf, dem man die verschiedene Herkunft der Bausteine nicht mehr anmerkt.

In der stattlichen Reihe dieser Männer ist zuerst Thales von Milet[1]) zu nennen, jener Philosoph, welcher den Wahlspruch: Erkenne dich selbst! sich zur Lebensaufgabe gesetzt hatte. Thales, ein hervorragender Staatsmann, Mathematiker und Astronom, weilte Jahrzehnte in Ägypten, um sich hier mit der ägyptischen Wissenschaft vertraut zu machen. Nach dem Neuplatoniker Proklus (412—485 n. Ch.) soll Thales zuerst bewiesen haben, dafs Dreiecke, welche eine Seite und die anliegenden Winkel wechselweise gemein haben, kongruent sind; dafs im gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich sind; dafs ein Kreis von seinem Durchmesser in zwei gleiche Teile geteilt wird; dafs Scheitelwinkel einander gleich, und dafs alle Winkel im Halbkreise rechte Winkel sind. Diogenes Lärtius teilt mit, dafs Thales in Ägypten die Höhe der Pyramiden aus ihrem Schatten gemessen habe, woraus hervorgeht, dafs er mit den wichtigsten Lehrsätzen über die Ähnlichkeit der Dreiecke und den Proportionen bekannt war.

---

[1]) Milet, griechische Kolonie in Kleinasien.

Bedeutender als Thales war sein Schüler Pythagoras aus Samos (570—471 v. Ch.). Pythagoras wuchs in Tyrus auf und wurde da mit der hohen Kultur der Phönizier bekannt. Von König Amasis bei den Priestern eingeführt, liefs er sich unter Bedingungen in die Priesterkaste aufnehmen, die jeden andern abgeschreckt hätten. Später fiel er in persische Gefangenschaft und kehrte nach seiner Befreiung nach Samos zurück. Durch diese Umstände kam Pythagoras mit verschiedenen Kulturzentren in Berührung und dadurch in die Lage, sich die Wissenschaften derselben anzueignen. Überdies fiel sein Leben in eine höchst bewegte Zeit (Zoroaster, Konfuzius, Darius unterjocht Griechenland, die Karthager erobern Sicilien), und grofse Zeiten rufen stets grofse Männer ins Dasein. Pythagoras hat den nach ihm benannten Lehrsatz zuerst bewiesen, und diesem Beweise mufsten Sätze vorausgehen, von deren Erfindung wir keine Kenntnis haben. Dieser Philosoph lieferte zuerst den Beweis, dafs der Kreis unter allen ebenen Figuren den gröfsten Flächeninhalt hat. Auch soll er zuerst die Vorschrift gegeben haben, zwei Quadratzahlen zu finden, deren Summe wieder eine Quadratzahl ist. Nach dieser Vorschrift nimmt man irgend eine gerade Zahl als erste, quadriert sie, nimmt vom Quadrat 1, teilt den Rest durch 2 und erhält so die zweite Zahl; diese, um 1 vergröfsert, gibt die dritte, deren Quadrat so grofs ist als die Summe der Quadrate der beiden ersten Zahlen.

Pythagoras begründete die Schule der Pythagoreer. Die Pythagoreer hatten die von ihrem Meister wohl aus Ägypten oder Persien eingeführte Ansicht, dafs in der Zahl das Wesen aller Dinge liege. Das All war ihnen ein harmonisches System von Zahlen und deren Verhältnissen; denn, sagten sie, die Natur der Zahl läfst keinen Trug zu; sie ist gesetzgebend, beherrschend, eine Lehrerin des Unbekannten. Daher mufs das, was in der Erkenntnis das Unwandelbare ist, auch die unwandelbare Wesenheit der Dinge sein. Aus der Einheit (monas = der Geist) geht die ganze sichtbare Welt hervor. Aus der monas entsteht die dyas (in unserm Sinne das materielle Atom). Indem die dyas von neuem an der monas teilnimmt, entsteht die trias, Dreiheit (das bewegliche, veränderliche Molekül). Aus der trias entsteht die Körperwelt. Indem sie diese bildet, nimmt sie die monas noch einmal auf und steigert sich zur tetras. Das sinnliche und übersinnliche All umfaſst nun die thätige, wirksame Vier, tetraktis. Da nun $1+2+3+4=10$, die Zehnzahl dekas, so umfaſst diese die tetraktis, das Bild des Universums. Es zeigt sich hier das Bestreben, die Erscheinungen in der Welt auf bestimmte Gesetze zurückzuführen und in der Zahl symbolisch darzustellen. Daraus erklärt sich auch die innige Beziehung, in welcher die von Pythagoras begründete theoretische Zahlenlehre zur Geometrie stand. Seit Pythagoras verglichen die Griechen die Zahlen mit geometrischen Gebilden. Die Primzahlen nannten sie linear, weil sie nicht in Faktoren zerlegt werden können, für sich allein betrachtet werden müssen, wie die gerade Linie sich nur nach einer Richtung hin erstreckt. Zahlen, welche sich in Faktoren zerlegen lassen, nannten sie Flächenzahlen, weil sie als Produkt einer Länge und Breite betrachtet werden können. Der Ausdruck Quadratzahl weist noch auf geometrische Beziehungen. Das Produkt dreier Faktoren wird Körperzahl genannt, weil bei der Ausmessung der Körper drei Dimensionen in Betracht kommen. Sind die Faktoren gleich, so heiſst die Zahl Kubikzahl.

Pythagoras ist während seines Aufenthaltes in Persien mit der indischen Rechnungsmethode bekannt geworden und wendete dieselbe auf die Geometrie und Astronomie an. Sein gröſstes Verdienst besteht aber, wie Aristoxenus (ein Schüler des Aristoteles um 350 v. Ch.) sagt, darin, daſs er die Arithmetik aus dem kaufmännischen Geschäftsbedürfnisse herauszog und alle Dinge unter der Form der Zahl betrachtete, daſs er die Arithmetik zu einer philosophischen Disziplin erhob. Doch hatte die philosophische Auffassung der Zahl einen Nachteil: sie leitete vom Mechanismus der Operation ab und auf das mystische Gebiet. Pythagoras schwur bei der Zahl 4: Juro ego per sanctum pura tibi mente quaternum, Aeternae fontem, naturae animaeque parentem. (Ich schwöre Dir reinen Herzens beim Heiligtum viermal, der Quelle der ewigen Natur und der Mutter des Geistes.)

Die Zahl 7 war den Pythagoreern die jungfräuliche Zahl, weil sie weder von anderen gezeuget, noch andere zeuget. Die Zahl 8 galt ihnen als das Symbol des Todes, weil die Ziffernsummen ihrer Produkte immer um eins abnehmen: 8; $16 = 6+1 = 7$; $24 = 2+4 = 6$ etc. Dagegen war die Zahl 9 das Symbol der Beständigkeit, weil die Ziffernsummen ihrer Produkte jederzeit 9 geben (9; $18 = 1 + 8 = 9$; $27 = 2 + 7 = 9$ etc.) Diese mystische Zahlbetrachtung war reellen Fortschritten hinderlich und drängte noch in späteren Jahrhunderten selbst die besten Köpfe auf Abwege.

Auch in Bezug auf die Methode des Unterrichts ist Pythagoras merkwürdig. Er fing die wissenschaftliche Erziehung seiner Schüler damit an, dafs er sie viel auswendig lernen liefs. Das war in Ägypten so im Gebrauche, wo er selbst einen derartigen Unterricht empfangen hatte. Der erste Gegenstand, der gelehrt wurde, war die Mathematik, und diese Stelle an der Spitze des Lehrplans behielt sie auch in den griechischen Schulen. Um aber die Aneignung der mathematischen Lehren zu erleichtern, mufsten sie in prägnanter Form auftreten, in einer Form, welche dem Gedächtnisse durch die logische und symmetrische Anordnung zu Hilfe kam. Diese Darstellungsweise wurde von Pythagoras begründet und in Euklids Elementen in meisterhafter und unübertroffener Weise zur Vollendung gebracht.

Hippokrates von Chios (um 450 v. Ch.) schrieb Elemente der Geometrie. Berühmt wurde er durch die Quadrate seiner mondförmigen Figuren. Wenn man nämlich über den Seiten eines rechtwinkeligen Dreiecks Halbkreise zeichnet, wobei der Halbkreis auf der Hypotenuse nach innen über den rechten Winkel geht, so sind die zwei hiedurch entstandenen Monde zusammen so grofs als das Dreieck; und wenn das Dreieck gleichschenkelig ist, dann ist der eine Mond gleich der Hälfte des Dreiecks. Das ist das erste Beispiel der Zurückführung krummliniger Figuren auf geradlinige, zugleich eine Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes. (Fig. 14.) Hippokrates löste auch die Aufgabe von der Verdopplung eines Würfels.

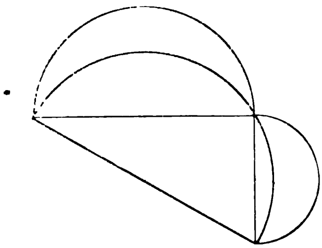


Fig. 14.

Plato aus Athen (429—348 v. Ch.) betrachtete die Mathematik als Vorschule der Philosophie und als Grundlage jeder höheren Bildung. Plato soll die Kegelschnitte in die Mathematik aufgenommen haben, eine Erfindung, die wir lediglich den Griechen verdanken.

Eudoxus aus Knidus (um 370 v. Ch.), ein namhafter Astronom und Geometer des Altertums, war der Erfinder des Satzes, daſs eine Pyramide der 3. Teil eines Prisma ist, mit dem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Archidas von Tarent, Platos Zeitgenosse, war der Begründer der wissenschaftlichen Mechanik.

Aristoteles, der Erzieher Alexanders des Groſsen, ordnete und erweiterte die philosophischen Wissenschaften.

Mit Plato schlieſst die Reihe jener Männer, welche zugleich Philosophen, Mathematiker und Naturforscher waren. Die Fülle des Wissens hatte sich so gemehrt, daſs der Einzelne dieses groſse Gebiet nicht mehr zu beherrschen vermochte; es muſste daher eine Arbeitsteilung in der Forschung eintreten.

Durch die Waffenerfolge des groſsen Alexander wurden den Griechen alle Länder vom Nil bis zum Indus geöffnet, und griechische Kultur verbreitete sich allerwärts über die eroberten Länder.

Von Ägypten war in früheren Jahrhunderten die Kultur nach Griechenland übertragen worden. Jetzt flossen die geistigen Errungenschaften der Griechen wieder nach Ägypten zurück. Während das reich gewordene Mutterland an den Folgen der Genuſssucht und Verweichlichung zu Grunde ging, vereinigte sich in den Ländern am Nil ägyptische Beharrlichkeit mit griechischer Kunst und Wissenschaft. Am Ausflusse des Nil berührten sich die Ideenkreise der Völker von Indien bis nach Italien und den Mittelmeerländern. Hier am Stapelplatze des Welthandels, wo alle Nationen ihre Repräsentanten hatten, entstand eine Gelehrtenschule, welche trotz der groſsen politischen Umwälzungen fast 1000 Jahre in Wirksamkeit blieb. Während die Griechen sich die Grundlage ihrer Bildung aus weiten Fernen holen muſsten, floſs den Alexandrinern alles von selbst zu, und deshalb gehören die gröſsten Mathematiker der Alexandrinischen Schule an.

Allen voran steht der berühmte Mathematiker Euklid, welcher um 380 v. Chr. an dieser Schule lehrte. Seine Elemente der Geometrie enthalten das Ergebnis einer durch Jahrhunderte und durch Generationen fortgepflanzten Wissenschaft in künstlerisch ausgebildeter, demonstrativer Methode. In beiden Richtungen sind Euklids Werke die Grundlage der Geometrie geworden. Kein wissenschaftliches Werk hat eine so weite Verbreitung gefunden, und keines hat zwei Jahrtausende überdauert, ohne zu veralten, wie man das von den 15 Büchern Euklids rühmen kann[1]). Euklid führte die Arithmetik in die Geometrie ein und machte die Anwendung dieser Verbindung in der Optik und Mechanik.

In den von Euklid geöffneten Bahnen ging Archimedes von Syrakus (287—212 v. Ch.) weiter. Archimedes, Euklids Schüler, entdeckte das Gesetz über das spezifische Gewicht, berechnete mit vieler Geschicklichkeit und grofser Mühe, dafs der Umfang eines Kreises kleiner sei als $3^{10}/_{70}$, aber gröfser als $3^{10}/_{71}$ des Kreisdurchmessers. Er schrieb eine eingehende Abhandlung über krummlinige Körper und Flächen, erfand die Schraube ohne Ende, den Flaschenzug, die Wasserschraube u. a. Durch all seine genialen Erfindungen und Entdeckungen wurde Archimedes zum berühmtesten Hydrostatiker und Mechaniker des Altertums. Wir besitzen von Archimedes eine Schrift über die Berechnung der Sandeszahl, de numero arenae, welche den Zweck hatte, zu zeigen, dafs die Griechen jede, noch so grofse Zahl ausdrücken konnten, dafs sie eine Zahl zu schreiben vermochten, welche die Zahl der Sandkörner übertrifft, mit denen man sich den Weltenraum ausgefüllt denkt[2]). Archimedes zählt nach Myriaden und nimmt Myriaden mal Myriaden als Einheit der nächst höheren Ordnung an. Er teilt die Zahlen von 8 zu 8 Stellen ab; die erste Abteilung enthält die Einheiten der ersten Ordnung, die zweite Abteilung die Einheiten der zweiten Ordnung. Diese Ordnungen führt er zur hundertmillionsten fort und nennt ihre ungeheuere Zahl die erste Periode; mit einem Worte: Archimedes erläutert den Begriff des mathematisch Unendlichen und weist speziell die Unendlichkeit

---

[1]) Euklids Bücher »Von den Eigenschaften der Zahlen« wurden noch i. J. 1555 von Scheybl in deutscher Sprache herausgegeben, und die von Wolf im 18. Jahrhunderte angeregte Verbesserung der mathematischen Lehrmethode geht auf Euklids Schriften zurück.

[2]) Joh. Christ. Sturm, Professor an der Universität Altdorf, sagt auf dem Titelblatte zu der von ihm herausgegebenen Sandrechnung des Archimedes 1667:

Es sey das End der alten Welt
Da, wo ihr Aug, die Sonne, stehet,
Des Aristarchi Sternenzelt
Sey viel tausendmal verhöhet,
So wirst du dennoch beydesmal
Aus weltbekannt gewissen Gründen
Die umbgeschriebene Sandeszahl
Viel gröfser als die Welt befinden.

der Zahlenreihe nach, und zwar ohne von der Null Kenntnis zu haben. Der kühne Versuch des Archimedes, solche Zahlen zu ersinnen, wie sie in der Sandrechnung vorkommen, zeigt, daſs die Griechen das, was sie an kleineren Zahlen erkannt hatten, auch auf gröſsere Zahlen anzuwenden verstanden. Mit Archimedes hat die griechische Arithmetik ihren Höhepunkt erreicht.

Apollonius von Perga in Pamphylien lebte um 240 v. Ch. Er war ein mittelbarer Schüler Euklids und gehört zu den Hauptbegründern der mathematischen Wissenschaften. Von seinen vielen Schriften ist das Werk über die Kegelschnitte in acht Büchern, teils in griechischer Sprache, teils in arabischer Übersetzung noch erhalten und von Diesterweg 1822 deutsch bearbeitet worden.

Claudius Ptolemäus von Pelusium in Ägypten schrieb (in der ersten Hälfte des 2. Jahrhunderts n. Chr.) den »Almagest« oder das groſse Lehrgebäude der Astronomie. Dieses Werk bestand aus 13 Büchern, in welchen Ptolemäus die früheren Annahmen und Entdeckungen über das Weltgebäude sammelte und berichtigte. Das Ptolemäische System galt bis auf Copernikus. Ptolemäus wendete bei den astronomischen Berechnungen die Sexagesimalteilung an. Er teilte den Kreisdurchmesser in 120 Teile oder Grade, einen Grad in 60 Teile oder Minuten. Ptolemäus war der erste, der die geographische Lage der Orte nach dem Längen- und Breitengrade bestimmte.

Der erste griechische Mathematiker, von dem wir eine Schrift über die Arithmetik besitzen, ist Nikomachos aus Gerasa in Arabien, welcher um das Jahr 100 n. Ch. lebte. Sein Werk, eine Einleitung über die Pythagoreische Zahlenlehre (neu von Wechel, Paris 1538), besteht aus zwei Büchern, von denen das erste die Einteilung der Zahlen behandelt; im zweiten Buche weist er nach, wie alles aus der Einheit hervorgeht. Hat man eine Reihe von Einheiten, so entsteht daraus durch Zuzählen die Reihe $1 = 1$; $1 + 1 = 2$; $1 + 1 + 1 = 3$ etc. Auf gleiche Weise erhält man die dreieckigen Zahlen: $1 = 1$; $1 + 2 = 3$; $1 + 2 + 3 = 6$ etc. Die viereckigen oder Quadratzahlen entstehen aus zwei dreieckigen, $1 = 1$; $1 + 3 = 2^2$; $3 + 6 = 3^2$; $6 + 10 = 4^2$; $10 + 15 = 5^2$ etc. Nikomachus wies nach, daſs $1 + 3 = 2^2$; $1 + 3 + 5 = 3^2$; $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$; $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$ ist. Zuletzt behandelt er die Proportionen. Nikomachus hat das

Einmaleins in der uns geläufigen Form aufgestellt und bezeichnet sich selbst als den Erfinder desselben.

Thymarides von Tarent berechnete zuerst Gleichungen mit mehreren unbekannten Gröfsen.

Diophantus, in der zweiten Hälfte des 4. Jahrhunderts n. Ch., lehrte die nach ihm benannten diophantischen Gleichungen.

Zur Zahlbezeichnung gebrauchten die Griechen die Buchstaben ihres Alphabets, und zwar in der Art, dafs die Buchstaben in ihrer gewöhnlichen Ordnung von α bis ϑ die Einheiten, von ι bis π die Zehner, von ϱ bis ω die Hunderter bedeuteten. Da hiezu 27 Buchstaben erforderlich waren, das griechische Alphabet aber nur 24 enthält, so mufsten noch 3 besondere Zahlzeichen hinzukommen, welche sie dem alten griechischen Alphabet entnahmen. Es waren die Zeichen ϛ, ϙ und ϡ für 6, 90 und 900.

Die Zahlen wurden demnach in folgender Weise dargestellt.

Einer	Zehner	Hunderter
α = 1	ι = 10	ϱ = 100
β = 2	κ = 20	σ = 200
γ = 3	λ = 30	ι = 300
δ = 4	μ = 40	υ = 400
ε = 5	ν = 50	φ = 500
ϛ = 6	ξ = 60	χ = 600
ζ = 7	ο = 70	ψ = 700
η = 8	π = 80	ω = 800
ϑ = 9	ϙ = 90	ϡ = 900.

Bei der Aneinanderreihung der Zahlen galt das Gesetz: die gröfsere Zahl kommt zur Linken, die kleinere zur Rechten, z. B. ιε = 15, λζ = 37; ϱκβ = 122; υπη = 488.

Um die Zahlzeichen von den Buchstaben zu unterscheiden, setzten die Griechen über dieselben einen Querstrich. Zur Bezeichnung der Tausende bediente man sich wieder der 9 ersten Zahlzeichen, setzte denselben jedoch unterhalb ein Strichlein in Form eines Komma vor, z. B.:

͵α = 1000; ͵β = 2000; ͵γ = 3000; ͵αφοε = 1575;
͵εσπ = 5280; ͵ϑωμγ = 9843; ͵γχνδ = 3654.

Um die Zehntausender auszudrücken, schrieb man über, vor und nach *M* oder *Mυ* (*Μυϱιὰς* = 10000) die Zeichen der

Einheiten; zur Bezeichnung der Hunderttausende, Millionen, Zehnmillionen verband man auf die nämliche Art mit M die Zeichen der Zehner, Hunderter, Tausender, z. B. M oder $M\upsilon = 10000 =$ $=$ Myrias; $\overset{\beta}{M}$ oder βM ($\beta M\upsilon$ oder $M\upsilon\beta$) $= 20000$ oder 2 Myrias; $\overset{\vartheta\psi\xi\delta}{M}\ \overline{{}_{,}\gamma\varkappa\eta}$ oder $\overset{,\vartheta\psi\xi\delta}{M\upsilon}\ \overline{{}_{,}\gamma\varkappa\eta} = 97\,643\,028$; $M\iota\delta\cdot\overline{{}_{,}\alpha\chi\pi} = 141\,680$. Bei der letzten Bezeichnungsweise wurde immer am Ende der dem M angehängten Zahl ein Punkt gesetzt.

Die Zahlen wurden (zur Zeit des Apollonius und Archimedes) in Ordnungen von 8 Stellen und jede Ordnung in 2 Klassen eineingeteilt, so dafs jede Klasse 4 Stellen hatte. Auf die nämliche Art, wie die Stellen der ersten Ordnung vermerkt wurden, bezeichnete man auch die der zweiten und dritten Ordnung, wobei man das M als Faktor wiederholte, dafs z. B. $\alpha MM = 10000 \cdot 10000 = 100\,000\,000$ oder $\alpha MMM = 10000 \cdot 10000 \cdot 10000 =$ $1\,000\,000\,000\,000$ ist.

Die Zahl 5601052800000 wird abgeteilt in

5	6010	5280	0000
dreifache	zweifache	einfache	
Myr.	Myr.	Myr.	
$M\gamma$	$M\beta$	$M\alpha$	

und geschrieben: $M\gamma\cdot\varepsilon\ {}_{,}M\beta\cdot\varrho\iota\ {}_{,}M\alpha\cdot{}_{,}\varepsilon\sigma\pi$, nach unserer Schreibweise:

$$5 \cdot 10000^3 + 6010 \cdot 10000^2 + 5280 \cdot 10000.$$

Beim Aussprechen der mehrfach benannten Zahlen machte man mit der kleineren Sorte den Anfang und ging der Reihenfolge nach zu den höheren über, so wie wir mehrsortig benannte Zahlen multiplizieren und in entgegengesetzter Weise, wie wir sie sprechen.

Beim Anschreiben der Brüche wurden die Stammbrüche von den abgeleiteten Brüchen unterschieden. Die Stammbrüche schrieb man nur mit dem Nenner, welchem man rechts oben ein Strichlein beisetzte, z. B. $\frac{1}{3} = \gamma'$; $\frac{1}{4} = \delta'$; $\frac{1}{5} = \varepsilon'$; $\frac{1}{88} = \pi\eta'$.

Nur für $\frac{1}{2}$ hatten die Griechen ein besonderes Zeichen ($\angle$). Abgeleitete Brüche schrieb man derart, dafs zuerst der Zähler als ganze Zahl gesetzt und rechts oben der Nenner mit einem Circumflex beigefügt wurde, z. B. $\frac{8}{33} = \frac{\lambda\tilde{\gamma}}{\eta}$; $\frac{48}{845} = \frac{\omega\,\mu\tilde{\varepsilon}}{\mu\eta}$.

Obwohl die Griechen sich einfacher Zeichen zur Zahldarstellung bedienten, so bot doch das gewöhnliche Rechnen noch grofse Schwierigkeiten. Sie kannten die Null nicht, und deshalb hatten ihre Berechnungsweisen noch nicht die Leichtigkeit und Eleganz der Behandlung, mit welcher sie heutzutage ausgeführt werden. Ihre Multiplikationen hatten diese Form:

$$\begin{array}{rcl} \overline{\tau\varsigma} &=& 306\\ \overline{\tau\varsigma} &=& 306\\ \hline \overset{\vartheta}{M},\overline{\alpha\omega} &=& \left\{\begin{array}{r}90000\\1800\end{array}\right.\\ ,\overline{\alpha\omega\lambda\varsigma} &=& \left\{\begin{array}{r}1800\\36\end{array}\right.\\ \hline \overset{\vartheta}{M},\overline{\gamma\chi\lambda\varsigma} &=& 93636\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} ,\overline{\alpha\vartheta\varsigma'} &=& 1009\,{}^1/_6\\ ,\overline{\alpha\vartheta\varsigma'} &=& 1009\,{}^1/_6\\ \hline \overset{\varrho}{M},\vartheta\varrho\xi\varsigma\angle\varsigma' &=& \left\{\begin{array}{r}1000000\\9000\\166\,{}^1/_2 + {}^1/_6\end{array}\right.\\ ,\overline{\vartheta\pi\alpha\alpha\angle} &=& \left\{\begin{array}{r}9000\\81\\1\,{}^1/_2\end{array}\right.\\ \overline{\varrho\xi\varsigma\angle\varsigma'\alpha\angle\lambda\varsigma'} &=& \left\{\begin{array}{r}166\,{}^1/_2 + {}^1/_6\\1\,{}^1/_2\\{}^1/_{36}\end{array}\right.\\ \hline \overset{\varrho\alpha}{M},\overline{\eta\upsilon\iota\zeta\gamma'\lambda\varsigma'} &=& 1018417\,{}^1/_3 + {}^1/_{36}.\end{array}$$

Lonicerus beschreibt (1570) das Multiplikationsverfahren der Griechen wie folgt:

»Sie veranschaulichten die ganze Arbeit (der Multiplikation) durch Chiasmen, d. h. durch Kreuzungen der Zahlen. Es sei z. B. 365 durch 224 zu multiplizieren (Fig. 15 S. 53).

Zuerst vermehre man 5 durch 4 nach der geraden Richtung, und es wird hingeschrieben in Summa für sich 20, hierauf nehme man die erste Zahl zur zweiten und hinwieder die zweite zur ersten über quer, was eine Vertauschung der Stelle ist; denn man wird nun die Zehner durch die Einer vermehren. sie werden hingeschrieben, und diese Summen sind 240 und 100. Hinwieder vermehre man die zweite Zahl durch die zweite nach der geraden hin, was eine Vermehrung der Zehner sein wird; die Summe ergibt 1200. Hierauf nehme man die erste Zahl zur dritten und die dritte zur ersten kreuzweise, so dafs eine Vermehrung der

Hunderter durch die Einheiten entsteht und die Summen 1200 und 1000 sich ergeben. Hernach nehme man die zweite zur dritten und die dritte zur zweiten kreuzweise, so dafs sich die Hunderter durch die Zehner vermehren, dann entstehen die Summen 6000 und 12000. Zuletzt nehme man die dritte zur dritten nach der geraden hin, und es werden sich vermehren gegenseitig die Hunderter, deren Summe 60000 ergibt. Sobald diese Posten alle nach den Regeln der Addition zusammengestellt sind, ergibt sich die Summe von 81760 wie folgt:

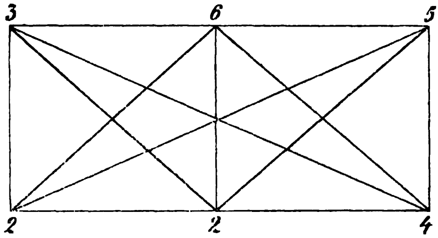


Fig. 15.

81760 Productum
12..
12..
612.
1124.
62000
365 Multiplicandus
224 Multiplicans.

Bei Auflösung ihrer Rechnungen bedienten sich die Griechen der Finger und des Rechenbrettes. Dafs sie das Fingerrechnen kannten, ist durch eine Schrift des Nikolaus Rhabda aus Smyrna nachgewiesen, in welcher die Fingernumeration in griechischer Sprache ausführlich beschrieben und gelehrt wird. Rhabda schildert ausführlich, wie man durch Beugung der Finger die einzelnen Zahlen darstellen soll. Die Finger der linken Hand dienen zur Bezeichnung der Einer und Zehner, die Finger der rechten Hand zur Bezeichnung der Hunderter und Tausender. Die 3 äufseren Finger der linken Hand werden zur Bezeichnung der Einer, die 2 inneren zur Bezeichnung der Zehner in Bewegung gesetzt; durch die Beugung der 3 äufseren Finger der rechten Hand wurden die Hunderter, durch Zeigefinger und Daumen der rechten Hand die Tausender dargestellt. Die Fingerstellungen waren schon zu willkürlich gewählten, mnemotechnischen Symbolen geworden in dem Bestreben, auch gröfsere Zahlen an den Fingern darzustellen und für die Erinnerung festzuhalten.

Auch das zweite Hilfsmittel, das Rechenbrett, hatte sich bei den Griechen schon von seiner ursprünglichen Form entfernt. Die ersten Zähl- oder Rechenmaschinen waren Apparate mit an Schnüren beweglichen Körpern, Steinen, Muscheln etc. Nach und nach lernte man den festen Apparat entbehren und zeichnete ihn vor der jedesmaligen Anwendung mit einem Griffel auf ein mit Sand bestreutes Brett. Ein Rechenbrett mit solcher Zeichnung wurde nachmals von den Römern Abakus genannt. Das griechische Wort abax lautet ähnlich und ist offenbar verwandt mit dem hebräischen Worte abak, welches soviel als Staub bedeutet. In der Übersetzung könnten also solcherart gezeichnete Recheninstrumente Staubbretter genannt werden. Thatsächlich ist die Erinnerung an solche mit Staub bestreute Bretter im ganzen Oriente erhalten geblieben, und von Pythagoras wissen wir bestimmt, dafs er die Rechentafel auf Sand zeichnete.

Der abax existierte in verschiedenen Modifikationen. Wesentlich ist ein Liniensystem, das den Schnüren des körperlichen Apparates entspricht, und eine Anzahl von Rechensteinen, welche die Stelle der beweglichen Rechenkörper am älteren Apparate zu vertreten hatten.

Dem körperlichen Vorbilde entsprechend wurden die Linien senkrecht zum Rechnenden gezogen. Wenn die Linien horizontale Richtung gehabt hätten, wie beim Rechenbrette des späteren Mittelalters, wäre das Zitat Herodots, dafs die Ägypter die Rechensteine von der Rechten zur Linken, nicht wie die Griechen von der Linken zur Rechten bewegen, nicht verständlich. Durch die gezeichneten Linien entstanden Zwischenräume oder Kolumnen, in welche irgend ein als primitive Einheit angenommenes Ding, ein Steinchen, eine Muschel, ein Metallscheibchen gesetzt wurde und hier nach dem angenommenen Zahlensystem seinen Wert änderte. Es galt also beispielsweise die Muschel, welche in der ersten Kolumne die Einheit repräsentierte, in der zweiten Kolumne das Zehnfache. Von dieser Wertveränderung sagt Solon sehr bezeichnend: Wer bei Tyrannen Ansehen besitzt, ist wie der Stein in der Rechnung; bald gilt er mehr, bald weniger. Die gezeichneten Rechenbretter bilden einen Übergang zum Schriftrechnen.

Ein weiterer Schritt auf diesem Wege war der Gedanke, die Marken mit Zahlzeichen zu versehen oder durch Zahlzeichen zu ersetzen. Diesen Schritt hatte Pythagoras schon gemacht und war dadurch der Positionsarithmetik sehr nahe gerückt; denn die Zahlzeichen kamen bei dem vertikalen Liniensysteme nebeneinander zu stehen nach ihrem Stellenwerte, und man durfte nur noch das Liniensystem fallen lassen. Welcher Art aber waren diese Zahlzeichen? Striche als die Urform der Zahlbezeichnung dürfen wir nicht mehr bei einem Manne suchen, welcher die Arithmetik zur Wissenschaft erhob. Pythagoras wendete also besondere Zahlzeichen oder Ziffern an. Aus dem Umstande, dafs diese Zeichen aufserhalb der pythagoreischen Schule nicht verstanden wurden, schliefsen hervorragende Forscher (Dr. Cantor u. a.), dafs es fremde Zeichen waren und zwar diejenigen, in welchen Pythagoras das Rechnen gelernt hatte; diejenigen, welche ihm von jüngeren Jahren her geläufig waren, nämlich ägyptische und chaldäische Zeichen.

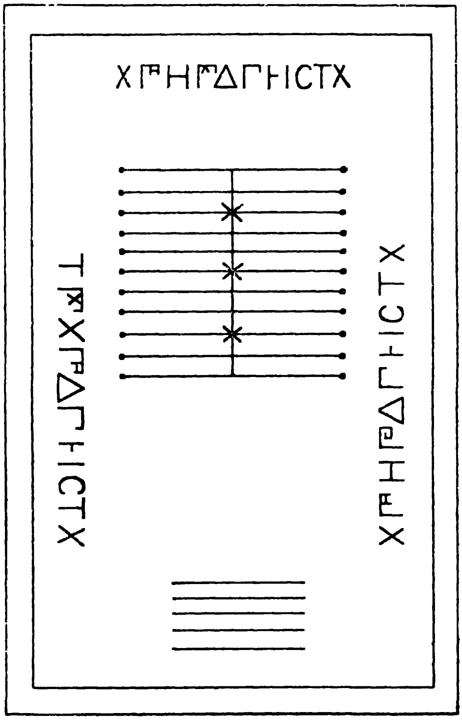


Fig. 16.
Der salaminische Rechentisch nach Dr. Cantor.

War es dem einen unbequem, beständig einen Rechenapparat bei sich zu tragen, so konnte einem andern, z. B. einem Kaufmanne, Geldwechsler etc. als Zeitverlust erscheinen, das Liniensystem immer erst zeichnen zu müssen. Es gab deshalb auch Rechentische für den dauernden Gebrauch aus Holz oder Stein mit eingegrabenen Linien. Ein solcher Rechentisch wurde im Jahre 1846 auf der Insel Salamis aus dem Schutte gehoben. Der salaminische Rechentisch ist eine Marmortafel von 1,5 m Länge und 0,75 m Breite. Dieselbe zeigt zwei Liniensysteme und auf jeder der 4 Seiten eine Inschrift. (Fig. 16 S. 55.)

Diese Tafel war wohl nicht für den gewöhnlichen Gebrauch bestimmt, sondern der Zahltisch eines Geldwechslers oder ein Spieltisch. In letzterem Falle safsen die beiden Spieler einander gegenüber. Das Liniensystem in der Mitte des Tisches hat 10 Kolumnen, davon waren 5 für den einen, 5 für den andern Spieler bestimmt. Die Grenze zwischen beiden Partien war durch das in der Mitte befindliche Kreuz markiert. Das Kreuz auf der 3. Linie beiderseits hatte vermutlich den Zweck, die minder wichtigen Kolumnen von 1, 10 und 100 Drachmen von den beiden höchsten zu 1000 Drachmen und 1 Talente zu scheiden. Über dem durch die Kolumnen gehenden Querstrich wurden die Fünfer markiert, wie unter demselben die Einer. Wir finden also hier ein Fünfer- und Zehnersystem zugleich, wie nachmals bei dem deutschen Rechenbrett. Die Zahlzeichen sind dreimal vorhanden. Diese Zeichen werden von sachkundigen Forschern wie folgt gedeutet. T bedeutet das Talent oder 6000 Drachmen. Die nächste Münzsorte war die Drachme selbst, und auf diese beziehen sich die folgenden 8 Zeichen, welche als 5000, 1000, 500, 100, 50, 10, 5 und 1 Drachme zu lesen sind. ⊢ ist das Drachmenzeichen. Die vier letzten Zeichen beruhen wieder auf den Unterabteilungen der Drachme, und zwar ist | das Zeichen der Obole, von welcher 6 auf eine Drachme gehen und der selbst wieder 6 kleinere Kupfermünzen an Wert entsprechen, welche Chalkous genannt wurden. (ist das Zeichen für den halben Obolus = 3 Chalken. T ist hier der Aufangsbuchstabe für Triton, also 1/3 Obolus oder 2 Chalken. Endlich X ist der Anfangsbuchstabe des Chalkous selbst. Das nicht mit einem Querstrich versehene Liniensystem an dem einen schmalen Ende der Tafel war für die Bruchrechnung bestimmt, für den Chalkous, den Drittelobolus, den halben und den ganzen Obolus.

Die Griechen besafsen förmliche Schuleinrichtungen für Erwachsene und Kinder. Für Erwachsene legte Thales die erste Schule an. In Athen bestanden die Akademie des Plato, die Gärten des Epikur, die Stoa des Zeno, das Lyceum des Aristoteles. Für Knaben fing der Schulbesuch mit dem 7. Lebensjahre an. Auf dem Wege zur Schule hatte der Knabe einen ständigen Begleiter, den Pädagogen (Knabenführer), der aus älteren Sklaven gewählt wurde. Der Zögling mufste sittsam gehen und die Orte, wo Männer verkehrten, meiden. Fehltritte und Ungehorsam wurden mit der Rute bestraft. Das Rechnen — Geometrie und Arithmetik — zählte zu den Unterrichtsgegenständen. Hilfsmittel hierzu waren die Finger und das Rechenbrett mit Rechensteinen.

Überschauen wir den 1200jährigen Zeitraum von 800 v. Ch. bis 400 n. Ch., so ergibt sich, dafs in Griechenland die Ideenkreise der Ägypter und Chaldäer sich vereinigten. Von jenen hatten sie die geometrischen Sätze, von diesen die Arithmetik. Beide Wissenschaften lernte Pythagoras in ihren Mutterländern kennen und verpflanzte sie nach Griechenland. Die eingeführten Lehrsätze wurden von den Griechen bewiesen, durch neue Sätze vermehrt und in ein wissenschaftliches System gebracht, welches als Grundlage aller Bildung galt. Als Zahlzeichen wurden Buchstaben, bzw. Ziffern gebraucht. Hilfsmittel bei Ausführung der Rechnungen waren symbolische Fingerstellungen und das Rechenbrett mit beweglichen Marken. Dieses hatte sich zu den Zeiten des Pythagoras vom körperlichen Apparat mit Schnüren oder Eisendrähten schon zur projektivischen Zeichnung entwickelt.

Die griechische Philosophie schliefst mit Aristoteles. Die griechische Freiheit ging unter in der Schlacht bei Cheronea (Philipp von Macedonien). Mit ihrer Freiheit und Selbständigkeit verloren die Griechen auch die Originalität des spekulativen Denkens, und an die Stelle der mystischen Ansicht Platos trat der Pantheismus der Stoiker und der Materialismus der Epikuräer.

Die Rechenkunst der Inder.

Wie in Ägypten und Griechenland ein leichter Lebensgenufs die Entwicklung der Wissenschaften begünstigte, so weckte in Indien die Beschauung einer grofsartigen, überaus fruchtbaren Natur ein reiches geistiges Leben, und die Kultur der Inder ist vermutlich nicht jünger als die der Chinesen und Ägypter. Dafs Indien mit Ägypten, China und Griechenland verkehrte, steht aufser Zweifel. Es sei hier nur an den Zug Alexanders des Grofsen im Jahre 300 v. Ch. erinnert. Eine wechselseitige

Übertragung von Kulturelementen von einem Volke auf das andere ist also selbstverständlich. Es mag hier dahingestellt bleiben, ob die Mathematik in Indien sich selbständig aus den Elementen entwickelte, oder ob Teile derselben aus anderen Ländern hieher verpflanzt wurden. Unumstöfslich erscheint die Thatsache, dafs sie hier eine andere Richtung als in Ägypten und Griechenland genommen hat. Während Ägypter und Griechen vorzugsweise der Form ihre Aufmerksamkeit zuwandten, beschäftigten sich die Inder mit der Zahl, und die Geometrie war gewissermafsen nur ein Anhang zu ihrer Arithmetik. Unter den alten Kulturvölkern waren Ägypter und Griechen die Geometer, die Chaldäer und Inder die Arithmetiker. Hier wie dort war die Richtung eine einseitige; aber beide Richtungen waren notwendig, denn der in dieser Einseitigkeit liegenden Arbeitsteilung verdankt die Mathematik ihre rasche Entwicklung.

Die griechische Wissenschaft ist auf die abendländischen Völker übergegangen. Diese glückliche Fügung ermöglichte eine umfassende Geschichte der Geometrie, die sich sogar auf merkwürdige Einzelheiten ausdehnt. Anders bei der Arithmetik. Wir kennen hier die Zahlzeichen der ältesten Kulturvölker, aber das Rechnen selbst und insbesondere sein Entwicklungsgang ist nur zum geringsten Teile aufgeklärt bis auf das 7. Jahrhundert unserer Zeitrechnung, und hier stehen wir vor einer vollständig abgeschlossenen Elementar-Arithmetik, die sich von der heutigen kaum wesentlich unterscheidet. Unsere ganze Kenntnis beschränkt sich auf zwei indische Schriften, Brahmeguptas »wonnevolle« Arithmetik und Algebra und Bhaskaras Lilavati. Diese Werke verweisen auf den Arithmetiker Aryabhatta, der vermutlich im 4. oder 5. Jahrhundert n. Ch. gelebt hat. Die Kenntnisse, welche ihm zugeschrieben werden, dürfen wir nicht als das Erzeugnis seines eigenen Denkens anerkennen, denn die Wissenschaft wächst nicht sozusagen auf einmal aus dem Boden, sondern es haben viele andere vor ihm an der Aufsuchung einzelner arithmetischer Wahrheiten sich beteiligt. Man greift daher kaum fehl, wenn man das Wissen des Aryabhatta einer älteren Kulturperiode beimifst und diese in das Zeitalter der griechischen Philosophen verlegt.

Wollen wir uns, indem wir hauptsächlich den Ausführungen Wildermuths folgen, mit dem Inhalte der vorgenannten Schriften näher befassen.

Die Arithmetik des Brahmegupta (7. Jahrhundert n. Ch.) behandelt das Zuzählen, Abzählen, Vervielfachen, Teilen; die Erhebung der Zahlen ins Quadrat und auf die 3. Potenz, das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel, die 6 Operationen mit Brüchen, die Regeldetri, die Tausch-, Mischungs-, Legierungs- und Zinsrechnung; die Progressionen. Die Rechenoperationen wurden mit großer Freiheit und in mannigfaltiger Weise ausgeführt. Zur Charakterisierung der möglichen Lösungsformen wird z. B. das Exempel 235 mal 288 wie folgt berechnet:

1. Es wird mit den einzelnen Stellen des Multiplikators nach ihrer Reihenfolge multipliziert.

235	2	470
235	8	1880
235	8	1880
		67680

2. Der Multiplikator wird in freigewählte Summanden zerlegt.

235	9	2115
235	8	1880
235	151	35485
235	120	28200
		67680

3. Die einzelnen Stellen des Multiplikanden werden von rechts nach links oder von links nach rechts mit dem Multiplikator multipliziert. Letzterer wird daher so oft gesetzt als der Multiplicand Stellen hat.

```
  235
 288
  288
   288
```

Man multiplizierte erst die Zahl 200 im Multiplikanden mit 288, dann 30, dann 5; das Produkt wurde wahrscheinlich über den Multiplikanden geschrieben. Dieses Verfahren war unbequem, immerhin aber brauchbar, wenn man auf einer mit Staub bestreuten Tafel rechnete, wobei die entbehrlich gewordenen Ziffern ausgelöscht werden konnten. (Unser gegenwärtig gebräuchliches Multiplikationsverfahren kommt weder bei den Indern, noch bei den Arabern vor.) Wie nachmals in der welschen Praxis wurde der Multiplikator abgerundet, vergrößert oder verringert und der Überschuß am Schlusse subtrahiert, der Mangel durch Addition ausgeglichen, z. B. $27 \cdot 38 = 27 \cdot 40 - 27 \cdot 2$ oder $25 \cdot 38 + 2 \cdot 38$.

Beim Dividieren wurde der Quotient eines Dividenden durch einen um eine angenommene Zahl vermehrten oder verminderten Divisor im Sinn behalten, dann mit der angenommenen Zahl multipliziert und durch den ursprünglichen Divisor dividiert; der Quotient dieser Division, addiert oder subtrahiert von der zuerst erhaltenen Zahl, ist der richtige Quotient. Als Beispiel wird 300 : 20 angeführt; der Divisor wird um 4 vermehrt, und man erhält $300 : 24 = 12\,{}^1/_2$; dieser Quotient mit 4 multipliziert gibt 50, und dieses Produkt durch 20 dividiert gibt $2\,{}^1/_2$, was zu $12\,{}^1/_2$ addiert 15 oder den wahren Quotienten gibt.

Die Bruchlehre enthält 4 Sätze. 1. Das Gleichnamigmachen wird vollzogen, indem man Zähler und Nenner mit dem entgegengesetzten Nenner multipliziert. Bei der Addition werden die Zähler addiert, bei der Subtraktion ihre Differenz gesucht, z. B. für $\begin{matrix}3\\5\end{matrix}$ und $\begin{matrix}7\\8\end{matrix}$ erhält man $\begin{matrix}3 \text{ mal } 8\\5 \text{ mal } 8\end{matrix}$ und $\begin{matrix}7 \text{ mal } 5\\8 \text{ mal } 5\end{matrix}$ d. i. $\begin{matrix}24\\40\end{matrix}$ und $\begin{matrix}35\\40\end{matrix}$, ein Verfahren, das im 17. und 18. Jahrhunderte noch vielfach eingehalten wurde. 2. Will man gemischte Zahlen in unechte Brüche verwandeln, werden die Ganzen mit dem Nenner des Bruches multipliziert und der Zähler addiert. 3. Bei der Multiplikation dividiert man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner. 4. Bei der Division werden beide Brüche gleichnamig gemacht und der Dividend mit dem reciproken Werte des Divisors multipliziert. Es finden sich hier die beiden Lösungsformen, von denen *eine* genügt, beisammen vor. Zähler und Nenner werden zur Bezeichnung der Brüche wie jetzt untereinander gestellt, jedoch ohne Bruchstrich; bei gemischten Zahlen stehen die Ganzen oben z. B. $6\,{}^4/_5 = \begin{matrix}6\\4\\5\end{matrix}$. In der Arithmetik des Brahmegupta werden auch die Sexagesimalbrüche behandelt; es ist aber unentschieden, ob sie von den Indern auf die Griechen oder von den Griechen auf die Inder übergegangen sind. Die Bruchrechnung wird durch angewandte Aufgaben geübt, z. B. Sag mir schnell, was die Oberfläche eines Oblongums ist, in welchem die Seite $10\,{}^1/_2$ und das

Aufrechte 70 Sechstel ist. — Von einem Rechteck, dessen Fläche $122\frac{1}{2}$ und dessen Seite $10\frac{1}{2}$ ist, sag mir das Aufrechte. — Die Hälfte von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{12}$ von $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ von $\frac{10}{4}$, $\frac{1}{5}$ von $\frac{7}{4}$ und dazu noch $\frac{3}{20}$, sag schnell, wie hoch sich das beläuft. — Ein kleiner Knabe erhält von einem Kaufmann $\frac{1}{4}$ von einem Goldstück, kauft dafür Waren und handelt damit 6 Tage lang; er nimmt in dieser Zeit mit Auslage und Gewinn einen Preis ein, welcher an jedem Tage bezw. der ursprünglichen Summe und ihrer Hälfte, ihrem Drittel, Viertel, Fünftel, Sechstel und Siebentel gleich ist. Wie grofs ist der Erlös? Auflösung: die Voraussetzung wird in Zahlen dargestellt, indem der Rechner die Brüche $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$ untereinander schreibt. Dann heifst es weiter: der Nenner 4 multipliziert mit dem Nenner 2 macht 8, der obere Zähler 1 multipliziert mit dem Nenner 2, addiert zu seinem Zähler gibt 3; das Resultat ist $\frac{3}{8}$, Erlös des ersten Tages. In gleicher Weise wird mit den Brüchen $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$ bis $\frac{1}{7}$ verfahren. Der Erlös des Knaben ist 1 oder der Betrag des ganzen Geldstückes, das der Knabe von dem Kaufmann erhalten hatte. — Zur Einübung der Bruchdivision wird die Aufgabe gestellt: In welcher Zeit werden 4 zugleich laufende Springbrunnen eine Zisterne füllen, wenn sie dieselbe einzeln der Reihe nach in 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ Tag voll machen? Annahme: 1 1 1 1 d. h. 1 Zisterne einzeln dividiert durch: 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ gibt: $\frac{1}{1}\ \frac{2}{1}\ \frac{4}{1}\ \frac{5}{1}$. Die Summe hievon ist 12. So oft mal wird die Zisterne in einem Tag gefüllt; nun nach der Regel von drei: wenn so viele Füllungen an 1 Tag stattfinden, in welcher eine? $\frac{12}{1} \Big| \frac{1}{1} \Big| \frac{1}{1}$ d. h. $12 : 1 = 1 : x$; $x = \frac{1}{12}$. In $\frac{1}{12}$ Tag werden alle Springbrunnen die Röhre füllen.

Bei der Lehre von der Regeldetri, welche in 4 Sätzen vorgetragen ist, wird gezeigt, wie die Glieder angeschrieben werden müssen, und zwar sowohl bei der geraden als auch bei der umgekehrten Regeldetri. Es heifst hier: In der Regeldetri kommen 3 Glieder vor: Argument, Frucht und Forderung. Argument und Forderung haben gleiche Namen. Das zweite mit dem dritten multipliziert und das Produkt mit dem 1. Glied dividiert gibt die Antwort. In der umgekehrten Regeldetri werden Frucht und Argument (1. und 2. Glied) mit einander multipliziert und das Produkt mit der Forderung (dem 3. Glied) dividiert. Es wird weiter erläutert, wie die Sache zu behandeln ist, wenn mehr als drei Glieder in einer Rechnung vorkommen, wie die Brüche wegzuschaffen sind u. a. Diese Form der Regeldetri hat große Ähnlichkeit mit dem sog. reesischen Ansatze, von dem später die Rede sein wird. Die Aufgabe: Das Interesse von 100 auf 3 Monat ist 10; man suche das Interesse von 60 auf 5 Monate wird so angesetzt:

100	60
3	5
	10

und im reesischen Ansatz:

ℳ ?	60 ℳ
ℳ 100	5 Monat
Monat 3	10 ℳ

Es stehen also in beiden Ansätzen die Glieder genau in derselben Ordnung.

Gewissermaßen als Anhang findet sich in Brahmeguptas Rechenkunst die ebene Geometrie, die Bestimmung körperlicher Inhalte und das Messen des Schattens. Die Grundlage aller geometrischen Betrachtungen ist die Proportionalität der Seiten ähnlicher Dreiecke und der pythagoreische Lehrsatz, beides ohne Beweise. Auch bei den Lehranweisungen in der Arithmetik fehlt die Begründung des Verfahrens. Die Inder hatten keinen Sinn für die strenge Wissenschaftlichkeit der Griechen. Sie begnügten sich zu wissen, daß etwas ist und forschten nicht weiter nach dem Warum. Der ganze Apparat griechischer Gelehrsamkeit, wie er sich in den Beweisen zeigte, erschien dem Inder unnütz. Wenn es sich um die Anwendung der Arithmetik auf Raumgrößen handelte, sagte er: Siehe die Figur! Ließ ein Satz sich auf Zahlenbeispiele richtig anwenden, stimmte das Resultat mit der Forderung überein, so war das Beweis genug für seine Richtigkeit. Diese Thatsache erklärt sich übrigens aus den religiösen Anschauungen der Inder. Die arithmetischen Lehrsätze gelten ihnen als unmittelbare Eingebungen der Gottheit, die keines Beweises bedurften. Auch ist noch zu beachten, daß die Inder bei ihren Berechnungen sich der Buchstaben als Ziffern bedienten, und daß es bei dem Mangel besonderer Zeichen schwer war, einen allgemeinen Beweis zu führen. Diese Richtung der Inder ist deswegen bedeutsam, weil sie die Lehranweisungen der abendländischen Völker bis in die neueste Zeit beherrschte.

Bedeutender als Brahmaguptas Arithmetik ist Bhaskaras Lilavati (1150 n. Ch.). Bhaskara scheint das Büchlein für seine Tochter geschrieben zu haben, wie die Anreden entnehmen lassen. Was Brahmagupta nur andeutet, ist bei Bhaskara ausgeführt und erweitert. Gleichwohl erschienen Bhaskara die Arbeiten seiner Vorgänger, deren er mehrere nennt, zu ausgedehnt, weshalb er das Wesentliche aus ihren Schriften zu einem wohlgeordneten Lehrbuche zusammenfaſste für die, welche die Wissenschaft erlernen wollen. Die Lilavati enthält Regeln und Beispiele. Letztere sind bestimmt, die Regeln zu erklären, Zweck und Anwendung derselben zu zeigen, die Verschiedenheit der Fälle auseinanderzusetzen und das Verständnis der Grundsätze zu bewirken.

Bhaskaras Werk besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil enthält die Arithmetik und ebene Geometrie, der zweite die Algebra. Nach einer Einleitung über die Münzen, Maſse und Gewichte und einer Lobrede auf die Rechenkunst lehrt der Verfasser die Numeration, welche in zehnfacher Proportion von links nach rechts aufsteigt. Dann folgen die 8 arithmetischen Operationen, das Zu- und Abzählen, Vervielfachen und Teilen, die Erhebung der Zahlen auf die 2. und 3. Potenz und das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel. Hieran schlieſsen sich die Lehre von den Brüchen und die Rechnungen mit der Null. Die Neunerprobe findet sich weder hier noch bei Brahmagupta. Die Ausführung der schriftlichen Rechenformen ist von der modernen Berechnungsweise wenig verschieden. Bei der Addition wurden erst die Einer, dann die Zehner, dann die Hunderter etc. in gesonderten Reihen neben einander geschrieben, z. B.: »Teuere, verständige Lilavati, sage mir, wenn Du im Addicren geschickt bist, die Summe von 2, 5, 32, 193, 18, 10 und 100!«

Ansatz und Berechnung:

Summe der Einer:	2, 5, 2, 3, 8, 0, 0 . .	20
» » Zehner:	3, 9, 1, 1, 0	14
» » Hunderter:	1, 0, 0, 1	2
		360

Für die Multiplikation hat Bhaskara noch andere Formen als Brahmagupta, z. B.: »Schöne, teure Lilavati, die Du Augen hast wie ein junges Reh, sage mir, welche Zahl herauskommt bei 135 multipliziert mit 12, wenn Du kennst, wie die Multiplikation durchs Ganze und durch Teile und durch Absonderung der Stellen verrichtet wird.«

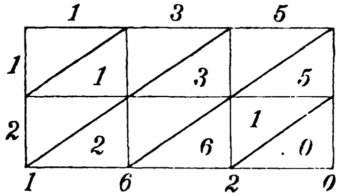


Fig. 17.

Auflösung. 1. Art. Die Einer der Produkte aus den Ziffern des Multiplikators und Multiplikanden stehen unter-, die Zehner oberhalb der Diagonale, wonach die Ziffern zwischen je 2 Diagonalen immer gleiche Stellenwerte haben, weshalb sie in den Diagonalstreifen addiert werden. (Fig. 17.)

2. Art.:	12	12	12	3. Art.:	135	135
	1	3	5		1	2
	12		60			270
	3		6			135
	16		20.			1620.

4. Art. Die Multiplikation erfolgt durch 20—8.

135	20	2700
135	8	1080 subtrahiert
		1620.

Die Division wird sehr kurz behandelt. Sie ist durch den einzigen Satz normiert: Die Zahl, welche, mit dem Divisor multipliziert, auch die letzte Zahl des Dividenden ausgleicht, d. h. das Produkt dem Dividenden gleichmacht, ist Quotient in der Division; wenn es angeht, verkleinere Divisor und Dividenden mit derselben Zahl und schreite dann zur Division. Ein Kommentator beschreibt die Division 1620 : 12 also: »Die höchsten Stellen des Dividenden geteilt durch 12 geben den Quotienten 1 und 4 darüber; nun wird 42 die höchste übrigbleibende Zahl; mit 12 geteilt gibt sie den Quotienten 3, welcher neben den vorgehenden Quotienten gesetzt wird, bleibt 60; 60 geteilt durch 12 gibt 5, und diese Zahl, neben das frühere gesetzt, den ganzen Quotienten 135.« Wir haben also hier genau unser gegenwärtig gebräuchliches Divisionsverfahren.

Die Bruchlehre wird fast ebenso behandelt wie in Brahmeguptas Arithmetik. Die Beispiele bei Bhaskara sind aber schwieriger, z. B. »$^1/_4$ von $^1/_{16}$ des $^1/_3$ von $^3/_4$ von $^2/_3$ der Hälfte eines Dramma wurde von jemand einem Bettler gegeben; sag mir, wenn Du in der Subdivision der Brüche bewandert bist, wie viel der Geizhals gab?« Die Brüche werden wie die Ganzen den 8 Operationen unterstellt. Das Rechnen mit der Null ist besonders berücksichtigt. Es kommen da die Sätze vor: »Eine Zahl bleibt unverändert, wenn man zu ihr eine Null addiert; eine bestimmte Zahl durch eine Null dividiert macht die Zahl unendlich grofs.« Die Regeln werden durch Beispiele erläutert und geübt. Neben der Regeldetri treten zwei neue Auflösungsmethoden auf: die Inversion oder Umkehrung und die Position — die Setzung einer angenommenen Zahl — oder, wie man dieses Verfahren später nannte, die Regula falsi.

Das Verfahren bei der Inversion beschreibt Bhaskara wie folgt: »Willst Du eine Zahl aus anderen gegebenen finden, so mache den Divisor zum Multiplikator, diesen zu einem Divisor, das Quadrat zur Wurzel, diese zum Quadrate, verwandle negativ in positiv und positiv in negativ.« Man geht also schrittweise von der gegebenen Zahl denselben Weg zurück und wendet immer die entgegengesetzte Operation von jener an, welche auf die Zahl geführt hat. Diese Regel erklärt Bhaskara an einem Beispiel: »Niedliches Mädchen mit den glitzernden Augen, sage mir, wenn Du die Inversionsmethode kennst, welche Zahl multipliziert mit 3, addiert zu $^3/_4$ des Produkts, geteilt durch 7, reduziert durch Subtraktion von $^1/_3$ des Quotienten, dann multipliziert mit sich selbst, 52 von dem Produkte abgezogen, dann die Quadratwurzel genommen, 8 addiert und durch 10 geteilt, 2 als die fragliche Zahl gibt«. In der Auflösung werden zuerst die Angaben gesetzt: Multiplikator 3, addiert $^3/_4$, Divisor 7 etc. Dann heifst es, wenn man vorschriftsmäfsig verfährt, ist die gesuchte Zahl 28. Weiter ist zur Erklärung des Rechenganges, welcher sich folgenderweise darstellt, nichts angegeben: $(2 \cdot 10 - 8)^2 + 52 = 196$; $\sqrt{196} = 14$ und $14 \cdot 1\,^1/_2 \times 7 \times {}^4/_7 : 3 = 28$.

Der folgende Abschnitt enthält die Regula falsi, angewendet auf dazu geeignete Aufgaben. Beispiel: »Aus einer Menge reiner Lotusblumen wurden Siva der 3., Vishnu der 5., der Sonne der 6. Teil als Opfer dargebracht, den 4. Teil erhielt Bhavani, und die übrigen 6 Blumen wurden dem ehrwürdigen Lehrer gegeben«. Dem folgt die Lösung: »Nimmt man für die unbekannte Zahl 30 (also eine falsche Zahl, daher Regula falsi), würde Siva 10, Vishnu 6, die Sonne 5, Bhavani $7^1/_2$ Blumen erhalten. Im ganzen würden also $28^1/_2$ Blumen verteilt werden, sohin für den Lehrer $1^1/_2$ Blumen übrig bleiben. Da er aber 6 erhalten soll, also 4 mal $1^1/_2$, so mufs auch die wahre Zahl $4 \times 30 = 120$ sein«. Der folgende Abschnitt lehrt, wie verbundene Gröfsen getrennt, aus Summe und Unterschied zweier Zahlen die Zahl selbst gefunden werden kann. Im 6. Abschnitt findet sich die Regeldetri angewendet auf zahlreiche Aufgaben des Geschäftslebens. Wesentliche Abweichungen von unserer Art zu rechnen finden sich nicht. Das 4. Kapitel enthält Zins- und Gesellschaftsrechnungen. Beispiel: Ein Kapital ist zu 5 Prozent im Monat ausgeliehen und in einem Jahre hiedurch auf 1000 angewachsen; wie grofs war das Kapital und wie grofs sind die Zinsen? — Ein Kapital ist in Teilen ausgeliehen, der eine zu 5 Prozent auf 7 Monate, der andere zu 3 Prozent auf 10 Monate, der 3. zu 4 Prozent auf 5 Monate. In diesen Zeiten haben sie alle drei gleiche Zinsen getragen, wie grofs ist jeder Teil? Die angewandten Textaufgaben waren zum Teil verwickelter als bei Bhaskara, z. B. $3^1/_2$ Manas Reis und 8 Manas Bohnen kosten jedes 1 Dramma, man will für 13 Cacinis (64 Cacinis = 1 Dramma) 2 Teile Reis und 1 Teil Bohnen kaufen; wie viel Gewicht erhält man von jedem? — Eine weifse Ameise (Termite) bewegt sich in einem Tage um die Länge von 8 Gerstenkörnern weniger $^1/_5$ eines solchen vorwärts; sie kriecht in 3 Tagen um $^1/_{20}$ Finger zurück, in welcher Zeit wird sie eine Yojana vorrücken? (8 Gerstenkörner = 1 Finger, 24 Finger = 1 Elle, 4 Ellen = 1 Stab, 8000 Stab = 1 Yojana.) — Eine 16jährige Sklavin kostet 32 Nishkas, wie viel wird eine 20jährige kosten? Nach Überschreitung eines gewissen Alters nahm der Wert eines Sklaven mit zunehmenden Jahren ab; die Aufgabe war daher nach der umgekehrten Regeldetri zu rechnen. Diese Rechenform behandelt Bhaskara gerade so wie Brahmagupta. Das 5. Kapitel ist den arithmetischen und geometrischen Reihen gewidmet, der Schlufs der ebenen Geometrie.

Der Fortschritt der indischen Arithmetik vom 7. bis zum 12. Jahrhundert war nicht bedeutend, und dieses halbe Jahrtausend mag ein Maſsstab für die Dauer der vorgängigen Entwicklungsperiode sein; aber sie stand in theoretischer und praktischer Hinsicht wenig hinter der jetzigen zurück. Die Geschäfte in ganzen Zahlen und Brüchen in allen Verbindungen, das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel wurden fast ebenso wie bei uns und mit derselben Einfachheit, Klarheit und Leichtigkeit geübt wie jetzt. Die Lehre von den einfachen und zusammengesetzten Proportionen in allen möglichen Anwendungen auf die Rechnungen des Geschäftslebens war auf das vollständigste ausgebildet. Zur Arithmetik wurden noch viele Aufgaben genommen, welche jetzt gewöhnlich durch Gleichungen gelöst werden, die einfachen arithmetischen Reihen, einiges aus der Lehre von den Kombinationen und die Berechnung der Raumgröſsen. Auſserdem kannten die Inder die Algebra. Sie berechneten Gleichungen 1. Grades mit einer und mehreren unbekannten Gröſsen und Gleichungen 2. Grades. In der Algebra der Inder trifft man zuerst auf absolut negative Gröſsen. Daſs quadratische Gleichungen einen doppelten Wert ergeben können, war ihnen vollständig geläufig, ein Gedanke, den Diophantus nicht erfaſst hatte. Den Wert aus der Gleichung $x^2 - 45\,x = 250$ gibt Bhaskara als $x = 50$ und $x = -5$ ausdrücklich an, bemerkt aber dazu, daſs der zweite Wert in diesem Falle unangemessen und nicht zu nehmen sei. Von Gleichungen höherer Grade finden sich Spuren. Den schönsten Zweig der indischen Mathematik bilden die unbestimmten Gleichungen; die Auflösung derselben in ganze Zahlen ist durch einfache Regeln vollständig gegeben und erst im 17. Jahrhundert in Europa neu erfunden worden.

Das Rechnen und die Algebra sind in Indien nicht etwa sporadisch vorkommende Kenntnisse, sondern Gemeingut des Volkes. Die Auflösung algebraischer Aufgaben gehört hier zu den öffentlichen Lustbarkeiten. Bhaskaras Schrift schlieſst mit den Worten: »Diese Aufgaben sind nur zum Vergnügen gestellt; der Weise kann tausend andere erfinden, oder er kann nach den Regeln der Aufgabe andere lösen. Wie die Sonne durch ihren Glanz die Sterne verdunkelt, so wird der Erfahrene den Ruhm anderer verdunkeln in Versammlungen des Volkes, wenn er algebraische Aufgaben vorlegt, und noch mehr, wenn er sie löst.« Zahlreiche Aufgaben der Inder haben sich bis auf den heutigen Tag in unseren Rechenbüchern erhalten, so die

5*

Aufgabe, welche berechnet, mit wie viel Sprüngen ein Hund einen Hasen, der voraus ist, einholen wird; die sog. Brunnen- und Röhrenaufgaben; die Aufgabe von den Weizenkörnern, welche auf 64 Felder des Schachbrettes nach der geometrischen Proportion, 1, 2, 4, 8 . . . . 2^{63} gelegt worden sind u. a.

Bei der äufseren Anordnung der Rechenformen war das Schreibmaterial mitbestimmend. Die Inder rechnen mit dem Schreibrohr auf ein schwarzes Holztäfelchen mit einer dünnflüssigen, weifsen Farbe, die leicht abwischbare Zeichen gibt oder auf einem weifsen, mit rotem Mehl bestreuten Täfelchen, auf welches sie die Ziffern mit einem Stäbchen schreiben. Deshalb müssen sie darauf bedacht sein, möglichst viel Raum zu ersparen, und das ist auch der Grund, warum sie aufser Gebrauch gesetzte Ziffern weglöschen. Überhaupt hatte der Gedanke »den Raum zu menagieren« in früheren Zeiten, in denen man sich den heutigen Luxus im Verbrauche der Schreibmaterialien noch nicht erlauben konnte, eine gröfsere Bedeutung als jetzt. — Kehren wir nach diesen beiläufigen Bemerkungen zu unserem Gegenstande zurück.

Fragen wir uns, wie sind die Inder zu diesen bewunderungswürdigen Fortschritten gekommen? Sie gingen nicht wie die Pythagoreer den verborgenen Eigenschaften der Zahlen nach, sondern der Operation. Aus den 4 Grundrechnungsarten leiteten sie die höheren Rechnungsarten ab, formierten festbestimmte schriftliche Ansätze und wendeten das Ergebnis ihrer Forschungen auf die Verhältnisse des Lebens an. Sie fafsten also einerseits das operative Element ins Auge; andrerseits aber konstruierten sie sich eine wunderbar einfache Bezifferungsweise, die der Entdeckung einer neuen Welt gleichkommt. Der geniale Gedanke besteht darin, den Ziffern zu ihrem reellen Werte noch einen Stellenwert zu geben. Gegenüber dieser leichten und handsamen Numeration erschien die Bezifferungsweise der übrigen alten Kulturvölker als roh und schwerfällig, und eben diese Schwerfälligkeit war ein Haupthindernis rascher Fortschritte in der Entwickelung der Arithmetik. Man versuche nur, eine Multiplikation mit römischen Ziffern auszuführen, und man wird sich von der Schwierigkeit des Unternehmens sofort überzeugen. Laplace sagt von dieser Erfindung: »Der Gedanke, alle Quantitäten durch neun Zeichen auszudrücken, indem man ihnen zum absoluten Wert noch einen Stellenwert gibt, ist so einfach, dafs man eben deshalb nicht genug erkennt, welche Bewunderung er verdient. Aber eben die Einfachheit und Leichtigkeit, welche diese Bezifferungsmethode dem Rechnen gewährt, erheben das arithmetische System der Inder in den Rang der nützlichsten Entdeckungen. Wie schwer es war, eine solche Methode aufzufinden, kann man daraus entnehmen, dafs sie dem Genie des Archimedes und Apollonius von Perga entgangen war.« Die indische Bezifferungsweise hat das ganze Gebiet der Mathematik neu gestaltet. Der Angelpunkt der Positionsarithmetik ist die Null. »Es liegt ihr der Gedanke zu Grunde, dem Nichts einen Wert zu geben und durch das Nichtsein erst die Vollendung des Etwas zu bewirken.« Ihre Erfindung fällt spätestens in das 6. Jahrhundert n. Ch., denn in Brahmeguptas Schrift handelt, wie bereits bemerkt, ein eigener Abschnitt über die Null. Dafs die Inder die Positionsarithmetik erfunden haben, darf als sicher angenommen werden, denn sie schreiben sich dieselbe selbst zu, und von den Arabern wird ihnen übereinstimmend der Ruhm dieser Erfindung beigemessen.

Eine so ingeniöse Erfindung wie die Positionsarithmetik wird nicht plötzlich gemacht, sondern durch Zwischenstufen vorbereitet. Es fragt sich nun, wie die Inder auf diese Erfindung gekommen sind.

Das Rechnen war ursprünglich Kopfrechnen mit Benutzung äufserer Hilfsmittel, der Finger, Steine etc. Daraus ging das Rechenbrett mit beweglichen Körpern hervor. Auf dieser Stufe dienten die Ziffern nicht dazu, um Rechenoperationen auszuführen, denn diese wurden ja auf dem Apparat vorgenommen, sondern lediglich zur Notierung der Resultate. Die festen Rechenapparate machte man entbehrlich, indem man statt der Stäbe Linien zog und die Kugeln mit Rechenpfennigen oder Marken vertauschte. Noch später setzte man Ziffern in die Kolumnen. Wie die Kugeln und Marken an verschiedenen Stellen ihren Wert nach Dekaden änderten, so hier die Ziffern, und es war nur mehr notwendig, auch die Linien zu unterdrücken. Viele Jahrhunderte mögen verflossen sein, bis man von den Rechenmaschinen zum Kolumnensystem überging, und weitere Jahrhunderte, bis man sich erlaubte, die Vertikalstriche als entbehrlich fallen zu lassen. Die Hauptschwierigkeit aber bestand darin, die

Ordnung der Ziffern aus ihrer gegenseitigen Stellung erkennen zu lassen, und deshalb mufste die leerbleibende Kolumne mit dem Wegfall der Linien ein Zeichen erhalten. Das Kolumnenzeichen bestand früher wahrscheinlich aus zwei kurzen Parallellinien (=), und hieraus ist wohl die Null entstanden. Das Zehnersystem wurde also zuerst auf Rechenmaschinen, von diesen auf Kolumnensysteme und von diesen auf die Ziffern übertragen, und diesen Gedanken finden wir in der Schrift Brahmeguptas das erste Mal verwirklicht.

Halten wir diesen allgemeinen Entwickelungsgang fest und fassen speziell die Entwickelung der indischen Numeration ins Auge, so ergibt sich, dafs die Inder in älterer Zeit Zahlsysteme mit multiplikativer Bezeichnungsweise hatten. Der dänische Sprachforscher Rask fand in der singhalesischen Sprache 9 Zeichen für die Grundzahlen, 9 für die ersten Zehner und je eins für 100 und 1000. Die Vielfachen dieser letzteren Zahlen wurden durch Faktoren ausgedrückt; man schrieb also $2826 = 2 \quad 1000 \quad 8 \quad 100 \quad 20 \quad 6$. Da Ceylon etwa um 500 v. Ch. seine Kultur von dem benachbarten Indien erhalten hat, stammt diese alte Numerationsweise wohl auch von daher. Diese Annahme gewinnt an Wahrscheinlichkeit, wenn berücksichtigt wird, dafs auf altindischen Münzen und Denkmälern eine ganz ähnliche Bezifferungsweise gefunden wurde. Die ersten drei Einheiten sind hier durch ebenso viele Striche dargestellt, die übrigen Zeichen sind die mehr oder minder getreuen Typen der einheimischen (alten) Buchstaben; von der Null aber findet sich noch keine Spur. Diese Numeration war in Geltung bis in die letzten Jahrhunderte vor Christus. Die Ziffern sind hier so dargestellt, dafs sie nach ihrem steigenden Ordnungswerte aufeinander folgten. Und da man für dieselben auch besondere Namen hatte und die Zahlen immer in der gleichen Reihenfolge las, so mufste sich der Ordnungswert der Ziffern, wenn schon jedes Zeichen an sich alleinstehend seinen vollen Wert durch sich selbst anzeigte, an ihre gegenseitige Stellung hängen und sich gewissermafsen damit identifizieren. Dies ging um so leichter, als man, wie es scheint, in jeder Stelle immer nur ein einheitliches Zeichen hatte, indem man auch Vielfache der Potenzen von 10 durch Modifikationen an der Hauptfigur ausdrückte; so ist $q = 1000$ und $q_{=} = 3000$; ähnlich war es bei den Hundertern. (Wildermuth.)

Es entsteht nun die Frage, warum die griechischen Philosophen das arithmetische System der Inder, welches ihnen zweifellos bekannt war, nicht angenommen haben. Aus dem einfachen Grunde, weil sich damals die indische Bezifferungsweise noch nicht vom Rechenbrette freigemacht hatte, was bei der griechischen Numeration schon geschehen war. Die Griechen hielten also ihre Bezifferungsweise mit Recht für die bessere und hatten von diesem Standpunkte aus keinen Grund, eine fremde einzuführen.

Aufser dem dekadischen System hatten die Inder noch ein zweites, in welchem die Zahlen in den Potenzen von 100, und ein drittes, in welchem die Zahlen bis ins Unendliche wuchsen. Der Ausgangspunkt des 3. Systems war die Eins mit 17 Nullen, die 2. Potenz war die Eins mit 34 Nullen, die 3. Potenz die Eins mit 68 Nullen; die 10. Zahl war die Eins mit 4456448 Nullen. In gewöhnlicher Druckschrift würde diese Zahl eine Zeile von etwa 1 1/2 Kilometern einnehmen. Es wiederholt sich hier derselbe Gedanke, welcher in der Sandrechnung des Archimedes bereits ausgesprochen war.

Trotz dieser ausgebildeten Numeration scheint den Indern das instrumentale Rechnen nicht ganz entbehrlich geworden zu sein; denn in Indien lebende Europäer erzählten, dafs die einheimischen Gelehrten astronomische Berechnungen zuverlässig und mit grofser Leichtigkeit ohne Ziffern ausführen. Sie bedienen sich dabei kleiner Muscheln, welche sie wie Spielmarken auflegen, verschieben und aufnehmen.

Nun erübrigt noch die Besprechung der indischen Zahlzeichen, d. i. jener Zeichen, in welchen die Positionsarithmetik zum Ausdrucke kommt. Es bedarf wohl keiner Erinnerung, dafs die Numeration der Inder nicht identisch ist mit den hierbei gebräuchlichen Ziffern; denn dafs diese möglich ist ohne die ihr eigentümlichen Typen, und dafs diese auch andere sein könnten, liegt auf der Hand. Die Entstehung der Zahlzeichen war aber niemals eine blofse Eingebung des Zufalls, sondern hatte einen wohlberechtigten psychologischen und historischen Grund. Man darf also nicht etwa annehmen, dafs die Inder übereingekommen seien, so und so wollen wir unsere Ziffern schreiben, sondern es mufs denselben ein leitender Gedanke zu Grunde liegen, es mufs ein Prinzip sein, das die Zahlzeichen schuf.

Die Inder haben früher ihre Zahlwörter ganz geschrieben, wie dies auch bei den Ägyptern, Babyloniern und Griechen der Fall war. Das Bedürfnis, mit Zahlwörtern zu rechnen, machte eine Vereinfachung notwendig. Es traten daher an Stelle ganzer Wörter die Buchstaben. Die Inder hatten vor der Erfindung der Positionsarithmetik eine multiplikative Bezeichnungsweise wie die Griechen, ohne Stellenwert. Diese Methode stand sogar noch in Übung, als die Positionsarithmetik schon erfunden war, und sie läfst sich dem Prinzip nach bei Arya-Bhatta noch nachweisen. Als Zahlzeichen dienten hier die Konsonanten des Alphabets in ihrer Reihenfolge; k ist 1, kh 2, g 3; die Halbvokale und Zischlaute bedeuten die folgenden Zehner, j = 30, r = 40 u. s. w.

Die Ziffern der Positionsarithmetik sind die Anfangsbuchstaben der betreffenden Zahlwörter. So heifst 1 eka, und das Zeichen der 1 ist dem e entsprechend; das Zeichen 2 = d stammt aus dwi, das Zeichen für 3 aus dem zusammengesetzten tr wegen tri; 4 fällt mit tscha (tschatur), 5 mit pa (pantscha), 6 mit scha (schasch), 7 mit sa (saptan), 8 mit a (aschtan), 9 mit na (navan) zusammen. In einzelnen Fällen ist diese Übereinstimmung auffällig, in anderen minder. Ob hierin ein Zeugnis über die Herkunft unserer Ziffern liegt, wird aus dem Stammbaum derselben, welcher dem Abschnitt über die Rechenkunst des 13. bis 15. Jahrhunderts beigegeben ist, zu ersehen sein,

Schliefslich sei noch erwähnt, dafs die Inder auch für allgemeine Gröfsen abgekürzte Bezeichnungen hatten. Was wir in der Algebra mit x, y, z bezeichnen, das nannten sie die schwarze, blaue, gelbe, grüne Gröfse und bezeichneten sie mit dem Anfangsbuchstaben des für die treffende Farbe gebräuchlichen Adjektivums. Die mathematischen Werke der Inder sind meist in gebundener Rede geschrieben. Für diesen Zweck haben sie noch eine symbolische Bezeichnungsweise. Hiernach ist 1 = Erde oder Mond, 2 = Augen, 4 = Himmelsgegenden. So wurde (nach Wöpke) die Zahl 432000 mit drei Leeren (Nullen), Zahn (32) und Meer (4) geschrieben.

Vorstehender Abschnitt zeigt uns in der Geschichte der Rechenkunst eine grofse Lücke; denn wir stehen hier vor einer vollständig entwickelten Elementar-Arithmetik. Der grofse

Fortschritt, der sich hier unseren Augen darstellt, ist dem Umstande zuzuschreiben, dafs sich die Inder nicht mit der Zahldeutung, sondern den Zahloperationen beschäftigten. Ermöglicht wurde er durch die Erfindung des Stellenwertes bezw. der Null zur Bezeichnung der leeren Stellen.

Die Rechenkunst der Römer.

Im nördlichen Teile Italiens war die Bevölkerung gallischen Ursprungs; im mittleren Italien mischten sich europäische, asiatische und afrikanische Kolonisten; das untere Italien war von griechischen Ansiedlern bewohnt. Von diesen Stämmen haben sich die Etrusker in Nord- und Süd-Italien frühzeitig durch ihre Bildung, durch Handel und Schiffahrt ausgezeichnet. Ihre Religionsform war die Grundlage der römischen, ihr Alphabet ist in allen europäischen Alphabeten kenntlich. Früher, als die Griechen, hatten sie eine Staatsverfassung und eine humane Gesetzgebung. Dieser hochbegabte Volksstamm ging unter im Kampfe mit Galliern und Römern. Letztere hatten sich im mittleren Italien niedergelassen. Die örtliche Lage in der Nähe des Meeres verwies sie auf die Schiffahrt, und diese veranlafste einen ausgedehnten Verkehr mit den alten Kulturvölkern. Dadurch erweiterten sich die Kenntnisse der Römer und hob sich ihr Wohlstand. Als fremde Eindringlinge waren sie beständig feindlichen Angriffen ausgesetzt. In der Abwehr glücklich, wuchs ihre Begehrlichkeit nach fremden Ländereien; so wurde aus einem um seine Existenz kämpfenden Volke ein gefürchteter Eroberer.

Der Römer kannte nur ein Ideal: die Gröfse und Macht des Vaterlandes. In der Förderung seines Ruhmes erblickte er das würdigste Ziel seiner Thätigkeit. Praktische Zwecke standen daher über der Wissenschaft. Letztere galt nur insoweit, als sie irgend einem praktischen Bedürfnisse entgegenkam. Die ausgezeichnetsten Männer wandten daher ihre Begabung den Künsten des Krieges, der Staatsverwaltung, der politischen und juristischen Beredsamkeit zu; an den philosophischen Problemen und Spekulationen fanden sie wenig Gefallen. Der Mathematiker war ihnen gleichbedeutend mit dem Sterndeuter, Wahrsager, Zauberer, Giftmischer; das Wort hatte bezeichnenderweise einen so übler Sinn, dafs besondere Gesetze gegen die Mathematiker erlassen wurden. Bei solcher Gesinnung durfte die Mathematik nicht auf besondere Fürsorge rechnen. Nur jene Teile derselben welche entweder im Kriege in fortwährender Übung sein mufsten oder bei der Staatsverwaltung und im alltäglichen Geschäftsleben unentbehrlich waren, erfreuten sich dauernder Pflege: ein Teil der Astronomie und Physik, weil man im Kriege mit der Bewegung der Gestirne und den physikalischen Erscheinungen in der Atmosphäre bekannt sein mufste; die Geometrie, insoweit sie bei der Fortifikation, bei der Feldmessung, bei der Einteilung und Abgrenzung eines Lagers unentbehrlich war; die Arithmetik insoweit man ihrer in der Führung des Staatshaushaltes, bei Einhebung und Verrechnung der Steuern und im bürgerlichen Haushalte bedurfte. Dabei genügte es ihnen zu wissen, dafs ein Lehrsatz, ein bestimmtes Verfahren, richtig angewendet, zum Ziele führe; um Beweise und die inneren Gründe des Verfahrens bekümmerten sie sich wenig. Sonach waren die Römer nicht geeignet, die Mathematik von innen heraus weiterzubilden. Gleichwohl ist die Bedeutung dieses Volkes in der Geschichte der Mathematik keineswegs gering; sie liegt darin, dafs sie die griechische Kultur in sich aufnahmen und in weitem Kreise auf die Völker des Abendlandes übertrugen. Die Völker des christlichen Abendlandes kannten im 1. Jahrtausend fast nur römische Mathematik. Als Griechenland (145 v. Ch.) der römischen Herrschaft anheimgefallen war, entwickelte sich zwischen Griechen und Römern ein lebhafter Verkehr. Griechische Gelehrte zogen nach Rom und suchten durch öffentliche Vorträge die römische Jugend für griechische Wissenschaft zu gewinnen. Die römische Macht eröffnete Künsten und Wissenschaften unerschöpfliche Hilfsquellen. Die Cäsaren begünstigten Kunst und Wissenschaft wenn nicht aus Interesse, so doch aus Klugheit. Julius Caesar gewährte den Lehrern der freien Künste das römische Bürgerrecht. Kaiser Augustus errichtete Unterrichtsanstalten und legte Bibliotheken an. Domitian liefs die abgebrannten Bibliotheken wieder herstellen. In Alexandrien bestand die jüdisch-heidnische Akademie fort, und neben ihr gründeten die Christen eine Katechetenschule; so blieb Alexandrien ein Zentralsitz wissenschaftlicher Bestrebungen bis ins 6. Jahrhundert.

Wenden wir nun unsere Aufmerksamkeit dem römischen Rechnen zu, vorerst den Zahlzeichen.

Die selbständigen *Zahlzeichen* der römischen Numeration reichen nur bis zu 1000; die übrigen Zeichen sind abgeleitet. Die römischen Zahlzeichen sind die Buchstaben I, X, C, M oder CIↃ für 1, 10, 100 und 1000, dann V, L, D für 5, 50 und 500. Wir haben hier also wieder ein kombiniertes Zehner- und Fünfersystem. Die höheren Zeichen entstehen durch Einklammerung, (CIↃ) für 10000, ((CIↃ)) für 100000, (∞) für Million.

Die dazwischenliegenden Fünfer lassen sich als die nach rechts schauende Hälfte der nächsthöheren Einheit auffassen: IↃↃ = 5000, IↃↃↃ = 50000, C⊥ = 500000. Die Ableitung des letzteren Zeichens ist nicht aufgeklärt.

Die Verwendung der römischen Ziffern ist hauptsächlich eine additive, so dafs das höchste Zahlzeichen zur Linken sich befindet, die übrigen niedrigeren Zeichen ihrem Werte nach folgen. Geht ein niedrigeres Zeichen einem höheren voraus, so bedeutet dies einen Funktionswechsel, und zwar eine *Subtraktion*, ein Fall, welcher hier zum ersten Male auftritt, z. B. in IV, IX, XL, XC, CD.

Bei anderen alten Kulturvölkern zeigte das niedrigere Zeichen vor dem höheren eine Multiplikation an. Diese subtraktive Bezeichnung trifft man aufserhalb der römischen Numeration nirgends. Dagegen tritt in der Wortbezeichnung der Gedanke, die Zahl nicht direkt zu nennen, sondern durch Subtraktion von einer höheren Zahl auf eine niedrigere schliefsen zu lassen, öfters hervor, z. B. in duo de viginti, 2 von 20, d. i. 18, undecentum 1 von 100 = 99. Am häufigsten werden die kleinen Zahlen 1 und 2 subtrahiert. Im Griechischen wird 58 als 60 bezeichnet, wovon 2 weggedacht werden.

Im Deutschen hat man dividierende Benennungen (die im Grunde auch Subtraktionen sind), z. B. ½ Schock, ½ Hundert, eine Analogie zur Entstehung der römischen Fünfer. Aufserdem sagt man: anderthalb, d. h. eins und vom *andern* noch ein halbes, dritthalb, d. h. zwei und vom *dritten* noch ein halbes.

Stand ein Zeichen niedrigerer Bedeutung vor M, so wurde es nicht subtraktiv, sondern multiplikativ angewendet. So konnte 10000 auch als XM und 100000 auch als CM geschrieben werden, ohne dafs eine Verwechslung mit 900 eintrat. Eine doppelte Auffassung läfst MM zu, nämlich als 2000 oder 1000 mal 1000, wenn nicht der Sinn Aufschlufs gibt, welche von beiden Zahlen gemeint ist. Eine andere Bezeichnungsweise mittels des Horizontalstriches, welcher als 1000 gelesen wird, umgeht diese Schwierigkeit; in diesem Falle ist $\overline{\mathrm{I}} = 1000$, $\overline{\mathrm{X}} = 10000$, $\overline{\mathrm{M}} = 1000000$; die gleiche Bedeutung bleibt auch, wenn mehr als ein Zeichen überstrichen ist, z. B. $\overline{\mathrm{CC}} = 200000$, $\overline{\mathrm{CLX}} = 160000$. Das Zeichen $|\overline{}|$ über einer Zahl wird als 100000 gelesen, z. B.: $|\overline{\mathrm{XVII}}| = 1700000$, $|\overline{\mathrm{M}}| = 1000 \cdot 100000 = 100$ Millionen. In den Manuskripten des Plinius (1. Jahrh. n. Ch.) findet sich stellvertretend für 1000 auch der Punkt, z. B. L.D = 50500. Die römische Numeration war unsicher, weitläufig und inkonsequent. Weil die Striche leicht weggelassen, die Horizontalstriche leicht zu Vierecken ergänzt werden konnten, war nicht nur Irrungen, sondern auch dem Betruge Thür und Thor geöffnet, und man mufste, um sicher zu gehen, die Zahlen in Worten ausschreiben. Galba hatte von der Livia Augusta 50 Millionen Sesterzien (10 Millionen Mark) geerbt und war bei dieser hohen Summe unter den erstgenannten Erben aufgeführt. Tiberius, der Haupterbe, setzte aber das Legat auf 500000 Sesterzien herab, weil die Deutung auf diese geringere Summe zulässig, die Summe selbst aber nicht in Worten geschrieben war.

Beim Aussprechen gröfserer Zahlen wurde das Wort tausend immer wiederholt; man sagte statt 1000 Millionen: tausend. tausend mal tausend, ein Gebrauch, der sich in Deutschland bis zum 18. Jahrhundert erhalten hat.

Über den Ursprung der römischen Ziffern bestehen mancherlei Vermutungen. Ramus († 1572) behauptet, die Eins Zehn, Hundert, Tausend seien durch 1, 2, 3, 4 Striche dargestellt worden, so dafs sie die Zeichen I X ⊏ ⊓⊓ oder CIↃ gaben. Aus diesen Zeichen sei durch Halbierung V als halbes X, L als halbes ⊏, D als halbes CIↃ entstanden. Dieser Erklärung kann man zwar Scharfsinn nicht absprechen; allein auf solche Weise kamen die Völker nicht zu ihren Zahlzeichen. Wollte man die Entstehung aus Strichen festhalten, so müfste dieselbe durch Übergänge vermittelt werden; denn aus I entsteht nicht X aus diesem nicht ⊏, aus diesem nicht M.

Andere, wie z. B. der Nürnberger Stadtgerichtsbeisitzer Harsdörffer (1651), halten die römischen Zahlzeichen für Nachbildungen der Fingerstellungen, welche bei der Fingernumeration gebraucht wurden. In diesem Falle gleichen 4 Finger der rechten Hand gestreckt dem Zeichen IIII; Daumen und Zeigefinger gestreckt, die andern Finger eingebogen, gleichen V, dem sog. Handzeichen; die Finger beider Hände in einander gekreuzt gleichen X; die 4 Finger gestreckt, Daumen im ersten Gelenke hiezu in einen rechten Winkel gestellt, sind gleich L; der Daumen in natürlicher Lage gegen die offene Hand gestellt = C; aus dieser Stellung die Finger der rechten Hand zum Daumen herabgebogen = D; dieselbe Stellung der andern Hand, die äuſsere Handfläche der Fingerglieder beider Hände berühren sich = ꟾD (Fig. 18).

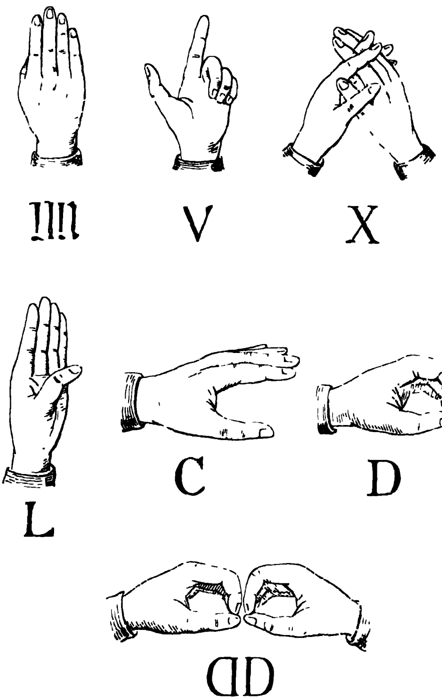


Fig. 18.

Auch diese Ansicht darf zur Zeit wohl nur das Recht einer Hypothese in Anspruch nehmen. Allerdings findet sich zwischen den angegebenen plastischen Fingerstellungen und den gebräuchlichen Zahlzeichen eine überraschende Ähnlichkeit. Allein dadurch ist nicht mehr erwiesen als die auſserordentliche Beweglichkeit der vielgegliederten Hand, die alle nur erdenklichen Stellungen annehmen kann. Sodann sind uns die Fingerstellungen, welche die alten Römer bei der Zahlen-Daktylonomia gebraucht haben, nicht bekannt. Von den Handzeichen Bedas stimmt nur das für die Zahl 50 mit L überein. Harsdörffer schlieſst also thatsächlich von den schriftlichen Zahlzeichen rückwärts auf die Fingerstellungen. Endlich ist wohl anzunehmen, dafs die Römer, als sie die symbolischen Handzeichen in Gebrauch nahmen, schon schriftliche Zahlzeichen hatten.

Ursprünglich haben die Lateiner unzweifelhaft, wie andere Völker des Altertums, die kleinen Zahlen schriftlich durch parallele Striche bezeichnet; von fünf an traten Zusammenfassungen auf. In alten römischen Schriften und auf Denksteinen findet man als solche zusammenfassende Zeichen, Doppelkreuze und dreifache Kreuze, z. B.: (Fig. 19.)

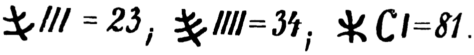


Fig. 19.

Um die Entstehung der römischen Zahlzeichen zu erklären, mufs man auf die ältesten Zahlzeichen der Römer, die tuskischen Zeichen, zurückgehen. Diese sind zwar nicht die unmittelbare Grundlage, bieten aber doch viele Vergleichungspunkte. Wie der gemeinschaftliche Ursprung der schriftlichen Zahlbezeichnung im Oriente zu suchen ist, so hat auch später noch eine Wechselwirkung zwischen benachbarten Völkern durch friedlichen Handelsverkehr stattgefunden, und solche Ausgleiche sind jedenfalls vor sich gegangen durch die abwechselnde Herrschaft der Tusker in Latium und der Römer in Etrurien. (Fig. 20.)

Etruskische Buchstaben: V ⊣ ↓ ⊙ 8.

Etruskische Zahlzeichen: I Λ oder V X oder + ↑ oder ↓ ⊕ 8.

Römische Zahlzeichen alter Zeit: I V X Ψ oder ↓ oder ⊥ oder ⊥ oder L Θ Φ.

Neuere römische Ziffern: I V X L C M oder ∞.

Fig. 20.

V + und ⊕, das Zeichen der 4 Himmelsgegenden, kommen auch bei den Ägyptern vor. Das tuskische »tausend« verändert seine Lage von 8 in ∞, woraus CIↃ wird.

So findet sich auch hier dasselbe Prinzip: die Urform der Zahlbezeichnung ist der gerade Strich; mit steigender Kultur wurden andere abgekürzte Zahlzeichen, vornehmlich die Buchstaben des Alphabets gewählt.

Noch eine andere Form der römischen Zahlbezeichnung nimmt unser Interesse in Anspruch, nämlich die Zahlzeichen der Römer im Felde. Es ist bekannt, dafs die vorgeschobenen Lager der Römer in Feindesland Verbindungen unterhielten und nach der Natur der Sache unterhalten mufsten. Sie errichteten Wälle (Phahlrain, Limes) und Aussichtstürme und bedienten sich zur gegenseitigen Verständigung der optischen Telegraphen. Julius Sextus Africanus schrieb um 222 n. Chr. seine Kesten (Kollektaneen) und behandelt hier im 76. Kapitel die Feuerzeichen der Römer. Er schreibt: »Dazu ersannen die Römer etwas, was mir wunderbar erscheint, indem sie alle Zahlen, welche sie wollen, mit Signalfeuern bezeichnen. Sie sondern sich nämlich an Plätzen ab, deren Lage zum Gebrauche der Signale bequem ist, und pflanzen eins zur Rechten, eins zur Linken und eins in der Mitte auf. An diesen unterscheiden sie die Zeichen, indem sie die Zahlen von 1 bis 9 zur linken Seite, 10 bis 90 in der Mitte und 100 bis 900 zur Rechten anzeigen. Wenn sie also 1 anzeigen wollen, so befestigen sie eine Fackel auf der linken Seite, eine zweite, wenn sie 2 zeigen wollen u. s. w. Wollen sie 10 zeigen, so befestigen sie eine Fackel an dem mittleren Ort, drei Fackeln bei dreifsig etc. Wollen sie 200 anzeigen, so befestigen sie 2 Fackeln an der rechten Seite. So machen sie Zeichen nach den Elementen und fliehen die Zahl. Denn wenn sie 100 anweisen wollen, heften sie nicht etwa 100fache Fackeln an, sondern einfache auf der rechten Seite. Und das thun sie auf gegenseitige Übereinkunft, indem sie die einen mit Hilfe dieser Zeichen in Kenntnis setzen, die andern in Erfahrung bringen und wieder durch Zeichen andeuten, was in den feuerigen Zeichen enthalten ist. Und so erkennen sie nun dieses und offenbaren es zugleich den nach ihnen Aufgestellten, und diese sorgen gleicherweise für die Signale für die Nachfolgenden bis zu den zuletzt Stehenden, welche noch mit Signalen zu thun haben.« Hier zeigt sich dasselbe System, welches dem Abakus zu Grunde liegt, das System des fortschreitenden Wertes der Zahlenelemente oder das System der modernen Positionsarithmetik, soweit es ohne Null durchgeführt werden kann.

Die Griechen teilten gröfsere Zahlen nach vier Stellen ab, und es war 10000 das letzte selbständige Zahlwort; die

Römer teilten nach Triaden. Ihr letztes selbständiges Zahlwort war Tausend. Die Dreiteilung zeigt der in Manuskripten des 11. Jahrhunderts abgebildete Abakus; Triaden zeigt auch die Zahleinteilung, nachdem die modernen Ziffern zur Geltung gelangt waren, und sie finden sich in der Mitte des 13. Jahrhunderts angewendet, um die geschriebenen Zahlen leichter lesen zu können.

Die Brüche wurden gewöhnlich durch Worte ausgedrückt, und zwar die Stammbrüche nur mit dem Nenner, z. B. $^1/_3$ als tertia pars, $^1/_4$ als quarta pars, $^1/_2$ als dimidia pars. Bei abgeleiteten Brüchen mufsten Zähler und Nenner angegeben werden, z. B. $^2/_7$ duo septimae; in gleicher Absicht ist $^1/_{100}$ = centesima, Usura centesima = 1 Prozent nach der Zinsrechnung der Römer, welche monatlich Zinsen nahmen, nach unserer Berechnung 12 Prozent. Dem Wesen nach war die römische Bruchteilung eine duodecimale und gründete sich auf die Unterabteilungen des römischen As oder Pfundes.[1] Der arithmetische Wert des Asses war gleich Eins. Der As hatte 12 Unzen oder 288 scripuli. 8 Unzen waren $^8/_{12}$ As oder $^8/_{12}$. Der Bruch deunx war dem arithmetischen Werte nach 11 Unzen oder 264 scripuli gleich. Der Bruch semis war gleich 6 Unzen = 144 scripuli = $^6/_{12}$; semuncia war gleich $^1/_2$ unciae = 12 scripuli = $^1/_{24}$; duella = $^1/_3$ Unzen = 8 scripuli = $^1/_{36}$. Bei dieser duodecimalen Skala, welche durch die Teilung des As in Unzen und in die Unterabteilungen derselben entstand, blieben die Römer stehen. Alle anderen Bruchteile wurden durch den nächstliegenden Wert dieser Skala ausgedrückt oder vernachlässigt. Gröfsere Brüche stellte man als Bruchsummen dar, z. B. $\frac{13105}{870912}$ als $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{24} + \left(1 + \frac{1}{24} \times \frac{1}{168}\right) : 216$.

Bei der Ausführung ihrer Rechnungen bedienten sich die Römer des Abakus und der Fingernumeration. Römische Rechentische oder Rechenbretter sind noch vorhanden. Man unterscheidet den Linien- oder römischen Abakus und den Kolumnen- oder Boëthischen Abakus.

---

[1] Das As im Kartenspiel, als die Zusammenfassung aller untergeordneten Werte, als das Ganze, ist wohl noch eine Erinnerung an den römischen As.

Der L i n i e n a b a k u s. (Fig. 21.) Auf einer Tafel von Holz, Metall oder Stein sind 8 gleichlange, parallellaufende Vertiefungen eingegraben. In jeder derselben befinden sich 4 verschiebbare Knöpfe, nur die erste Vertiefung rechts hat deren 5. Diesen Vertiefungen entsprechen 8 andere in gleicher Richtung, welche durch einen Zwischenraum von den unteren getrennt sind. Sie haben etwa $1/3$ der Länge von diesen und enthalten je 1 beweglichen Knopf. Über den längeren Einschnitten, auf dem freien

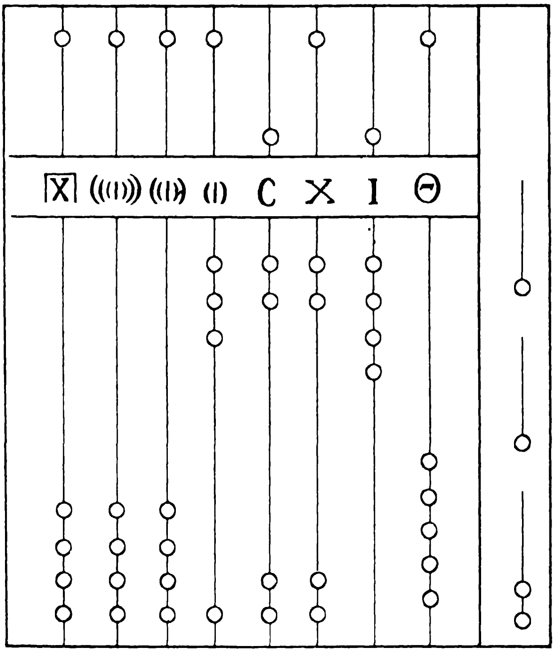


Fig. 21.

Schema des Linienabakus.

Raume zwischen der oberen und unteren Reihe, stehen von rechts nach links die Zeichen: o = Unzen, I, X, C, CIↃ, (CIↃ), ((CIↃ)), |X|, welche die Potenzen des Zehnersystems in aufsteigender Ordnung bis zur Million angeben. Die 4 Knöpfe in den unteren, längeren Einschnitten stellen 4 Einheiten der darüberstehenden Aufschrift dar, also der Reihe nach 4 Einer, 4 Zehner etc.; der obere einzelne Knopf hat den Wert von 5, so dafs in jeder Linie 9 Einheiten vorkommen, mit denen man alle Zahlen von

1 bis 9 Millionen bezeichnen konnte. Die in Rechnung genommenen Knöpfe schob man aus der gewöhnlichen Stellung auf die entgegengesetzte Seite, wie beim Suanpan. Da sie leicht zu übersehen waren, konnte man rasch und bequem mit gröfseren Zahlen operieren. In der Stelle für die Unzen mufste man dem oberen Knopf den Wert von 6 Einheiten beilegen. Die Knöpfe des Abakus mufsten nämlich zugleich das römische Pfund vertreten, dessen Teile die Unzen waren (1 As = 12 Unzen). Nahm man den oberen Knopf auf der 1. Linie gleich 6, so konnte man auf diese Linie 11 Unzen legen. Kam noch 1 Unze oder deren mehrere hinzu, setzte man auf der 2. Linie einen Knopf (1 Pfund) in Rechnung. Neben den Einschnitten der Unzen waren noch 3 kürzere Einschnitte angebracht, der obere für die halbe, der mittlere für die Viertel-, der untere für die Drittelunze. Dieser Apparat unterscheidet sich im Prinzip nur in den Brüchen von der salaminischen Tafel. Bei letzterer ist der Obolus in den halben, drittel, sechstel Obolus geteilt, so dafs die Bruchteile zusammen einen Obolus geben; beim römischen Abakus dagegen machen $^1/_2$, $^1/_4$ und $^1/_3$ Unze zusammen 1 $^1/_{12}$ Unze aus. Die auf dem beigegebenen Schema des Linienabakus dargestellte Zahl ist 3729.

Unter den Römern, welche der Mathematik ihre Kräfte widmeten, ist zunächst Marcus Terentius Varro, ein Freund des Cicero, zu nennen. Varro lebte wahrscheinlich in der Zeit von 116 bis 27 v. Ch. Von Julius Cäsar einer öffentlichen Bibliothek vorgesetzt, entfaltete er eine grofsartige litterarische Thätigkeit. Er galt als der gelehrteste Mann seiner Zeit. Ein von ihm verfafstes Rechenwerk führt den Titel »De numeris«.

Apulejus von Madaura in Spanien, im 2. Jahrh. n. Ch., studierte in Athen und übersetzte des Nikomachus Einleitung zur Arithmetik ins Lateinische. Um diese Zeit fand die theoretische Zahlenlehre aus griechischen Quellen in Rom Eingang. Apulejus hinterliefs eine Schrift über die arithmetischen Lehren des Pythagoras, die aber verloren gegangen ist.

Nun vergehen reichlich drei Jahrhunderte, bis wieder einige Männer auftreten, welche in der Mathematik Bemerkenswertes leisteten: Felix Capella, Cassiodor und Boëthius.

Der Prokonsul Martianus Mineus Felix Capella, geboren in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts n. Ch. zu Karthago, schrieb ein aus 9 Büchern bestehendes encyklopädisches Werk, welches auch auf die Arithmetik und Geometrie sich ausdehnte. Beide weisen auf griechische Schriften zurück. Capella spricht den Satz aus, dafs die Erde nicht der Mittelpunkt des Weltensystems sei, und wurde so zum Vorläufer des Kopernikus.

Magnus Aurelius Cassiodorius, Konsul unter Odoaker, Geheimschreiber (Minister) des ostgotischen Königs Theodorich, gründete anfangs des 6. Jahrhunderts nach griechischen und römischen Mustern eine höhere Unterrichtsanstalt. Er behandelt in einer Encyklopädie die 7 freien Künste. Die Arithmetik und Geometrie enthalten jedoch meist nur kurze Wort- und Sacherklärungen. Durch seine Schriften, durch vorbildliche Schuleinrichtungen, durch die Gründung einer Bibliothek wurde Cassiodor zu einem der ersten Lehrer des Mittelalters.

Der bedeutendste der römischen Mathematiker war Anicius Manlius Torquatus Severinus Boëthius. Boëthius, berühmt als Staatsmann und Philosoph und ein hervorragender Didaktiker, entstammte einer reichen Patrizierfamilie Roms. Er wurde geboren um 470 n. Ch., studierte die Werke des Euklid, Plato, Aristoteles, Ptolemäus und wurde unter Odoaker i. J. 510 Konsul. 493 hatte Theodorich, König der Ostgoten, durch die Ermordung Odoakers die Herrschaft über das damalige Italien an sich gerissen. Boëthius suchte die Freiheit und das Ansehen des römischen Senates wieder herzustellen. Politischer Umtriebe verdächtigt, wurde er verbannt und hingerichtet, nach der Sage i. J. 525. Die Schriften des Boëthius, darunter eine Arithmetik und Geometrie, wurden, in Manuskripten vervielfältigt, zu häufig gebrauchten und weit verbreiteten Hilfsmitteln an den Schulen des früheren Mittelalters, und die unterrichtliche Benützung dieser Schriften läfst sich nachweisen bis ins 12. Jahrhundert.

Der Kolumnenabakus. Boëthius bediente sich (nach einer Handschrift der Universitätsbibliothek in Erlangen) bei Ausführung der Rechnungen eines Rechenbrettes. Die Erfindung desselben schreibt er den Pythagoreern zu. Er sagt nämlich, dafs die Pythagoreer, um ihre Rechnungen dem Auge darzulegen und Irrtümer zu vermeiden, eine Tafel erdachten, welche sie zu Ehren ihres Meisters pythagoreische Tafel nannten, weil er hierzu die erste Anregung gegeben hatte. Diese Tafel, fügt Boëthius bei, werde von den neueren Abakus genannt (Fig. 22).

Der Boëthische Abakus hatte 12 vertikale Kolumnen, welche in der Richtung von rechts nach links Zeichen für die Stellen des Zehnersystems von 1 bis 100000 Millionen enthielten, nämlich die bekannten römischen Zahlzeichen: I, X, C, $\overline{\mathrm{I}}$, $\overline{\mathrm{X}}$, $\overline{\mathrm{C}}$, $\overline{\mathrm{MI}}$, $\overline{\mathrm{XIM}}$, $\overline{\mathrm{CIM}}$, $\overline{\mathrm{IMI}}$, $\overline{\mathrm{XMI}}$. etc. In diese Kolumnen wurden kleine Kegelchen (apices) gesetzt, welche mit den Rechensteinchen beim Lottospiel verglichen werden können, und wie diese mit Zahlzeichen versehen waren. Diese Zahlzeichen waren nach obiger Handschrift aus dem 11. Jahrhunderte eigenartig gestaltete Ziffern[1]), welche mit den modernen Zahlzeichen grofse Ähnlichkeit haben.

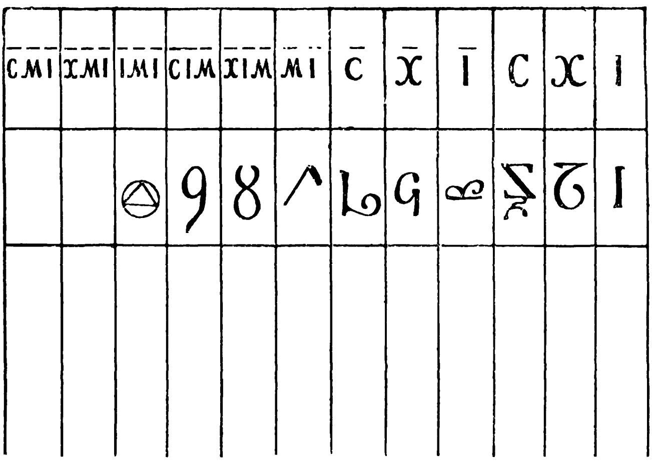


Fig. 22.

Schema des Kolumnenabakus.

An Stelle dieser Zeichen wurden aber auch Buchstaben verwendet, so dafs A = 1, B = 2 war u. s. w., oder auch Striche nach der Zahl der Einheiten. Wurde eines dieser Zeichen in die mit I überschriebene Kolumne gelegt, so drückte es Einheiten aus, wurde es in die mit X bezeichnete Kolumne gesetzt, repräsentierte es so viele Zehner als es Einheiten darstellte u. s. w. Sie änderten also ihren Wert, je nachdem sie in eine Kolumne einrückten. Man kann daher den Boëthischen Abakus auch Kolumnenabakus nennen. Dem Linien- und Kolumnenabakus liegt das Prinzip des Stellenwertes zu Grunde, aber der

[1]) Das Buch wird auf dieselben zurückkommen.

Kolumnenabakus repräsentiert eine höhere Entwicklung der Rechentechnik und tritt dem freien Ziffernsystem der Positionsarithmetik näher. Der römische oder Linienabakus verwendet Knöpfe, der Kolumnenabakus schriftliche Zahlzeichen, welche je nach ihrer Stellung verschiedenen Wert erhielten. Beim Linienabakus tritt die Teilung der 9 Einheiten jeder Ordnung in einem Fünfer und 4 Einern hervor, beim Kolumnenabakus konnte man mit einer einzigen Ziffer jede Zahl der verschiedenen Ordnungen darstellen. Der Kolumnenabakus steht dem schriftlichen Rechnen auch insofern näher, als er leicht auf ein Staubbrett gezeichnet werden konnte, in welchem Falle statt der Kegelchen Ziffern in die Kolumnen geschrieben wurden. Man durfte nur das Gerüste des Abakus fallen lassen und für die leere Stelle das Kolumnenzeichen setzen, um bei der modernen Numeration anzulangen. Endlich erforderte der Kolumnenabakus ein wirkliches Rechnen. So lange man mit Marken und Knöpfen operierte, ergab der blofse Anblick, welche Zahlveränderungen sich durch die Handhabung des Abakus ergeben hatten, während beim Kolumnenabakus Zahlen im Denken zusammengefafst oder zerlegt werden mufsten.

Die Zahlen wurden von Boëthius theoretisch in 3 Gruppen gebracht: digiti, articuli und compositi oder Finger-, Gelenk- und zusammengesetzte Zahlen. Die Fingerzahlen waren die Zahlen von 1 bis 9; die Gelenkzahlen waren die Zehner, d. h. jede Zahl, welche 10 zum Faktor oder nach unseren Begriffen am Ende eine Null hat; als eine zusammengesetzte Zahl galt jede, die nicht Finger- oder Gelenkzahl war. Die Gelenkzahlen hiefsen bezeichnend auch Grenzzahlen oder Limes. Dafs die Ausdrücke Finger- und Gelenkzahl von einer wirklichen Fingerrechnung herrühren, die damals in Übung war, ist eine naheliegende Annahme. Und schliefsen wir von den Namen rückwärts auf die Sache, so wurden vermutlich die Grundzahlen von 1 bis 9 durch die gestreckten Finger, die Zehnerzahlen durch Beugung der Finger in den Gelenken sinnenfällig dargestellt. Der Ausdruck „zusammengesetzte Zahl“ hatte damals noch die ursprüngliche Bedeutung, denn die zusammengesetzten Zahlen mussten in der That durch Zusammensetzung mehrerer Rechensteine auf dem Abakus dargestellt werden, 26 z. B. durch eine 6 in der ersten und eine 2 in der zweiten

Kolumne, während die Finger- und Grenzzahlen durch einen Apex ausgedrückt werden konnten. Diese Einteilung der Zahlen finden wir noch in Rechenbüchern des 17. und 18. Jahrhunderts.

Man konnte den Abakus ohne Zweifel zu den vier Grundoperationen verwenden, doch beschränkt Boëthius die Regeln auf die Multiplikation und Division, vermutlich weil hierin die Addition und Subtraktion schon enthalten waren. Der Multiplikand wurde nach einem anonymen Schriftsteller des 12. Jahrhunderts oben, der Multiplikator unten, das Produkt in die Mitte auf den Abakus gesetzt. In der Ausführung der Multiplikation ging man nach griechischem Muster von den höheren zu den niederen Stellen. Weil bei der Multiplikation zweier einzifferiger Zahlen nur ein- oder zweizifferige Produkte sich ergeben, so waren bloſs die Kolumnen für dieselben zu bestimmen, und Boëthius thut dies, indem er angibt, in welche Kolumne die Einer und die Zehner gesetzt werden müssen. Seine Regeln sind nur äuſserlich. Er sagt: Wenn man digiti mit articuli multipliziert, so kommen die digiti des Produkts in die Zehner, die articuli in die Hunderter etc. In ähnlicher Weise wurden die Stellen bestimmt, wenn man mit 100, 1000 zu multiplizieren hatte. Daſs man die Teilprodukte nach Vollendung der Multiplikation addieren und das Facit in Ziffern umsetzen muſste, nahm man als selbstverständlich an. Wer die wenigen Regeln auswendig kannte, war imstande jede Multiplikation auszuführen. Da der Apparat auf dem Zehnersystem beruhte und dieses veranschaulichte, konnte er auch das Verständnis der Sache vermitteln; man hielt aber das Eingehen auf die inneren Verhältnisse der Operationen, ihre tiefere Begründung für entbehrlich. (Wildermuth.)

Die Division wurde auf dem Abakus mit Hilfe von Ergänzungen vollzogen, welche Boëthius Differenzen nannte. Es waren die Differenzen zwischen dem Divisor und der nächst höheren Ordnung. Ist z. B. der Divisor 24, so ist die nächst höhere Ordnung 30, ist der Divisor 76, so ist die nächst höhere Ordnung 100. Soll z. B. 64 durch 16 dividiert werden, so sagt man: die nächste einfache Zahl zu 16 ist die folgende Zehnerzahl also 20; 20 in 64 geht 3mal; Rest 4. Der Quotient 3 ist aber nicht der ganze Quotient. Es ist daher die Differenz 4 in Anwendung zu bringen, um welche 20 gröſser ist als 16. Da dieselbe so oftmals zu viel abgezogen wurde als der gefundene Quotient 3 angibt, so mufs sie jetzt ebenso oft dem schon vorhandenen Rest 4 zugefügt werden, d. h. zum Rest 4 wird 3 mal 4 addiert, gibt 16, und darin ist der Divisor noch 1 mal enthalten. Der vollständige Quotient ist $3 + 1 = 4$.

Ein anderes Beispiel (wie das vorige aus Cantors Beiträgen etc.): 16 in 672. Man verwandelt 16 in 20, setzt die 2 unter die 6 von 672 und dividiert in dieser Stellung, der Quotient ist 3. Dazu kommt die Korrektur 30 mal 4 oder 120 und verwandelt den Rest in 192. Nun sollte die 2 des vergröfserten Divisors unter die 1 von 192 gesetzt werden; dabei wird die Division unmöglich. Also setzt man die 2 unter die 9 von 192 und betrachtet dessen 1 als Artikel, d. h. man dividiert mit 2 in 19, welches 9 mal geht. Der Rest ist 12, die Korrektur ist 9 mal 4 oder 36, der wirkliche Rest also 48. Jetzt kann die 2 unter 4 gesetzt werden. Der Quotient 2 erscheint nebst dem Reste 8 oder vielmehr dem wirklichen Reste 16, nachdem die Korrektur 2 mal 4 oder 8 in Rechnung gebracht wurde. Endlich 16 in 16 geht 1 mal; Gesamtquotient 30, 9, 2 und 1, zusammengenommen 42. In moderner Form würde sich die Rechnung wie folgt ausnehmen. Rechts davon steht ein anderes Beispiel, in welchem der Divisor 84 auf 100 ergänzt wird.

16 : 672 = 30	84 : 3276 = 30
(20)	(100)
600	3000
72	276
+ 120	+ 480
192 = 9	756 = 7
(20)	(100)
180	700
12	56
+ 36	+ 112
48 = 2	168
(20)	(100) = 1
40	100
8	68
8	16
16 = 1	84 = 1
(16)	(84)
Quotient: 42	Quotient: 39

Diese Divisionsform, welche seit 600 Jahren in Vergessenheit liegt, hat vor der modernen Form einen beachtenswerten Vorzug. Es besteht nämlich in Aufsuchung der Teile des Quotienten bei unserem gegenwärtigen Divisionsverfahren eine Unsicherheit, indem man die Partialquotienten, bald zu grofs, bald zu klein nimmt. Diese Schwierigkeit wird zwar durch grofse Übung überwunden; aber selbst der gewandte Rechner kommt bei gröfseren Zahlen in die Lage, dafs er ein Produkt vom Reste nicht mehr abziehen kann, oder dafs der letzte Rest eine gröfsere Zahl als der Divisor ist. Dieses unsichere Raten und Tasten wird durch die Division mit dem dekadischen Komplement beseitigt, indem es ein absolut sicheres Dividieren gestattet.

Dieses Verfahren ist aber umständlicher als die moderne Division, und seine Erklärung würde für den Anfänger nicht ohne Schwierigkeit sein.

Gestatten wir uns schliefslich noch einen Blick auf das römische Schulwesen.

Die Römer hatten schon zur Zeit des Numa Pompilius (714 bis 642 v. Ch.) Elementarschulen. Tarquinius Priscus (616 bis 578 v. Ch.) legte auch in Rom Schulen an. Quintilian (42 bis 118 n. Ch.) erhielt vom römischen Rate einen freien Platz zum Lehren und eine Besoldung. Vespasian (69 bis 79 n. Ch.) liefs den Lehrern an den Schulen zu Rom Besoldungen aus öffentlichen Kassen anweisen. Plinius der Jüngere, geb. 62 n. Ch., verwendete einen grofsen Teil seines Vermögens auf Lehrergehalte. Die einsichtsvollsten Männer der Nation redeten der Jugendbildung das Wort. So sagt Cicero: Wir können der Republik kein gröfseres Geschenk machen, als wenn wir die Jugend lehren und unterweisen.

Alle Schulen waren Privatanstalten. Der Lehrberuf stand im allgemeinen nicht in hoher Achtung; er war für viele der letzte Ausweg, nachdem sie anderwärts Schiffbruch gelitten hatten; die Bezahlung war notdürftig. Darum sagte Juvenal: Wen die Götter hassen, den machen sie zum Schulmeister. Nur die griechischen Hofmeister brachten es zu hohem Ansehen und wurden glänzend honoriert. Der Elementarlehrer schlug seine Bude auf, wo er Platz fand, in Säulenhallen, auf dem Dache, auf offener Strafse. Die Lokale waren nicht selten ungesund;

auch herrschten hier nicht immer gute Sitten, daher bessere Familien Anstand nahmen, ihre Kinder in die öffentlichen Schulen zu schicken. Weil Bücher und Manuskripte selten und teuer waren, beschränkte sich der Unterricht auf Vortragen, Vorlesen und Schreiben. Die meisten Schulen hatten einen eigenen Vorleser. Die Schule fing in früher Tagesstunde an. Beim Gang zur Schule wurde der Knabe vom custos pädagogus begleitet. Die Schulgerätschaften, die Bücherrollen, die Wachstafel, der Stilus, das Schreibrohr, das Rechenbrett und die Rechensteine wurden in einem Kästchen am Arm oder auf dem Rücken getragen. In den Lokalen hatten die Knaben Stühle ohne Lehne. Die Papierrolle und Schreibtafel legten sie auf die Knie. Der Calculator oder Scolasticus lehrte vom Katheder aus. Zum Vorschreiben hatte er eine weifse Gestelltafel, auf welche mit Kohle oder Rötel geschrieben wurde. Den Anfängern grub man in die Wachstafeln Buchstaben ein, welche der Schüler nachziehen mufste; erst später durfte er mit dem Schreibrohr und schwarzer oder roter Tinte schreiben.

Den günstigen Ansichten, welche die Griechen vom bildenden Wert der Mathematik hatten, begegnen wir auch bei einzelnen erleuchteten Römern. Platon schreibt in seiner Erziehungslehre, nachdem er den augenfälligen Nutzen der Arithmetik hervorgehoben hatte: »Doch in ihrem höheren Teile hat die Arithmetik noch wichtigeren Nutzen, weil sie von der Erscheinungswelt auf zur Wahrheit und zur Idee an sich führt und so die höchste Philosophie vorbereitet. Wenn dem Menschen die Zahl genommen wird, so geht er aller höheren Einsicht und mit dieser auch der Tugend verlustig; denn ein Wesen, das weder zwei noch drei, noch Gerades und überhaupt keine Berechnung verstände, wird niemals den Zusammenhang und die Verhältnisse der sinnlichen Empfindungen und Vorstellungen angeben können«. Quintilian redet der Geometrie als Lehrgegenstand das Wort, weil sie das logische Denken fördere, ein Vorteil, den selbst ihre Gegner zugestehen, und der schon bei Schülern zarten Alters hervortritt. Platon macht auch Vorschläge für den gelegentlichen Unterricht in der Arithmetik. Die Knaben sollten bei ihren Spielen Äpfel und Kränze bald unter mehrere, bald unter wenigere austeilen, wobei jeder gleichviel bekommt. Oder sie können die Faustfechter und Ringer in Abteilungen bringen, goldene, silberne und erzerne Schalen zusammenmischen und wieder verteilen. Auf diese Weise lernen sie Zahlen gebrauchen, wie es in Beziehung auf die Reihen des Heeres, die Führung und die Feldzüge desselben notwendig ist, und werden dabei tauglicher und aufgeweckter. Wir sehen, dafs der Pädagog Quintilian seinen Charakter als Römer nicht verleugnet.

Übrigens war das Rechnen bei den Römern Gegenstand des Elementarunterrichts, und es wurde damit schon in der zweiten Hälfte des 1. Schuljahres begonnen. Zunächst wurde das Fingerrechnen betrieben, später kam das Rechnen mit dem Abakus an die Reihe. Das Eins und Eins, wohl auch das Einmaleins, wurde in der von dem Gerasener erfundenen und uns geläufigen Form geübt. Davon geben die Konfessionen des Kirchenvaters Augustinus Zeugnis (LXIII. 20, 22), in welchen zu lesen ist, dafs ihm das unum et unum duo, duo et duo quatuor ein verhafster Gesang gewesen. Diese höchst interessante Stelle weist nach, dafs bei den Römern die elementaren Rechensätze in Reihenform eingeübt wurden und zwar durch lautes Chorsprechen.

Wir sind nun mit unseren Betrachtungen schon ziemlich weit in das Abendland vorgerückt und müssen nun zurückkehren, um die Weiterentwicklung der indischen Rechenkunst bei den arabischen Völkerschaften zu verfolgen.

Die Rechenkunst der Araber.

Vergegenwärtigen wir uns die Lage Arabiens zwischen dem ausgedehnten griechischen Reiche und Indien, so ist sofort ersichtlich, dafs die Wissenschaft der Griechen und Inder hier zusammentreffen konnte, vorausgesetzt, dafs sie auch fruchtbaren Boden zu finden vermochte. So war es auch. Die griechischen Staaten übten bei ihrem Aufblühen einen mächtigen Einflufs auf die kleinasiatischen Kolonien und die angrenzenden Länder, und bei dem regen Handelsverkehr zwischen benachbarten grofsen Reichen konnte eine Wissenschaft von so eminent praktischer Bedeutung wie die Mathematik nicht innerhalb der Grenzen ihres bisherigen Gebietes bleiben, umsoweniger als gerade der Handel das gröſste Interesse daran hatte, sich dieselbe wenigstens in ihrem arithmetischen Teile dienstbar zu machen. So wurden die arabischen Völkerschaften auf der einen Seite mit der griechischen Geometrie, von der andern mit der indischen Arithmetik bekannt. Mit der Ausdehnung des Khalifen-Reiches wuchsen auch wissenschaftliche Bestrebungen. Der Khalife Almansur erbaute gegen 770 Bagdad auf den Trümmern des alten Babylon, und zu wiederholtenmalen wurde diese Stadt der Sitz hochanstrebender Bildung. Es sammelten sich in der neuen Residenz, der Stadt des Friedens, tüchtige Geschäftsleute, Künstler, Gelehrte aus verschiedenen Ländern; wissenschaftlich gebildete Inder, welche astronomische Werke mitbrachten; nestorianische Christen, die als Leibärzte der Khalifen zu hohem Ansehen gelangten und ihre einfluſsreiche Stellung zur Förderung der Bildung auf griechischer Grundlage benutzten. Die Khalifen hatten anfangs allerdings nur die Absicht, durch die Versammlung hervorragender Männer aus aller Herren Länder den Glanz des Hofes zu erhöhen, und die Mathematik sollte lediglich der Astrologie dienen. Als aber die Araber mit der griechischen Wissenschaft bekannt wurden, fanden sie an dieser selbst Gefallen. Harun al Raschid legte so groſsen Eifer für die Wissenschaft an den Tag, daſs er selbst mit dem fernen Westen Verbindungen anknüpfte und in gegenseitigen Geschenken mit Karl dem Groſsen wissenschaftliche Schriften austauschte. Harun al Raschid lieſs 300 Gelehrte auf seine Kosten reisen, damit sie neues Wissen, alte Manuskripte sammelten. Al Mamum brachte während seiner zwanzigjährigen Regierung die arabische Wissenschaft zur Reife. Er gründete eine Akademie in Bagdad und errichtete Schulen an anderen Orten seines Reiches. In systematischer Weise wurden Bücher aus fremden Sprachen ins Arabische übersetzt, darunter Aristoteles, Euklid, Archimedes, Apollonius, Ptolemäus. Einzelne der griechischen Klassiker sind dem Abendlande erst durch Rückübersetzung aus dem Arabischen wieder bekannt geworden. Der griechische Einfluſs auf die arabische Litteratur ist unverkennbar. Man findet in arabischen Schriften Multiplikationsmethoden, welche denen des Apollonius und Archimedes gleichen; die arabische Definition von der Division erinnert an Euklid; Euklids Proportionslehre ist der Regeldetri der Araber vorangesetzt. In anderen Schriften sind die Sexagesimalbrüche und

Wurzelextraktionen genau so, wie bei Ptolemäus behandelt. Durch die Zusammenwirkung der vorbezeichneten günstigen Umstände und unter dem Einflusse hochbegabter Männer hoben sich Ackerbau, Handel und Gewerbe; die materielle und geistige Kultur stieg, so dafs sie bald die Kultur der abendländischen Reiche überragte.

Die erste bis jetzt bekannt gewordene mathematische Arbeit eines Arabers war die Algebra [1]) und Arithmetik des Abdallah Mohammed ben Musa, welcher zu Anfang des 9. Jahrhunderts am Hofe des Khalifen Al Mamum lebte. Mohammed ben Musa war in Kharizim geboren und führte den Beinamen Alkharezmi. Als später dieser Name latinisiert wurde, entstand daraus das Wort Algorithmus oder Algorismus, womit man anfangs nur die Rechenmethode des Ben Musa, später aber jeden Rechenmechanismus bezeichnete. Schon im 13. Jahrhunderte war die Bedeutung dieses Namens verloren gegangen, bis 1857 eine Handschrift aufgefunden wurde, welche jeden Zweifel über die Entstehung des Wortes Algorithmus ausschliefst. Diese Handschrift befindet sich in der Bibliothek von Cambridge.

In der Einleitung zu seiner Arithmetik sagt Ben Musa, dafs er das Leichteste und Nützlichste in der Arithmetik, das was die Menschen in Fällen von Erbschaften, Legaten, Teilungen, in Rechtsfragen, bei Ausmessung von Ländereien, im Handel und in allen ihren Geschäften untereinander am meisten gebrauchen, zusammengestellt habe. Das Buch war also für das Geschäftsleben bestimmt und machte auf Wissenschaftlichkeit keinen Anspruch. Es enthält im Drucke 23 Seiten. Nach indischer Weise preist es vorerst den Lenker aller Dinge. Dann lehrt es die Numeration, »welche die Inder mit Hilfe von 9 Charakteren ausführen, die dazu dienen, die gröfste wie die kleinste Zahl darzustellen und so die Arbeit und Mühe zu erleichtern«. »In Bezug auf die Zeichen herrscht Verschiedenheit unter den Menschen, welche zumal bei der 5, 6, 7 und 8 auftritt. Alle Zahlen sind aus der Einheit zusammengesetzt. Die Einheit selbst ist die Wurzel jeglicher Zahl und aufserhalb der Zahl. Die 9 Zeichen können an verschiedenen Stellen sich

[1]) Das Wort Algebra kommt her vom arabischen Aljebr wa' lmukâbalah und heifst wörtlich übersetzt: Herstellung und Vergleichung.

befinden, welche Differenzen genannt werden. Soll eine Differenz leer bleiben, so zeigt man dies durch einen kleinen Kreis an, um zu erweisen, dafs keine andere Zahl an dieser Stelle auftritt.« Diese Darstellungsweise ist an Beispielen weitläufig erklärt, ein Zeichen, dafs hier etwas Neues vorgetragen wurde. Es folgt nun die Addition und Subtraktion. Bei ersterer ist besonders Gewicht auf den Fall gelegt, in welchem die Summe der Ziffern an einer Stelle 9 übersteigt. Dabei heifst es, man müsse die Zehner der folgenden Stelle zurechnen und an der ursprünglichen Stelle nur das schreiben, was unterhalb 10 noch übrig bleibt. »Bleibt nichts übrig, so setze den Kreis, damit die Stelle nicht leer sei; sondern der Kreis mufs sie einnehmen, damit nicht durch ihr Leersein die Stellen vermindert und die zweite für die erste gehalten wird.« Bei der Addition und Subtraktion soll man mit der höchsten Stelle, also links anfangen, dann zur nächstfolgenden übergehen, weil dadurch die Arbeit nützlicher und einfacher wird. Die Multiplikation beginnt bei der niedersten, das Verdoppeln bei der höchsten Stelle. Hierauf läfst der Verfasser die ausführliche Beschreibung der Multiplikation folgen. Von ihrer Richtigkeit kann man sich durch die Neunerprobe überzeugen; diese tritt hier das erste Mal auf. Sodann folgt die Division. Mohammed ben Musa kennt die Divisionsmethode des Boëthius nicht, welche bei allen Autoren des 11. Jahrhunderts sich noch findet, sondern lehrt dieselbe im Prinzip nach der gegenwärtig üblichen Weise. Im Anschlusse an die Division werden die Sexagesimalbrüche behandelt, und der Verfasser bemerkt hierbei, dafs auch die Inder sich der 60teiligen Brüche bedient haben, wobei sie die Einheit in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden, jede Sekunde in 60 Tertien etc. teilten. Die Sexagesimalteilung war bei den Alexandrinern gebräuchlich, und Ptolomäus legte sie seinen astronomischen Berechnungen zu Grunde, ein Beweis, dafs die alten Kulturvölker von einander gelernt haben.

Die Arithmetik des Ben Musa gewann einen ähnlichen Einflufs und eine ebenso weite Verbreitung wie Euklids Geometrie. Sie war das Muster für viele der folgenden arithmetischen Schriften. Auf ihr beruht eine Arbeit des Ali Ibn Ahmed Almaçawi (11. Jahrh.). In diesem Buche befinden sich einige

Rechenformen, welche man hier das erste Mal trifft, die aber wahrscheinlich viel älter und vermutlich indischen Ursprungs sind. Wir geben dieselben aus Wildermuths Abhandlung. Das Multiplikationsbeispiel: $324 \cdot 753 = 243972$ wird so ausgeführt:

```
 43
 309
 2977
215962
   324
 753
  753
   753
```

»Die oben am Rande herumstehenden gröfseren Ziffern stellen das Produkt dar; die von ihnen eingeschlossenen kleineren sind solche, welche im Laufe der Ausrechnung auf der Staubtafel nach und nach wieder verwischt und schliefslich durch die Randzahlen in gerader Linie ersetzt wurden; der Multiplikator 753 wird so oft gesetzt als der Multiplikand Summanden hat, und zwar so, dafs seine Einheiten jedesmal unter den zu multiplizierenden Summanden zu stehen kommen, um danach die Stellen der Ziffern im Produkte zu bestimmen. Die Operation fängt links an mit $7 \cdot 3 = 21$; dann kommt $5 \cdot 3 = 15$; 5 steht über dem Multiplikator 5, und 1 wird zu der 1 in 21 addiert, woher die 2 kommt, welche über der 1 sich befindet, auf der Staubtafel aber an die Stelle der 1 gesetzt wurde; zuletzt hat man $3 \cdot 3 = 9$ unmittelbar über 3; so ist nun 3 mit 753 multipliziert; auf ähnliche Weise geschieht dies bei den zwei übrigen Summanden.

Als Divisionsexempel wird $2852 : 12$ gegeben und so ausgeführt:

```
 12
 498
 237        237
2852          8
12           12
 12
  12
```

Dieses Verfahren entspricht dem Übersichdividieren, nur sind die verrechneten Ziffern nicht durchstrichen. Die Ganzen des

Quotienten stehen zweimal, zuerst über dem Dividenden und dann auf der Seite, in der gemischten Zahl $237\,^8/_{12}$, die den Gesamtquotienten darstellt; der Divisor ist bei jeder Partialdivision nach rechts vorgerückt. Bei der Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor geht man von links nach rechts, subtrahiert sogleich jedes Teilprodukt und schreibt den Rest an seine Stelle über den Dividenden. Man fängt also an: $2 \cdot 1 = 2$, von 2 abgezogen bleibt nichts; $2 \cdot 2 = 4$, von 8 abgezogen bleibt 4, was in gleicher Linie über 8 steht; bei der nächsten Division ist der Dividend 45; der Quotient 3; man multipliziert nun wieder $3 \cdot 1 = 3$, von 4 abgezogen bleibt 1, was über 4 gesetzt wird; $3 \cdot 2 = 6$, von 15 abgezogen bleibt 9 etc.«.

Die arabische Wissenschaft bildete sich gleichzeitig an zwei Orten weiter, im Mutterlande und in Spanien. Hier war 755 eine arabische Herrschaft unter der Dynastie der Omaijaden entstanden. In unaufhörlichen Kämpfen gegen die westgotischen Christen sowie gegen afrikanische Araber erhob sich dieses Dynastengeschlecht bei 300jährigem Bestande zu unsterblichem Ruhme, wurde aber auch vollständig aufgerieben. In die Zeit der Omaijaden fällt die Entstehung jener glänzenden Denkmale arabischer Baukunst, deren Überreste heute noch Staunen und Bewunderung erwecken. Namentlich fanden Abderrhaman III. und sein Sohn Hakem II., welche von 912 bis 976 regierten, an der Aufführung solcher Prachtbauten Gefallen. Diese herrlichen Werke der Baukunst sind aber, weil verschiedene Wissenszweige an ihrer Herstellung beteiligt sind, an sich ein Zeugnis hoher Bildung. Diese wurde im 10. Jahrhundert durch etwa 14 maurische Hochschulen vermittelt. Außerdem erfreute sich auch der Unterricht des Volkes einer sorgsamen Pflege. Jeder Rechtgläubige sollte den Koran lesen lernen. Deshalb war bei jeder Moschee auch eine Schule, und Geistliche und Kirchendiener mußten Unterricht erteilen.

Am Hofe des Khalifen Al-Mansor lebte Mohammed Musa ben Schaker, dessen drei Söhne Mohammed, Asmer und Alhassan sich als Mathematiker auszeichneten. In einem von ihnen verfaßten geometrischen Werke findet sich Herons Formel, mittels welcher der Inhalt eines Dreiecks aus den drei Seiten berechnet werden kann; man nennt diese Formel »die Formel der drei Brüder«.

Johannes von Sevilla, auch Johann von Luna genannt, ein jüdischer Schriftsteller des 12. Jahrhunderts, schrieb eine praktische Arithmetik (Algorismus). In derselben lehrte er die näherungsweise Ausziehung der Quadratwurzel mit Hilfe von Decimalbrüchen. Er verfährt dabei in ähnlicher Weise wie Theon der jüngere, der Ende des 4. Jahrhunderts einen Kommentar zu Ptolomäus schrieb, nur mit dem Unterschiede, dafs er nicht wie dieser die Sexagesimalbrüche, sondern Decimalen, Zahlen mit Nullen anwandte. — Der Schlufsstein der arabischen Rechenkunst ist die »Essenz der Rechenkunst von Mohammed Beha-eddin« im 16. Jahrhunderte. Dieses Büchlein enthält das Notwendigste aus der Arithmetik. Nach einer Lobrede auf die Rechenkunst werden die Species in ganzen Zahlen behandelt. Beim Addieren, Duplieren, Subtrahieren und Medieren gehen die Operationen von den niederen Stellen zu den höheren, also von rechts nach links z. B. (Fig. 23).

Addieren.

5	3	7	3	2
	4	1	7	9
		1	0	5
5	7	9	0	6
	8	0	1	

Duplieren.

2	5	0	6	7
4	0	0	2	4
5		1	3	

Medieren.

1	3	6	5	4
	1	3	2	2
	6	8		7

Fig. 23.

Die Multiplikation mit einstelligem Multiplikator wird wie heute vollzogen, nur in anderer äufserer Ordnung:

$$\begin{array}{r} 6 \\ 42835 \\ 257010 \end{array}$$

Zur Auffindung der Einmaleinsprodukte für die Gesetzchen von 6 bis 10 sind einige Behelfe angegeben, z. B.: Es soll das Produkt von 8×7 gesucht werden. Man multipliziere den einen Faktor mit 10; $10 \times 8 = 80$; suche die Differenz des andern Faktors zu 10; $10 - 7 = 3$, multipliziere diese Differenz mit dem ersten Faktor, $3 \times 8 = 24$, und ziehe dieses Produkt vom ersten Faktor ab: $80 - 24 = 56$.

Oder ein zweites Verfahren: Addiere beide Faktoren: $7 + 8 = 15$; nimm den Überschufs der Summe über 10, hier 5, 10mal, das gibt 50; dazu addiere das Produkt der Überschüsse über jeden Faktor bis zu 10; hier $3 \times 2 = 6$; $50 + 6 = 56$.

Der praktische Wert dieser Regeln ist zweifelhaft, weil sie das Einmaleins nicht entbehrlich machen, denn das Schlufsergebnis mufs ja doch unter Anwendung des Einmaleins gefunden werden; sodann lernt man leichter das Einmaleins auswendig, als dafs man die benötigten Produktzahlen mit Hilfe dieser schwerfälligen und umständlichen Regeln sucht. Beweise für die Richtigkeit derselben werden nicht erbracht, sind aber leicht zu führen, wenn man die Faktoren als dekadische Differenzen auffafst, also:

Für den ersten Fall: $8 \cdot 7 = (10 - 2) \cdot 7 = 10 \cdot 7 - 2 \,.\, 7 = 70 - 14 = 56$; oder $8 \cdot 7 = 8 \cdot (10 - 3) = 8 \cdot 10 - 8 \cdot 3 = 80 - 24 = 56$.

Für den zweiten Fall: $8 \cdot 7 = (10 - 2) \cdot (10 - 3) = 10 \cdot 10 - 2 \cdot 10 - 3 \cdot 10 + 2 \cdot 3 = 10 \cdot 10 - (10 - 8) \cdot 10 - (10 - 7) \,.\, 10 + 2 \cdot 3 = 10 \,.\, 10 - 10 \cdot 10 + 8 \cdot 10 - 10 \cdot 10 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 3 = (8 + 7 - 10) \cdot 10 + 2 \cdot 3$.

Man sieht leicht ein, dafs diese Kunstgriffe ohne schulgerechtes mathematisches Denken nicht gefunden werden konnten.

Neben diesen und ähnlichen Regeln werden Rechenvorteile benutzt, welche eine wirkliche Erleichterung und Abkürzung des Verfahrens gewähren, z. B.: $25 \times 24 = \frac{1}{4} \times 100 \times 24 = \frac{24}{4} \cdot 100 = 600$; oder $125 \cdot 32 = \frac{1}{8} \cdot 1000 \cdot 32 = 1000 \cdot \frac{32}{8} = 1000 \cdot 4 = 4000$; oder $25 \cdot 36 = 5 \cdot 5 \cdot 36 = 5 \cdot 5 \cdot 12 \cdot 3 = 60 \cdot 3 \cdot 5 = 180 \cdot 5 = 900$.

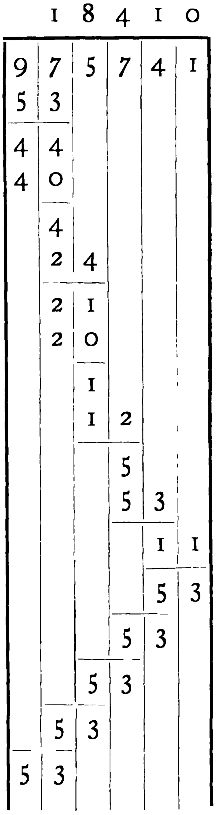


Fig. 24.

Das Divisionsverfahren gleicht dem heutigen. Beispiel: 975741 : 53 (Fig. 24).

Der Quotient steht oben, der Divisor unten und letzterer wird bei jeder Division um eine Stelle nach rechts aufwärts gerückt.

Multipliziert wird von links nach rechts, also immer zuerst 5, dann 3. In dieser Ordnung werden auch die Teilprodukte abgezogen.

Die Bruchlehre enthält Regeln für das Schreiben der Brüche, für das Auffinden des gemeinschaftlichen Nenners, die Verwandlung gemischter Zahlen in Brüche, die Regeln für die 4 Grundrechnungsarten in Brüchen. Den Schlufs bilden »zerstreute Aufgaben«, welche den Verstand des Lernenden schärfen und in der Aufsuchung des Unbekannten festigen sollen.

Zwischen dem Rechnen des Boëthius und der Araber besteht ein durchgreifender Unterschied. Boëthius steht noch voll und ganz auf dem Boden des instrumentalen Rechnens; denn er bedient sich ausschliefslich des Abakus und kann ohne denselben nicht rechnen. Die Araber benutzten seit Mohamed ben Musa die Null, welche nicht etwa wie bei der Gobarschrift über die Ziffern gesetzt wurde, sondern in die Zifferreihe eintrat.

Die Araber haben eine beträchtliche Zahl mathematischer Werke hinterlassen, von denen aber ein grofser Teil nur mehr dem Namen nach bekannt ist. Die Hauptbedeutung der Araber liegt weniger in der Fortbildung der Wissenschaft als in der Erhaltung der geistigen Errungenschaften der Griechen und Inder, und noch mehr in der weiten Verbreitung, welche diese glückliche Verbindung griechischer Geometrie mit indischer Arithmetik durch sie erlangt hat.

Das Rechnen der Altgermanen.

Das weite Land zwischen den Alpen und nördlichen Meeren, nach Ost und West mit unbestimmten Grenzen, das Land, welches die Römer Germanien hiefsen, war vor unvordenklichen Zeiten schon von Menschen bewohnt. Umsonst aber sucht man hier die hohe Kultur, welche sich in altersgrauer Zeit an den Ufern des Nil und Euphrat, in China und Indien, in Griechenland und im alten römischen Reiche entfaltete. Nach den Forschungsergebnissen der Ethnographen war der Mensch im mittleren und nördlichen Europa schon Zeitgenosse des Mammut und Höhlenbären. Ohne Haustiere, jagte er das Wild und zerschlug dessen Gebeine, um das Mark zu gewinnen. Seine Werkzeuge fertigte er mit Feuerstein aus Stein und Knochen. Gleichwohl offenbart sich in diesen armseligen Verhältnissen die geistige Überlegenheit des Menschen gegenüber den Ungeheuern einer nun untergegangenen Tierwelt; denn die Bezwingung derselben setzt verständiges Handeln voraus.

Mit Ende der Eiszeit verschwindet dieses Geschlecht, und Menschen von höherer Kultur treten an seine Stelle. Sie übten die Töpferkunst, konnten also auch Feuer machen, betrieben Viehzucht und Ackerbau und wohnten in selbstgebauten Wohnungen auf dem Lande oder in Pfahldörfern an seichten Stellen der Waldseen. Die Spuren menschlicher Thätigkeit aus dieser Periode sind zahlreich und lassen auf eine ziemlich dichte Bevölkerung schliefsen.

Bis zum Beginn der Metallzeit senkten die Bewohner Germaniens ihre Toten in die Erde. Diese Sitte hört mit einem Male auf, und an ihre Stelle tritt der Leichenbrand; das deutet nun bestimmt auf neue Einwanderungen; denn ein Gebrauch, der sich auf die gesamte religiöse Anschauung eines Volkes bezieht, verschwindet nicht plötzlich. Die Thongefäfse aus dieser Zeit wurden mit dem Stichel durch geometrische Figuren verziert, und wo solche Zeichnungen sich finden, war auch der Grund zur Schrift gelegt.

Vor Beginn der christlichen Zeitrechnung hatten sich zwischen der Donau und der Nord- und Ostsee germanische Völkerschaften niedergelassen. Sie feierten in Liedern die alte Überlieferung, hatten eine ausgebildete Götterlehre und geregelten Götterdienst, trieben Ackerbau und Viehzucht; sie konnten Bier und Speisen bereiten, legten hölzerne Wohnungen an, fertigten Waffen und Geräte, verstanden die Herstellung der Leinwand, hielten regelmäfsige Versammlungen und gliederten sich in Genossenschaften. All das ist Zeugnis dafür, dafs die Altgermanen schon vor dem Beginn der christlichen Zeitrechnung eine ziemlich hohe Kulturstufe erreicht hatten. Lesen und Schreiben konnten aber wohl nur die Priester, denn Tacitus sagt: Die Heimlichkeiten der Briefe sind Männern und Frauen unbekannt.

Zahlreiche Spuren weisen darauf hin, dafs zwischen den germanischen Stämmen und den Völkern des Südens und Ostens ausgedehnte Handelsbeziehungen stattfanden. Etrusker, Griechen, Venetier, Römer hatten ihre Handelsstrafsen zu den germanischen Ländern. Die Fremden holten da Salz und insbesondere den im Altertum hochgeschätzten Bernstein. Eine Keilschrift auf einem assyrischen Obelisken sagt: »In den Meeren der Polarwinde fischten des Königs Karawanen Perlen; in den Meeren, wo der Polarstern im Zenith steht, Bernstein, den Safran, welcher anzieht«. Die betriebsamen Etrusker hatten eine Handelsstrafse durch die Alpenthäler nach Salzburg, durch Böhmen und Schlesien bis an die Weichsel. Eine Unterbrechung ihres Handels trat 389 v. Chr. ein mit der Eroberung des cisalpinischen Gallien durch die Gallier, wodurch der Weg zu den Alpen verlegt wurde. Nach dem zweiten punischen Kriege wurde der Handel wieder eröffnet und durch das Vordringen der Cimbern und Teutonen abermals zerstört. Durch die Etrusker erhielten nördliche Völker Gerätschaften und Schmucksachen aus Bronce. In Reihengräbern Schlesiens fanden sich Schläfenringe, von Völkern stammend, die hinter dem Aralsee sefshaft waren. In slavischem Gebiete bis an die Elbe und noch im südlichen Skandinavien wurden Metallgegenstände aus Südeuropa, dem Kaukasus, aus Turkestan gefunden; auch griechische, kleinasiatische, römische, byzantinische und arabische Münzen. Im friedlichen Handelsverkehr mit südlichen Völkern lernten Deutsche und Slaven die kunstvolle Bearbeitung der Metalle und wohl auch die Lautschrift, die nun an die Stelle der figürlich-symbolischen Schrift trat. Mit Hilfe geschnittener Buchstaben betrieben sie das Wahrsagen. Der begabteste und bildsamste Stamm der Germanen waren die Goten. Um die Mitte des 4. Jahrhunderts n. Ch. nahmen sie das Christentum an; 370 übersetzte Ulfilas die Bibel in ihre Sprache. Die gotische Sprache zeichnete sich durch Feinheit, Mannigfaltigkeit, durch fest gegliederte, reiche Formen und Bildsamkeit aus. Die gotischen Schriftwerke sind aber zur Zeit das einzige Denkmal altgermanischer Sprache und Literatur. Aus der gotischen Schrift entwickelte sich die Mönchsschrift und aus dieser die deutsche Kurrentschrift.

Nach all dem können wir annehmen, dafs im alten Germanien Rechenkenntnisse verbreitet waren. Auch die Germania des Tacitus enthält einzelne Stellen, welche die Annahme bestätigen, dafs die Altgermanen im elementaren Rechnen so ziemlich bewandert waren. Tacitus sagt: »Besitz von Gold und Silber zieht sie eben nicht sehr an; trotzdem halten unsere Nachbarn wegen des Gebrauchs im Handel Gold und Silber wert, und gewisse Münzen unserer Prägung kennen oder ziehen sie vor; die mehr im Innern Wohnenden bedienen sich in altertümlicher Weise des Warentausches. Von Geld nehmen sie nur altes und lange bekanntes an, ausgezahnte oder mit dem Zeichen des Zweigespanns versehene Münzen, d. h. vollwertige Denare im Gegensatze zu später geprägten, leichteren Gehalts. Auch gehen sie mehr dem Silber als dem Golde nach, weil ihnen die Menge der Silbermünzen zum Gebrauche bequemer ist, da sie gemeine und wohlfeile Waren zu erhandeln pflegen. Im Kriege ist ihre Anzahl bestimmt. Immer hundert aus jedem Gaue bilden eine Gemeinschaft, und danach nennen sie sich untereinander; und was anfangs blofse Zahlbestimmung war, ist jetzt Name und Ehrentitel. Ihre Versammlungen halten sie an bestimmten Tagen. Auch rechnen sie nicht nach Tagen, sondern nach Nächten und setzen auf diese Weise die Termine fest. Auf leichteren Vergehen steht eine angemessene Strafe; die Überführten müssen mit einer bestimmten Zahl von Pferden büfsen; ein Teil der Bufse wird dem Könige oder der Gemeinde entrichtet. Zu den Volksversammlungen wählen sie die Häupter, welche in den Gauen und Dörfern Recht sprechen. Jedem steht ein Geleit von Hunderten aus dem Volke zugleich als Rat und zu gröfserem Ansehen zur Seite. Das Würfelspiel treiben sie nüchtern, ganz wie ein ernsthaftes Geschäft mit solcher Verwegenheit bei Gewinn und Verlust, dafs sie, wenn sie nichts mehr haben, auf den äufsersten und letzten Wurf sogar ihre Freiheit und Person setzen.« — Die Goten hatten Zahlwörter bis zu tausend und schriftliche Zahlzeichen, z. B. ein unserer vier ähnliches Zeichen für 90. Aus dem männlichen Substantiv tigus (decas) ist die unflektierte Nachsilbe »zig« geworden. Im Althochdeutschen heifst sie »zuc«, später »züc«. Man sagte für 100 zehan-zuc.

Aus diesen dürftigen Notizen geht wenigstens so viel hervor, dafs die Altgermanen ein Zahlsystem mit dekadischer Ordnung und Zahlwörter bis zu 1000 hatten, dafs sie in den einfachen Operationen des Zu- und Abzählens, des Vervielfachens und Teilens bewandert waren, und dafs sie nach einer ausgebildeten Zeitrechnung Termine bestimmten. Beim Spiel wird addiert, wenn man gewinnt; subtrahiert, wenn man verliert; geteilt, wenn mehrere zugleich ein Spiel vornehmen; und wenn es sich um ein Vermögen handelt, das verspielt wird, kommen nicht blofs die kleinsten Zahlen zur Anwendung. Die Anzahl der Streiter wurde durch Multiplikation berechnet, welche sich bis in die Tausende erstreckte. In welcher Weise aber unsere Altvordern diese Funktionen vollzogen und welcher Hilfsmittel sie sich dabei bedienten, darüber haben wir leider keinerlei zuverlässige Anhaltspunkte. Wahrscheinlich nahmen sie ähnliche Manipulationen vor wie Neger und Indianer, wobei die Finger und das Kerbholz eine hervorragende Rolle spielten.

Das Rechnen in den christlichen Schulen des Mittelalters.

I. Die Periode der Komputisten.

An die Stelle des ursprünglichen germanischen Rechnens trat das römische.

Das Gesetz der successiven Entwicklung mit einer Periode der Aufstrebung, der höchsten Kraftentfaltung und des Niedergangs beherrscht auch das Leben der Völker. Die Träger der antiken Kultur waren alt geworden, und ihre geistigen Güter mufsten mit naturgesetzlicher Notwendigkeit auf jüngere Völker übergehen. Unter dem Drucke der Despotie war die physische und moralische Kraft des ungeheuren römischen Reiches geschwunden, und der sittliche Niedergang hatte auch einen Verfall der Künste und Wissenschaften zur Folge. Beim Übergange aus der alten in die neue Zeitrechnung befand sich die geistige Welt in einem grofsen Gärungsprozesse, und zu keiner Zeit war der Zustand der Menschheit trostloser, die sittliche Entwürdigung gröfser. Inmitten dieser allgemeinen Zersetzung erhob sich das Christentum; es begründete auf dem Prinzip der Liebe eine neue Weltordnung und gab dem Geistesleben der Völker eine andere Richtung. Die Träger der neuen Ordnung wurden jene Völker, welche die Natur in Wäldern und Wildnissen urkräftig grofsgezogen hatte. In weitem Gürtel umspannten sie das Riesenreich der Römer. Von asiatischen Nomaden im Rücken gedrängt, überschritten sie die Grenzen des Römerreiches und schlugen es in Trümmer.

Unter den wuchtigen Stöfsen der andringenden Völker schienen die geistigen Schätze, welche das alte Griechenland und Rom aufgehäuft hatten, vernichtet zu werden. Allein nicht rohen Barbaren wurde das Erbe des Heidentums anvertraut, sondern jugendfrischen Stämmen, welche bereitwillig höhere Gesittung annahmen. Seit geraumer Zeit mit den Römern in Berührung, hatten sie die geistige Überlegenheit derselben achten und schätzen gelernt. Als sie nach ihren Wanderungen feste Wohnsitze gründeten und das gesellschaftliche Leben sich ordnete, machte sich die römische Kultur wieder geltend. Die Deutschen nahmen durch ihren Verkehr mit den Romanen an der griechisch-römischen Bildung teil und trugen sie zurück in germanische Länder. Die von den Römern gegründeten Schulanstalten konnten unter den eingewanderten Völkern bestehen bleiben und erhielten Unterstützung, so lange sie besucht wurden. In Italien, das die Ostgoten in Besitz genommen, waren die hervorragendsten Staatsmänner zugleich die gröfsten Gelehrten und Rechenmeister (Capella, Cassiodorius, Boëthius). In Gallien, wo die Franken ein geordnetes Staatswesen geschaffen hatten, ahmten die Grofsen in Sitten und Gebräuchen den Romanen nach. Man schickte also die Kinder in die Schule oder liefs sie von Privatlehrern unterrichten. Der Frankenkönig Chilperich († 584) nahm sich angelegentlichst um den öffentlichen Unterricht an. Die Merovingerfürsten errichteten eine Art Hofschule nach römischem Muster, aus welcher die Referendare hervorgingen, die den Schriftverkehr der Staatsverwaltung zu besorgen hatten. Die Bildungsbestrebungen wuchsen mit der Einführung des Christentums. Wo immer das Christentum Eingang fand, wurden Bistümer, Pfarreien und Klöster mit eigenartigen Schuleinrichtungen gegründet. (Kathedral-, Parochial- und Klosterschulen.) In dem Kampfe, welchen das aufgehende Christentum mit den Waffen des Friedens gegen das Heidentum aufnahm, erscheint als gewaltige Institution die Stiftung des Benedikt von Nursia (480—543).

Von Monte Casino aus wurde das gesamte geistige Leben des Abendlandes in christliche Bahnen geleitet. Auf allen Gebieten der geistigen und materiellen Kultur haben die Benediktiner eine höchst ruhmreiche, wahrhaft universale Thätigkeit entfaltet. Sie rodeten die Wälder, trockneten die Sümpfe, bebauten den Boden, förderten das Handwerk, sammelten die Schriften der alten Klassiker und vervielfältigten sie in Manuskripten, gründeten Bibliotheken, errichteten Schulen, bildeten Lehrer, Geistliche, Staatsbeamte; auch die Kinder des Volkes schlofs ihr allumfassendes Wirken ein. In der Verborgenheit der Klöster fand die Wissenschaft unter den Stürmen der Völkerwanderung eine Freistätte; hier wurden die spärlichen Reste griechisch-römischer Wissenschaft gesammelt, bewahrt und in bessere Zeiten hinübergerettet. Aus den benediktinischen Schulen gingen die Männer hervor, welche sich mit Liebe in die mathematischen Wissenschaften früherer Zeit vertieften und diese weiteren Kreisen zugänglich machten.

Im Reiche der Westgoten wirkte im 6. Jahrhundert Isidor Hispalensis, der gelehrte Bischof von Sevilla (Hispalis). In seiner aus 20 Büchern bestehenden Encyklopädie, die Ursprünge, Origines oder Etymologien genannt, sind auch die vier mathematischen Disciplinen, Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie behandelt. Die Arithmetik stellt er den übrigen Disciplinen voraus, weil sie zu ihrer Darlegung keiner anderweitigen Vorkenntnisse bedarf.

Die Wogen der Völkerwanderung brachen sich am Meeresgestade, daher blieb die britische Insel unberührt vom Kampfe der Nationen. Die christliche Kultur konnte sich hier ungestört entwickeln. Von der Missionsstation, welche Gregor der Grofse hier gegründet hatte, zogen irische Mönche über das Festland, um Klöster und Schulen ins Leben zu rufen. Irland besafs in seinen Klöstern wahre Gelehrtenschulen. Die Zierde derselben war Beda Venerabilis.

Mitten im grofsen Walde Ostfrankens, an der Grenze von Bayern, Hessen, Thüringen und Franken gründete Bonifatius, der selbst schon als Lehrer gewirkt und Schulbücher verfafst hatte, das Kloster Fulda. Es sollte der Mittelpunkt von den christlichen Schöpfungen des Apostels der Deutschen werden und die Verbindung unter den neubekehrten deutschen Stämmen herstellen. Hier sehen wir den wissenschaftlich gebildeten Mönch Hrabanus Maurus in unterrichtlicher Thätigkeit.

An einer der besuchtesten Heerstrafsen, die nach Rom und dem Orient führte, enstand das Kloster Reichenau. Hier fanden sich Pilger und Gelehrte aus allen Nationen zusammen. An der Schule daselbst lehrte Walafried Strabus.

Das Werk des Bonifatius suchte Karl der Grofse zu vollenden. Er fafste den Gedanken, eine allgemeine christliche Volksbildung durch ein System von Schulen zu begründen und suchte ihn mit beharrlicher Energie durchzuführen. In Alkuin, dem bedeutendsten Vertreter angelsächsischer Bildung, fand er den Mann, der befähigt war, die erhabene Idee des Kaisers in die That umzusetzen.

Auch in Bayern hatten irische Mönche und Benediktiner sehr früh ein höheres Geistesleben wachgerufen. An der Donau, am Saume der Seen zu Füfsen des Hochgebirges und in den angrenzenden österreichisch bajuwarischen Landesteilen entstanden die ersten Klöster und Schulen: Tegernsee, Wessobrunn, Metten, Benediktbeuern, Polling, Niederaltaich, Freising, Sct. Emmeram zu Regensburg, Kremsmünster u. a. Spuren litterarischer Thätigkeit finden sich noch aus der ersten Zeit ihres Bestehens. 774 erhielt Bayern in der Pastoralinstruktion der Synode von Neuching das erste Schulgesetz, in dem es heifst: »Ein jeder Bischof soll an seinem Sitze eine Schule errichten und einen weisen Lehrer bestellen, der nach der Überlieferung der Römer zu unterrichten und Schule zu halten verstehe«. Die Bibliothekverzeichnisse der vorgenannten Klöster weisen zahlreiche Schriften über den Komputus, den Abakus und die Minutien auf. In Tegernsee, und wahrscheinlich auch an vielen anderen Klöstern, wurde nach den Schriften des Boëthius unterrichtet.

Die germanischen und romanischen Völker bildeten im frühen Mittelalter sozusagen einen einzigen weltlich-geistlichen Staat. Römisch-katholisch war die Religion, römisch waren die Bildungselemente, römisch das Recht; das Lateinische war die gemeinsame Sprache der Kaiser, Kirchenfürsten, Geistlichen und

Gelehrten. Mit Hilfe dieses gemeinsamen Verkehrsmittels wurden die Grenzen der Länder überbrückt und die Verschiedenheit der Stammesidiome ignoriert; darum lehren Angelsachsen in Deutschland und Franken, Deutsche in Italien, Italiener in Deutschland. Römisch war auch das Rechnen, und zwar durch das ganze erste Jahrtausend der christlichen Zeitrechnung.

Gehen wir nun zu den Männern selbst über, die unser Interesse für das Rechnen in Anspruch nehmen.

Der Begründer des Unterrichts und der Gelehrsamkeit bei den Angelsachsen und einer der berühmtesten Lehrer des frühen Mittelalters war Beda der Ehrwürdige an der Doppelabtei Wearmouth (Wiremuth) = Yarrow. Hier verbrachte Beda (geb. um 673, † 735) sein Leben in ruhiger Emsigkeit. Mit 19 Jahren wurde er Diakon, mit 30 Jahren Priester. Beda sammelte die Wissenschaften aus älteren Quellen, wenn auch nur als Bruchstücke, und bearbeitete sie für den Lehrzweck. Die reiche Klosterbibliothek kam ihm dabei zu statten. An der schottischen Grenze lebte er unter Mönchen, welche sich für Mathematik lebhaft interessierten, was auf die litterarische Thätigkeit Bedas nicht ohne Einfluſs blieb. All seine hinterlassenen Schriften sind Schulbücher, die sich durch ihre Gediegenheit und Faſslichkeit auszeichnen und jahrhundertelang beim Unterrichte gebraucht wurden. Diese Schriften enthalten Belehrungen aus der Physik, Geologie, Astronomie, mathematischen Geographie, über Sonnen- und Mondfinsternisse und andere kosmische Erscheinungen. In der Schrift temporum ratione gibt Beda die Erklärung der Zeiteinteilung im chronologisch geschichtlichen wie im natürlichen Sinne. Die Berechnung der kirchlichen Festtage behandelt er in einem eigenen Rechenbuche, liber de ratione computi,[1]) welches auch Rechnungsaufgaben enthielt, ein Beweis, daſs damals Bedürfnis und Neigung zur Arithmetik vorhanden, und daſs man in Auflösung bestimmter Rechenaufgaben geschickt war. In diesem Buche schlieſst sich Beda an Boëthius, Cassiodor und Isidor an. Auch kannte er die Bruch- oder Minutienrechnung nach römischer Weise, speciell nach dem Kalkül des Aquitaniers Victorius (um 440 n. Ch.). Beda widmete

[1]) Es ist nicht zuverlässig festgestellt, ob die Schriften temporum ratione und liber de ratione computi auch wirklich von Beda sind; und wenn sie unterschoben wären, würde das seinen Ruhm nicht schmälern.

sich seiner Aufgabe als Lernender und Lehrer mit gröſstem Eifer. Seine Ziele waren praktische Belehrung und sittliche Bildung. Daher kam die Klosterschule Yarrow unter Bedas Leitung zu hohem Ruhme, so daſs ihr aus weiten Fernen Schüler zuzogen.

Aus den weitläufigen Erklärungen Bedas geht hervor, daſs er eine dem Laien neue Sache behandelte. Beim schriftlichen Rechnen gebrauchte er römische Ziffern. Weil die römische Numeration umständlich war, und die freien Operationen rascher zum Ziele führten, zog man das Kopfrechnen vor. Dazu bedurfte man aber einer mnemotechnischen Hilfe, und diese bot sich in der altertümlichen, längst bekannten Fingerrechnung. Die Zahlen, welche gemerkt werden sollten, und auf welche man beim Fortgange der Rechnung wieder zurückkam, waren rascher durch eine charakteristische Fingerstellung fixiert, als durch das Anschreiben der römischen Ziffern. Beda sagt das selbst in der Einleitung über die Zeitrechnung: »Wir hielten es für nötig, erst in Kürze die überaus nützliche und stets bereite Geschicklichkeit der Fingerstellungen zu zeigen, um dadurch eine möglichst groſse Leichtigkeit des Rechnens zu geben; dann, wenn der Geist des Lesers vorbereitet ist, wollen wir zur Untersuchung und Aufhellung der Reihe der Zeiten mittels Rechnung kommen«. Darauf lehrt Beda ausführlich, wie man, von der linken Hand beginnend und zur rechten fortschreitend, die einzelnen Zahlen durch Fingerbewegungen darstellen soll. Beda verdanken wir genauere Mitteilungen über die Fingernumeration.

Die linke Hand diente zur Darstellung der 9 Einer und 9 Zehner. Man ging von den gestreckten, geschlossenen Fingern aus.

Es werden gebogen zur Darstellung der

1 der kleine Finger,
2 kleiner und Goldfinger,
3 kleiner, Gold- und Mittelfinger,
4 Mittel- und Goldfinger,
5 Mittelfinger,
6 Goldfinger,
7 der kleine Finger berührt den Ballen des Daumens,

8 kleiner und Goldfinger berühren den Ballen des Daumens,
9 die drei äufseren Finger berühren den Ballen des Daumens,
10 der Zeigefinger wird an das erste Glied des Daumens gelegt,
20 die Daumenspitze wird zwischen Zeige- und Mittelfinger gelegt,
30 der Nagel des Daumens und der Zeigefinger berühren sich,
40 der Daumen wird mit der Innenseite an den Zeigefinger angeschlossen,
50 das Oberglied des Daumens allein wird gebogen,
60 Daumen über den gebogenen Zeigefinger gelegt,
70 Zeigefinger über den gebogenen Daumen gelegt,
80 der Zeigefinger wird über den gestreckten Daumen gebeugt,
90 der Zeigefinger wird an die Wurzel des Daumens angelegt.

Die rechte Hand machte die Zeichen für 9 Hunderter und 9 Tausender.

100 der kleine Finger gebogen, die übrigen Finger gestreckt,
200 kleiner Finger und Goldfinger gebogen,
300 die ersten drei Finger gebogen,
400 Mittel- und Goldfinger gebogen,
500 Mittelfinger gebogen,
600 Goldfinger gebogen,
700 kleiner Finger den Daumenballen berührend,
800 kleiner und Goldfinger den Daumenballen berührend,
900 die drei ersten Finger den Daumenballen berührend,
1 000 Zeigefinger an das erste Glied des Daumens angesetzt,
2 000 Daumenspitze zwischen Zeige- und Mittelfinger gelegt,
3 000 die Nägel des Daumens und Zeigefingers berühren sich,
4 000 Daumen mit der inneren Seite an den Zeigefinger angeschlossen,
5 000 Oberglied des Daumens gebogen,

10 000 linke Hand mit dem Rücken an die Brust gelegt, Richtung aufwärts,
100 000 rechte Hand mit dem Rücken an die Brust gelegt, Richtung aufwärts,
200 000 rechte Hand in horizontaler Lage mit dem Rücken an die Brust gelegt,
1 000 000 die Finger beider Hände über dem Kopfe ineinander gelegt, Hände geschlossen.

Die Zeichen der Dactylonomia waren also willkürlich gewählte manuelle Zahlbilder zur Unterstützung des Gedächtnisses beim Festhalten der Zahlen. Zusammengesetzte Zahlen wurden vermutlich als Summanden nach einander dargestellt, 25 also durch das Zeichen für 20, dann für 5. Ob und in welcher Weise mit den Fingern gerechnet wurde, sagt Beda nicht. Eine Beschreibung der Fingerrechnung wäre auch zu umständlich gewesen. Die Fingernumeration wurde daher traditionell von Generation auf Generation durch Jahrhunderte fortgepflanzt.

Die Loquela digitalis stand höchst wahrscheinlich auch im Zusammenhange mit der in Klöstern geübten Zeichensprache, welche bei dem von der Ordensregel gebotenen Silentium sich von selbst geltend machte.

Zur selben Zeit, als Beda starb, wurde Alkuin geboren (735). Seine Bildung erhielt er von den Schülern Bedas, Egbert und Aelbert, an der Kathedralschule zu York. Mit Karl dem Grofsen traf er auf einer Rückreise von Rom zusammen, und Karl, dessen Scharfblick die hervorragende Befähigung Alkuins erkannte, lud ihn zu sich an den Hof. Alkuin gewann des Kaisers volle Freundschaft; er wurde die Seele seiner genialen Kulturschöpfungen und das Werkzeug zur Ausführung seiner wohlgemeinten Pläne. Zunächst suchte Karl seine idealen Neuerungen in seiner nächsten Umgebung zu verwirklichen. Diesem Bestreben verdankt die berühmte Palastschule ihr Entstehen. An derselben verkehrten Gelehrte aus aller Herren Länder; deshalb nahm sie den Charakter einer Akademie an. Weil Karl selbst sich gern wissenschaftlich, namentlich mit der Astronomie, beschäftigte, so wirkte er aufserordentlich erfolgreich durch sein Beispiel, und die Pflege wissenschaftlicher Studien gehörte bald zum Hoftone. Karl wollte, dafs der öffentliche Gottesdienst zu einem geregelten

Volksunterricht benutzt werde; die Geistlichen sollten den Unterricht erteilen und deshalb auch die zur Information der Jugend notwendige Bildung erhalten. Auch das Rechnen war in seinen Schulverordnungen berücksichtigt. Das berühmte Kapitular v. J. 789 schreibt vor: Der Geistliche soll die Arithmetik und Astronomie insoweit kennen, dafs er die Zeit der Kirchenfeste selbst zu berechnen vermöge. An allen Stiftern und Klöstern sollen öffentliche Schulen sein, in welchen die Knaben nebst anderem die Schriftzeichen und Anfangsgründe des Rechnens zu erlernen haben. 801 verfügte Karl, dafs jedermann seinen Sohn zu litterarischer Lehre senden und mit aller Sorge darin belassen solle, bis er gut unterrichtet ist, eine Verordnung, in welcher uns der moderne staatliche Lernzwang zum ersten Male entgegentritt.

Alkuin sorgte für tüchtige Lehrer, die er aus Italien kommen liefs. Er entwarf den Unterrichtsplan, beschaffte Lehrbücher und bildete seine Schüler zu künftigen Lehrern. Die Wissenschaften teilte er in drei Gebiete: die Ethik (Mensch), die Physik (Natur) und Theologie (Gott). Arithmetik und Geometrie waren in der Physik enthalten. Die zum Unterrichte benötigten Manuskripte verschrieb er sich aus seiner Heimat.

Der Unterricht im Rechnen fing mit den 4 Species an. Die Grundoperationen wurden mit römischen Ziffern ausgeführt. Um die Zahl 235 mit 4 zu multiplizieren, mufste Alkuin so verfahren: CC viermal (200, 400, 600, 800) gibt DCCC; XXX viermal (30, 60, 90, 120) gibt CXX; zusammen DCCCCXX; V viermal genommen (5, 10, 15, 20) gibt XX. Die gesuchte Zahl ist also DCCCCXL.

Das Bruchrechnen wurde erst auf höheren Stufen behandelt, weil der römische Minutienkalkül sich nur für reifere Schüler eignete.

Alkuin wird eine Sammlung arithmetischer Aufgaben nebst Auflösungen zugeschrieben. Einige Beispiele hieraus:

Zwei Männer kaufen für 100 Solidi Schweine, je 5 Schweine zu 2 Solidi. Die Schweine teilen sie unter sich, verkaufen sie, wie sie dieselben gekauft haben, und behalten einen Nutzen übrig. Wie ging das zu?

Auflösung. Bei der Teilung hat jeder 125 Schweine, denn 250 kauften sie im ganzen. Die Schweine sind aber von verschiedenem Werte, so dafs von der einen Qualität 2 für einen Solidus verkauft werden, von der andern 3, also in der That wieder 5 für 2 Solidi. Daher geben 120 von den teuern Schweinen einen Erlös von 60 Solidi, 120 von den billigen bringen noch 40 Solidi ein. Also haben beide Schlauköpfe jetzt ihre 100 Solidi wieder und noch 10 Schweine übrig. Die Aufgabe ist bezeichnend für die Richtung der Arithmetik in den Hofkreisen. Man fand Gefallen an schalkhaften, rätselhaften und scharfsinnigen Einkleidungen.

Eine andere Aufgabe: Wenn 100 Scheffel unter ebensoviele Personen verteilt werden, so dafs ein Mann 3, eine Frau 2, ein Kind $^1/_2$ Schäffel erhält, wie viel Männer, Frauen und Kinder waren es?

Die Auflösung konnte mittels der diophantischen Gleichungen erfolgen, welche der am Ende des 4. Jahrhunderts lebende griechische Mathematiker Diophantus entwickelte. Seine Auflösungsmethoden sind aber mit seinen Schriften verloren gegangen. Von den 7 möglichen Auflösungen hat Alkuin nur eine, und zwar eine arithmetische; es ist also nicht wahrscheinlich, dafs er mit den diophantischen Gleichungen bekannt war.

Die 4. Aufgabe lehrt die Summierung einer arithmetischen Reihe, indem sie darauf aufmerksam macht, dafs je 2 zum Anfang und Ende der Reihe symmetrisch liegende Glieder dieselbe Summe besitzen. In der 23. Aufgabe ist nach dem Inhalte eines Feldes gefragt, dessen Seiten durch die Zahlen 30, 32 und 34 gemessen werden.

Einzelne Aufgaben haben eine merkwürdige Ähnlichkeit mit denen der Inder Brahmegupta und Bhaskara. Ein Beispiel möge diese Ähnlichkeit darthun:

Ein Wanderer trifft mit Schülern zusammen und fragt sie: Wie viel seid ihr in der Schule? Da antwortete einer von ihnen: Nimm unsere Zahl doppelt, multipliziere sie mit 3 und dividiere (das Produkt) mit 4. Rechnest Du mich noch dazu, dann sind es im ganzen 100. Die Auflösung erfolgt durch Inversion, d. i. durch Rückschlüsse nach dem Modus der Inder: $100 - 1 = 99$; $99 \cdot 4 = 396$; $396 : 3 = 132$; $132 : 2 = 66$.

Auch die bekannte Brunnenaufgabe: Ein Trog wird von einer Röhre in 2, von einer andern in 3 Stunden gefüllt etc., dann die Aufgabe: Ein Hund verfolgt einen Hasen, welcher um x Sprünge voraus ist, und holt denselben nach einer bestimmten Zahl von Sprüngen ein, sind in Alkuins Sammlung enthalten. In einer rohen Kreisberechnung wird $\pi = 4$ gesetzt. Auch auf einfache Teilungsrechnungen verstand er sich. Scherzrätsel und magische Quadrate sind nicht vergessen. Von letzteren folgen einige als Probe in moderner Darstellung.

4	9	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15
15	15	15	15

2	7	6	15
9	5	1	15
4	3	8	15
15	15	15	15

5	10	3	18
4	6	8	18
9	2	7	18
18	18	18	18

Die horizontalen, vertikalen und Diagonalreihen ergeben immer dieselbe Summe.

Ähnliche Sammlungen wie die alkuinische haben in der karolingischen Zeit wohl in keiner besseren Klosterschule gefehlt.

Berücksichtigt man, wie schwer es ist, Gleichungen durch einfache arithmetische Operationen, und zwar mit römischen Ziffern zu lösen, so mufs uns die geistige Spannkraft Alkuins, seine hohe Begabung, sein reiches Wissen, sein unermüdetes Streben die gröfste Achtung abgewinnen. Alkuin verlebte 14 Jahre an Karls Hofe. Er gründete bei der Abtei St. Martin in Tours die nachmals so berühmte Schule, verbunden mit einer grofsartigen Bibliothek, und in diesem Kloster beschlofs er auch sein Leben am 19. Mai 804.

In der Schule zu Tours, welche überhaupt die bedeutendsten Männer des folgenden Jahrhunderts erzog, erhielt Hrabanus Maurus (geb. zu Mainz 766) seine Ausbildung. Er wurde Vorsteher und Lehrer der Klosterschule in Fulda, später Erzbischof von Mainz. Von Hrabanus Maurus ist ein Lehrbuch der Arithmetik in 96 Kapiteln vorhanden. Es behandelt die Einteilung der Zahlen in gerade und ungerade mit Unterabteilungen und betrachtet die Zahlen in ihrer gegenseitigen Beziehung nach dem Gesichtspunkte der Gleichheit, die gröfseren Zahlen als Vielfache der kleineren. Auch nach geometrischen Beziehungen wurden die Zahlen aufgefafst und demgemäfs Linear-, Trigonal-, Quadrat-, Pentagonalzahlen etc. unterschieden. Der griechische Einflufs tritt hier unverkennbar hervor. Die Brüche waren nicht abstrakte Zahlen, sondern aliquote Teile des römischen As und der Uncia.

Ein Schüler des Hrabanus Maurus war Walafried Strabus (der Schielende), geb. 806 in Alemannien. Er wurde Lehrer und Abt im Kloster zu Reichenau und hat hier ein Tagebuch geführt, welches erst in der neueren Zeit aufgefunden und veröffentlicht wurde. Dasselbe zeichnet ein frisches Bild des damaligen Erziehungs- und Unterrichtswesens in den Klosterschulen und gibt insbesondere über den unterrichtlichen Betrieb der Arithmetik interessante Aufschlüsse. Diese Mitteilungen sind um so höher zu schätzen, als wir über die methodische Behandlung des Rechenunterrichts im früheren Mittelalter fast aller Nachrichten entbehren. Walafried Strabus erzählt: »Im Sommer des Jahres 822 begann ich unter Tattos Leitung das Studium der Arithmetik. Zuerst erklärte er uns die Bücher des Konsuls Manlius Boëthius über die verschiedenen Arten und Einteilungen, sowie über die Bedeutung der Zahlen, dann lernten wir das Rechnen mit den Fingern und den Gebrauch des Abakus nach den Büchern, welche Beda und Boëthius darüber geschrieben haben. Die Zeiteinteilungen der Hebräer, Griechen und Römer nahmen unsere Zeit und Aufmerksamkeit in hohem Grade in Anspruch. Zur Abwechslung und Unterhaltung lösten wir die mathematischen Rätsel, welche Alkuin für den grofsen Karl gefertigt hat. Ich versuchte es späterhin selbst, solche Rätsel zu entwerfen, und habe mehrere derselben in Hexametern ausgearbeitet. 823 setzten wir unser Studium nach Boëthius fort. Zunächst beschäftigten uns seine drei Bücher über Geometrie, wozu wir überdies eine Sammlung mehrerer anderer Schriften benutzen konnten. Nachdem wir die Figuren und deren Eigenschaften kennen gelernt hatten, mufsten wir selbst ähnliche entwerfen und bestimmen lernen. Auch nahmen wir späterhin Vermessungen von Linien, Flächen und Körpern vor und mafsen nicht blofs die Grundstücke des Klosters und deren Entfernungen auf der Insel (Mainau), sondern auch die Höhe der Gebäude und Türme.« Die bereits erworbenen geographischen Kenntnisse wurden, wo es anging, durch Berechnungen nachgewiesen und begründet.

In der Schrift des Hrabanus Maurus de computo ist das Werkchen eines Mönches Wichram enthalten, der in der zweiten Hälfte des 9. Jahrhunderts Lehrer an der Klosterschule zu St. Gallen war. Dieses Büchlein wurde nach Bedas Schriften verfaſst und hatte den Zweck, die studierende Jugend mit den Elementen des Rechnens und der christlichen Festrechnung bekannt zu machen.

Der Unterricht in der Mathematik im früheren Mittelalter ruhte auf griechisch-römischen Grundlagen. Es ist daher nicht überraschend, wenn uns in dieser Zeitperiode auch die Zahlenmystik begegnet. Die Pythagoreer suchten in den Eigenschaften der Zahlen Beziehungen zum Weltall. Als man die spärlichen Reste mathematischer Wissenschaft aus römischen und griechischen Quellen auffand, übertrug man die Zahldeutung der Pythagoreer auf die Bibel und suchte dieselbe arithmetisch zu interpretieren. Hrabanus Maurus beantwortet die Frage, warum Christus 40 Tage gefastet habe, auf folgende Weise: »Die Zahl 40 enthält die Zehnzahl viermal, wodurch alles angedeutet wird, was das Zeitliche betrifft, denn nach der Vierzahl verlaufen die Tages- und Jahreszeiten. Ferner haben wir in der Zehnzahl Gott und die Kreatur zu erkennen. Die Dreiheit deutet auf den Schöpfer, die Siebenzahl auf das Geschöpf, das aus Leib und Geist besteht. Im Geist ist eine Dreiheit: denn wir müssen Gott lieben aus ganzem Herzen, aus ganzer Seele und aus ganzem Gemüte. Im Leibe offenbaren sich die 4 Elemente, aus denen er besteht. Wenn wir also durch das, was durch die Zehnzahl angedeutet ist, bestimmt werden, enthaltsam von allen weltlichen Lüsten zu leben, so heiſst das 40 Tage fasten. So enthält die hl. Schrift Geheimnisse, die denen verborgen bleiben, welche die Bedeutung der Zahlen nicht kennen. Deshalb ist es notwendig, daſs alle, welche ein höheres Verständnis der hl. Schrift erhalten wollen, die Arithmetik mit Eifer studieren.« Es möge dieses eine Beispiel genügen. An solch sonderbarer Zahldeutung hatten die hervorragendsten Gelehrten das gröſste Interesse, um so mehr, als ihnen die wahre Natur der Zahlen verborgen blieb. Der Kirchenvater Augustinus, Gregor der Groſse, Karl der Groſse waren der Zahlenmystik zugethan.

Die äuſseren Formen des Unterrichts hatten römischen Zuschnitt. Der Unterricht war in Fragen und Antworten gefaſst. Letztere muſsten in Ermanglung billiger Schreibmaterialien memoriert werden. Zu vorübergehenden Aufzeichnungen waren Wachstäfelchen im Gebrauche. Das Geschriebene wurde mit dem spatelförmigen Ende des Griffels wieder ausgelöscht. Für die Geometrie gebrauchte man Staubbretter, weil sich hier die geometrischen Figuren leichter anbringen und verwischen liefsen.

Die Pflege des Rechnens wurde im Mittelalter durch ein kirchliches Bedürfnis veranlafst. In dieser Zeit waren Kalender, wie heutzutage, noch nicht vorhanden. Die Zeit des Osterfestes und die davon abhängigen Termine der übrigen kirchlichen Festtage mufsten alljährlich durch Rechnung bestimmt werden. Die Kenntnis des Komputus oder der kirchlichen Zeitberechnung war daher durch das ganze Mittelalter ein wesentlicher Bestandteil des Unterrichts für die künftigen Kleriker. Cassiodor, Isidor, Beda, Hrabanus bezeugen übereinstimmend, dafs ohne Komputus die gröfste Unwissenheit die ganze Welt umfangen würde. Von Bischöfen und Äbten wurde den Geistlichen das Studium der kirchlichen Zeitrechnung eindringlichst empfohlen. Diese verlangte die Grundrechnungsarten und die Bekanntschaft mit einigen astronomischen Beziehungen zwischen dem Jahre und dem Datum des Osterfestes, sowie der einzelnen kirchlichen Festtage unter einander. Die Anfangsgründe des Rechnens, das Zählen, das Einmaleins, die Darstellung der Zahlen mittels der Finger, welch letzteres zur Erzielung der manuellen Fertigkeit eine längere Übung erforderte, wurden daher schon den jüngsten Studenten gelehrt. Der Komputus war der Angelpunkt der Arithmetik bis aufs 10. Jahrhundert. Man bezeichnet daher die Zeit in der Geschichte des Rechnens von Beda Venerabilis bis auf Gerbert passend als die Periode der Komputisten.

---

2. Die Periode der Abacisten.

Die Idee Karls des Grofsen, seine Völker durch Bildung glücklich zu machen, schien eine verfrühte zu sein. Karl war seiner Zeit um Jahrhunderte voraus und wurde deshalb nicht verstanden. Als ihn die Fürstengruft in Aachen aufgenommen, da fehlte des Kaisers starke Hand, um alle seine Kulturschöpfungen vor dem Niedergange zu bewahren; denn der weitaussehende Geist des grofsen Kaisers lebte nicht fort in seinen Söhnen und nächsten Nachfolgern. Der Bruderzwist im eigenen Hause, die Teilung des Reiches, die Kämpfe mit äufseren Feinden, die

Kämpfe der Kaiser mit den Päpsten leiteten eine Periode des geistigen und sittlichen Verfalls ein. Daher sehen wir auf der einen Seite, in den höheren Gesellschaftskreisen, die rohe Gewalt des Faustrechts, Treulosigkeit, Eidbruch und hinterlistigen Mord, auf der andern Seite die breiten Schichten des Volkes in Knechtschaft und Unwissenheit versunken. Solche Zeitverhältnisse sind dem Aufschwunge der Wissenschaften hinderlich, und wir dürfen daher auch für unsern Gegenstand zunächst einen erheblichen Fortschritt nicht erwarten. Aber in diese Zeit fallen die Kreuzzüge und die Heereszüge der deutschen Könige nach dem Süden, welche dem aufstrebenden Bürgertume durch Eröffnung neuer Handelsbeziehungen zu steigendem Wohlstande verhalfen, während anderseits die Klöster selbst dann noch, als der Glanz ihrer Schulen verblichen war, das Erbe der Vorzeit bewahrten und in weitere Kreise trugen. Und gerade unter den Klostervorstehern und Klosterlehrern finden wir vom 9. bis zum 12. Jahrhunderte die Männer, welche, frei vom Verderbnis der Zeit, selbstlos und mit Eifer den Wissenschaften lebten.

Die von Alkuin gegebenen Anregungen wirkten in seinen Schülern fort, und es liegen Anhaltspunkte dafür vor, dafs im allgemeinen während der nachkarolingischen Zeit in den Klosterschulen derselbe Lehrstoff behandelt wurde, wie ehemals in der Yorker Schule und wie er sich in den allgemein gebrauchten Kompendien dargestellt findet, nämlich die Einteilung und Messung der Zeit, der Unterschied zwischen der Zeitrechnung nach der Sonne und dem Monde, der Kalender der Griechen und Römer, die Verschiedenheit und Beschaffenheit der Gestirne, der Planetenlauf, die Zeichen des Tierkreises, die Solstitien und Äquinoktien u. s. w. Die Lehrsätze wurden an Beispielen gezeigt. Zur Nachtzeit, wenn die Sterne am Himmel glänzten, beobachtete der Lehrer mit seinen Zöglingen den schrägen Gang der Gestirne in den verschiedenen Gegenden des Himmels. Er zeigte ihnen, wie man aus dem jeweiligen Stande derselben bei ihrem Auf- und Niedergange die Stunden der Nacht zu bestimmen vermöge, und dieses Mittel wurde beim Mangel an Uhren thatsächlich angewendet, um die Stunden für das nächtliche Chorgebet zu wissen. Bei den Cluniacensern war es Sitte, dafs der Wache haltende Mönch stets nach dem Stande der Sterne sah, um zu erfahren, welche Stunde der Nacht etwa eingetreten sei.

Im 10. Jahrhunderte fand das Rechnen mit dem Abakus nach den Boëthischen Anleitungen weitere Verbreitung, und es sind aus dieser Zeit noch Traktate über den Abakus vorhanden. Eine solche Handschrift, »Der Wiener Codex« nennt als Verfasser Odo, und Dr. Cantor ist geneigt, dieses Manuskript Odo von Cluny zuzueignen. Odo war um 879 als Sohn eines Edelmannes geboren, welcher sich am Hofe Wilhelms des Starken, Herzogs von Aquitanien, aufhielt. Er besuchte als Knabe die Klosterschule zu Tours, wo er durch den Stiftslehrer Odalric unterrichtet wurde, setzte in Paris seine Studien fort, kehrte wieder nach Tours zurück, lebte dann in der Cisterzienser-Abtei Baume und wurde zum Abte von Cluny gewählt. Er brachte die dortige Klosterschule auf eine hohe Stufe und galt als eine so angesehene Persönlichkeit, dafs die Fürsten, seiner Weisheit vertrauend, ihm die Rolle eines Vermittlers in den Streitigkeiten mit den Päpsten übertrugen. Mag auch der Verfasser des Wiener Codex noch nicht zuverlässig festgestellt sein, so ist sein Inhalt doch geeignet, uns ein Bild des Rechnens in jener Zeit zu geben, und die hier enthaltenen Bemerkungen bestätigen die bisherigen Darlegungen über den Entwicklungsgang und die Verbreitung der Rechenkunst.

Lassen wir die Schrift selbst sprechen: »Will einer Kenntnis des Abakus haben, so mufs er Betrachtungen über die Zahlen sich aneignen. Diese Kunst wurde nicht von modernen Schriftstellern erfunden, sondern von den Alten, und wird deshalb von vielen vernachlässigt, weil sie durch die Verworrenheit der Zahlen sehr verwickelt ist, wie wir aus der Erzählung unserer Vorfahren wissen. Erfinder dieser Kunst war Pythagoras, wie uns mitgeteilt wird. Deren Übung ist bei einigen Dingen notwendig, weil ohne Kenntnis derselben kaum irgend jemand es in der Arithmetik zur Vollkommenheit bringen und die Lehre des Kalküls (d. i. der wirklichen Rechenoperationen) verstehen wird. Hätten doch unsere heiligen Weisen niemals die für die hl. Kirche notwendigen Regeln auf das Ansehen jener Heiden gestützt, wenn sie gefühlt hätten, es sei eine müfsige Kunst, die jene lehrten. Will einer z. B. die Bücher des Beda Venerabilis lesen, so wird er ohne Besitz dieser Kunst wenig Nutzen erzielen können. Eben sie ist in dem Quadrivium, d. h. in der Musik, Arithmetik, Geometrie und Astronomie so notwendig und nützlich, dafs ohne sie fast alle Arbeit der Studierenden zwecklos erscheint. Wir glauben, dafs sie vor alters griechisch geschrieben und von Boëthius ins Lateinische übersetzt wurde. Aber das Buch über diese Kunst ist schwer zu lesen, und so haben wir einige Regeln auseinandergesetzt.« Hieraus ersehen wir, dafs Boëthius als der Lehrer jener Männer bezeichnet wird, welchen man den Namen der »Abacisten« beigelegt hat. Sie repräsentieren jene Schule, die sich bei Ausführung ihrer Rechnungen des Abakus bediente und die Null noch nicht kannte. Die Quelle dieser Rechnungsweise führt auf Pythagoras und von Pythagoras auf die Ägypter und Chaldäer zurück. Nach dem Zeugnisse des Odo und Hrabanus war Beda mit dem Abakus bekannt und vermutlich auch Alkuin, der von den unmittelbaren Schülern Bedas unterrichtet wurde. Ob sie aber von diesem Apparate Gebrauch machten, ist nicht erwiesen. In dem von Odo beschriebenen Abakus wurde jede Kolumne mit einem Bogen überspannt, weshalb man sie auch schlechtweg arcus hiefs. Der Stellenwert der einzelnen Kolumnen ist von rechts nach links mit römischen Ziffern ausgezeichnet. Die beweglichen Zahlzeichen, welche man in die Kolumnen setzte oder schrieb, waren entweder römische oder pythagorische Ziffern, welche ehedem Boëthius anwendete. Die Anleitung beginnt mit der Einteilung der Zahlen in digiti, articuli und compositi. Die stereotypen Manipulationsformen erstrecken sich nur auf die Multiplikation und Division; die Addition und Subtraktion müssen hieraus erkannt werden. Die Einführung in das Rechnen mit dem Abakus setzte die Bekanntschaft mit den elementaren Rechensätzen des Eins und Eins, Eins von Eins, Einmal Eins und Eins in Eins voraus.

Lassen wir nach diesen beiläufigen Bemerkungen den Verfasser weiter sprechen: »Bei der Multiplikation sind drei Zahlen notwendig, die Summe, die Grundzahl und das, was aus der Multiplikation hervorgeht«. (Wie hübsch die Ausdrücke Summe und Grundzahl andeuten, dafs man die Multiplikation nur als verkürzte Addition auffafste.) »Die Summe schreibt man oben in die Kolumne, die Grundzahl darunter, das Produkt zwischen beide Linien.« Hierbei führt Odo den Satz über die Vertauschung der Faktoren an, der uns hier zum ersten Male begegnet. »Sei V die Summe und VII die Grundzahl, dann findet zwischen beiden Zahlen Gegenseitigkeit statt, und mag man nun V mal VII oder VII mal V nehmen, so entsteht XXXV. Weiterhin lehrt Odo, wie man multiplizieren müsse, wenn Grundzahl oder Summe, oder beide aus mehreren, in verschiedenen Kolumnen befindlichen Teilen bestehen. Man beginne mit der niedersten Zahl und gehe zur nächst höheren fort; man habe acht, der Ordnung nach zu multiplizieren und merke sich, in welche

5 · 7

X	I
	7
3	5
	5

16 · 37

C	X	I
	1	6
	3	7
4	4	2
	7	
	8	
5	9	2

8216 · 4957

$\overline{\text{XM}}$	M	$\overline{\text{C}}$	$\overline{\text{X}}$	$\overline{\text{I}}$	C	X	I
				8	2	1	6
				4	9	5	7
			4	9	5	7	
		4	9	5	7		
	4	9	5	7			
			2	5	3	4	2
				4	4	7	
			4	9	5		
			1	1	4		
		1	8	6			
		8	5				
		4					
	7	2					
3	2						
3	1	2	2	1	1	1	2
	9	5		5	6		
4		7	2	6	7	1	2

Fig. 25.

Kolumne zu setzen ist, was als Produkt entsteht. Man soll schliefslich die Teilprodukte zusammenfassen und in eine folgende Kolumne schaffen, was die Einer überschreitet, und zwar soll man das Zeichen der nächsten Kolumne zurechnen, welches angibt, wie viel mal zehn vorher überflüssig waren. Zum Verständnis des Vorstehenden seien einige Multiplikationsbeispiele aus jener Zeit in modernen Ziffern hier angefügt. (Fig. 25.)

»Hat man die Multiplikation erfafst und die Zahlzeichen kennen gelernt, so mag man zur Division übergehen. Es gibt deren dreierlei auf dem Abacus: die einfache, die zusammengesetzte und die unterbrochene Division, je nachdem der Divisor einteilig ist, oder mehrteilig in aufeinanderfolgenden Kolumnen, oder mehrteilig, aber so, dafs zwischen den Teilen der Kolumne eine leer bleibt.« Das sind die Formen der komplementären Division, wie sie schon Boëthius hatte. Der Rechenmethodiker erkennt hierin das Bestreben, die Operationen vom Leichteren zum Schwereren fortschreitend anzuordnen. Die Division mit der »leeren Kolumne«, die wir heute die Division mit Nullen nennen, kommt als die schwierigste zuletzt und wird als besondere Form erst dann geübt, wenn die allgemeine Form eingeprägt ist. Die Erläuterung des Divisionsverfahrens ist wie bei fast allen abacistischen Schriftstellern unklar, was in der Schwierigkeit der Sache an sich selbst und hauptsächlich in dem Umstande begründet ist, den Wechsel der Apices in den Kolumnen unter feste Regeln zu fassen. Es war entschieden leichter, die Manipulation durch unmittelbare Anschauung kennen zu lernen, als schriftliche Regeln dafür aufzustellen.

Nach der Division behandelt Odo die Bruchteile. »Der Bruch entsteht durch eine Division, die nicht aufgeht.« Er fafst also den Bruch als das auf, was er thatsächlich ist, als Quotienten. »Die Alten haben jede Einheit ein Ganzes, ein As oder Pfund genannt. Das As hatte 12 Unzen, und so seien bei allmählicher Verminderung der Zahl auch Bruchteile der Unze entstanden.« Dann erklärt Odo die Namen der Brüche: »deunx heifst z. B. was von 12 Unzen übrig bleibt, wenn eine abgeht, also 11 Unzen; triens oder der dritte Teil des As enthält 4 Unzen. Wie die Unze der 12. Teil des As ist, so zerfällt sie selbst wieder in 24 kleinere Teile, die man Scrupeln nennt.« Odo teilt wie Boëthius einen Scrupel noch in 20 Obolen oder 4 Ceraten oder 6 Siliquen. Neu ist die Einteilung in 8 Kalken, welche die kleinste Brucheinheit bilden. Odo erklärt noch eingehend, wie mit diesen benannten Zahlen zu rechnen sei, indem jede Einheit bei der Division auf die Einheit niederen Ranges zurückgeführt werden müsse. »Schliefslich könne man nicht weiter zu kleineren Einheiten übergehen, da höre denn auch die Division auf, und man dürfe sich am Ende nicht wundern, wenn bei den Bruch-teilen etwas übrig bleibe, da er sehe, dafs auch andere Künste viele Zweifel gestatten. Ganz vollkommen sei nur der ewige Vater der Dinge, der in vollendeter Macht das Weltall schützend umfafst.«

Wir sehen, dafs diese Rechnungsweise im grofsen und ganzen römisches Rechnen ist und auf den Schriften des Boëthius basiert. Wir finden keine Spur von der Null, keine Neunerprobe, keine Sexagesimalbrüche, keine arabischen Kunstausdrücke, überhaupt nichts von dem, was die nächstfolgende Periode der Algorithmiker charakterisiert. Wenn auch pythagorische Ziffern, die so grofse Ähnlichkeit mit den modernen Zahlzeichen erkennen lassen, gebraucht wurden, so war man doch nicht im stande, sie aufserhalb des Abakus zu verwenden, weil der Stellenwert nur durch die Kolumnen gegeben war, und weil ein Zeichen fehlte, um in die leerbleibenden Stellen einzutreten.

Der vorzüglichste Repräsentant der Abacisten war Gerbert, eine lichte Erscheinung in der trostlosen Zeit des 10. Jahrhunderts, grofs als Charakter, als Gelehrter und Rechenmethodiker, der nachmalige Papst Sylvester II.

Gerbert hatte seine Heimat in den Gebirgen der Auvergne und war der Sohn armer Leute. Seine Wiege stand unweit des Klosters Aurillac, und der Scholastikus Raimund und Abt Gerald waren seine ersten Lehrer und Freunde, denen er auch sein ganzes Leben in Dankbarkeit anhing. Zum Jüngling herangewachsen, begleitete er den Grafen Borel nach Barcelona, damit er sich dort zum Nutzen der Klosterschule weiter ausbilde. So kam Gerbert zu Hatto, dem Bischofe von Vich, bei dem er sich vielfach mit Mathematik beschäftigte. Die Grafschaft Barcelona gehörte zur spanischen Mark, einem Grenzlande, in welchem sich die blutigsten Kämpfe zwischen den Mauren und Frankenkönigen abspielten. Dieser Aufenthalt gab zu der von dem englischen Historiker Wilhelm von Malmesbury in der ersten Hälfte des 12. Jahrhunderts ausgehenden Sage Anlafs, dafs Gerbert die Kunst des Abakus den Sarazenen abgelernt habe. Es ist an sich nicht wahrscheinlich, dafs Gerberts Klosterobere ihm den Besuch einer Universität bei den Ungläubigen gestattet hätten, und wäre Gerbert ohne ihre Einwilligung zu den Mauren gegangen, dann hätte die Freundschaft zu seinen Oberen jedenfalls gelitten. Hatto und Borel hatten eine Romreise zu machen und wählten den lernbegierigen Jüngling zu ihrem Begleiter. Papst Johann XIII. war überrascht von den Kenntnissen des jungen Gerbert und schrieb an König Otto, dafs ein Jüngling angekommen sei, wohlbewandert in der Mathematik und zum Lehrer sehr geeignet. Gerbert sollte einige Zeit in Rom bleiben und dann, mit Belohnungen und Ehren überhäuft, wieder zurückgeschickt werden. 972 wurde der junge Gelehrte dem König Otto I. vorgestellt. Mit seiner Einwilligung begab sich Gerbert nach Rheims, wo er erst als Schüler thätig war, dann als ausgezeichneter Lehrer die dortige Klosterschule zu hohem Ansehen brachte. Gerbert hatte sich den Inhalt der gesamten überlieferten Litteratur der Römer angeeignet und übertraf alle Komputisten vor ihm an Wissen und Können. Seine Gelehrsamkeit erschien den Zeitgenossen so unfafslich, dafs viele glaubten, er stehe mit dem Teufel im Bunde. Gerbert erteilte sicherlich einen gründlichen und anschaulichen Unterricht, dafür bürgen seine hinterlassenen Schriften, welche sich durch klare Fassung und methodisches Geschick von früheren Arbeiten in vorteilhafter Weise auszeichnen. Um die Astronomie zum besseren Verständnisse zu bringen, fertigte er verschiedene astronomische Instrumente an, namentlich konstruierte er einen Himmelsglobus so sinnreich, dafs selbst ein der Astronomie Unkundiger, wenn man ihm ein Sternbild zeigte, danach leicht die anderen am Globus auffinden konnte. Im Jahre 980 treffen wir Gerbert am Hofe Ottos II. in Ravenna, wo er eine philosophisch-mathematische Disputation mit Ohtric, einer wissenschaftlichen Kapazität, in Ehren bestand. Nach dieser glänzenden Probe seiner Kenntnisse und Fähigkeiten erhob ihn Otto II. zum Abte in Bobbio, einem Kloster an der Trebbia. Um diese Zeit fand Gerbert die 8 Bücher des Boëthius auf. Die neue Stellung sagte ihm nicht zu, weshalb er nach Rheims zurückkehrte. Später sehen wir ihn am Hofe als Berater der königlichen Familie und Erzieher des Prinzen Otto. Der jugendliche Fürst genofs, wie sich nicht anders erwarten läfst, eine gelehrte Bildung, und Gerbert wurde von der Königin, der griechischen Prinzessin Theophania, unterstützt. Otto richtete einstmals an seinen Lehrer die Bitte, in ihm der Griechen lebendigen Geist zu erwecken und ihn in der Zahlenkunde zu unterrichten. Gerbert sagte die Erfüllung dieses Wunsches zu mit den Worten: Wahrlich, etwas Göttliches liegt darin, dafs ein

Mann, Grieche an Geburt, Römer an Herrschermacht, gleichsam aus erbschaftlichem Rechte nach den Schätzen der Griechen- und Römerweisheit sucht. Gerbert war auch vielfach politisch thätig; er machte mehrere Feldzüge mit und widerstand erfolgreich den Bestrebungen Heinrichs des Bösen von Bayern, welcher während der Minderjährigkeit Ottos III. sich der Herrschaft zu bemächtigen suchte. Von einem Feldzuge zurückgekommen, schrieb er seine uns noch erhaltene Geometrie. Nach der Besiegung Karls von Lothringen wurde Gerbert zum Metropoliten von Rheims erwählt, vom Papste aber nicht bestätigt. Auch in diesen aufregenden Wirren fand er Zeit zu wissenschaftlichen Beschäftigungen: er verfertigte um diese Zeit eine Sonnenuhr und machte zur Richtigstellung derselben Beobachtungen des Polarsterns. In Rom hatte der römische Patrizier und Konsul Crescentius die Gewalt an sich gerissen, Papst Johann war in grofse Bedrängnis geraten, und diesen Zeitpunkt glaubte Gerbert als günstig zur Verwirklichung der Idee seines Lebens. Er zog mit dem Kaiser nach Italien; der Papst starb, und angesichts der deutschen Heere wurde 996 Bruno aus dem sächsischen Hause als Gregor V. zum Papste gewählt. Otto kehrte nach Deutschland zurück, Gerbert blieb in Rom als Berater des Papstes. Um diese Zeit liefs Otto III. das Grab des Boëthius mit einem Denkmal schmücken, zu dem Gerbert die Inschrift verfafst hatte; aus dieser Zeit stammt eine Abhandlung Gerberts über die Division. Gerbert wurde Bischof von Ravenna und bestieg nach dem Tode Gregors als Sylvester II. den Thron der Päpste, den er bis zu seinem i. J. 1003 erfolgten Tode innehatte.

In den von Gerbert hinterlassenen Schriften über die Mathematik findet sich fast nur Bekanntes; aber die Art, wie er es lehrte, war in mancher Beziehung originell. Zunächst ist des von ihm verbesserten Rechenbrettes zu gedenken. Es war, erzählt ein Schüler Gerberts, eine von einem Schildmacher verfertigte Tafel. Diese teilte er der Länge nach in 27 Felder und brachte auf denselben 9 Zeichen an, mit denen alle möglichen Zahlen ausgedrückt werden konnten. Von derselben Gestalt, wie diese Zeichen, machte er dann 1000 Figuren aus Horn, mit denen er je nach ihrer verschiedenen Stellung auf den 27 Feldern der Tafel die Multiplikation und Division einer jeden Zahl darstellte; denn diese Zeichen multiplizierten und dividierten mit so kurzer Arbeit die allergröfsten Zahlen, dafs wegen der Menge der Zahlzeichen sein Verfahren leichter zu begreifen als mit Worten zu beschreiben ist. In nachstehender Figur, welche links abgebrochen ist, ist der Gerbertsche Kolumnenabakus mit der Zahl 92053 dargestellt. Ob die Marken oder Kegelchen, welche in die Kolumnen gesetzt wurden mit römischen oder boëthischen (pythagorischen) Zahlzeichen versehen waren, ist noch nicht aufgeklärt. Dr. Günther (Monumenta Germ. Bd. III.) nimmt letzteres an. (Fig. 26.).

CM^4	XM^4	M^4	CM^3	XM^3	M^3	CM^2	XM^2	M^2	XM	M	C	X	I
									IX	II		V	III

Fig. 26.

Gerberts Kolumnenabakus.

In den Traktaten Gerberts erhält man von der Addition und Subtraktion nur aus der Multiplikation und Division Kenntnis. Weil die Ausführung der Rechenoperationen durch Versetzung der Rechenzeichen vollzogen wurde, so war bei der Multiplikation für jedes einzelne Produkt das entsprechende Zeichen gleich in die richtige Kolumne zu bringen, d. h. die dekadische Stelle desselben sogleich zu bestimmen. Nach der Technik des Abakusrechnens mufste diese Aufgabe für die in den verschiedensten Kolumnen liegenden Zahlen isoliert auftreten, was grofse Achtsamkeit erforderte. Man erleichterte sich die Arbeit, indem man zu allen 27 Kolumnen ein Schema anfertigte, welches für jeden Fall auswies, in welche Kolumnen bei der Multiplikation einer mehrgliedrigen Zahl mit einer mehrgliedrigen die Ziffern der Teilprodukte mit den Apices einzulegen waren.

Die Division wurde mit Hilfe der dekadischen Differenz vollzogen. Dr. Nagel gibt im Sitzungsbericht der kaiserl. österreichischen Akademie der Wissenschaften, 96. Band, nachstehendes Beispiel:

$$
\begin{array}{r l l}
737 & : \underline{16} & \\
 & : 20 = 30 & \\
600 & \ldots\ldots\ldots & 20 \cdot 30 \\
\hline
137 & & \\
120 & & \\
\hline
257 & : 20 = 10 & \\
200 & & \\
\hline
57 & & \\
40 & \ldots\ldots\ldots & 4 \cdot 10 \\
\hline
97 & : 20 = 4 & \\
80 & & \\
\hline
17 & & \\
16 & \ldots\ldots\ldots & 4 \cdot 4 \\
\hline
33 & : 20 = 1 & \\
20 & & \\
\hline
13 & & \\
4 & \ldots\ldots\ldots & 4 \cdot 1 \\
\hline
17 & : 16 = \underline{1} & \\
16 & \quad\;\; 46 & \\
\hline
1 & &
\end{array}
$$

und beschreibt das Verfahren auf folgende Weise.

»Es wird hierbei der Divisor durch Beifügung einer Ergänzungszahl auf die nächst höhere dekadische Zahl, welche nur in der höchsten Stelle Einheiten hat, abgerundet, hier der Divisor 16 auf 20 durch die dekadische Differenz 4; sodann wird durch den Divisor geteilt, was den Quotienten 30 und den Divisionsrest 137 gibt. Hierbei wurde aber dem Dividenden eine Zahl entnommen, welche um die Differenz $4 \cdot 30 = 120$ zu grofs war, daher mufs 120 wieder zu dem Divisionsreste 137 addiert werden. Das Weitere ist ein fortgesetztes Dividieren durch den erhöhten Divisor mit jedesmaliger Korrektur des Divisionsrestes. Bleibt dieser zuletzt unter dem ergänzten Divisor, so wird, wenn es noch angeht, durch den ursprünglichen Divisor geteilt, welcher dann noch einmal enthalten ist oder einen unteilbaren Rest hinterläfst. Den Schlufs bildet die Addition der gefundenen

»Quotienten«. Es ist dasselbe Verfahren, wie wir es bei Boëthius (Seite 86 und 87) kennen gelernt haben.

Am auffälligsten tritt der römische Charakter der Rechenkunst des 10. Jahrhunderts in der Bruchlehre zu Tage. Die Abacisten dieser Zeit teilten nämlich den römischen As (die Einheit), wie ehedem in Unzen und scripuli und hielten diese unvollständige Bruchteilung nebst den individuellen Namen und Zeichen der Brüche noch fest, als sie schon antiquiert war und die geltenden Maſs-, Münz- und Gewichtssysteme nicht mehr damit im Zusammenhange standen, und sohin das ganze Bruchsystem keinen höheren Wert als den einer Schultheorie beanspruchen konnte. Die Brüche wurden noch als Bruchsummen dargestellt, z. B.:

$$8^{45}/_{48} \text{ als } 8 + {}^{11}/_{12} + {}^{1}/_{48}.$$

Zur Erleichterung der Bruchmultiplikation fertigte man Tabellen an, auf welchen die Produkte aus der Bruchmultiplikation zum Nachschlagen verzeichnet waren, also eine Art Faulenzer. Später gab man allgemeine Regeln, z. B.: In der Multiplikation einer Zahl mit einer Bruchgröſse ist erstere nur mit jenem Teile zu nehmen, welchen die letztere selbst im Verhältnis zur Einheit darstellt.

Die Bruchdivision wurde (nach Dr. Nagl) in nachstehender Weise vollzogen. (Fig. 27.)

Erklärung: a) Divisor $=$ 11 As 11 Unzen. Die Zeichen hiefür wurden im Abakus in die erste Kolumne rechts gesetzt. b) Dividend: 120 As c) Dekadische Differenz unter dem Divisor. Die Ergänzung derselben geschieht auf die Zahl 20. d) $12 : 2 = 6$. Dieser Quotient unter den Digitus des Dividenden (2 im arcus X) eingelegt, sohin wegen des zweistelligen Divisors 20 in den arcus I zu schieben und von da abwärts in den Tramen n. e) Korrektur durch Addition des Produkts aus dem Quotienten 6 und der dekadischen Differenz $8\,{}^{1}/_{12} = 48\,{}^{1}/_{2}$ zum Divisionsreste. Letzterer war 0, was sich im Abakus dadurch ausdrückte, daſs der Dividend 120 herausgenommen wurde; Divisionsrest $48\,{}^{1}/_{2}$; f) Denomination aus $4 : 2$; dieselbe wird im arcus I^3 nach abwärts geschoben. g) Nachdem wegen $2 \cdot 2 = 4$ die IIII im arcus X dem Divisionsreste zu entnehmen war, blieb als solcher $8\,{}^{1}/_{2}$, wozu jetzt das Produkt aus der Denomination 2 und der Differenz $8\,{}^{1}/_{12}$ $16\,{}^{2}/_{12}$ kam. Summe bei h) $= 24\,{}^{8}/_{12}$. Diese dividiert durch 2, ergibt die Denomination I, welche wieder sekundiert und im arcus I abwärts nach n geschoben wird. Divisionsrest $4\,{}^{8}/_{12}$ (es wird die II im arcus X entfernt). k) Produkt aus der Denomination I und der Differenz $8\,{}^{1}/_{2}$ hinzugerechnet gibt Summe bei l) $12\,{}^{9}/_{12}$. Diese ist durch 20 nicht mehr teilbar, daher sie durch den ursprünglichen Divisor $11\,{}^{11}/_{12}$ geteilt wird. Die Denomination I im arcus I eingelegt und nach n geschoben. Divisionsrest ${}^{10}/_{12}$ bei m. Die angesammelten Partialquotienten ergeben 10, was im arcus X dargestellt wird.

$120 : 11\,{}^{11}/_{12}$

	C	X	I	
a		I	I	
c			VIII	
b	I	II		
d		VI	VI	
e		IIII	VIII	
f		II	II	
g		I	VI	
h		II	IIII	
i		I	I	
k			VIII	
l		I	II	
m				
n			I I II VI	

Abakus-Darstellung.

b, a	$120 : 11\,{}^{11}/_{12}$	
c	$8\,{}^{1}/_{12}$	
d, n	$: 20$	$= 06$
	$120\ (20 \times 6)$	
	000	
e	$48\,{}^{1}/_{2}\ (8\,{}^{1}/_{12} \times 6)$	
e, f, n	$48\,{}^{1}/_{2} : 20$	$= 02$
	40	
	$8\,{}^{1}/_{2}$	
g	$16\,{}^{2}/_{12}\ (8\,{}^{1}/_{12} \times 2)$	
h, i, n	$24\,{}^{8}/_{12} : 20$	$= 01$
	$20\ (20 \times 1)$	
	$4\,{}^{8}/_{12}$	
k	$8\,{}^{1}/_{12}\ (8\,{}^{1}/_{12} \times 1)$	
l, n	$12\,{}^{9}/_{12} : 11\,{}^{11}/_{12}$	$= 01$
	$11\,{}^{11}/_{12} : (11\,{}^{11}/_{12} \times 1)$	
m, n	${}^{10}/_{12}$	10

Fig. 27.

Moderne Darstellung.

Eine rohe Form der Division (aufserhalb des Abakus?) führt Specht (Geschichte des Unterrichtswesens) aus dem 10. Jahrhunderte an. Es soll die Zahl 6152 durch 15 dividiert werden. Der Rechner bildet die Vielfachen von 15 bis zu 6000, also 15, 30, 45, 60 bis zu 400 mal 15; da noch 152 übrig ist, wird diese Zahl in gleicher Weise dividiert: 15, 30, 60 ... also 10 mal 15, zusammen 410, Rest 2. Dieses höchst interessante Beispiel stellt dem Rechenmethodiker so recht anschaulich dar, wie die Division früher aufgebaut wurde, und gibt einen Wink zur Entscheidung der Frage, ob die Division zunächst im Sinne des Enthaltenseins oder Teilens zu behandeln sei.

Zu den Männern des 11. Jahrhunderts, welche die Methode des Abakus kannten, dieselbe anwendeten und über dieselbe schrieben, gehören Rudolph von Lüttich, Rogimbald von Köln, Meinzo der Scholastikus von Konstanz. Diesen Gelehrten darf wohl auch der berühmte Abt Wilhelm von Hirschau, ein Schüler des Klosters Skt. Emmeram in Regensburg, beigezählt werden. Hermann contractus (der Krüppelhafte) lehrte am Kloster Reichenau von 1043 bis 1054, seinem Todesjahre. Er besafs eine für die damalige Zeit wahrhaft universale Gelehrsamkeit. Die reichen Bücherschätze des Klosters gaben ihm die Mittel an die Hand, ein so seltenes Wissen sich zu erwerben. Unter seinen Schriften ist die Chronik am berühmtesten; doch verdienen seine Kirchenrechnungen und seine astronomischen Arbeiten, im ganzen 10 Schriften über mathematische Gegenstände, keine geringe Beachtung. Charakteristisch für seine Rechnungsweise ist ein Bruchexempel. Er sucht den Erddurchmesser aus der Gradmessung, dabei mufs er 252000 Stadien mit $^7/_{22}$ multiplizieren; um die Multiplikation bequem ausführen zu können, setzt er $^7/_{22} = {^1/_3} \cdot {^{21}/_{22}} = {^1/_3} \cdot (1 - {^1/_{22}})$.

Notker der Deutsche († 1022), ein berühmter Lehrer und Vorsteher der Klosterschule Skt. Gallen, machte die Erfahrung, dafs sich seine Schüler die Wissenschaften leichter und rascher in deutscher Sprache aneigneten. Deshalb übersetzte er verschiedene propädeutische, lateinisch geschriebene Schulschriften ins Deutsche, ein für jene Zeit ganz ungewöhnliches Unternehmen, das besonders dem Rechenunterrichte zu Gute kommen mufste. Unter den von ihm verfafsten Schriften befindet sich auch eine Arithmetik.

Viele Pflanzstätten mathematischer Bildung der damaligen Zeit liegen in der Nähe von Lüttich. Bernelinus, ein unmittelbarer Schüler Gerberts, erzählt, dafs lothringische Gelehrte vor allem der Kunst des Abakus mächtig seien. Unter diesen Männern sind zu nennen Heriger von Lobbes (Kloster bei Lüttich), Helbert v. Skt. Hubertus in den Ardennen, Franco von Lüttich. Engelbert von Lüttich, Odo der Scholastikus von Tournai werden als Astronomen erwähnt. Gerland, ein Schüler des Benediktiner-Klosters Besançon, gegen Ende des 11. Jahrhunderts, später Stiftslehrer und Bischof von Girgenti, gebraucht für die pythagoreischen Zeichen, die wir bei Boëthius kennen gelernt haben, fremdländische Wörter: 1. igin, 2. andras, 3. ormis, 4. arbas, 5. quimas, 6. caltis oder calctis, 7. tenis, 8. temenias, 9. celentis. Wildermuth bemerkt dazu, dafs diese Wörter teils dem arischen, teils dem aramäischen Sprachstamme angehören, was uns in die Euphratländer führt, wo diese beiden Sprachgebiete sich berühren.

Raoul oder Radulf von Laon, Lehrer an der Klosterschule daselbst (um 1100), wendet gleichfalls diese Fremdwörter an und macht bestimmte Angaben über den Gebrauch und die Verbreitung des Abakus Er sagt: „Jetzt ist zu besprechen, welcher Wissenschaft dieser Apparat dient. Der Abakus erweist sich als notwendig zur Untersuchung der Verhältnisse der spekulativen Arithmetik; ferner bei den Zahlen, auf denen die Modulationen der Musik beruhen (daher kommt es, dafs Schriften über den Abakus so oft mit solchen über Musik in Verbindung gebracht werden); desgleichen für Dinge, welche durch die emsigen Bemühungen der Astronomen über den verschiedenen Lauf der Wandelsterne gefunden sind und über deren gleiche Umdrehung dem Weltall gegenüber, weiter noch bei den dem Plato nachgebildeten Gedanken über die Weltseele und bei der Lektüre all der alten Schriftsteller, welche ihren scharfsinnigen Fleifs den Zahlen zuwandten. Am allermeisten zeigt sich dieser Apparat bequem bei Auffindung der Formeln in den geometrischen Disziplinen und bei Anwendung derselben auf die Ausmessung der Meere und Länder. Allein die Wissenschaft, von der ich eben rede, ist fast bei allen Bewohnern des Occidents in Vergessenheit geraten, und so wurde auch die Kunst des Kalküls beim Aufhören der Kunst, zu deren Hilfe sie erfunden war, nicht gar grofs geachtet; ja, sie kam in Mifskredit, und nur Gerbert der Weise und Hermann (contractus?) und deren Schüler pflanzten einiges bis auf unsere Zeiten fort.“ Hieraus geht hervor, dafs Gerbert und seine Schüler die halbvergessene Kunst, welche im Morgenlande erhalten war, im Abendlande in Erinnerung brachten, und dafs ein wesentlicher Unterschied zwischen den Methoden des Morgen- und Abendlandes nicht bestand. Radulf kennt die Null, verwendet sie aber nicht als Stellenzeichen, sondern als Merkzeichen, um zu wissen, mit welchen Zahlen multipliziert worden ist, also in ähnlicher Weise, wie jetzt noch das Pünktchen beim Entlehnen gebraucht wird.

Im 12. Jahrhundert erreicht das Rechnen mit dem Abakus seine letzte Entwicklungsstufe. Wildermuth führt als Beispiel die Schrift eines Anonymus an und sagt: „Nachdem derselbe die nötigen Erklärungen über den Abakus und den Gebrauch der 9 Zahlzeichen (apices) gegeben, die Digiti und Articuli erklärt und die Fingerrechnung erörtert hat, geht er zur Multiplikation über. Das Beispiel 4600 mal 23 erklärt der Anonymus selbst wie folgt: „Setzen wir“, sagt der Verfasser, „3 in die Kolumne der Einheiten und dann 2 in die der Zehner als Multiplikatoren, 6 in die Kolumne der Hunderter und 4 in die Kolumne der Tausender. Da nun die Multiplikatoren unten und die Multiplikanden oben stehen, so wird man das, was durch die Multiplikation herauskommt, in den mittleren Raum bringen. Nun sagen wir: 3 mal 6 = XVIII; die Regel hiefür ist aber die: Wenn eine Zahl in der Kolumne der Einheiten eine Zahl in irgend einer andern Kolumne multipliziert, so setzet den Digitus in diese (letztere), und den Artikel in die folgende Kolumne. Setzen wir daher VIII, welches der Digitus ist, in die Kolumne der Hunderter und X, welches der Artikel ist, in die der Tausender, und zwar in den mittlern Raum. Da man für zehn (auf den Apices) kein besonderes Zeichen hat, so setzet die Zahl, welche allein in der Kolumne der Zehner X ausdrücken kann, nämlich die Einheit. Und ebenso werdet ihr verfahren, wenn ihr ein Vielfaches von X zu setzen habt. Und damit ihr wisset, wie man die Artikel unterbringt, so setzet immer zwei für XX, drei für XXX etc. Sind die Zahlen VIII und X so gesetzt, so mufs noch 4 in der Kolumne der Tausender durch 3 in der Kolumne der Einheiten multipliziert werden, also 3 . IIII = XII. Die oben ausgesprochene Regel bleibt dieselbe; setzen wir daher diese Zahlen in den mittleren Raum, und zwar 2 in die Kolumne der Tausender, und 10 in die der Zehntausender. Es bleibt uns noch übrig, die zwei

Multiplikanden mit 2 zu multiplizieren; 2 . VI = XII. Die Regel ist diese: Wenn eine Zahl in der Kolumne der Zehner eine Zahl irgend einer andern Kolumne multipliziert, so setzet den Digitus in die nächste Stelle, von dieser letzten an gerechnet, und den Artikel in die darauf folgende. Es ist nun noch 4 in der Kolumne der Tausender durch 2 in der Kolumne der Zehner zu multiplizieren; 2 . 4 = VIII. Die Regel ist dieselbe. Man setze VIII in die zweite Kolumne von den Tausendern, und man wird nichts mehr zu multiplizieren haben.« In der That, eine klare, schlichte Darlegung, die von der vollständigen Beherrschung der Sache Zeugnis gibt. Instruktiv ist das synthetische Verfahren für den Schüler, weil er aus dem speziellen Fall die

CM	XM	M	C	X	I	
		4	6			Multiplicanden.
		1	8			Produkt aus 600 · 3
	1	2				» » 4000 · 3
	1	2				» » 600 20
	8					» » 4000 · 20
1		5	8			Gesamtprodukt.
				2	3	Multiplikatoren.

Fig. 28.

allgemeine Regel ersieht, und für den Rechenmethodiker, weil hier das Bemühen, aus den Einzelheiten des Verfahrens das Allgemeine abzuleiten, zum Durchbruch kommt.

Auf dem Abakus nimmt sich (nach Wildermuth) diese Rechnung mit unseren Ziffern so aus wie in Fig. 28.

Nach Vollendung der Multiplikation müssen die Teilprodukte addiert werden, was der Verfasser das Reinigen der Kolumnen nennt. Er beschreibt dieses Verfahren und schliefst: »Nach dieser Operation haben wir die Einheit in der Kolumne der Hunderttausender, 5 in der der Tausender, 8 in der Kolumne der Hunderter. Man kann also mit Sicherheit sagen, dafs, wenn IIII Tausend sechs Hundert mit XXIII multipliziert werden, das Produkt Einhundert und fünftausend, acht hundert ist. Die allgemeine Regel für die Multiplikation lautet: Soweit die

Kolumne, welche multipliziert, von den Einheiten entfernt ist, so weit mufs der Digitus von der Kolumne des Multiplikanden (nach links) entfernt sein, und der Artikel kommt immer in die nächste Kolumne.«

Neben der Division mit der dekadischen Differenz (regula ferrea = die eiserne Regel) tritt eine neue Form der Division auf, die regula aurea oder goldene Regel, welche unserm gegenwärtigen Verfahren ähnlich ist. Für die einfache Division dieser Methode wurden folgende Regeln gegeben. »Wenn der Divisor, als blofse Ziffer betrachtet, kleiner oder eben so

CM	XM	M	C	X	I	
	2			2	3	Divisoren.
	2					Gröfster Divisor.
1						Dividend.
	2					Rest.
			1			
	1	9	9			Derselbe Rest in anderer Form.
				8		Produkt aus dem Quotient 4 in 20.
	1	9	9	2		Rest.
				1	2	Produkt aus 4 und 3.
	1	9	9		8	Rest der Division.
					4	Quotient.

Fig. 29.

grofs ist als der Dividend, d. h. als die höchste Stelle desselben, so wird er in die Kolumne über ihn gesetzt; ist er gröfser, in die nächst niedere. Ist der Divisor eine Einerzahl, so kommt der Quotient in die nächst niedere; ist er ein Hunderter, in die zweitnächste etc. Überhaupt wird er immer um so viele Kolumnen zurückgesetzt, als der Divisor selbst seinem eigentlichen Werte nach von den Einheiten entfernt ist.

Die Division 100000 : 20023 gestaltet sich (nach Wildermuth) wie in Fig. 29.

Im ganzen stellt sich das Rechnen von Boëthius bis ins 12. Jahrhundert als das Rechnen der Stifter und Klöster dar und identifiziert sich so mit dem Rechnen der Wissenschaft. Das Volk kam aber mit den Feinheiten des Abakusrechnens gewifs nicht zurecht; es hatte jedenfalls einfachere Berechnungsweisen, worüber jedoch zur Zeit Anhaltspunkte fehlen.

Wir stehen nun an der Grenze, wo das moderne Rechnen beginnt. Die Formen der Multiplikation und Division kamen dem Rechnen der Neuzeit sehr nahe; es war nur ein Schritt zu thun: das Gerüste des Abakus mufste fallen und an Stelle der leeren Kolumne das Kolumnenzeichen gesetzt werden. Wenn dieser Fall eintritt, dann hat sich unsere Rechenkunst ganz natürlich aus der griechisch-römischen entwickelt.

Die Verbreitung der indisch-arabischen Rechenkunst im christlichen Abendlande.

Bürgerliche Schulanstalten und Rechnungsweisen.

Der Zwiespalt zwischen Kaisern und Päpsten hatte einen Rückgang der geistlichen Schulanstalten zur Folge. Dagegen erhoben sich rein bürgerliche Schulen. Nach dem Beispiele der Araber gründeten erleuchtete Fürsten Universitäten, damit die studierenden Jünglinge nicht mehr genötigt seien, den Abschlufs ihrer Bildung im Auslande zu suchen. Von den Hohenstaufen und Welfen, welche die Wissenschaft mit Begeisterung pflegten, war neues wissenschaftliches Leben angeregt worden. Die Kreuzzüge und die Heereszüge der Hohenstaufen nach dem handelsbeflissenen Süden hatten die Völker einander genähert und vielseitige Handelsbeziehungen eingeleitet, welche den heimischen Städten zu einer reichen Quelle des Wohlstandes und steigender Macht wurden. Schon gegen Ende des 12. Jahrhunderts entwickelte sich unter den Bewohnern der immer mehr emporblühenden Städte grofse Regsamkeit, und mit dem erhöhten Einflusse des jungen Bürgertums wuchs auch das Bedürfnis nach bürgerlicher Bildung, zunächst in jenen Kreisen der Bevölkerung, welche durch Wohlhabenheit, Amt und Ansehen hervorragten, dann aber auch unter den Werkmeistern, welche bei dem allgemeinen Aufschwunge der Gewerbsthätigkeit nicht zurückbleiben wollten. Die Magistrate suchten sich im Interesse der städtischen Selbstverwaltung von den Dom- und Klosterschulen loszumachen und gründeten eigene Schulen — Schriefscolen —, in welchen namentlich Schreiben, Lesen und Rechnen in deutscher Sprache gelehrt wurden. Paris hatte schon 877 eine Stadtschule; in London bestand 1154 eine Bürgerschule. Der Freiheitsbrief Friedrichs II. v. J. 1237 erwähnt die Wiener Bürgerschule zu Skt. Stephan. In Lübeck befand sich schon 1161 eine dudesche scrivescole; Anfang des 14. Jahrhunderts hatte diese Stadt vier Schreib- und Rechenschulen. In Hamburg wurde 1187, in Breslau 1267, in Stettin 1390, in Leipzig 1395 eine Stadtschule errichtet. Im Jahre 1300 schrieb das Gewerbepolizeigesetz in München vor, was an Schulgeld verlangt werden darf. In Hamburg führte um 1400 die Gründung von Stadtschulen zu einem Streit zwischen dem Domkapitel und der Bürgerschaft, in den 1402 Papst Bonifaz VIII. mit einer Bulle eingriff, welche unter Androhung des Bannes die sofortige Schliefsung aller geheimen Schulen anordnete. Die Bürgerschaft, von der Notwendigkeit der Schreib- und Rechenschulen überzeugt, gab nicht nach; so wurde endlich gestattet, diese Art von Schulen zu errichten unter der Bedingung, dafs neben dem Lesen des Deutschen, dem Anfertigen deutscher Briefe und dem Rechnen kein anderer Gegenstand in deutscher Sprache gelehrt werde.

So war wohl in allen gröfseren Städten durch eigene Schuleinrichtungen dem wissenschaftlichen Bedürfnisse des Handels- und Gewerbestandes Rechnung getragen. Auf dem Lande dagegen konnten Schulen nur da eingerichtet werden, wo entweder der Pfarrer Unterricht erteilte oder sich ein Küster fand, der lesen und schreiben konnte und sich zum Schulhalten herbeiliefs unter der weiteren Voraussetzung, dafs die Bauern ihre Kinder in die Schule schicken und den Lehrer für seine Mühe entlohnen wollten. Lesen, Schreiben, Katechismus und christliche Gesänge waren Gegenstände des Elementarunterrichts, wozu in seltenen und günstigen Fällen etwas Rechnen kam. Im ganzen fehlten noch die wesentlichen Vorbedingungen eines allgemeinen ersprießlichen Unterrichts: befähigte Lehrer, die gesetzlich ausgesprochene Lernpflicht und die äufsere Schuleinrichtung. Die Küster, meist unwissende Leute, trieben nebenbei ein Handwerk, weil das Schulhalten den Mann nicht ernährte.

Die Küsterwohnung war zugleich Schulstube. Als Schreibgeräte benutzte man noch primitive Holztafeln, welche mit Staub aus einer Büchse bestreut wurden. Für die zum Memorieren notwendigen Aufschreibungen gebrauchten die Schüler dünne, mit Wachs überzogene Holztäfelchen, in welche sie die Schriftzüge mit dem Griffel eingruben.

Wenn die Städte Schreib- und Rechenschulen gründeten, so ist das begreiflich; denn soll der Handel mehr sein als ein rohes Tauschgeschäft, bedarf er der Buchführung und der Arithmetik. Die Species, die Bruch-, Zins- und Prozentrechnung, die Mischungs- und Geldwertrechnung mufsten die Kaufleute kennen. Thatsächlich waren solche Rechnungsarten im Gebrauche. Dr. Günther (Mon. germ. Bd. III) beschreibt einen Gesellschaftsvertrag zwischen Heinz Rummel und der Patrizierfamilie Krefs in Nürnberg v. J. 1395, in dem es heifst: „Und da die Rechnung geschah, da zahlt man dem Paulus Forchtel sein gelt und wolten sein nit länger in unser gesellschaft haben". Die Rechnungsabschlüsse verzeichnen den Gewinn in Prozenten. In Italien waren um 1200 die ersten Banken entstanden, und die Wechsler schlossen sich zu selbständigen Korporationen zusammen. Der älteste bis jetzt bekannte Wechsel stammt aus dem Jahre 1325, ausgestellt in Mailand, zahlbar in 8 Monaten in Lucca. Die erste Staatsanleihe kontrahierte die Republik Venedig 1171. Um 1200 fingen die Nürnberger an „in fremde Lande Kauffmannschaft zu treiben", und um diese Zeit wanderten deutsche Kaufmannssöhne zu den Lombarden in die Scuola di Marchantani. In Deutschland erschienen die lombardischen Geldwechsler gegen Ausgang des 14. Jahrhunderts, in Nürnberg 1397. Diese Geldmäkler nahmen hohe Zinsen, in der Regel 33 Prozent; wer nur 20 Prozent nahm, galt für einen sehr anständigen Gläubiger. In Deutschland war das Zinsennehmen, das man noch im 17. Jahrhundert als W u c h e r bezeichnete, gesetzlich verboten.

Die Umgehung der Zinsen bedingte die Entwicklung des Rentenwesens; dazu war die Zinseszinsrechnung notwendig, und diese verlangte wieder die Kenntnis der Progressionen, welche daher auch in die elementaren Rechenbücher aufgenommen wurden. Die Beherrschung des Handels- und Geldmarktes, das äufserst beschwerliche Zollwesen, die mafslose Verwirrung in den Geld-, Mafs- und Gewichtsverhältnissen erforderten umfassende

Kenntnisse in der Handelsarithmetik und bequeme Rechnungsweisen. Im 13. und 14. Jahrhunderte war noch der schwerfällige römische Bezifferungsmodus im Gebrauche, wie die in den Archiven vorgefundenen gewaltigen Zahlenregister bezeugen. Ein anderer, zwar uralter, aber doch höchst prekärer Behelf war das Kerbholz. Wollte z. B. jemand bei einem Kaufmanne Waren auf Borg nehmen, so wurde der Betrag durch Einschnitte auf dem Kerbholze verzeichnet und dieses der Länge nach gespalten. Den einen der beiden Teile erhielt der Gläubiger, den andern der Schuldner. Da die Hälften zusammenpassen mufsten, waren die beiden Kontrahenten bei der Abrechnung vor Übervorteilung geschützt. Diese primitive Art der Buchführung war im 15. Jahrhundert noch in der altberühmten Handelsstadt Frankfurt üblich, wie das Statut einer Bruderschaft der Weberknechte ausweist. Dieses enthält nämlich die Bemerkung: „Item so wil auch die gemein geselschaft das alle Rechenmayster nit sollenn die kerbenn oder das gelt eynem andern leyhen, das einem wirt zusteht". In England hat sich die Zahlenkonstatierung mittels des Kerbholzes sogar in der Staatsverwaltung bis zum Anfange dieses Jahrhunderts erhalten, und in ländlichen Bezirken Bayerns ist das Kerbholz noch im Gebrauch.[1])

Abstammung und Verbreitung der modernen Ziffern.

Vom 12. Jahrhunderte ab verbreitete sich die indisch-arabische Rechenmethode über die europäischen Länder. Die Araber hatten in Spanien Akademien gegründet, in welchen das Studium der Mathematik mit hohem Eifer betrieben wurde. Der Ruf dieser Schulen zog von allen Staaten des Abendlandes Gelehrte nach Spanien, um von den Arabern zu lernen. Unter den Männern, die hier ihre Bildung erweiterten oder doch aus arabischen Quellen schöpften, sind zu nennen: Atelhard von Bath (England) 1130, ein mit der Technik des Abakusrechnens

[1]) In der Nähe von Augsburg sieht man das Kerbholz am Kummet der Pferde bei Fuhrwerken, welche Treber aus Brauereien holen. In Ortschaften am Hesselberge und in der östlichen Oberpfalz werden Bier- und Brotschulden auf dem Kerbholze vermerkt. Eine Erinnerung an diesen Gebrauch enthält das Sprichwort: einem etwas aufs Kerbholz schreiben.

vollständig vertrauter Mathematiker, welcher den Algorithmus de numero indorum und Euklids Werke übersetzte; ihm folgen noch andere Engländer, Robert von Reading 1144, Wilhelm Shelley 1145, Daniel Morley 1150. Gerhard von Cremona (1114—1187) hielt sich lange in Spanien auf und übersetzte den Almagest sowie die elementaren Werke des Archimedes. Aus dem 13. Jahrhunderte werden als Verbreiter der neuen Methode genannt: der gelehrte Franziskaner Roger Bacon (1214—1294), der in einem von ihm verbesserten Kalender die arabischen Ziffern gebraucht; Vincent von Beauvais, der berühmte Pädagog, welcher in seinem Algorismus das neue Numerationssystem erklärte. Jordanus Nemorarius schrieb eine Arithmetik in 10 Büchern. Albertus Magnus, der hervorragendste Vertreter exakter Forschung unter den mittelalterlichen Gelehrten, verdient durch seine staunenswerte Gelehrsamkeit einen ausgezeichneten Platz in der deutschen Kulturgeschichte; er war als vorzüglicher Kenner des Arabischen mit den Rechenmethoden der Araber wohl nicht unbekannt geblieben. Den Gelehrten reiht sich an der Kaufmann Leonardo Fibbonacci und der Schulschriftsteller Johann von Halifax (Sacro Bosco), † 1256. Diese Männer waren nur einzelne hervorragende Erscheinungen in dem grofsen Aufschwunge abendländischer Bildung, der auch die Arithmetik in seine Kreise zog. Die in den Arabern verknüpften Ideenkreise der Griechen und Inder kamen nun auch in den übrigen Staaten des Abendlandes zur Geltung. Der Abakus verschwindet, und nur der Titel einzelner Rechenbücher, die aber mit dem Kolumnensystem nichts zu thun haben, hält die Erinnerung an ihn wach. Es beginnt nun eine neue Zeit in der Geschichte der Mathematik, denn die arabische Rechenkunst mit ihrer einfachen Bezifferungsweise ermöglichte nach oben eine Neugestaltung und einen weiteren Ausbau der Mathematik und der mit ihr zusammenhängenden Wissenschaften, nach unten aber die Einführung leichter Berechnungsweisen im Volksleben.

Diese Wandlung vollzog sich selbstverständlich nicht auf einmal, sondern allmählich und langsam; denn das Geschlecht, welches die alten Rechnungsweisen ererbt hatte, fand sich schwer in die neuen. Es war damals wie heute; gesetzlich ist das Kilometer, Hektar und Kilogramm in Geltung; wir schätzen aber in

Wegstunden, Morgen und Pfunden, weil wir das von Jugend auf so erlernt haben. Im allgemeinen darf man die neue Rechenkunst da nicht suchen, wo man die in ihr gebräuchlichen Ziffern nicht kannte; umgekehrt aber darf man nicht schliefsen, dafs da, wo sie sich fanden, auch die indisch-arabische Rechenkunst geübt wurde; denn es läfst sich recht wohl denken, dafs man das Äufserliche derselben, die Ziffern, annahm, ohne die Anwendung derselben in den Species zu kennen.

Bevor wir auf die Verbreitung der sog. arabischen Ziffern eingehen, ist es notwendig, die Entstehung derselben zu verfolgen.

Man hat die modernen Ziffern als Zahlbilder ansehen wollen und behauptet, dafs dieselben aus Punkten oder Linien entstanden seien, welche der Zahl der betreffenden Einheiten entsprechen.

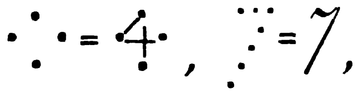


Fig. 30.

Fig. 31.

So sagt z. B. Harsdörffer 1651: »Etliche meinen, dafs die Zahlen von den Punkten oder Tüplein entstanden, die hernach in folgende Figuren zusammengezogen«. Neuere Rechenbücher leiten dieselben aus Strichverbindungen her. (Siehe Fig. 30 und 31.)

Es liegt nur ein Körnchen Wahrheit in dieser Anschauung, insoferne als sich, wie wir bereits wissen, bei den alten Kulturvölkern in der That Zeichen für 1, 2, 3 finden, welche aus ebensovielen Strichen hergeleitet sind. Dafs aber Punkte und Striche gerade in die Form der modernen Ziffern eingezwängt wurden, dafür haben wir weder einen plausiblen Grund noch historische Anhaltspunkte. Im Gegenteil weist die geschichtliche Entwicklung der Zahlzeichen nach, dafs alle Völker, welche eine höhere Kulturstufe erreicht haben, die umständliche Bezeichnung der Zahlen durch einzelne Striche verliefsen und einfachere Zeichen wählten, meist die Buchstaben des Alphabets in ihrer herkömmlichen Folge oder die Anfangsbuchstaben der betreffenden Zahlwörter. Letzteres geschah auch bei den Indern (s. d.), welche als die Erfinder der Positionsarithmetik gelten. Zum Vergleiche sei hier eine Übersichtstafel indisch-arabischer Ziffern beigesetzt, welcher zum weiteren Vergleiche eine Tabelle mittelalterlicher Zahlzeichen und Jahreszahlen folgt. (Fig. 32, 33 und 34.)

Ahnentafel der modernen Zahlzeichen.

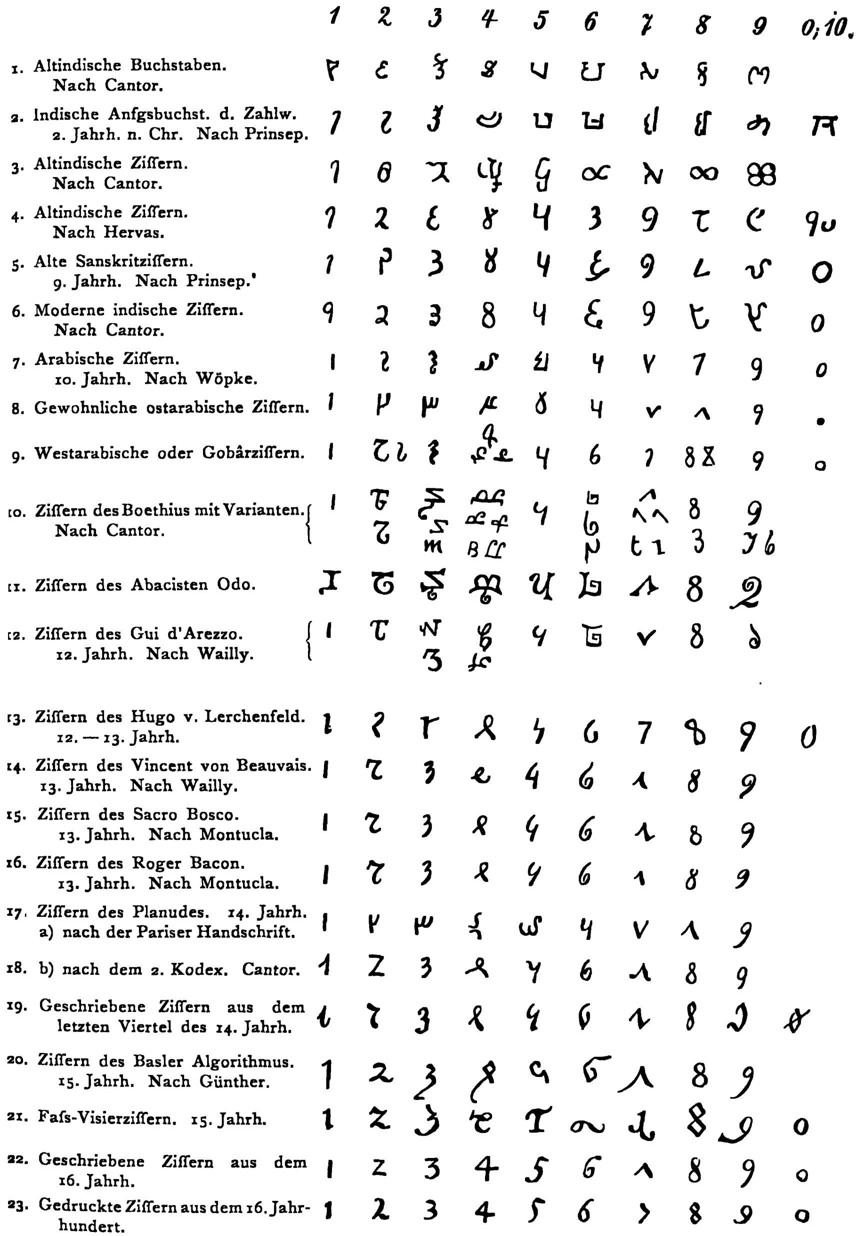
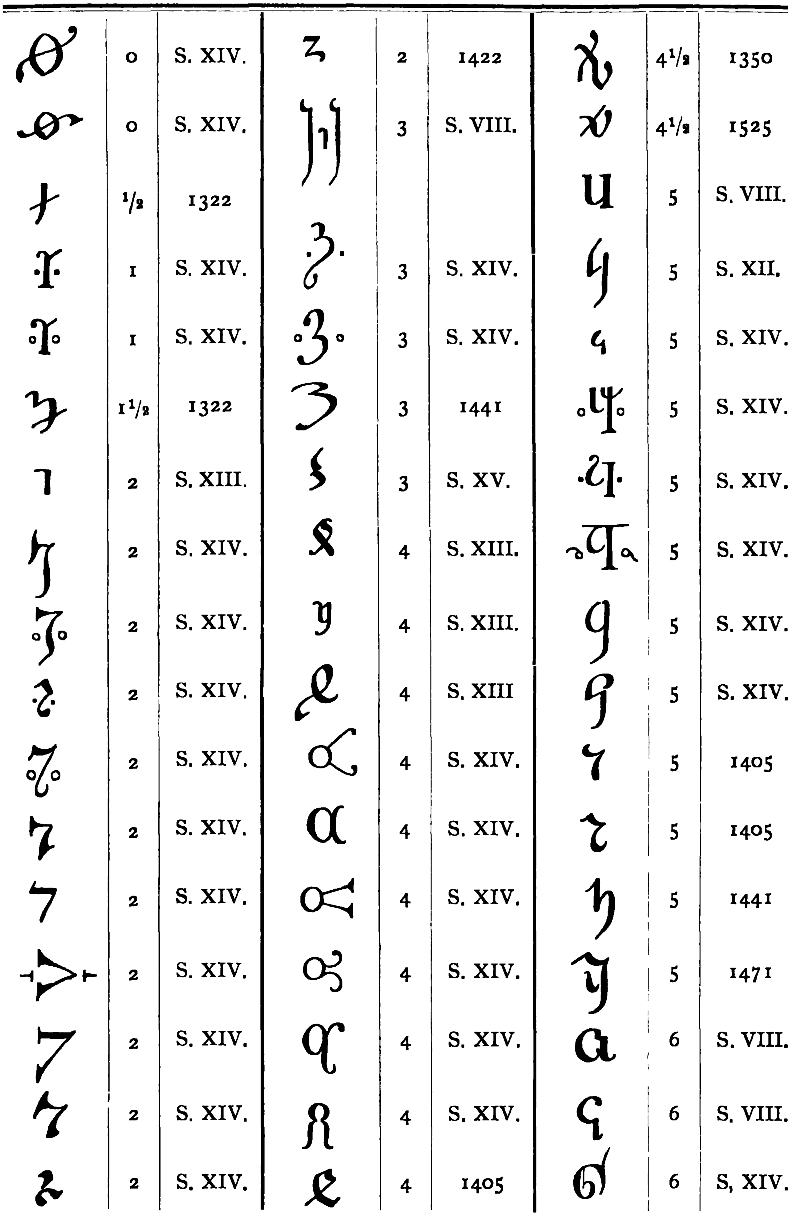


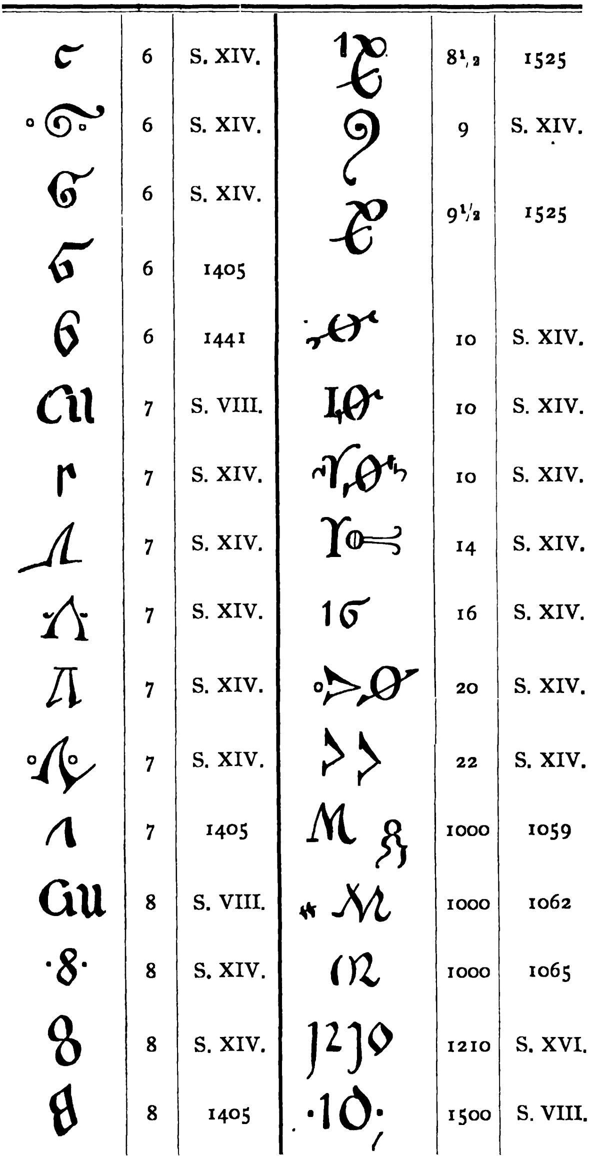
Fig. 32.

Mittelalterliche Zahlzeichen
nach dem Lexicon Diplomaticum von Joh. Ludwig Walther.
Göttingen 1745.



	0	S. XIV.		2	1422		4½	1350
	0	S. XIV.		3	S. VIII.		4½	1525
	½	1322					5	S. VIII.
	1	S. XIV.		3	S. XIV.		5	S. XII.
	1	S. XIV.		3	S. XIV.		5	S. XIV.
	1½	1322		3	1441		5	S. XIV.
	2	S. XIII.		3	S. XV.		5	S. XIV.
	2	S. XIV.		4	S. XIII.		5	S. XIV.
	2	S. XIV.		4	S. XIII.		5	S. XIV.
	2	S. XIV.		4	S. XIII		5	S. XIV.
	2	S. XIV.		4	S. XIV.		5	1405
	2	S. XIV.		4	S. XIV.		5	1405
	2	S. XIV.		4	S. XIV.		5	1441
	2	S. XIV.		4	S. XIV.		5	1471
	2	S. XIV.		4	S. XIV.		6	S. VIII.
	2	S. XIV.		4	S. XIV.		6	S. VIII.
	2	S. XIV.		4	1405		6	S, XIV.

Fig. 33.



	6	S. XIV.		$8^1/_2$	1525
	6	S. XIV.		9	S. XIV.
	6	S. XIV.		$9^1/_2$	1525
	6	1405			
	6	1441		10	S. XIV.
	7	S. VIII.		10	S. XIV.
	7	S. XIV.		10	S. XIV.
	7	S. XIV.		14	S. XIV.
	7	S. XIV.		16	S. XIV.
	7	S. XIV.		20	S. XIV.
	7	S. XIV.		22	S. XIV.
	7	1405		1000	1059
	8	S. VIII.		1000	1062
	8	S. XIV.		1000	1065
	8	S. XIV.		1210	S. XVI.
	8	1405		1500	S. VIII.

Fig. 33 (Schlufs).

Anmerkung: Die römischen Ziffern in der 3. Kolumne bedeuten das Säculum.

Um sich den Wechsel der Charaktere zu erklären, mufs man bedenken, dafs die Formen der Ziffern durch die manuelle Behandlung grofsen Schwankungen unterlagen, mehr noch zu einer Zeit, in welcher die Wissenschaft durch Manuskripte vererbt wurde, als nach Erfindung der Buchdruckerkunst, welche die Schriftzüge durch metallene Typen fixierte. Der Unterschied geschriebener Ziffern aus verschiedenen Handschriften ist ja heute noch sehr grofs; er fällt uns aber nicht auf, weil wir daran gewöhnt sind. Der eine schreibt z. B. ı mit, der andere ohne Punkt, die 7 wird von dem einen durchstrichen, von dem andern nicht u. s. w.

Jahrzahlen, meist nach Zinkernagels Handbuch.

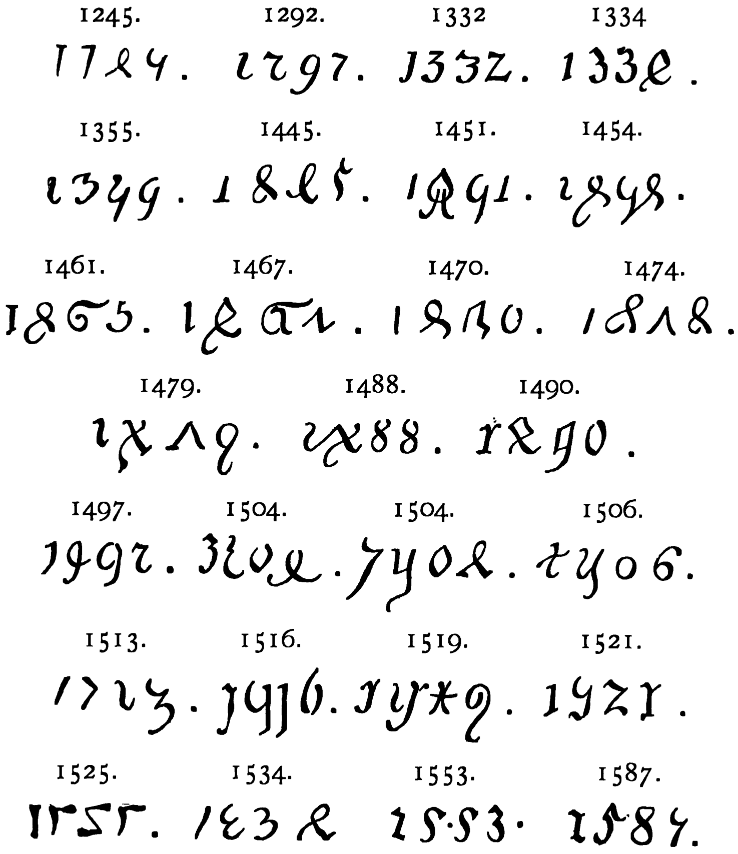


Fig. 34.

Nebstdem ist zu beachten, dafs zwischen dem ersten Auftreten der sog. arabischen Ziffern und der Gegenwart ein grofser Zeitraum liegt. Welche Wandlungen hat nicht in dieser Zeit die Schreibschrift durchgemacht? Wie verschieden sind doch die starren Formen der Mönchsschrift gegenüber den verbindungsfähigen Zügen der deutschen Kurrentschrift! Sucht man das Vaterland unserer Ziffern in Indien, darf nicht übersehen werden, dafs die indischen Zeichen in Sprachen von verschiedener Schriftart übergegangen sind, in die linksläufige arabische und in die rechtsläufige lateinische, und dafs die indischen Ziffern schon in ihrer Heimat verschieden waren. Sagt doch Mohamed ben Musa: »Die Zahlzeichen sind (in ihrer Heimat) verschieden unter den Menschen«, und Albiruni, ein arabischer Mathematiker aus dem 11. Jahrhundert, welcher Indien bereiste, erzählt: »Wie die Buchstabenfiguren in ihrem (der Inder) Lande verschieden sind, so weichen auch die Zahlzeichen voneinander ab; wir gebrauchen eine Auswahl des Besten«. Endlich ist noch zu beachten, dafs die indisch-arabische Rechenkunst sich in zwei räumlich weit entfernten Ländern fortentwickelte, im Mutterlande und in Spanien, daher denn auch die ost- und westarabischen Ziffern sich nicht unerheblich unterscheiden. Unsere modernen Ziffern stehen den westarabischen am nächsten und können in ihren Formen leicht darauf zurückgeführt werden. Die Verschiedenheit einzelner Formen ist übrigens nicht bedeutend, wenn man ihre Lage verändert; so gleicht die ostarabische 2 und 3 der westarabischen 2 und 3, wenn man erstere sich in horizontaler Stellung denkt. Die Null ist in altarabischen Ziffertabellen und in Gobarschriften durch einen Punkt, d. h. durch einen ausgefüllten Kreis, vertreten. Wo die Ziffern architektonisch verwendet wurden, pafste man sie dem Baustile an, was eine sehr verschiedenartige Behandlung derselben zur Folge hatte. Man vergleiche nur die zeitlich und örtlich einander nahestehenden Jahrzahlen von 1516, 1525 und 1553 auf der Tabelle 34.[1])

[1]) Die Jahrzahl 1516 ist nach den Verhandlungen des historischen Vereins für Oberbayern auf einem Backsteindenkmale aus dem Kloster Tierhaupten, die Jahrzahl 1525 befindet sich auf den Schnitzwerken in der Kirche zu Lanzing, beide Orte in Oberbayern, die Jahrzahl 1553 ist am Stadtturme zu Waldmünchen eingemeifselt. Die Fafs-Visierziffern der Tabelle 32 sind einem »Weinkaufbüchlein« ohne Jahrzahl entnommen, das, nach den Typen zu schliefsen, um 1520 gedruckt worden ist. Es sind jedenfalls ältere Ziffern, die sich in den Eichungsstempeln erhalten haben. Dem ungenannten Verfasser des Weinkaufbüchleins fällt nur die 5 und 7 auf, weil er sagt: »ire Charakter hat gleichwohl nit sundere verwandlung gegen den andern/ denn bei dem Fünffe vnd Sibne«. An der rechtsgeschlungenen Vier findet er nichts Auffälliges. Der Übergang des geschlungenen Zeichens für

Die uralte Ansicht geht dahin, dafs wir die Kenntnis der indischen Arithmetik den Arabern verdanken. Dabei ist durchaus nicht ausgeschlossen, dafs der Osten Europas durch direkten Verkehr mit Arabien und Indien zur Kenntnis dieser Rechenmethode gelangte. In neuerer Zeit ist aber die herkömmliche Anschauung über die Entwickelung unserer Rechenkunst und den Ursprung unserer Zahlzeichen vielfach angegriffen und der Nachweis versucht worden, dafs sich unsere Arithmetik aus der griechisch-römischen entwickelt habe, ohne die Dazwischenkunft der Araber. Schon 1658 machte Isaak Vossius auf eine Stelle in der Geometrie des Boëthius aufmerksam, in welcher von 9 Zahlzeichen und deren Erfindung durch die Pythagoreer die Rede ist; auch Hunt (1694) hält diese Zeichen für griechische. Chasles bemerkt unter Bezugnahme auf dieselbe Stelle: »Die geschichtliche Wahrheit wie die Gerechtigkeit gegen das Mittelalter verlangen, dafs wir verzichten auf die falschen Redensarten: arabische Ziffern, arabische Arithmetik; man würde vielleicht Ziffern des Boëthius, vielleicht pythagoreische Ziffern sagen, wenn die Wahrheit nicht dem Herkommen zum Opfer gebracht würde.« Es war hiermit eine Frage angeregt, welche die gelehrte Welt bis in die letzten Jahrzehnte lebhaft beschäftigt hat und die heutzutage noch nicht abgeschlossen ist. Wildermuth bemerkt dazu folgendes: »Man mufs einräumen, dafs man schon vor der Bekanntschaft mit der arabischen Arithmethik das Zehnersystem hatte; dafs der römische (Linien-) Abakus wenigstens eine Analogie vom Stellenwert der Ziffern darbot, und dafs dieses Prinzip auf dem pythagoreischen (Kolumnen-) Abakus in entschiedener und in einer uns viel näher liegenden Form hervortrat, indem zur Darstellung jeder beliebigen Zahl auch blofs 9 Zeichen erforderlich waren. Allein damit war die Positionsarithmetik noch nicht gefunden; denn während zu dieser notwendig gehört, dafs die Stellen des Systems durch die Ziffern allein bestimmt werden, geschah das bei dem alten Verfahren durch den Abakus ganz unabhängig von den Ziffern. Die Kolumnen waren also gerade so notwendig wie die Ziffern selbst.

---

die Vier in die dermalige Form läfst sich aus Urkunden leicht verfolgen. Man schrieb es im 16. Jahrhunderte wie ein breites kurzes l der Kurrentschrift, von links unten angefangen; später machte man den linken Bogen zuerst und durchschnitt denselben rechts mit einem geraden Strich, wodurch sich die Rundungen des geschlungenen Zeichens in Ecken auszogen.

Daher lag auch der Gedanke, das Gerüste des Abakus wegzuwerfen, nicht so nahe, als wir uns jetzt, nachdem der Schritt geschehen ist, denken mögen. Wie sollte man sich der Kolumnen entschlagen, während sie etwas enthielten, was nicht in den Ziffern lag, und man sie für unentbehrlich ansah? Man legte aber den Abakus gerade zu der Zeit weg, als die arabische Numeration bekannt wurde. Derselbe hat sich daher nicht zur Positionsarithmetik fortentwickelt, sondern ist durch dieselbe verdrängt worden.« (Vergl. Seite 133.)

»Die Frage, ob wir unsere Ziffern in Zukunft noch arabische nennen dürfen, hat sich in neuerer Zeit sehr verwickelt. Früher ist man der Meinung gewesen, wir haben zugleich mit der neuen Rechenkunst auch unsere Ziffern von den Arabern erhalten. Nun hat man aber in einigen Handschriften der Geometrie des Boëthius, die nach sorgfältigen paläographischen Untersuchungen dem 11. Jahrhundert angehören, 9 Zahlzeichen gefunden, von denen 1, 8 und 9 den unserigen gleich sind, 2, 5, 6 und 7 die Grundzüge der jetzigen Formen enthalten, der Dreier von rechts nach links umgekehrt werden mufs, um mit dem unserigen verglichen werden zu können, während nur der Vierer eine ganz abweichende Gestalt hat. Bei Boëthius, der im 5. und 6. Jahrhunderte lebte, steht nun ausdrücklich, dafs die Pythagoreer, die man jetzt für Neupythagoreer aus der alexandrinischen Schule erklärt, auf dem Abakus sich dieser Zeichen bedient haben. Ist dies aber der Fall, so waren sie jedenfalls in Alexandrien und Italien längst vor dem Auftreten der Araber bekannt und müssen deshalb pythagoreische oder boëthische, nicht aber arabische Ziffern genannt werden. So schliefsen Chasles, Cantor, Wöpke u. a. Bei dieser Auffassung erheben sich eine Reihe von Fragen, die bisher keine genügende Beantwortung gefunden haben. Wie kamen die Pythagoreer zu diesen Ziffern? Haben sie dieselben selbst erdacht, oder von Ägypten, Persien, Babylon erhalten? Haben sie dieselben den Indern mitgeteilt oder von diesen bekommen, oder haben beide aus gemeinschaftlichen Quellen geschöpft? Woher die pythagoreischen Ziffern auch stammen mögen, die alexandrinische Schule hätte sie gekannt und angewendet. Wie kommt es nun, dafs man weder in ihren Schriften, noch in römischen eine Spur davon entdeckt hat? sie erst in einigen Kodices des Boëthius aus dem 11. Jahrhunderte auffand? Haben sie die Alexandriner von den Indern erhalten, worauf man immer wieder zurückkommen müfste, da sie unverkennbar in das indische Ziffernsystem gehören, so fragt es sich, wie war es möglich, dafs man in Alexandrien, wo die mathematischen Studien blühten, nichts von der Positionsarithmetik erfuhr, die der Entdeckung einer neuen Welt gleichkommt, und dafs man sich gerade mit der am wenigsten wichtigen Seite davon, mit den Zeichen, begnügte, während es, nach des Boëthius eigenen Worten, für den Abakus ganz gleichgültig war, welcher Art man sie wählte? Angenommen aber, die Römer haben auf ihrem pythagoreischen Abakus damit gerechnet, so konnten die Araber in Spanien mit den pythagoreischen Zeichen bekannt werden und sich derselben bedienen, wie sie auch aus Mangel einer eigenen ausgebildeten Rechenkunst sich die in andern Ländern schon vor ihrer Ankunft bestehende aneigneten. So hätten die Araber die Ziffern von uns, und nicht wir von ihnen. Dagegen läfst sich einwenden: Wir wissen nichts Bestimmtes von der Rechenmethode der spanischen Araber vor ihrer Bekanntschaft mit der Positionsarithmetik; wir wissen nicht, wie lang und wie weit der pythagoreische Abakus bei den Römern verbreitet war; die arabischen Schriftsteller erwähnen desselben nicht, ebensowenig der Ziffern, mit welchen darauf gerechnet wurde, während sie einstimmig ihrer Rechenkunst wie ihren Ziffern indischen Ursprung zuschrieben. Dazu kommt, dafs die vielbesprochene Stelle bei Boëthius von Autoritäten (Lachmann, Böckh, Friedlein) für unecht erklärt wird. Ja, Friedlein kommt zu dem Schlusse, dafs sie erst aus dem Ende des 10. oder dem Anfang des 11. Jahrhunderts stamme und von einem wenig befähigten Verfasser herrühre. Damit fiele die ganze Angriffsbasis gegen die bisherige historische Tradition. Wenn man aber die Echtheit des Textes nicht bezweifelte, so bliebe immer noch die Möglichkeit, dafs irgend ein Kopist des 11. Jahrhunderts, der damals sehr leicht die neuen Ziffern kennen konnte, statt der ursprünglichen, vielleicht zu komplizierten alten Zeichen, die arabischen eingesetzt habe. Auf dem Abakus des Boëthius stehen der Reihe nach fremdländische Namen über den Ziffern, darunter Sipos für die Null. (S. Seite 147.) Der Abakus brauchte aber die Null gar nicht; wenn in eine Stelle keine Ziffer zu setzen war, liefs man sie einfach leer. Hat man die Null doch unter die Zahlzeichen aufgenommen, so beweist dies, dafs man dieselbe aus der Positionsarithmetik, wo sie unentbehrlich ist, herübergetragen hat, und zwar zu einer Zeit, wo diese anfing, bekannt zu werden, wo man aber von ihrem Zweck noch keine klare Vorstellung hatte, und daher oft versucht sein mufste, das Neue irgendwie im Dienste des Alten zu verwerten. (Wie Seite 130 angeführt ist, wurde die Null in ähnlicher Weise verwendet, wie dermals das Pünktchen beim Entlehnen.) Dieser Stand der Dinge pafst aber viel mehr für das 11. Jahrhundert als für die Zeit der alexandrinischen Schule. Auf der einen Seite hält man, fafst Wildermuth zusammen, sich an ein in seiner Echtheit stark bezweifeltes Faktum, auf der andern an eine Reihe bis jetzt nicht umgestofsener, in sich zusammenhängender Thatsachen, nämlich: 1. die Positionsarithmetik mit den 9 Ziffern ist eine indische Erfindung; 2. auch die boëthischen Ziffern gehören zu den indischen Zahlzeichen; 3. die Araber haben diese Sache selbst und die Zeichen von den Indern; 4. der Westen Europas hat die neue Rechenkunst von den Arabern erhalten.« Für Punkt 3 scheint auch der Name »Ziffer« zu sprechen. Es finden sich nämlich unter den verschiedenen Namen der Null: Figura nihili, Figura circulos, circulus nihili, nullus, Nulla, auch die Benennungen: cifram, zyphram, tzyphra (Planudes). Das arabische sifr heifst das Leere und ist eine wörtliche Übersetzung des altindischen çûnya. So verweist der Name der Null auf ihre Heimat, was freilich die Möglichkeit offen läfst, dafs die ersten 9 Ziffern schon vor dem Auftreten der Araber im Abendlande bekannt waren, und dafs die Null erst später hinzugetreten ist.

Im 11. und 12. Jahrhunderte wurden die modernen Ziffern, wenn auch in verschiedenen Abweichungen, schon angewendet. Nach dem Archiv für ältere deutsche Geschichtskunde von Pertz besitzt die vatikanische Bibliothek mehrere Codices, welche Ziffern enthalten, die dem modernen System angehören, mögen sie nun indische, pythagoreische, boëthische oder arabische Ziffern genannt werden, und zwar:

1. Cod. lat. 644 aus dem 11. Jahrhundert. Am Ende stehen die arabischen Ziffern, welche als igin, andras, ormis, arbas, quimas, calctis, zenis, temenias, celentis, s i p o s benannt sind. (Pertz XII, 221.)

2. Cod. lat. 1890 (Anfang des 12. Jahrhunderts), im Salzburger Sprengel geschrieben; derselbe enthält u. a. eine Anleitung zum Gebrauche der arabischen Ziffern. (l. c. XII, 228.)

3. Cod. lat. 3101, im Jahre 1077 in Süddeutschland geschrieben, enthält u. a. »Regulae in abacum« für das Rechnen mit pythagoreischen Ziffern und eine Multiplikationstafel, darüber dieselben Zahlzeichen. (l. c. XII, 232.)

4. Cod. lat. 3123, im 12. Jahrhundert in Deutschland geschrieben, enthält einen Kalender, in welchem im Jahre 1207 arabische (pythagoreische) Ziffern vorkommen, ferner Seite 36 eine Abhandlung, in der es heiſst: Ars ista vocatur abacus; hoc nomen vero Arabicum est et sonat mensa etc. (Jene Kunst heiſst Abakus; dieſer Name aber ist arabisch (?) und bedeutet Tisch.) Diese Abhandlung ist eine Anweisung zur Anfertigung eines Abakus und zur Multiplication mit pythagoreischen (arabischen) Ziffern. Hierauf folgen die Multiplicationes G. (Gerberti?) ad Constantinum und die Divisiones. Seite 54 beginnt eine Abhandlung in Briefform: »Socio suo Simoni de Rotol. Turchillus compotista sal. (Turchillus, Rechenmeister, grüſst seinen Genossen Simon von Rotol . . . .) In derselben wird wieder das Rechnen mit pythagoreischen (arabischen) Ziffern mit den Namen igin, andras etc. besprochen und beigefügt: Illas autem figuras, ut donnus Guillermus R. testatur, a Pythagoricis habemus, nomina vero ab Arabibus etc. (Diese Figuren haben wir, wie Herr Wilhelm von R. bezeugt, von den Pythagoreern, die Namen aber von den Arabern.) Im folgenden findet sich eine freie Bearbeitung der Euklidschen Geometrie nebst einer Abhandlung de ratione abaci, den 9 pythagoreischen Zeichen und der nicht mit Namen genannten Null ⊙; dann die Angabe, daſs andere abweichende Formen dieser Ziffern anwendeten, andere auch die 10 ersten Buchstaben, u. s. w. (l. c. XII, 233 f.)

5. Biblioth. Palat. Cod. lat. 1356, Sammelband, enthält fol. 115 f. einen Abakus mit pyth.-arabischen Ziffern aus dem 12. Jahrhunderte. (l. c. XII, 351.)

6. Bibl. Ottoboniana, Cod. lat. 3 ist ein Martyrologium in longobardischer Schrift (11. Jahrh.) mit pythagoreischen (arabischen) Ziffern. (l. c. XII, 357.)

Der Codex 280 in Monte Casino aus dem Ende des 11. Jahrhunderts enthält u. a. ein Gedicht Ad Theodinum monachum Cassinensem (An Theodin, Mönch von Monte Casino), in welchem derselbe ob der Kenntnis des arabischen Zahlensystems gerühmt wird. (l. c. XII, 504.)

Das Archiv des Domkapitels Ivrea in Piemont besitzt in Handschrift N. 84 aus dem 10. Jahrhunderte eine Anweisung zum Dividieren in arabischen (pythagoreischen) Ziffern, welche hier neben den römischen Zahlzeichen in ein und demselben Exempel gebraucht sind. In dieser Handschrift ist Flaccus genannt, ein Name, welcher Alcuin in Hofkreisen beigelegt wurde. (Bethmann in Pertz, Archiv IX, 623.)[1])

In Frankreich waren die arabischen Ziffern schon im 13. Iahrhunderte bekannt. Vincent von Beauvais bediente sich derselben um 1250, die Universität Paris gebrauchte sie im 14. Jahrhunderte, doch sind dieselben erst im 15. Jahrhunderte in Frankreich allgemeiner geworden. In Italien, das seinen Fibonacci hatte, kannte man dieselben schon früher. In Deutschland kommen (nach unserem dermaligen Wissen) aufser in den oben genannten Kodices die modernen Ziffern das erstemal in der Chronica Ratisponensis (1152—1197) des Regensburger Domherrn Hugo Grafen von Lerchenfeld vor, deren letzter datierter Eintrag vom Jahre 1207 stammt. Docen gibt das Datum dieser Handschrift mit 1167 an. Hier finden sich die Zahlen von 1 bis 68 in arabischen Ziffern geschrieben[2]). Die nachältesten arabischen Ziffern finden sich (nach Böhmer) in der Handschrift: Memoriale omnium temporum (in Wien). Auf dem vorletzten Blatte des Manuskripts (klein Quart, Pergament) sind kleine italienische Annalen, deren Hunderte römisch, deren Zehner aber arabisch sind. Aus dem 13. Jahrhunderte hat München arabische Ziffern in den Konzepten Johanns von Victring. In Schlesien kommen sie erst i. J. 1340 vor. Vom Ende des 14. Jahrhunderts an werden sie bekannter, und im 15. Jahrhunderte findet man sie bei Jahreszahlen, in Registern zu

---

[1]) Vorstehende Notizen verdankt der Verfasser Herrn Stiftsvikar Dr. Adalbert Ebner in Regensburg.

[2]) Diese Chronik gehörte ehedem dem Kloster Skt. Emmeram in Regensburg an und befindet sich jetzt in der Staatsbibliothek München. Sie ist gedruckt bei Böhmer, Fontes rerum, Germ. III. 490 ff., wozu die Vorrede p. LXIV. Vergl. auch Monumenta germaniae XVII. 578, Janner, Geschichte der Bischöfe von Regensburg II. 232 und Wattenbach, Deutschlands Geschichtsquellen 5. Aufl. II. 346. Graf Hugo von Lerchenfeld wurde vom Bischof Chuno II. 1178 zum Subdiakon geweiht. Seine Chronik enthält das Datum, unter welchem Bayern an die Wittelsbacher kam. Die letzte Nachricht dieser Chronik ist »ein Denkmal der Teilnahme, die der Kreuzzug Friedrichs I. in Regensburg fand«.

Handschriften, in Rechenbüchern, auch auf Siegeln, seltener in Urkunden. Lange genug laufen noch die römischen Ziffern neben-her, und man findet römische und arabische Zahlzeichen in ein und derselben Urkunde, ja sogar verbunden zur Bezeichnung einer zusammengesetzten Zahl.

Die Seite 135 erwähnte Abrechnung der Familie Krefs in Nürnberg enthält arabische und römische Zahlzeichen zugleich; aber erstere werden nur zum Schreiben der Jahrzahl gebraucht, als ob man sich gescheut hätte, die neuen Ziffern zur Konstatierung der Summen zu verwenden, obgleich sie gröfsere Sicherheit vor Fälschungen gewähren konnten als die römischen Zahlzeichen. Diese Rechnung hat (nach Dr. Günther) folgenden Wortlaut: »Item wir haben gantze rechnung gemacht an sant barbara obent do man zelt von gotes gepurt 1395 yar und ez westund yedem $\mathrm{I^{C}XXXI}$ gld. zu gewinn und wir gebunnen alz geltz $\mathrm{VI^{M}VI^{C}IIII}$ gldn dazu rechne ich vnter vns all nach Markzahl (Proportion) auz als hernach an dieser zetelen geschriben stet vnd waz nu fürbaz vnser yeklicher yn der geschelschaft lest lygen über als daz wir ein haben genomen daz stet auch hernach geschriben got·geb uns allen hail und geluk und daz ez uns wol ge an sel und leib amen.

1395 yar.

Item fritz krefs hat $\mathrm{XX^{M}}$ guldein in der geschelschaft. Item hilpolt krefs hat $\mathrm{III^{M}XVII}$ guldein in der geschellschaft und mein herlin zahl legt jm $\mathrm{X^{C}}$ gld enpför. Item kuntz krefs hat $\mathrm{XXIIII^{C}}$ gld. in der geschelschaft. Item kraft krefs hat $\mathrm{VIII^{C}XIX}$ gld. in der geschelschaft.«

Selbst im 15. Jahrhunderte finden sich noch die römischen Zahlzeichen neben arabischen, wie z. B. in der Münchener Hofordnung vom Jahre 1464 (Beratschlagter Hofstaat für Herzog Sigmunden, Albrechten, Christoffen, und Wolfgangen, Junge Fürsten von Bayern). Hier heifst es: Item von erst ist vnser Rath, dafs vnser Genediger Herr, Herzog Sigmund haben soll XIIII Pferd, XIIII Person. Item ain Hofmaister vnd IIII täglich Räth .... Thuent auf XXIIII Pferd XXVI Person. Item dafs baid Herren haben 2 geritten Jäger ... Summa CXXI Pferd und CLXIIII Person. Aber auch: also dafs ein Zollner desselben Zolls ainem Kuchenmaister all Quattember auf die Kuchen

5C Pfund ℔, thuet ein Jahr 2M Pfund ℔. Item, dafs baid Herrn haben 2 reitend Valkhner. Aufserdem: IIC Schäffl, IC Schäffl.

In der Druckschrift kommen die arabischen Ziffern um 1480 vor. Nach Mitte des 16. Jahrhunderts sind sie auch in Urkunden gebräuchlich. Die römischen Ziffern haben sich nur für bestimmte Zwecke noch erhalten. (Zifferblätter der Uhren, Zahlen auf Denkmälern und in Chronogrammen.)

Im 16. und 17. Jahrhunderte war das Bewufstsein, dafs die modernen Ziffern von aufsen eingeführt wurden, noch nicht verloren gegangen.

Jakob Kobel hat sich vorgenommen, sein Rechenbüchlein »dem gemainen Layen zu gut vnnd nutz (dem die Zyfferzale — die arabischen Ziffern — am Erstenn zu lernen schwere) durch die gemain Teutsch zal — d. i. in römischen Ziffern — tzu Trucken (1516). — Suevus (1593) nennt sie »barbarische« Ziffern, und Paritius (um 1700) stellt sie als Numeri barbari den Numeris Romanis gegenüber.

Aus den bisherigen Betrachtungen ergibt sich folgendes: Unsere Rechenkunst ist das Ergebnis rastlosen Strebens aller Kulturvölker alter und neuer Zeit. Die Positionsarithmetik mit ihrem Angelpunkte, der Null, ist nach dem gegenwärtigen Stand unseres Wissens eine indische Erfindung. Die Ahnen der modernen Ziffern lassen sich im Abendlande zuverlässig zurück verfolgen bis ins 11. Jahrhundert n. Chr. Die weiteren Spuren derselben verweisen zunächst auf das Sanskritvolk, dann auf die Kulturländer am Nil und Euphrat. Es mufs also die Möglichkeit, dafs Pythagoras und seine Schule wie auch Boëthius Ziffern gekannt haben, welche mit den modernen Ziffern verwandt sind oder doch einen Vergleich mit denselben zulassen, zugegeben werden. Im ganzen aber sind die Ergebnisse der Geschichtsforschung auf dem Gebiete der Mathematik noch nicht soweit vorangeschritten, um ein definitives Urteil über die Urheimat der modernen Zahlzeichen zu ermöglichen.

Berühmte Algorithmiker und ihre Methode.

Bisher sahen wir das Rechnen in der Hand der Komputisten und Abacisten. Klostergelehrte aus ein und derselben Schule waren es, welche die Wissenschaft liebten und pflegten. Nun begegnen wir mit einem Male einem Manne aus dem Geschäftsleben, welcher nicht versäumte, auf seinen weiten Reisen die Wissenschaft fremder Nationen kennen zu lernen und mit seinem reichen Geiste weiter zu verarbeiten — Leonardo von Pisa.

Leonardo war der Sohn des Stadtschreibers von Pisa, welcher später als Vorstand an den Packhof versetzt wurde, den man zum Besten vaterländischer Kaufleute an der Nordküste Afrikas in Bugia errichtet hatte. Ob der Name Bonaccio, unter welchem er erwähnt wird, sein wirklicher Name oder nur ein Beiname war, ist nicht entschieden. Leonardo nennt sich Filius de Bonaccio, woraus durch spätere Zusammenziehung Fibonacci wurde, unter welchem Namen Leonardo am bekanntesten ist. Schon als Knabe wurde er mit dem Abakus bekannt gemacht und in die Kunst der 9 indischen Zahlzeichen eingeführt. Er fand am Rechnen solche Freude, dafs er auf seinen späteren Reisen in Ägypten, Syrien, Griechenland, Sicilien, in der Provençe mit vieler Mühe sich zu belehren suchte, wie man das Rechnen dort betreibe und wie weit man in dieser Kunst gekommen sei. Dieses Bestreben setzte ihn in den Stand, den Wert der verschiedenen Berechnungsweisen gegenseitig abzuwägen. Der arcus pictagore (die Kolumnenrechnung) ist ihm dabei, wie er selbst sagt, gegenüber der indischen Methode wie ein Irrtum erschienen. Bonaccio erkannte, dafs diese Methode allen anderen vorzuziehen sei und wandte sie in seinem »Abakus« an. Dieses Buch, welches nur mit dem Namen an das Rechenbrett erinnert, sonst aber mit dem Abakusrechnen nichts gemein hat, enthält die Summe aller Kenntnisse, die sich Leonardo aus Schriften (Euklid) und auf seinen weiten Reisen durch den Handelsverkehr in verschiedenen Erdteilen gesammelt hatte. Leonardos Aufenthalt in Bugia war gleichfalls seinem Streben günstig, denn Bugia war nicht blofs ein Mittelpunkt des Handels, sondern auch der Sammelplatz der Gelehrten, eine Art mohamedanischer Universität. Das Manuskript des Abakuswerkes enthält das Datum 1202 und ist Michael Scotus, dem Hofastrologen Kaiser Friedrichs II., gewidmet. Es besteht aus 15 Kapiteln, von denen die ersten 14 die Rechenkunst und ihre Anwendung auf das Geschäftsleben enthalten, das 15. Kapitel befafst sich mit der Geometrie. Johann von Palermo legte dem als Mathematiker berühmt gewordenen Bonaccio mehrere Fragen vor, welche er unverzüglich beantwortete. Die erste Frage ging dahin, eine Zahl zu finden, die, selbst eine Quadratzahl, auch dann noch Quadratzahl bleibe, wenn man sie um 5 vermehrt oder vermindert. Dieser Frage genügt die Zahl $11\frac{97}{144}$, welche dem Produkt von $3\,{}^5/_{12}$ in sich selbst gleich ist, während $16\frac{97}{144}$ das Quadrat von $4\,{}^1/_{12}$ und $6\frac{97}{144}$ das Quadrat von $2\,{}^7/_{12}$ ist. Die zweite Frage bezog sich auf die geometrische Auflösung einer Gleichung des 3. Grades. Leonardo wies mit aller Strenge nach, dafs die Wurzeln dieser Gleichung mit Hilfe der Euklidschen Irrationalgröfsen nicht darstellbar seien, d. h. dafs man sie nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren könne; er gab auch einen überraschend genauen Näherungswert an, der nicht den 30000 millionsten Teil der Einheit beträgt. Die 3. Aufgabe heifst: Drei Männer besitzen von einer gemeinsam aufgehobenen Summe Geldes der eine die Hälfte, der andere ein Drittel, der letzte ein Sechstel. Sie wollen das Geld an einen mehr gesicherten Ort bringen und tragen ein jeder, so viel er fassen kann. Von dem so Weggeschaffen behält aber jeder einen gewissen Teil, nämlich der erste die Hälfte dessen, was er trug, und ebenso der zweite und dritte den 3. und 6. Teil dessen, was sie getragen hatten. Wenn sich nun ergibt, dafs von dem deponierten Gelde jedem ein Drittel zukommt, damit er seinen ihm gebührenden Teil vollständig habe, so ist die Frage, wie grofs die Summe war, und wie viel ein jeder beim Transporte trug. Leonardo findet die Summe 47, von welcher der erste 33, der zweite 13, der dritte 1 trug. Hiernach mufs Leonardo Methoden besessen haben, nach welchen er so schwierige Aufgaben der Analytik sozusagen aus dem Stegreife lösen konnte; anderseits mufs er allein diese Methoden gekannt haben, denn kaum hatte er die öffentliche Probe seiner Geschicklichkeit abgelegt, so bat man ihn von verschiedenen Seiten um Auseinandersetzung der Kunstgriffe, und Leonardo erfüllte diesen Wunsch, indem er 3 Abhandlungen schrieb, die uns noch erhalten und nun auch gedruckt sind. Die erste Abhandlung über die Quadratzahlen ist dem Kaiser Friedrich II. gewidmet. Aus dem Abakuswerke geht hervor, dafs Leonardo mit Bienenfleifs das Beste aus der damaligen Rechenkunst gesammelt hatte: indisch ist die Regula falsi, welche er Elchatein nannte (Kata oder Kita = das Stück; alkitein = Regel; Regel aus 2 Stücken); indisch ist auch die netz- und blitzartige Multiplikation; arabisch ist die Algebra, welche Leonardo dem

»Maumeht« (Mohamed ben Musa) verdankt; arabisch ist der Name der Null, welche hier Zephirus heifst, also gleichsam in Übereinstimmung mit sifr. Mittelalterlich ist die komplementäre Division; pythagoreisch sind die zahlentheoretischen Betrachtungen, die von Leonardo auf eine Höhe geführt werden, welche sie vorher nie erreichten. Leonardo begnügt sich nicht, die von den Arabern entlehnte Neunerprobe blofs zu lehren, sondern er beweist sie auch, indem er Linien statt der Zahlen setzt. Die Subtraktion nimmt Leonardo so vor, dafs er, statt der Verkleinerung der nächsten Stelle des Minuenden, die nächste Stelle des Subtrahenden um 1 vergröfsert. Leonardo hat die Mathematik in Italien wieder zu neuem Leben erweckt und auf die Neugestaltuug der Rechenkunst bei den abendländischen Völkern einen weitreichenden Einflufs gewonnen, wenn derselbe auch nicht sofort zu Tage trat.

Weniger durch hervorragende Gelehrsamkeit als durch seine praktischen Schulbücher hat Johann von Halifax (Sacro Bosco) † 1256 sein Andenken der Nachwelt erhalten. Seine Schrift: Tractatus de arte numeri, später: De Algorithmo war das gesuchteste populäre Lehrbuch im 13. Jahrhunderte; selbst an der Pariser Universität wurde die Rechenkunst nach dieser Schrift gelehrt, nachmals auch an der Wiener Hochschule. Sie behandelt das Numerieren, Addieren, Subtrahieren, Duplieren, Medieren (Halbieren), Multiplizieren und Dividieren, die Progressionen und das Wurzelausziehen. Die Bruchlehre fehlt, der Lehrstoff ist teilweise versificiert.

Dr. Cantor hat einen (lateinischen) Codex aus dem 13. Jahrhunderte in der Zeitschrift für Physik und Mathematik (Band X) veröffentlicht. Derselbe enthält (wie wir Wildermuths Arbeit entnehmen) die alte Einteilung der Zahlen in Digiti, Artikuli und Kompositi. Bei den nicht in Rechnung kommenden Zahlen werden noch römische Ziffern gebraucht; die Rangstellen heifsen Differenzen. Die 9 Figuren seien erfunden, um das Unbegrenzte zu umfassen, d. h. mit den 9 Zeichen und der Null (cifra) können alle möglichen Zahlen dargestellt werden. Für das Numerieren ist die Regel gegeben: Wie viel Gruppen von je 3 Ziffern, so viel Punkte, und wie viel Gruppen zu dreien, so viele tausend sind zu sprechen.

495. 827. 361. 052. 951 wird gesprochen: 495 tausend tausend tausendmaltausend, 827 tausend tausendmaltausend, 361 tausendmaltausend, 52 tausend, 951.

Bei der Addition ist nur von 2 Summanden die Rede, welche untereinander geschrieben werden. Wird eine Ziffer zur andern addiert, so erwächst daraus entweder ein Digitus, ein oder mehrere Artikel, oder ein Digitus und ein oder mehrere Artikel. Im ersten Falle löscht man die darüber stehende Ziffer aus und setzt den Digitus dafür; im zweiten Falle setzt man an ihre Stelle eine Null und prägt den Artikel der folgenden Stelle ein (weil auf Wachs- oder Staubtafeln gerechnet wurde); im dritten Falle wird an die Stelle der ausgestrichenen Ziffer ein Digitus gesetzt und der Zehner zur folgenden Stelle addiert, also:

$\begin{array}{l}666\\144\end{array}$. »Füge vier zu sechs, und es sind zehn; streiche 6 aus und schreibe 0; die Einheit, unter welcher 10 verstanden sind, setze zur nächsten Figur nach diesem Muster: $\begin{array}{l}670\\144\end{array}$, so erhält man nach einer ähnlichen Anweisung $\begin{array}{l}710\\144\end{array}$ und endlich 810.«

Damit ist die Addition erledigt. Die Subtraktion wird nur als Probe der Addition behandelt: »Willst du sehen, ob du deine Sache gut oder schlecht gemacht hast, so ziehe von der Summe die Zahl ab, welche du addiert hast.« Das Verfahren ist die Inversion der Addition und geht durch die Stufen: $\begin{array}{l}810\\144\end{array}$, $\begin{array}{l}806\\144\end{array}$, $\begin{array}{l}766\\144\end{array}$, endlich $\begin{array}{l}666\\144\end{array}$. Die schriftliche Multiplikation wird an dem Beispiel gezeigt $19 \cdot 128$. Man schreibt an $\begin{array}{l}\;\;128\\19\end{array}$, multipliziert von links nach rechts mit dem ganzen Multiplikator, zuerst 100 und schreibt $\begin{array}{l}1928\\19\end{array}$, dann wird 19 um eine Stelle nach rechts gerückt $\begin{array}{l}1928\\19\end{array}$; es wird 2 mit 1 multipliziert, und man erhält $\begin{array}{l}2128\\19\end{array}$; dann mit 9, was gibt: $\begin{array}{l}2288\\19\end{array}$; nun wird der Multiplikator in die letzte Stelle vorgerückt $\begin{array}{l}2288\\19\end{array}$; 8 mit 1 multipliziert gibt $\begin{array}{l}2368\\19\end{array}$; zuletzt noch 8 mit 9. Die Division wird als »eine Überlegung betrachtet, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten sei«. Sie erscheint als Probe der Multiplikation. Der Quotient steht wie bei den Arabern über dem Dividenden; der Divisor wird nach rechts fortgerückt und zwar in gerader Linie, was bei dem Staubbrette leicht geschehen konnte, indem man die gebrauchten Ziffern wegwischte. Später wurden dieselben durchstrichen, und man mufste den Divisor beim Fortrücken derart brechen, dafs seine Ziffern in verschiedene Zeilen untereinander kamen. Der Gang der Division wurde durch folgende Formen dargestellt:

1	1	12	128
2432;	1432;	532;	152.
19	19	19	19

Aus dem 14. Jahrhunderte ist das Rechenbuch des griechischen Mönchs Maximus Planudes vorhanden. Es ist nicht entschieden, ob er die indischen Berechnungsformen in Konstantinopel durch byzantinische Kaufleute oder durch östliche Araber kennen gelernt hat. Mit den Schriften Fibbonacis ist er wohl bekannt geworden gelegentlich der Gesandtschaftsreise, die er 1327 im Auftrage des Kaisers Andronikus Paläologus nach Venedig ausführte. Planudes lehrte nur die 6 in der Astronomie notwendigen Spezies: Numerieren, dann die bekannten 4 Spezies und das Ausziehen der Quadratwurzel. Er teilt die Zahlen wie die alten Griechen in Gruppen zu 4 Stellen.

8136274592 wird so gelesen: Achtzigmal zehntausend Myriaden, und noch zehntausend Myriaden, und dreimal tausend sechshundert zwanzig und sieben Myriaden, und viermal tausend fünfhundert neunzig zwei. Bei der Addition wird die Summe über die Summanden geschrieben nach diesem Schema:

8030	2
5687	8
2343	3

In der senkrechten Kolumne rechts stehen die Neunerproben, welche sich aus der Addition der Quersummen und jedesmaligem Abziehen der 9 ergeben, nämlich:

$5 + 6 = 11$; $11 - 9 = 2$; $2 + 8 = 10$; $10 - 9 = 1$; $1 + 7 = 8$ etc.

Schliefslich wird aus $8 + 3 = 11$ wieder 9 eliminiert, dann bleibt 2, wie bei der Probe der Summe.

Auch bei der Subtraktion steht der Rest oben; es wird nicht entlehnt, sondern die Stelle, an welcher subtrahiert werden soll, wird um 10 und das folgende Glied des Subtrahenden um 1, d. i. einen Zehner, vermehrt. Beispiel:

5 4 6 1 2
1 8 7 6 9
5 4 6 1 2
3 5 8 4 3
1 1 1 1

Die 2 unteren Reihen enthalten den Minuenden und Subtrahenden, die oberste enthält die Probe, welche hier gemacht wird, indem man Subtrahend und Rest addiert. Das Verfahren lautet: »Ich will vom Zweier den Dreier abziehen, aber ich kann nicht, denn 3 ist gröfser als 2. Ich setze die Einheit zum Vierer nach dem Dreier; diese Einheit nehme ich als 10 und sage 10 und 2, 12; von den 12 nehme ich 3, bleibt 9. Wieder will ich abziehen den Vierer mit der Einheit von dem 1, aber ich kann nicht etc.«

Ein anderes Verfahren wird in nachstehendem Beispiel erklärt.

0 8 9 8 4
2 4 0 3 1
3 5 1 4 2
2 6 1 5 8

Die Rechnung beginnt also: »Ich will von 2 die 8 wegnehmen, kann aber nicht; ich entlehne für 2 eine Einheit von 4, diese sind 3 geworden, welche ich über 4 schreibe; die Einheit oder 10 setze ich über die 2 und es werden 12, von diesen nehme ich die 8, bleiben 4 etc.« Die Fälle, in welchen der Minuend eine Null hat, werden gesondert behandelt. Das ist unser gegenwärtig gebräuchliches Verfahren.

»Die Multiplikation entsteht, wenn man eine Zahl so oft nimmt, als eine andere Einheiten hat.« Planudes führt 2 Formen der Multiplikation vor. Die erste geht übers Kreuz; man schreibt die Faktoren mit ihren gleichnamigen Stellen untereinander, multipliziert zuerst die Einheiten mit den Einheiten, schreibt diese oben an ihre Stelle und merkt die etwaigen Zehner, dann multipliziert man die Zahlen miteinander, welche Zehner geben, also die Einheiten des Multiplikanden mit den Zehnern des Multiplikators und die Einheiten des letzteren mit den Zehnern des ersteren, addiert beide Produkte, zählt die Zehner dazu, die von der Multiplikation der Einheiten übrig sind, schreibt die einfachen Zehner an ihre Stelle und behält die Hunderter; dann geht man zu den Stellen, welche 100 geben; dies sind die ersten und dritten, dann die zweiten in beiden Zahlenreihen, diese drei Produkte werden wieder addiert und die behaltenen hinzugezählt. Nun kommen die Tausender, diese erhält man aus den Einheiten und Tausenden, aus den Hunderten und Zehnern etc. Während man für die Einheiten nur ein Produkt hat, bekommt man für die Zehner 2, für die Hunderter 3, für die Tausender 4 etc.«

Dieses Verfahren scheint eine Übertragung der Chiasmen-Multiplikation der alten Griechen auf die Multiplikation der Positionsarithmetik zu sein. Man braucht dabei weniger Ziffern, wird aber leicht irre. Das andere Verfahren ist das des Ali Ibn Ahmed Almaçawi aus dem 11. Jahrhundert, wobei das Produkt am Rande steht.

»Die Teilung ist, wenn wir, eine Zahl durch eine andere teilend, wissen wollen, was jeder Einheit der Zahl, durch welche die Teilung geschieht, zufällt.« Eine Zahl kann aber geteilt werden durch eine gröſsere, eben so groſse und kleinere. Der erste Fall gibt einen Bruch, in welchem der Dividend dem Zähler, der Divisor dem Nenner entspricht. Die Division wird vollzogen, indem man den Dividenden in einen Bruch verwandelt, welcher den Divisor zum Nenner hat, z. B. $4 : 5 = 20/5 : 5 = 4/5$. Das Beispiel $4865 : 5$ wird so ausgeführt:

$$\begin{array}{l} 31 \\ 4865 \\ 973 \\ 5 \end{array}$$

Nach der Divison werden die sechzigteiligen Brüche und das Ausziehen der Quadratwurzel behandelt.

Die Ziffern des Planudes haben eine überraschende Ähnlichkeit mit den ostarabischen Zahlzeichen. (Vergl. S. 139; 17a.)

Die weitere Entwickelung und Verbreitung der Rechenkunst im 15. und 16. Jahrhunderte.

Die Arithmetik bei den Gelehrten.

Bisher waren die Lehrbücher Manuskripte, daher teuer und verhältnismäfsig selten. Als kostbares Gut wanderten sie durch Generationen von Hand zu Hand. Die Erfindung des Leinenpapiers [1]) kündete auf dem Gebiete der Unterrichtsmittel eine neue Zeit an, und der Buchdruck bahnte der Wissenschaft auch die Wege ins Volksleben. Die Wiedererweckung der klassischen Studien förderte neue Manuskripte zu Tage, und die Entdeckung Amerikas eröffnete den Völkern der alten Welt im doppelten Sinne den Ausblick auf eine neue Welt. Wir sehen daher mit einem Male die Wissenschaft neu angeregt und im Besitze neuer Hilfsmittel; wir finden den Handel in anderen Bahnen — lauter Thatsachen, die auch das Rechnen lebhaft berührten.

Zunächst waren es die Männer der Wissenschaft, welche die neue Rechenkunst pflegten, in Deutschland namentlich die Professoren der Wiener Universität.

In der Mitte des 15. Jahrhunderts erweckte Johann von Gmunden, so genannt von seinem Geburtsorte Gmunden in Oberösterreich, durch seine Vorträge an der Universität Wien lebhaftes Interesse für das Studium der Astronomie. Diese bedurfte der Arithmetik als Hilfswissenschaft. Johann von Gmunden legte seinen Vorlesungen über die Arithmetik den Algorithmus des Sacro Bosco zu Grunde. Weil sich diese Schrift aber nur auf ganze Zahlen erstreckte, so verfafste er dazu ein Komplement über die Bruchlehre, welches die in der Astronomie gebräuchlichen Sexagesimalbrüche einschlofs.

Der würdige Nachfolger des Johann von Gmunden war Georg Peurbach oder Purbach (1423—1461). Dieser Gelehrte wurde zu Peurbach bei Linz geboren, vollendete seine Universitätsstudien in Wien, besuchte dann verschiedene Hochschulen in Deutschland, Frankreich und Italien und hielt an der Wiener Universität öffentliche Vorträge. Peurbach bearbeitete

---

[1]) Die erste deutsche Papiermühle wurde 1390 bei Nürnberg errichtet.

für den akademischen Unterricht den Ptolomäischen Almagest, in welchem das gesamte astronomische Wissen des Altertums niedergelegt war. Wir besitzen von Peurbach auch einen kleinen, aus sieben enggedruckten Quartblättern bestehenden Leitfaden, Opus Algorithmi iucundissimum Magistri Peuerbachii, welcher in Wien bei den Vorlesungen über Arithmetik benutzt wurde und später auch an anderen Universitäten zum gleichen Zwecke in Gebrauch kam. Das Büchlein wurde erst 1505, also 44 Jahre nach dem Tode des Verfassers, gedruckt. In knapper und präziser Form stellt dasselbe die Rechenoperationen ohne Definitionen und ohne weitere Begründung dar. Zu den Spezies zählen auch das Medieren und Duplieren. Bei der Numeration werden die Zahlen in Triaden eingeteilt; zur Erleichterung der Aussprache sind Punkte über jene Ziffern gesetzt, bei welchen das Wort tausend gesprochen und wiederholt werden mufste. $\dot{3}\,79\ddot{0}\,52\dot{8}\,614$ wurde gelesen: 3 tausend tausendmal tausend, 790 tausendmal tausend, 528 tausend und 614. Die Operationsweise bei den Rechnungsarten wird ausführlich beschrieben, ein Zeichen, dafs man es mit einer verhältnismäfsig neuen Sache zu thun hatte. Die Addition wird wie heutzutage behandelt und die Neunerprobe in bestimmter Form angefügt; für das Beispiel

$$\begin{array}{r} 5975 \\ \underline{486} \\ 6461 \end{array} \quad \text{also:} \quad \begin{array}{c} 8 \\ 8\ \ 0 \\ 8 \end{array}$$

Oben steht die Summe der einzelnen Proben, in der Mitte die Probe der einzelnen Summanden (8 und 0), unten die Probe der Summe. Die obere und untere Zahl mufsten gleich sein.[1] Bei der Subtraktion wurde der Punkt abwärts geschlagen (wie bei Planudes), z. B.:

$$\begin{array}{r} 7\,4 \\ \underline{5.8} \\ 1\,6 \end{array}$$

»Man subtrahiert also 8 von 14 und 6 von 7. Peurbach beschreibt die Stellung der Glieder bei der Subtraktion genau und sagt: Entweder ist die erste der unteren Reihe gleich jener, welche ober ihr steht, oder kleiner, oder aber gröfser. Ist sie

[1] Über die Rechnungsproben s. weiter unten.

ihr gleich, so schreibe man unter den Strich die Ziffer (die Null); ist sie kleiner, dann schreibe man das, um wieviel die gröſsere die kleinere überragt; ist sie aber gröſser, so füge man, da das Gröſsere vom Kleineren sich nicht abziehen läſst, der unmittelbar folgenden Zahl der zu subtrahierenden Reihe im Geiste eine Einheit hinzu, so nämlich, daſs man unter diese Zahl einen Punkt macht, welcher in Ansehung jenes Digitus, von welchem die Subtraktion geschieht, den Wert von 10 hat. Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis alle Figuren der unteren Reihe von den über sie gesetzten abgezogen sind, und ein übriggebliebener Rest, unterhalb der gezogenen Linie in der Reihenfolge geschrieben, zeigt den Überschuſs der Zahl, von welcher abgezogen werden muſs, über die abzuziehende Zahl.« Diese ausführliche Darstellung zeigt, daſs Peurbach es lediglich auf die Darlegung des Mechanismus der Operation abgesehen hatte. Bei der *Mediation* bringt er das Beispiel:

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\,1\,1 \\ 8579 \\ \hline 4289 \end{array} \quad \frac{1}{2} \quad \text{mit der Probe} \quad \begin{array}{ccc} & 2 & \\ 5 & & 2 \\ & 2 & \end{array}$$

Man nimmt die Probe des Resultates zweimal, addiert dazu den Rest 1 (wenn einer da ist), nimmt von dieser Summe wieder die Probe, und diese muſs der Probe des Dividenden entsprechen. Beim *Multiplizieren* verlangt Peurbach die Kenntnis des Einmaleins, gibt aber für die Sätze von 5 bis 9 die mechanischen Regeln mit dem dekadischen Komplement zur Auffindung der Einmaleinsprodukte. Die Ziffern des Multiplikators werden ausgestrichen, sobald der Multiplikand damit multipliziert ist. Die *Division* ist das Übersichdividieren, wie es in den folgenden Jahrhunderten allgemein gebräuchlich wurde. Jede Verrichtung wird hier gleichfalls mit peinlicher Genauigkeit auseinandergesetzt, und die Rechnung am Schlusse mit der 9 probiert. Doch erwähnt Peurbach, daſs eine Spezies der andern (entgegengesetzten) als Probe diene, also die Subtraktion der Addition, die Division der Multiplikation, und umgekehrt. Nach Abhandlung der Spezies wird die geometrische Proportion definiert und zur Auflösung von Textaufgaben benutzt. Die Regel heiſst: »Wenn ein äuſseres Glied unbekannt ist, so multipliziere die inneren und dividiere durch das äuſsere, so wird der Quotient die gesuchte

Zahl zeigen; ist ein inneres unbekannt, so dividiere mit demselben das Produkt der äufseren.« Die Hauptsache sei der Ansatz, dafs Gleichartiges untereinandergestellt werde: Ware unter Ware, Preis unter Preis. Für die Gesellschaftsrechnung ist nur ein einziges Beispiel gegeben. Die Auflösung beginnt in der Regel mit der kategorischen Aufforderung: Fac sic! d. h. mach's so!

Peurbach war der Lehrer des berühmten Astronomen Johannes Müller. Müller wurde 1436 zu Königsberg in Franken geboren und nachmals von seinem Geburtsorte Regiomontānus (Königsberger) genannt. Dieser Gelehrte beherrschte das ganze weitausgedehnte Gebiet der Mathematik vollständig, so dafs ihm die freie Auffassung des vorliegenden Stoffes und die Erweiterung desselben möglich war. Gleichwohl verschmähte er es nicht, eine Elementar-Arithmetik zu schreiben, durch die er bewies, wie innig er mit der immer noch seltenen Kunst vertraut war. 1461 begleitete er den Kardinal Bessarion nach Italien, wo damals die klassischen Studien in höchster Blüte standen, und erwarb sich daselbst eine gründliche Kenntnis der griechischen Sprache und Litteratur. Eine Frucht dieser Studien waren die Übersetzungen einzelner Werke des Apollonius und Archimedes. Nach seiner Rückkehr aus Italien hielt er sich am Hofe des Königs Matthias Corvinus von Ungarn auf. Später ging er nach Nürnberg, wo er mit dem Patrizier Bernhard Walther in wissenschaftliche Verbindung trat. 1474 berief ihn Papst Sixtus IV. der Verbesserung des Kalenders wegen nach Rom und ernannte ihn zum Bischof von Regensburg. Er starb zu Rom 1476. Regiomontānus bediente sich in beschränktem Mafse schon der Buchstaben als allgemeiner Zahlzeichen, und nur sein früher Tod schien ihn an der weiteren Ausdehnung dieses Verfahrens verhindert zu haben. Sein schriftlicher Nachlafs wurde von Walther erworben, ging aber durch die Gleichgültigkeit seiner Erben verloren. Regiomontānus besafs ein vielseitiges Wissen und ein scharfes Urteil, und die von ihm gegebenen Anregungen haben sein Leben lange überdauert.

In Italien bemühten sich um die Weiterbildung der Arithmetik Lucas de Borgo, Geronimo Cardano und Nikolaus Tartaglia.

Der Minoritenmönch Lucas de Borgo (Luca Pacioli), Lehrer der Mathematik in Neapel, später in Mailand, zuletzt in

Venedig, gab 36 Abbildungen heraus, durch welche die Fingerstellungen bei der Fingernumeration dargestellt wurden. Sein Rechenbuch, Summa de Arithmetica 1494, gehört zu den ersten gedruckten Rechenbüchern. Es verfolgte wissenschaftliche Ziele, lehrte aber auch die praktische Rechenkunst. 1481 schrieb Pacioli einen Abrifs über die Handelsarithmetik, Libro de mercatantie et usanze di paesi, und wurde dadurch zum Begründer der doppelten Buchhaltung.

Cardanus, ein berühmter Arzt und Mathematiker, zugleich Lehrer der Heilkunde an der Universität in Mailand, später in Pavia, schrieb eine Practica arithmeticae generalis (Mailand 1539), ein Buch, welches die gesamte Arithmetik umfafst, und in welchem beim Radizieren die Decimalbrüche angewendet werden.

Nikolaus Tartaglia oder Tartalea war im Kampfe mit den Widerwärtigkeiten des Lebens zum Mathematiker geworden. Er hinterliefs ein höchst bedeutendes wissenschaftliches Rechenwerk: General tratutto di numeri et misure etc. 1556. Tartaglia kannte eine Methode zur Auflösung kubischer Gleichungen. Dieselbe wurde um 1500 von Scipio Ferro gefunden, und Tartaglia hat den Beweis dazu geliefert. Cardanus entlockte ihm gegen das beschworene Versprechen der Verschwiegenheit das Geheimnis, veröffentlichte aber wenige Jahre darauf die Regel, welche nach ihm die cardanesische Regel oder Lehre genannt wurde. So kam der gutmütige Tartaglia um den Ruhm seiner Erfindung.

In Frankreich machte sich Peter Ramus (Pierre de la Ramé) um die Arithmetik hoch verdient. Unter den gröfsten Entbehrungen erwarb sich Ramus wissenschaftliche Bildung. Als Professor der Dialektik und Rhetorik an der Pariser Universität trat er heftig gegen die übertriebene Wertschätzung der aristotelischen Philosophie auf und fand zahlreiche Anhänger (Ramisten). Da er sich offen zum Calvinismus bekannte, wurde er seiner Professur entsetzt und mufste flüchten. Er bereiste Italien, Deutschland, die Schweiz und hielt an der Universität Heidelberg, wohin ihm seine Schüler gefolgt waren, Vorlesungen. Ramus durchforschte die Schriften der griechischen Mathematiker, schrieb Lehrbücher der Arithmetik und Geometrie in lateinischer, griechischer und französischer Sprache und entwickelte eine höchst folgenreiche Lehrthätigkeit. Er bearbeitete sämtliche Disziplinen des höheren Unterrichts in kompendiöser Form für den Lehrzweck. Dabei verzichtete er auf alle scholastischen Spekulationen und brachte den Grundsatz zur Geltung: Möglichst wenige Regeln, aber sobald als möglich vielfache Anwendung derselben. Als Didaktiker ist er ein Vorläufer des Comenius, mit dem er die trüben Lebensschicksale teilt. 1571 kehrte Ramus nach Paris zurück, wo er am 24. August 1572 ein Opfer der Bartholomäusnacht wurde.

Diesen Männern verdankt die Arithmetik ihre sachgemäfse Bearbeitung und die weite Verbreitung in den Kreisen der wissenschaftlich Gebildeten. Die Schriften der Gelehrten wurden aber auch für den Unterricht des Volkes verwertet, insbesondere von den zünftigen Schreib- und Rechenmeistern.

Die Rechenkunst unter den zünftigen Schreib- und Rechenmeistern.

Schon im 14. Jahrhundert liefsen sich in Städten erfahrene Männer nieder, welche als öffentliche Notare oder Volksanwälte dem Publikum ihre Dienste anboten. Sie hatten ihr Bureau (ihren Stuhl) an einem besuchten Orte und fertigten hier für ihre Klienten sozusagen auf dem Fleck Bittschriften, Briefe, Fakturen etc. an, weshalb sie auch Stuhlschreiber genannt wurden. Nicht selten waren sie zugleich die geschworenen Feldmesser (Visierer) und Eichmeister. Diese Männer gründeten private Schreib- und Rechenschulen und erteilten hier einen besseren Unterricht als die unwissenden Küster. Die Verbindung der Kalligraphie mit der Arithmetik war vom 14. bis zum 18. Jahrhunderte sehr gebräuchlich; daher nannte man die Rechenmeister, welche der alamodischen oder modernen Schreibekunst (der Kanzleischrift) mächtig waren, auch Modisten. In Nürnberg war die Verbindung der Kalligraphie mit der Arithmetik sogar in der Gewerbeordnung vorgesehen. 1409 wurde Job Kapfer als Privatlehrer unter die Bürger Nürnbergs aufgenommen mit der Bemerkung im Ratsprotokoll »ist hynnen erlaubt, dieweil er die kint lert«. 1417 ist Kristofferus Hueber, deutscher Schuelmeister in Landshut, bemerkenswert durch sein Bestreben, der kindlichen Auffassung mit bildlichen Darstellungen zu Hilfe zu kommen. »1457 wurde Christoph Scheurl« — so berichtet dessen Sohn Christoph 1520 — »hieher gen Nürnberg geschickt und Michel Joppeln, einem berühmten Rechenmeister, etliche Jahr in die Kost gelassen, von dem er die Kunst des Rechnens kürzlich und dermaſsen begriff, daſs er den andern Jungen etwann in Abwesen und auf Befehl des Meisters (Aufgaben) fürgab, sie verhöret, rupfet und strafet, daſs er eine Freude hätt und ihm wohlgefiel.« 1457 wirkt Kerber aus Wertheim als gelehrter Schulmeister in Freiburg i. B., 1472 Johannes Baier von Heidenheim in Nördlingen, 1480 Silberer in Überlingen. 1503 erhielt Meister Jacob von Schoonhoven aus Brügge durch die Bürgermeister von Amsterdam die Erlaubnis, in dieser Stadt Schule zu halten, um alle Kinder, »jung und alt, lesen, rechnen, zählen« zu lehren. Adam Riese, nach der schwankenden Schreibweise der damaligen Zeit auch Ris, Ryse, Rise, geboren 1492 zu Staffelstein in Bayern, wanderte nach Sachsen aus, wurde Rezeſsschreiber und »Rechenmayster« zu Erfurt und später Bergbeamter »auff sanct Annaberg«, wo er auch eine Privatschule unterhielt. Riese starb hier am 30. März 1559, und eine Gedenktafel bewahrt das Gedächtnis an diesen wackern Lehrer. In Nürnberg lieſs die Stadtverwaltung auf Anregung Dürers (1471—1528) öffentliche Vorträge über die Elemente der Geometrie halten, und hier legten die Schreib- und Rechenmeister ihr Examen ab. Auch die Oberpfalz hatte ihre Rechenmeister, sogar an kleineren Orten; denn »Johannes Widmann von Eger, Meyster in den freyen kunsten tzu leyptzick enbeut Meyster Sigmunden (Sigmund Altmann) von Smidmule (bei Regensburg) bayerischer nacion heyle vnd vnverdrossen willig Dienste«. (Widmanns Rechenbuch v. J. 1489.) In Elbing war 1546 der preuſsische Historiker Falk zugleich als Schreib- und Rechenmeister angestellt. In einer Freisinger Urkunde vom Jahre 1555 nennt sich Andreas Helmsauer selbst »deutscher Modist und gemeiner Sachen Schreiber«. Die württembergische Kirchenordnung vom Jahre 1559 bestimmt, daſs »fromme, christliche, gotteifrige teutsche Schulmeister, die von der Hand gute Modisten und Schreiber, auch mit der Feder und auf der Linien zu rechnen geschickt und fleiſsig seien, verordnet werden sollen — dieweil an guten Handschreibern und Rechnern bei unserer Landschaft Städten und Stadtschreibereien nicht kleiner Mangel«. Diese Rechenmeister und Vorsteher von Privatschulen, welche wie Riese wohl nicht zum geringsten Teile Mathematiker von Fach waren, brachten eine beträchtliche Summe arithmetischer Kenntnisse in das Volk und pflanzten sie fort von Generation zu Generation. Selbst Knaben vom Lande wurden mit erheblichen Kosten zu solchen Rechenmeistern in die Stadt gebracht. Eine Rechenaufgabe aus »Ein kurz Rechenbüchlein für anfahende Schüler von Johann Fischer« in der 2. Hälfte des 16. Jahrhunderts gibt eine diesbezügliche Andeutung. Sie heifst: Item, Ein Prezeptor (ein Wanderlehrer?) mit 12 Discipeln dingt/ sich in die Kost, soll geben für seine Person 1 woche 9 gr. vnd für jeden Discipel 8 gr. wie viel machts 1 woche vnd auch ein jar am Gelde? Eine Seite vorher steht die Aufgabe: Item Einer kauft 1 ochsen vmb 8 fl. 7 gr./ gibt 2 gr. dauon zu schlachten/ verkaufft die Haut vmb 1 fl./ das vnfslich vmb 1 fl. vnd $1\frac{1}{2}$ gr./ das eingeschneitig alles vmb 7 gr. 4 ₰ vnd wigt das fleisch 2 Ztr. $4\frac{1}{2}$ stein vnd 1 Pfd. wie kompt 1 Pfd. im kauff an/ facit vmb 4 ₰. Diese Aufgabe mag einen Mafsstab für die Höhe des Instruktionsgeldes abgeben. Eine ähnliche Aufgabe findet sich in dem Rechenbuche von Jacob. Sie heifst: Item einer hat ein Jungen bey dem Rechenmeister, soll jm geben für Lehrnung das viertheil Jar $1\frac{1}{2}$ fl./ vnd dem wirt jährlich pro Kostgeld 24 fl. Nun hat der Knab gelehrnet 24 Wochen/ wie vil machts alles/ bede Lehr- und Kostgelt. Eine der folgenden Aufgaben sagt, dafs damals ein Ochse 10 fl. kostete.

Die Rechenlitteratur des 15. und 16. Jahrhunderts.

Die ersten Rechenbücher waren zumeist in lateinischer, oder, je nach der Landsmannschaft des Verfassers, in italienischer, französischer etc. Sprache geschrieben. Zu den ersten gedruckten Rechenbüchern in lateinischer Sprache gehören aufser der schon genannten Arithmetik Peurbachs das Enchiridion von Huswirt 1500; Arithmetice opusculo duo Theodorici Tzwivel 1505 (nun sehr selten); Algorithmus de Jntegrio, minutiis vulgaribus etc. per Baccalarium Wolfgangum Monacensem 1507; Algorithmus novus di integris compendiosa, Köln 1510. Algorithmus linealis von Stromer 1512; Algorithmus linealis von Balthasar Licht 1513; Rudimenta Arithmetices authore Joanne Vuolphio Hersbrugiense

MDXXVII, Norimbergae e schola Sebaldina; Arithmetica integra von Michael Stifel 1544; Christoph Clavii Bambergensis e societate Jesu, epitome Arithmeticae practicae nunc quinto ab ipso auctore 1606 recognita etc., Coloniae Agrippinae MDCVII.

In den bürgerlichen Schreib- und Rechenschulen mufste sich alsbald das Bedürfnis nach deutschgeschriebenen Rechenbüchern geltend machen. Dazu kam das Beispiel des Auslandes, der Italiener und Franzosen, welche ihre Rechenbücher eben in italienischer, bezw. französischer Sprache verfafsten. Darum sagt Simon Jacob, »dieser Zeit Ratschreiber zu Franckfurt 1565: Der Leser wolle mein fürnemmen (die Herausgabe eines Rechenbuches) nicht gar vnziemlich achten/ dieweil ich hierinnen nichts weiter suche dann wie doch diese Künst bey vns gleichwie bei anderen Nationen in vnser Muttersprach gepflanzt werden möchten, welches bisher sehr wenig geschehen wie am tag ist.« In der Hauptsache erscheinen die ersten deutschen Rechenbücher nach Inhalt, Einteilung und Methode gröfstenteils nur als Übersetzungen oder Auszüge der lateinischen, und die Verfasser wagten sich nicht immer damit selbst ans Tageslicht, weshalb mehrere der ersten deutschen Rechenbücher anonym erschienen.

Die bis jetzt aufgefundene Rechenlitteratur weist als ältestes Dokument in vaterländischer Sprache einen Algorithmus auf aus der Zeit von 1440 bis 1450, der sich in der Stadtbibliothek zu Basel befindet. Es ist der Algorithmus in vulgari ut reor in Brabantico, vermutlich ein Kollegienheft, geschrieben in dem deutsch-holländischen Dialekt, welcher in der Gegend von Cleve und Emmerich gesprochen wird. (Im III. Bande der Monumenta germanica Paed. hat Dr. Günther eine Abbildung der ersten und zwei letzten Seiten dieses hochinteressanten Manuskriptes geliefert.)

Ohne Zweifel hat es aber früher schon deutsch geschriebene Rechenbücher gegeben.

Das älteste in deutscher Sprache gedruckte Rechenbuch verfafste Heinrich Petzensteiner (Bamberg 1483). Petzensteiner, ein geborner Nürnberger, war Faktor des Buchdruckers Sensenschmid. Das Rechenbuch Petzensteiners,[1]

[1] In der Ratsbibliothek zu Zwickau.

beschrieben von Johann Müller, besteht aus 77 unsignierten Blättern. Das Vorwort ist (nach Dr. Günther) durch ein Register von folgendem Wortlaut ersetzt: »Hie nach folget dz Register dises Rechenpuchleins nach seinen Capiteln vnd was in einem yzlichen begriffen. Hierumb den fleyſsigen merckern« — Rezensenten — »das mit gantzen fleys ersucht mit seinen Caconen (?) vnd Exempeln nachvolgende vnd ob yndert eyn ciffern oder mer verkert were. wil ich entschuldigt sein oder zu vil oder zewenig weren was du gar leichtlich durch die obgemelten Canones vnd ir regel finden magst alle rechnung in diesem puchlin. Auch ein iglicher in teutschem Lesen vnd in ciffern erfaren mag an alle vnterweyssung vor im selbs soliches gelernen vnd garvil als dan in welschen . teutschen . vnd andern landen in allen kauffschlagen oder kauffmanschatz wie die genant seyn not zu wissen ist alles ander dess gleych magst (an allen zweiffel) vinden. vnd magst auch solichs alles nach den rechnungen der ciffern der Tolleten. Auch der linien machen also das du fleyſsig merckest wie du die rechnung mit der feddern oder kreyden machest das du die pfennig in gleycher weyſs legest . . .« Petzensteiner spricht die Zahl 9 186 357 243 in folgender Weise aus: Neun mal Tausant tausant tausant Hundert tausant tausant Sehsundachtzig tausand tausand Drey hundert tausant Sybenundfunfftzig tausant zweihundert und dreiundfyrtzigk. Die Anfangsgründe, das Eins und Eins, Eins von Eins etc. setzt Petzensteiner voraus; darüber enthielten in jener Zeit die Lesefibeln das Nötige. Petzensteiner berechnet die Multiplikation 640180 . 705081 also:

						6	4	0	1	8	0	
						6	4	0	1	8	0	1
				5	1	2	1	4	4	0	8	
				0	0	0	0	0	0	0		
		3	2	0	0	9	0	0	5			
		0	0	0	0	0	0	0				
4	4	8	1	2	6	0	7					
4	5	1	3	7	8	7	5	4	5	8	0	

Die von den Arabern entlehnte Netzmultiplikation nennt Petzensteiner die Multiplikation auf dem »Schachir« (Schachbrett).

Die Division 467 : 19 führt er in nachfolgender Weise aus:

	1			
	~~4~~			
~~2~~	8	1		
~~4~~	~~6~~	~~7~~	24	$\begin{array}{ccc} & 2 & \\ 8 & \times & 6 \\ & 1 & \end{array}$
~~1~~	~~9~~	~~9~~		
	~~1~~			

Das Verfahren erklärt er wie folgt: »Item secz die leczten vntter die leczten das ist 1 vntter 4 vnd 9 vntter 6. vnd sprich wy oft mag ich 19 in 46 gehaben das ist 2 mal secz 2 aufsen gegen der rechten Hand vnd mit den 2 multiplicir die vnttern figur yglich besunder vnd subtrahir von den die oben sten. Sprich 2 mal 1 ist 2 vnd 2 von 4 peleyben 2 die secz über 4. Nu sprich 2 mal 9 ist 18 zeuch 8 von 6 das mag nicht gesein leyh in 2 vnd macht 20 dieselben 2 die du leychst gib zu 6 wirt 8 die secz über die 6 vnd nym die 2 von 2 bleibt 0. nu ruck die 19 furpos vnd sprich wy oft mag ich 19 in 87 gehaben das mag 4 mal gesein. Nu secz 4 nach dem vordern 2 vnd machs als vor vnd sprich 4 mal 1 ist 4. vnd 4 von 8 pleyben 4 die secz vber 8 vnd prich die 8 abe vnd sprich 4 mal 9 ist 36 nim 6 von 7 pleibt 1 vnd 3 von 4 pleibt auch 1 also kumen 24 vnd $\frac{11}{19}$.« Nebenan steht die Neunerprobe.

Bei der Bruchrechnung summiert Petzensteiner erst den zweiten Bruch zum ersten, zum Resultat den dritten u. s. w. Das Aufsuchen des Generalnenners bringt er nicht.

Unter den gegebenen Regeln für spezielle Dinge ist die »Vom Wandern« bemerkenswert, weil sie die Summation einer arithmetischen Reihe und die Auflösung einer algebraischen Aufgabe in sich schliefst. Sie heifst: Es sein zween gesellen die gend (gehen) gen rum (Rom). Eyner get alle tag 6 meyl der ander geth an dem ersten tage 1 meyl an dem andern zwue[1]) etc. vnde alle tag eyner meyl mer dan vor. Nu wildu wissen in wievil tagen eyner als vil hat gangen als der ander. So nim die zal zwir (verdopple) die der gleych geht. Der wirdet 12 vnd

[1]) In bayerisch-fränkischen Dialekten spricht man heute noch tzwa u. zwue.

dar von thu die meyl die der an dem ersten tag ging der vngleych get. Also beleybt den noch 11 meyl so kummen sie gleich gangen an dem 11 tag.« (Wenn x die gesuchte Zahl ist, so hat man: $1 + 2 + 3 + \ldots + x = \frac{1}{2}(x^2 + x) = 6x$; $x^2 = 11x$; $x_1 = 11$; $x_2 = 0$.)

»Das Buch ist im ganzen in einer leicht verständlichen Schreibart gehalten, sowohl zum Selbst- als auch zum Schulunterricht bestimmt und gibt ein recht deutliches Bild vom Stande des Rechenunterrichts am Ausgange des Mittelalters.«

Sechs Jahre nach Petzensteiner gab Johann Widmann von Eger »die behende und hübsche Rechnung auff alle Kauffmannschaft« heraus. Das Buch wurde gedruckt in der fürstlichen »Stath Leipczick durch Konrad Kachelofen. Im MCCCCLXXXIX Jare.« Widmann verfaſste sein Rechenbuch nach arabischen Mustern unter Benutzung der Schriften des Sacro Bosco, Euklid, Boëthius und Jordanus, wie er selbst angibt. Der erste Teil handelt: võ kunst vn art der zal an yr selbst, d. h. vom Rechnen mit absoluten Zahlen; der zweite: võ der ordnung der zal, d. h. von den Verhältnissen und Proportionen und der praktischen Anwendung derselben; der dritte: võ der art des messen | genãt geometria. Widmann beschreibt 7 Spezies, die gebräuchlichen vier mit dem Numerieren, Duplieren und Medieren; er behandelt die Bruchrechnung, die Tolletrechnung, die »guldin regel« mit der Mischungs-, Stich- und Münzrechnung. Den Schluſs bildet die regula falsi und cosse. »Auch als Mathematiker verdient Widmann in Ehren gehalten zu werden, denn ihm dankt man es, daſs Herons Vorschrift, den Flächeninhalt F eines Dreiecks durch die 3 Seiten a b c auszudrücken, d. h. die Formel:

$$F = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

wieder als Bestandteil des elementaren planimetrischen Lehrstoffes auftritt.«[1] (Dr. Günther.)

Widmann war hiernach Mathematiker von Fach. 1479 trug er sich ins Leipziger Studentenalbum ein, 1482 ward er Bacharius, 1486 Magister der freien Künste. Er verleugnet aber in seinem Buche die Darstellungsweise des zünftigen Rechenmeisters nicht und ist in seinen Formulierungen minder deutlich als Petzensteiner.

---

[1]) Vergleiche auch Seite 95.

1514 erschienen die Rechenbücher von Kögel, Joann Böschenstein und Kobel. Dem Rechenbuche von Joann Böschenstein folgte 1516: »Ein nützlich Rechenbüchlin der Zyffer. Aussgangen durch Abraham Böschensteyn.« (Villicus.)

1518 erscheint von Heinrich Grammateus in Wien ein Rechenbuch unter dem Titel: Ayn new künstlich Buch/ welches gar gewifs vnd behend/ lernet nach gemainen regel detre, welschen practic/ regeln falsi vnd etlichen regeln cosse mancherley schöne vnd zuwissen notdürfftig rechnung/ auff kauffmanschaft. Bei Grammateus finden sich Anfänge zur allgemeinen Zahlbezeichnung, z. B.: Wie sich hadt a zum b also hat sich c zum d. Der Inhalt des Buches und seine Behandlung sind dem praktischen Leben angepafst; die Begründung der Regeln fehlt. Grammateus war, wie Apian und Rudolf, ein Schüler der Wiener Universität.

In demselben Jahre gab Adam Riese die »Rechenung auf der Linihen, in mafsen man es pflegt tzu lern in allen rechenschulen« zum erstenmal heraus, ein Buch, das zahlreiche Auflagen gehabt hat. »vleisigklich vberlesen vnd zum andern mall in trugk vorfertiget« erscheint es »zu Erffordt czum Schwartzen Horn 1525 bei Mathes Maler«.

Das Jahr 1525 brachte die »Behend vnnd Hübsch/ Rechnung durch die kunst-/ reichen regeln Algebra/ so ge-/ meincklich die Cofs geneñt werden. Dar-/ innen alles so treülich an tag gegeben; das/ auch allein aufs vleissigem lesen on allen/ mündtlichẽ vnterrich mag begriffen wer-/ den . . . Zusamenbracht durch Cristoffen Rudolff/ vom Jawer.« Strafsburg 1525. Dem Bischof Sebastian von Brixen gewidmet.

1526 liefs Rudolf seine Arithmetik: »Künstliche Rechnung mit der Ziffer vnd mit den zalpfennigen sampt der Wellischen Practica vnd allerhand forteyl auff die Regeldetri . . . .« folgen. Dieses Büchlein enthält die Spezies in ganzen und Bruchzahlen, die Regeldetri, welcher einige Sätze über Verhältnisse und Proportionen vorausgeschickt sind, die welsche Praxis, Mafs-, Gewichts- und Münzvergleichungen und ein »Exempelbüchle« als Anhang. Das Buch ist mit viel methodischem Geschick bearbeitet und war lange Zeit Muster für die nachfolgenden Rechenbücher, welche von nun an immer zahlreicher erscheinen.

1536 ediert Adam Riese »Ein gerechnet Büchlein, auff den Schöffel, Eimer vnd Pfundtgewicht.« Nach dem Titel zu schliefsen, war diese Schrift ein Faulenzer. Auch Adam Rieses Söhne, Abraham, Isaak und Jakob, trieben die Rechenkunst als Berufswissenschaft und verfafsten arithmetische Schriften. Rieses zweiter Sohn Isaak liefs 1580 zu Leipzig »Ein neues nutzbar gerechnetes Rechenbuch auf allerley Handtirung nach dem Centner- und Pfundtgewicht« im Druck ausgehen.

Das Jahr 1534 bringt des »Kauffmanns Handbüchlein. Aller Rechenschaft behendigkeyt auf Linien vnd Ziphren/ durch Georgen Reichelstein« und ein »Rechenbüchlein auf der Linien/ dem einfeltigen man oder leien/ vnd jungen anhebenden liebhabern der Arithmetica zu gut/ durch Johann Albrecht/ Rechenmeister zu Wittenberg durch Georg Rhaw.«

1527 beteiligt sich wieder ein hochgeachteter Vertreter der Wissenschaft, Petrus Apianus (Bienewitz), Professor an der Universität Ingolstadt (geb. 1495 † 1552), an der Konkurrenz deutscher Rechenbücher. Seine Schrift (v. J. 1537) führt den Titel: Ein newe vnnd wohlgegrüñdte vnderweisung aller Kauffmanns-Rechenung inn dreien Büchern. Sunderlich was fortel vnd behendigkeit in der Wellschen Practica vnñd Tolleten gebraucht würt/ desgleichen vormals weder in Teutscher noch in Welischer Sprach nie getruckt. Durch Petrum Apianum der Astronomei zu Ingolstatt Ordinarium. Der 1. Teil enthält einschliefslich der Numeration und Progression 6 Spezies, die Bruchrechnung und einfache Regeldetrie. Dem schriftlichen Addieren und Subtrahieren gehen die gleichen Spezies auf den Linien voraus »dieweil die Summirung der Register durch die rechenpfennig auff der lini brauchsamer ist dann durch die federn oder kreide.« Der 2. Teil enthält die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel, die Fortsetzung der Regeldetri und ihre Anwendung auf Alligations-, Münzschlag-, Stich- und Wechselrechnung etc. Der 3. Teil behandelt die welsche Praxis. Apian empfiehlt die Fingerbeugungen im Sinne Bedas, wozu er Abbildungen gibt, ein Beweis, dafs das Fingerrechnen im 16. Jahrhunderte noch da und dort seine Vertreter hatte. Den praktischen Aufgaben gehen theoretische Erläuterungen voran.

1539 erschien »Ein kurtz vnd behend Rechenbüchlein vff Linien vnd Ziffern von Allerley kauffmanschaft, Schickung des Dygels, Müntzschlag . . . gantz grundtlich vfsgedruckt vnd zusammengebracht durch Balthasar Wreedt, Rechenmeister in der löblichen stat Cöln. Gedruckt zu Collen mit Fleyſs vnd correckt durch Eucharium vom Hyrtzhorn ytzt nämlich Anno MDXXXIX.«

Im Jahre 1540 wurde »Ein künstlich Rechenbüchlin auff Zyffer vnnd andere hübschen Regeln von Leonhard Hegelin, deutschen Schulmayster zu Vlm« im Druck ausgegeben.

Nun tritt ein bedeutender Mathematiker auf in dem Augustinermönch Johann Michael Stifel, geb. 1487 zu Eſslingen, wo er auch ins Kloster trat. 1522 entfernte er sich aus demselben »weil müncherei vor Gott ein greuwel ist« und schloſs sich Luther und Melanchthon an. Neben seiner vortrefflichen lateinischen Arithmetica integra, 1544, hinterlieſs er ein »Rechenbuch von der deutschen und welschen Practic (1546), Eine sehr wunderbarliche Wortrechnung samt einer Erklärung einiger Zahlen Daniels und der geheimen Offenbarung Johannis 1553, in welcher die Zahlenmystik auf protestantischem Boden auflebt; endlich erklärte und vermehrte er die Coſs Rudolffs, die uns später eingehender beschäftigen wird. Stifel starb 1567.

Mit diesen Schriften ist die Reihe der bis zur Mitte des 16. Jahrhunderts herausgegebenen Rechenbücher noch lange nicht erschöpft. Vorstehende Aufzeichnungen sollen daher kein vollständiges Inventar bilden, sondern lediglich hervorragende Vertreter der Rechenlitteratur dieser Zeitperiode namhaft machen. Manches interessante Rechenbuch aus dieser Zeit deckt wohl noch der Staub der Bibliotheken, und manches andere ist wahrscheinlich in den schweren Kriegen der folgenden Jahrhunderte unwiederbringlich verloren gegangen.

Diese Rechenbücher wurden meist in rascher Folge, vielfach Jahrzehnte lang, neu aufgelegt. Nach Wellers Repertorium typograph. sind von Kobels Rechenbüchlein bis 1520 sieben Ausgaben in München, Berlin und Bamberg noch vorhanden. Wildermuth zählte von Rieses Rechenbüchern für die Zeit von 1522 bis 1656 nicht weniger als 26 Auflagen. Reimeri gemmae Frisii, Arithmeticae practicae methodus facilis wurde von 1522 bis 1655 32 mal aufgelegt. Das Compendium von Johann Piscatores (Fischer) hatte von 1549 bis 1611 6 lateinische und von 1565 bis 1592 4 deutsche Ausgaben. Jacobs Rechnung auf der Linie wurde von 1557 bis 1613 achtmal neu ausgegeben. Solche Daten sind deswegen bedeutsam, weil sie einen Schlufs auf das Bedürfnis zum Rechnen und die Verbreitung der Rechenkunst im Volke zulassen.

Eine eigentümliche Erscheinung des 16. Jahrhunderts sind die historischen Rechenbücher, welche ihre Aufgaben lediglich der Geschichte entnehmen. Ein solches Rechenbuch ist die »Arithmetica historica von Sigmund Suevus (Schwab?) aus Freystadt, Diener des göttlichen Wortes der Kirchen Christi zu Brefslau, Probst etc.« 1593.

Mit diesem Titel und wahrscheinlich auch mit dem Inhalte stimmt überein die »Arithmetica historica d. i. Rechenkunst durch alle Species vnd fürnembsten Regeln mit schönen denkwürdigen Historien aufs H. Göttlicher Schrifft, vnd guten Geschichtbüchern genommen, sampt deroselben Bedeutung lustig vnd lieblich zu lesen, sowol für die Jugend, als diejenigen so nicht rechnen können, von Georg Meichsner, Schuldiener zu Rothenburg o. T. 1625.« (Jänicke.)

In diesen Rechenbüchern ist die Einkleidung die Hauptsache; sie dienen mehr der Unterhaltung als dem Rechenunterricht, und der Stufengang leidet unter dem Übergewichte des Historischen. Die Aufgaben in dem Buche von Suevus sind teilweise von solch einfältiger Naivetät, dafs sie in unserem decenten Zeitalter ein Rechenbuch für die Hand der Jugend unmöglich machen würden. Wir geben nur ein Beispiel: »Rachel, des Patriarchen liebe Hausfraw ist in Kindsnöten gestorben 1756 Jahr v. Ch. Wie lang ist es von dar/ bifs auf das 1547. Jahr n. Ch. in welchem die Gottselige Königin Anna König Ludwigs von Vngarn Schwester vnd Ferdinandi Röm. Vng. vnd Böhm. Königs Gemahl in Kindsnöten/ da sie ihr fünfzehend Kind geboren/ seliglich gestorben ist? Dabei haben wir zu merken. Wie auch fromme und fürnehme Matronen/ das Creutz der schmerzlichen Geburt schmecken müssen/ dardurch ihnen doch nichts geschadet wird/ sondern: Die Weiber werden selig durch Kinderzeugen/ so sie bleiben im Glauben etc.« Gleichwohl sind diese Rechenbücher interessant, weil sie für die vielseitige Anwendnng der Rechenkunst Zeugnis geben; dem Rechenmethodiker zeigen sie, wie alt der Gedanke schon ist, das Rechnen und die Realien zu verbinden.

Auch die Idee, ein religiös sittliches Moment in das Rechnen hineinzutragen, tritt hier hervor. Man sucht aber den erziehenden Einflufs des Rechnens nicht in der Sache selbst, sondern in angefügtem äusserlichen Beiwerk. So läfst z. B. der vorgenannte Sigmund Suevus das Alter Adams und Methusalems berechnen und knüpft daran die Lehre: »Durch dich werden deiner Tage viel werden. Wenig Leute erreichen mehr ein hohes Alter, weil die alte, kalte Welt Vrsach, dafs alles im Abnehmen ist. Aber viele Leute führen auch ein unordentlich Leben. Wie auch das Sprichwort sagt, dafs mehr Leute im Weinglase vnd Bierkannen/ denn im Meer ersauffen. Vnd der Herr Ph. Melanchthon solchs öfters beklagt vnd gesagt hat: Ach wir armen Deudschen fressen vnd sauffen vns arm vnd kranck vnd in die helle hinein. Darumb wohl allen, die nüchtern vnd messig leben/ vnd jhres Leibs also warten/ dafs er nicht zu geil werde.«

Damit im Zusammenhange stehen die poetischen Aufmunterungen der Schüler zum Fleifs, z. B.:

Wer nicht Rechent und Gabelt/
Wenn die Bräm sticht und krabelt/
Der laufft im Winter mit eim Strohseil
Vnd fragt: Hat jemand Hew feil?
Des alten Hermann Mathasy Reime.

Liebes Kind lerne wol
So wirstu gebratener Hüner vol.
Wirstu lernen vbel/
So frifs mit den Sewen aussen Kübel.
Des Herrn J. Martini Lutheri
Reymlein an die Schüler u. Studenten.

Schreib vnd Rechne jederzeit/
Der jüngste Tag ist nicht mehr weit. (Suevus.)

Die Rechenbücher von Kobel, Böschenstein und Riese.

Wir betrachten nun einige der ältesten deutschen Rechenbücher in ihrem Zusammenhange, zunächst

das Rechenbuch von Jakob Kobel (Köbel).

Dasselbe hat den Titel:

Ain New geordnet Rech-enbiechlin auf den linien mit Rechenpfenningen. den Jungen angenden zu heyss/ lichem gebrauch vnnd hend/ eln leychtlich zu lernen mit figuren vnd exem/ peln Volgt hernach klärlichen angezaygt. Am Ende: Getruckt in der Kayserlichen Stat Augſburg Anno dñ Tausent Fünff hundert vnd Zwayntzigisten jar. 30 Blätter, davon 24 mit römischen Zahlzeichen signiert. Titelblatt mit folgendem Holzschnitt, welcher das Rechnen mit Zahlpfennigen auf der liniierten Rechenbank darstellt.

Fig. 35.

Auf der Rückseite des Titelblattes steht das Gedicht:

In zal In Maſs vnnd in gewicht
Allding Von Got seyn zůgericht/
Clärlichen Salomon das sagt
On Zall on maſs Got nicht behagt
Beschreibt vns auch Sant Augustin
Vnd mandt vns fleyſslich in dem sin
Sich sol kain mensch nit vndersten
Kein Götlich Weltlich kunst begen

On rechens art durch ware zal
Bewert ist das in manichem val
Ain mensch dem zal verborgen ist
Leüchtlich verfürt der wirt mit list
Dis nim zu hertzen/ bit ich ser
Vnd yeder sein Kind Rechen ler
Wie es gen Got vnd Welt sich halt
So werden wir mit Eren alt. Amen.

Die Anfangsbuchstaben geben den Namen Jacobus Kobel. Hierauf folgt die Widmung: Dem Ernuesten Dietherichen Kemerer von wormbs/ genant von Dalburgk . . . Enbeut ich Jacob Köbel, disser zeyt Statschreyber zů Oppenheim/ mein willig dienst. Köbel sagt hier »daſs er den iungen angenden zů deglichen hewſslichen handeln ain klains Rechenbuechlein zusammengeraſpelt . . . . etlich der allten, verlassen vnnd verzetten Eerleynn/ nach der Eern auſs den stupffeln (nach der Ernte aus den Stoppeln) von den Eckern auffgelesenn« habe. Datum 1514.

»Nun volgt das Registerlein: Zum ersten VII. bůchstaben auſs dem A b c dar durch dem gemainem man/ alle zale in dissem Rechenbůchleyn/ vnd sunst wo man die geschryben find/ offenbart werden;« dann die »vnderweysung der Zyffer zal«; zum dritten »etliche Müntz«; zum »Fierdten« die Erklärung der »figuren vnnd zaychenn.« Das Büchlein ist demnach in »V tayl getaylt. 1) dye zuberaitung der Rechenbenck mit irñ auſslegungen der Banckir/ der Linien vnnd Spaciенn der Rechenpfennig yre bedeütungen;« 2) was Addicio, Subtractio, Duplacio, Mediacio, Multiplicatio, Diuisio vnd was progressio ist; 3) die »Gulden Regel die von den walen de Try genannt wirt;« 4) Rechnungen so durch gebrochnen zalen beschehen; 5) »Rechenschafften durch Exempel/ Von der Kauffleut vnd anderer Geselschafften/ Tailunngen, Erbschafften vnnd hendeln/ mit Würtz, Müntz/ etc.«

»Von Erkantniſs Teutscher zal. Dieweil diſs Rechenbüechlein dem gemainen Layen zu gut vnnd nutz (dem die Zyfferzale/ am Erstenn zu lernen schwere) durch die gemain Teutsch zal/ tzu Trucken fürgenomen wil ich die zale so auff etlich buchstaben auſs dem a b c verordnet hie anzeigen vnnd erkleren/ wie man die schreiben, lesen vnd versten solle. Vnnd demnach/ die Zyffer zale zů vnderweisenn für mich nemmen/ vmb das ob ain Junnger/

icht in diesem buchlein lernt/ dar durch er ander Rechenbüechlein zu lesen lüst gewun/ vnnd villeicht die selben mit Ziffern georden weren/ das er mit vnluste von seim vnuerstand gewunne/ vnnd dester fleyssiger zu Höcher Kunnst Rechens begyrigk zu lernen lesen wurde/ zum Ersten soltu wissen/ das Sybenn buchstaben aufs dem a b c da mit alle zale zu beschreiben verordent seinnd. Nemlich I.V.XLCDM.

Nun erklärt Kobel die Bedeutung der römischen Zahlzeichen; dabei bemerkt er: »du magst auch hundert also schreiben j C ij C iij C etc. »Nun wil ich meinem verhayfs nach wie mā die zale die mit sunderlichen figuren (die der gemain man Zyffer nendt) schreiben solle lernen lesenn vnnd versten/ mit ainer nachuolgendenn Taffelen/ in welcher Taffeln/ die zale der obgemelten Buchstaben/ vnd auch der Zyffern wie sie sich zusamen vergleichen/ vnd was die bedeutten/ verstendlich angezaigt wirt.

Zum ersten soltu wissen/ das newn bedeutlich figuren sein vnd ain Zyffer die sein also gestalt 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 das ist die zyffer/ Nun merck das ain yegklich der obgemelten figuren so die an der erstenn stat stet/ gegen der Rechten handt bedeüt sich selbs/ Ann der zwaiten stat bedeut sich selbs zehen male etc. Demnach magstu bayde zale durch ainander lernen.« Für $\frac{1}{2}$ steht das Zeichen ȷ (vergl. das Zeichen für $\frac{1}{2}$ unter der Jahrzahl 1322 auf S. 140) also XV Albos (Weifspfennig) ist ain lb heller und VII ȷ Albus ist ain ȷ lb heller. Der Ztr. hatte damals schon 100 Pfd., das Pfd. 32 Lot, das Lot 4 »Quintlen«. Verfasser will dann »die zuschickung/ Beraitung vnnd warnungen/ dysser heusslichen Rechenschafftenn durch gemaine Lere vñ Regeln zu behendem v'stand/ aller nachuolgendñ Algorischtischñ Species etc. Clar vnd vnderschydlich anzaigen.« Der Erst vnderschaydt Lernet erkennen die Rechenbenck mit yren Banckiren/ Cambien/ vnd formierung der Linien. Am Ersten solt du fier funf oder Sechs Linien d'so vil dir zu deiner rechnñg not werden/ auff ain Tisch machen/ also das sie in gleicher weitten vnnd spacien von ainander sten/ die selben Linien vnd spacien soltu mit zwaien oder dreyen zwerch linien/ von oben herab gezogen vnderscheyden/ ob du mer dan ain geschlecht der Müntze od' Gewicht etc. in deinem rechen prauchen wurdest/ yegklichs vnderschydlich in der tail ains zu legen/ Vnd wirt difs Figur der Linien ain Rechenbanck/ vñ die vnderschyd wechsselbenck/ Cambien/ oder Banckir genannt.

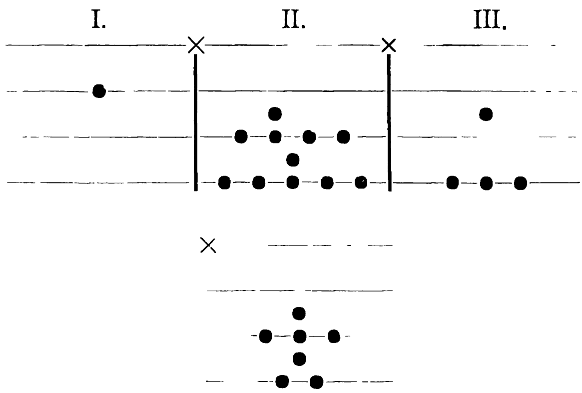
Die erst Banckir	Die zwayt Banckir	Die drit Banckir

Clar ist das die vnderst linig Ains bedeut/ die zwait Zehen/ die Drit Hunndert/ die Fierd Tausennt . . . . die Sybennt Tausentt Tausend etc. vnnd also auff vnd auff etc.

Tausentmal tausent	ꝎꝎ	●
Hundert Tausent	C Ꝏ	●
Zehn Tausent	X Ꝏ	●
Tausent	Ꝏ	●
Hundert	C	●
Zehen	X	●
Ains	I	●

On velenn bedeüt die Erst vnd vnderst veldung oder spacium/ zwischñ der Ersten vnd Zwaiten Linien/ Fünff das Ander Spacium . . . Funfftzigk etc. das erst spacium vnnder der vndersten Linien bedeüt ain halbs j./ (Folgt die Figur.) . . . . ain ieglich linig dar auf der Rechner seinen linckñ Daumen oder finger setzt/ wirt vor die aller vnderst Linig in bedeütnifs geacht vnd das Spacium ob ir vor Fünf etc. So aber der dawm dovon gethon/ wirt sie wie vor zehen bedeuten. Kainmal soltu vergessen so du die fierd Linnig erreichst/ ain Crützlein auf die zwerg Linig zumachñ . . . Oft begibt sich das Fünff Rechenpfenning auff ain Linien kömen als dan soltu die selbenn fünff auft heben/ vnnd ain dar für in das nechst Spacium ob der selben Linien legen/ In gleicher weifs/ als offt du zwen Rechennpfening in aim Spacium findest/ soltu alweg die zwen aufhebñ/ vñ ain dar für auff die nechst Linien ob demselben Spaciũ legen/ . . . . Der Sibent Vnderschait zaigt an wie du ain grofs Sum auff die Linien vnd Spacien vndertaylen solt. . . .

Exempel Ainer hat C Gul' . vnnd sagt du sol XLVII dauon ziehen vnd jm als dañ sageñ was dauon überig pleib dem thu also Leg ain Rechenpfening auf die drit Linig vñ heb in dan wider auff vnd leg zwen darfür in das vnnder spacium vnder der drit linien vnd nem dañ der zwaier ain vnd leg zwen dar für in das vnnder spacium/ der selbenn zwen nym aber ain aufs dem spacium vnd leg dar für fünff auf die erst vnd vnderst linig. Nachdem heb auf auff vier Rechenpfennig von der zwaiten linien die bedeüten XL . vnd thů sie hynweg/ darnach nim ain Rechenpfening auff dem spaciũ darvnder. Der bedeüt V. Vñ am letsten heb auff zwen Rechenpfening/ von der vndersten linien/ so bleiben ligenn LIII . vnnd leit als in dem driten Banckir/ vnnd ist gemacht



Soltu sprechen das ist Sybenund achtzigk vñ solt nit sagen/ das ist Fünfftzig/ Dreyssig/ Fünff/ vnd zway.

Vorstehendes sind die Vorübungen, die Köbel als »vnderschaydt« bezeichnet. Er fährt hierauf fort:

»Hie hebt ane das Annder Taile difs Rechenbüechleins. .

Additio. Summieren od' addiern ist zwů oder mer zale zu samen legen/ auff dz mañ sech wie vil der samenthafft in ainer summ sey. Vnnd seinn alwegenn zum wenigsten zwů zale dar zů notturfftig, Ainne zu der man legen wül vnd die ander/ die dar zu gelegt werden solle.« Nach einer allgemeinen Anleitung über das Auflegen und Zusammenfassen der Summanden mittels der Rechenpfennige gibt der Verfasser ein Beispiel: »Ich hab XXIV Gul' vnd thů dar zů LXIII gul'. nun wil ich wissen wie vil der Gul' in ainer summ sein/ So lege ich zum ersten zwen Rechenpfening/ auff die zwait linig nyder/ die bedeüten XX vñ darnach leg ich IIII Rechē pfeneg vf die vnderst linig/ dz pringt zůsamen XXIIII. die laſs ich also ligen vñ leg dar zů in das spaciū ob der zwaiten linien I. zalpfening (d bedeüt L) vñ leg I vf die linig darunder/ der bedeüt X vñ leg III auf die vnderst linig/ dz macht zůsamen LXIII. Nun find ich auff der vndersten linien VII Rechenpfening ligen/ der sol ich V. aufheben vñ I dar für in das nechst spacium ob der ersten linien legen so wirt die gantz sum LXXXVII. vnd ist gerecht gemacht (folgt die Figur). Der Verfasser zeigt nun, wie mit mehrsortigen Zahlen zu addieren sei, darauf behandelt er die Subtractio, die Duplatio, die Mediatio, die Multiplicatio, die Divisio und Progressio. Letztere sind *durch Figuren versinnlicht*: 1, 2, 3, 4 . . . .; 1, 3, 5, 7 etc. durch die *entsprechende Anzahl sachgemäſs geordneter Quadrate*. Auch bei der »Regula de Try, die võ die walen vnnd kauftleyten als gehaysen wirt« ist das Linienrechnen angewendet. Die umgekehrte Regeldetri ist in einem Absatze besonders berücksichtigt: »So dir aber ain verkert frag für kem So soltu auch die zale der selben frag verkert orden.« Hierauf folgt die »Bewerung (Probe) der gulden Regel. Auch die Brüche sind durchaus mit römischen Zahlzeichen geschrieben: $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{I}}$ diſs Figur ist vnnd Bedeüt ayns . . . in welcher zal du den Zäler vnd Nenner geleich findest so bedeüten die selbigen figurenn alwegen ain gantz Ding als vier fiertel $\frac{\mathrm{IIII}}{\mathrm{IIII}}$; $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{III}}$ dise Figur bedeüt vnd ist ain dryttayl von ainem gantzen $\frac{\mathrm{II}^{\mathrm{C}}}{\mathrm{IIII}^{\mathrm{C}}\,\mathrm{L\,X}}$ diſs sein zwayhundert tayl/ der fierhundert vnd sechtzigk ain gantz machen.« Hierauf folgen vier Regeln über die Anwendung der Brüche in der Regeldetri: »Die erst Regel So dir ain frag für kumbt/ in deren die erst zale gebrochen ist/ vnnd die mittel vnnd letste zale gantz pleyben/ So můstu die erst zale auch brechenn in den bruch der bey ir geschryben stet etc.« Die Regeldetri findet noch ihre Anwendung in der »Geselschafft der Kaůffleyt, Geselschafft mit zůlegung der zeyt, Von Taylung in Erbschafften, Von Müntz Wechseln, Von Würtz kauffen und schlieſslich zu Sagen wie vil Gelts Ayner in seim Seckel hat. Die Erbschaftsteilung bringt »Ain Ander Exempel. Ayn Reicher Burger lag im todtbedt/ der hete ain schwanger Fraw/ Er ordent seyn Testament vnnd letsten willen also/ So sein haufsfrawe ain sunn geberen wurde/ so solte der selb sein Sune zwaytail seiner verlassen gůtter haben/ die weren Tausent Gulden wert/ Vnd sein haufsfrawe das dryttaile das weren alle ander seine überig verlassen habe vnd gütte/ würde sie aber ain tochter geberen So solt sein haufsfrawe zwaitail vnnd die tochter das dryttail aller seiner verlassen gütter habenn der Erber man starb des legers/ vnd zů der zeyt der geburt/ gebare die fraw ain zwyling das ist ain Sůn vnd ain Tochter Nun ist die frage/ wie vil yegklichs/ der drei er person nach ordnung vnd gestalt des Testaments vñ Satzung haben solle.

Wiltu das vñ der geleichen wissen/ so schreyb die zall der benanten gütter wie die in dem Testament verordnet worden sein/ den angezaygten person/ Als vor die Tochter Ains das ist ain drittail für die Můtter Zwey/ das ist das zwaittayl Vnd für den Sun vier/ die weil geordent so ain Sun gebore würde/ das derselb zway mal als vil als die můtter haben solt/ Als dañ leg die zalen/ das ist I II. vnd IIII. in ain Summ zusamen auff die linien vnd spacien so wirt es VII. die schreyb in die regel Try vorn an vnd wirt der Tayler Die Tausent gulden schreyb inn die Mitten/ vnd der drey zalen/ yegliche besunder setz an die dryt stat/ So steht es also

$$\text{VII.} - \text{ꝏ} - \left\{\begin{array}{l}\text{I.}\\ \text{II.}\\ \text{IIII.}\end{array}\right.$$

Nun Manigfaltig die drey zale/ ain yegklich besunder durch ꝏ. vnd was daraufs kumbt das tail durch VII So findestu das der Tochter CXLII guldenn XXII. albos II ₰ $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{VII}}$. ains ₰ gebürenn. Der Mutter CCLXXXV gulden XVIII albos IIII ₰ $\frac{\mathrm{IIII}}{\mathrm{VII}}$ ains ₰. Vnd dem Sun V^C^LXXI gulden XI. albos I ₰ $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{VII}}$ ains ₰ vnd ist gerecht gemacht.« Wie »dergleichen zu beweren« wird »im nechsten Exempel« gezeigt.

Kobels Rechenbuch weist mit den römischen Ziffern und dem ausschliefslichen Gebrauch der Rechenmarken auf eine ältere

Periode zurück. Einen vorgerückteren Standpunkt vertritt zu gleicher Zeit

das Rechenbuch von Johann Böschenstein.

Dasselbe hat den Titel:

»Ain New geordnet Rech/ enbiechlin mit den zyffern den angenden schůlern zů nutz In haltēt die Siben species Algorithmi .... den kündern zum

Fig. 36.

anfang nutzbarlich durch Joann Böschensteyn von Esslingen priester neülych aufs gangen vnd geordnet.« Am Ende: »Getruckt in der Kayserlichen stat Augspurg durch Erhart öglin Anno 1514 Jar.« Mit vorstehendem Titelbild.

Die Frauensperson führt auf der Tafel mit Kreide die Division 345 : 246 aus. Der Divisor steht unter dem Dividenden, der Quotient hinter einem Striche rechts vom Dividenden, der Rest 99 über demselben.

Nachstehend folgt ein Auszug aus diesem interessanten Rechenbüchlein.

»Welcher lernen will anfängklich rechnen durch dye zyffer yst not das er wysse vnd fleyssig erkünde dye figurenn der Zyffer/ darnach lerne dye crafft vnd bedeütnus der steet dar an die ziffer gesetzt werdñ Vnd ist tzůmerken das dye hynder stat/ die Erst wirt gehayssen/ wie dan hernach volgen ist/ Vnd seyn der bedeůtlychen figuren newn/ vñ ain figur ausserhalb dero wirt genant nulla/ o/ dye nichts für sich selb bedeüt/ Aber dye andern bey ir mer bedeüten macht vnd seynd das die neun bedeütlichen figuren

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

3	6	4	9	5	7
die sechst so vilhun dert mal Tausent	die fünft so vil zehen Tausent	die vierd so vil Tausent	die trit so vil hñdert	die ander so vil Zehne	die erst so vil

Nun ist tzůmerken das syben figur (Spezies) seynd dar durch ayn yede rechnung geschehen mag doch etlich geprauchñ sich (vñ wol) nur fünfft In yren fürgebungen/ dan duplatio das ist zwyspilung wirt begryffen vnder der figur/ Multiplicatio. das ist merung/ Vnd Mediatio vnder d' figur Diuisio/ als du fleissiger schůler das selber erfinden würst.

Das seynd nun die Siben figuren/ Numeratio/ Zelung. Additio/ Summirung. Subtractio/ Abtzyehung. Duplatio/ Zwyspilung. Mediatio/ Halbyrung. Multiplicatio/ Merung. Diuisio/ Taylung.

Die Erst figur Numeratio.

Numeratio die Erst figur/
Thut vns in der rechnung dyse steur
Zöl ains Zway dreu vier/ acht
So hast du die ersten figur mit macht

Die ander figur Additio.

Additio hayst {Sumirung Zesamen raytung Ain zal zu der andern zölen vnd hauffen Vil zalen in ain suma zefüren

Und ist nichts anders dan manigerley zalen in ayn summa zehauff machen vnd hebt hinden an Exemplũ

$$\begin{array}{r}
3\,6\,0\,5 \\
4\,2\,9 \\
1\,7 \\
8\,5\,3\,2 \\
\hline
1\,2\,5\,8\,3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & 1 & \\
1 & \times & \\
 & 0 &
\end{array}$$

Prob hastu im kreütz/ Wirff von yeder zeyl oder lini 9 so offt du magst biſs auff dye vndersten/ was kompt setz oben yn das creütz/ darnach von der vnderen lini wirff auch 9 so dyck (oft) du magst was kompt setz vnden in das creütz zusamen. Nůn addir dye tzwo tzalen ym creütz zesamen/ was kompt vnder oder ob 9. das setz iñ die ain seyten/ Darnach besich ob du in dem so dier kommen ist auſs der addirung auch so vil vindest In die anderen seyten des creütz So ist es recht gemacht.

Die dryt figur Subtractio. Subtractio hayſst {Abtzyehung. Abnemung. Subtrahierung. ·Abtragung. Und ist nichts anders dan ain myndere zall von ayner merern abtzyehen Vnd hebt auch hynden an.

Ain Exempel/

$$\begin{array}{lr}
 & 3\;4\;2\;1 \\
 & .\,6.8.9 \\
\hline
\text{Facit} & 2\;7\;3\;2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & 1 & \\
5 & \times & \\
 & 5 &
\end{array}$$

Solt gůt auffmerckung haben was der punct bedeüten sey/ die figur entgegen im oben meret er vmb Zechne/ vnd bey der er stat vmb ayns. Als das hernach auſsweist

Wiltu die 6 8 9 Zyehen von 3 4 2 1 So setz wie oben stat vnder ain ander/ vnd sprych 9 von 1 mag nit sein/ Darumb setz ain pünctlein herunden zů den 8 das meret dye oberen figur vmb Zehne/ vñ dye vndren vmb ayns/ Also sprich 6 von 11 bleyben 2 das setz vnden vnder die liny wie du es sichst/ Darnach gang zů den 8 vnd sprich 9 (von des puncten wegen) von 2·mag aber nit seyn/ darumb setz ain pünctlein zů den 6 etc. also thů ynen allen.

Prob/ Nym von der obern zal 9 so offt du magst was kompt oben yns creütz/ darnach von der anderen lyni nym 9 so dyck du es vyndest/ was kompt setz vnden in das creutz/ Nun zeüch das vnder von dez obern/ Were aber des obern zewenig so addir 9 zu der oberen im creütz/ vnd tzeüch dañ dye vnderen dauon/ was dan kompt setz in dye seyten des creütz/ darnach nyms vom facit vnd kompt in ayn seyten als vil als in die ander so ist es recht gemacht.

Die Vierdt figur Duplatio Duplacio hayſst {Duplierung. Zwyfachung. Zwyrnung. Zwyspilung. Vnd ist nichts anders dan ain yede zal myt tzwayen multipliciren/ mern/ vil machen/ vnd hebt hynden an/ Vnd braucht das wort zwyr so vil/ ain Exempel

$$\begin{array}{r} 6\ 4\ 0\ 2\ 9 \\ 2 \\ \hline \text{Facit } 1\ 2\ 8\ 0\ 5\ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 3 & \\ 6 & \times & \\ & 2 & \end{array}$$

Prob nym von den oberm/ vnd was kompt über 9 das setz oben in das creütz/ vnd setz dye 2 da mit dw dupliert hast vnden in das creütz vnd duplier das ober mit dem vndern/ was kompt setz yn dye ayn seyten/ darnach thu 9 als vil du vindest von dez facit kompt in die bayd seyten geleyche zal/ so ist es recht gemacht.

Die fünfft figur Mediatio. Mediatio hayst Halbierung. Medyrung. Entzwaytaylung. Ain yede summa halb machen/ In zwen tayl taylen. Vnd ist nichts anders dan ain yede zal mitt 2 di/ uidiren/ abtayln/ halb machen/ Vnd braucht das wörtlein/ halb so vil/ vnd hebt vornen an. Ain Exempel

$$\begin{array}{cccc} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} \\ \cancel{1} & \cancel{7} & \cancel{3} & \cancel{5} \\ & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} \end{array} \quad (8\ 6\ 7\ \tfrac{1}{2} \qquad \begin{array}{ccc} & 3 & \\ 6 & \times & \\ & 2 & \end{array}$$

Prob Nyms von der zal die dir auſs dem halbyrn komen ist/ vnd setz oben/ Darnach setz dye 2 vnden/ vnd duplier das ober mit dem vndern/ was kompt setz yn dye seyten Darnach nims von der süma die du diuidirt oder halbyert hast/ kompt inn baid seyten geleich so ist es recht gemacht.

Ain ander Kostliche prob durch 7

7 Vnd ist ditz dye prob vnd merck des von
14 yeder zal die bezeichnet stet ist o prob vnd
21 wen dir ayn andre zal für kumpt
28 so nim die nechstñ darunter dye
35 al hie steet vnd zel byſs auff dein
42 tzal/ dasselb nym für die prob/
49 vnd wen du ain grösser zal
56 probiren wild so behalt sŏlch dein ge-
63 funden zal im syn vñ nym die
70 nechsten gegen der rechtñ hant dar zů vñ merck aber wye vil prob dauon ist/ vñ gee fürbas also biſs du kumest an die ersten figur. vñ was dan kumpt das ist dein prob von der fürgelegten zale.

Die sechst Multiplicacio. Multiplicacio haist { Merung. Manigfaltigung. auff steygung. Vil machung. Multiplicirung. Vnd ist nychts anders dann ain yede zal wie groſs die ist mit ainer andern mern/ groſs machen/ vnnd braucht die red/ So vil mal so vil.

Aller handel wirt beschlossen/
In syben stucken onuertrossen/
Zall/ müntz/ gewicht/ vnd Maſs/
Zeit/ stuck/ Eln/ mit ir straſs/

Ain Exempel von der Zal.

Wie vil ist 39 mal 246 setz also.

```
        2 4 6
          3 9
      -------          3
      2 2 1 4        0   0
        7 3 8          3
      -------
Facit 9 5 9 4
```

Prob nyms vō der obern gemultiplicierten/ setz obñ yns creütz Darnach nyms vō der damit du gemultipliciert hast vnd setz vnden/ Die zwotzal im creütz multiplicir mit ainander/ was über oder vnnder 9 kompt setz in die ain seiten/ Darnach nims võ dem facit auch vnd kommen die zwo seiten gleich so ist es recht/ Also thů inen allen/ vnd ist die prob durch 9.

Die Sybent figur Diuisio. Diuisio haist/ {Rotirung. Abtailung. Diuidirung. Hinder sich tailung. Vnd ist nichts anders dan ain yede sūma vnder ain ander rot zetailn/ was yedem gepüre oder was yedes coste. Ain Exempel.

Item es seynd 18 personen haben zutailn diese sūma 124620 ist dy frag was yedem in sonder gepüre zů seinez tail sol yedem als vil werdñ als dez andñ setz also

1 7 2 3
6 6 4 6 6
1 2 4 6 2 0 (6 9 2 3
1 8 8 8 8
1 1 1

2
6 6
0

Nym dye prob von dem facit/ setz oben. Darnach von der tzal damit du diuidiert hast vnd setz vnden/ Dye tzwo tzalen multiplicir mit aynander vnd addir das überblyben darzů was dan über oder vnder 9 ist setz inn die ayn seyten/ Darnach nyms von der tzall die du diuidiert hast/ vnnd kompt yn bayd seyten gleyche summa So ist es recht gemacht Dye ordnung halt yn aller teylung.

Item hye wyl ich anfahen wye man Sum̄iern/ Subtrahirñ/ Multipliciern/ Taylen in zerprochen machen soll.

Summierůng. Es ist zuwissen das der stuck sindt 8 die man nützet in den geprochen vnd die hayst man also.

Das Erst stuck geproches mit geprochem.
Das Ander gantz myt geprochem.
Das Drit prochens mit gantzem.
Das Vierdt gantz geprochens mit gantzem.
Das Fünfft gantz geprochens mit gantzem.
Das Sechst gantz mit gantzem vnd geprochem.
Das Sibent prochens mit gantzen vñ gebrochem.
Daz Achtet ganz mit geprochē mit gantzem geprochem

Ayn Exempel.

1)	$\frac{1}{3}$	mit	$\frac{1}{4}$	wirt	$\frac{7}{12}$	5)	$4\frac{3}{4}$	vnd	9	wirt	$13\frac{3}{4}$
2)	9	vnd	$\frac{4}{5}$	wirt	$9\frac{4}{5}$	6)	5	vnd	$4\frac{3}{4}$	wirt	$9\frac{3}{4}$
3)	$\frac{1}{3}$	vnd	5	wirt	$5\,{}^1/_3$	7)	$\frac{6}{10}$	vnd	$2\frac{4}{9}$	wirt	$3\frac{4}{90}$
4)	$6\frac{2}{4}$	vnd	$\frac{2}{3}$	wirt	$7\frac{2}{12}$	8)	$9\frac{3}{4}$	vnd	$8\frac{2}{3}$	wirt	$18\frac{5}{12}$

Regula Ich wil Sumiern $\frac{2}{3}$ vnd $\frac{3}{4}$ tzusamen machs also/ Multiplicyrs creützweis also Sprich 3 mal 3 ist 9/ vnd dan 2 mal 4 ist 8 Sūmyrs zusamen wirt 17 vñ die setz oben/ vnd multiplicir darnach die vndren figūren mit ainander als 3 mal 4 ist 12 die setz vnder 17 vñ wirt $1\frac{5}{12}$ vnd ist gemacht.

Item wan dir geprochens wirt dye aynen namen habent als $\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ ſo Sūmier dye obren figur zůsamen wirt 9 vnnd seindt so viel 9 tayl das macht ayn gantz vnd $\frac{4}{9}$ [1]) (statt $^4/_5$).

So dyer aber mer geprochen komment dan 2/ sam ich wölt summiern $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{5}{6}$ zůsamen so machs also Richt dye ersten 2 pruch auſs als dich die Regel weyst vnd wirt $\frac{31}{20}$ Nun wyltu noch $\frac{5}{6}$ dartzů sūmieren so multiplicir aber in creütz weiſs/ als vor vñ wirt $\frac{286}{120}$ das macht 2 gantz vnd $\frac{46}{120}$ oder $\frac{23}{60}$ vnd ist gemacht.

Subtrahieren in Zerprochem.

1)	$\frac{1}{3}$	von $\frac{3}{4}$ pleibt $\frac{5}{12}$	5)	$2\frac{2}{3}$	von	9	pleybt	$6\,{}^1/_3$
2)	5	von $\frac{3}{8}$ das mag nit gesein	6)	3	von	$4\frac{1}{7}$	pleybt	$1\frac{1}{7}$
3)	$\frac{9}{12}$	von 3 pleybt $2\frac{3}{12}$	7)	$\frac{1}{2}$	von	$4\frac{1}{3}$	pleibt	$3\frac{5}{6}$
4)	$7\,{}^5/_6$	von $\frac{1}{4}$ das mag nit gesein	8)	$8\frac{3}{7}$	von	$18\frac{1}{5}$	pleybt	$9\frac{27}{35}$

Item zu Subtrahiern ain geprochens von dem andren/ das ist $\frac{1}{3}$ von $\frac{3}{4}$ machs also/ nym alweg das vnder am ersten das ist 3 vnd multiplicir in creutzweiſs vnd sprich 3 mal 3 ist 9 die setz oben/ Vnd dan 4 mal 1 ist 4 die setz vnder 9 vnd subtrahier/ sprich 4 von 9 pleiben 5/ das ist 5 prochen vñ multiplicir dye vndren figur mit aynander vñ sprych 3 mal 4 ist 12 vnd die 5 die dir worden seind macht oder yst $\frac{5}{12}$ Das ander als 5 vō $\frac{3}{8}$ mag nit seyn wan 5 ist mehr dan $\frac{3}{8}$/ wen es aber wer $\frac{3}{8}$ von 5 so mecht es wol gsein das da nit ist Das drit stuck zu Subtrahyern $\frac{9}{12}$ vō 3 nim ain gantz vn prichs in sein pruch etc.

---

[1]) Ist sowohl in der Ausgabe von 1514 als auch von 1518 falsch.

Item wyltu subtrahieren ayn geprochens von dem andren die ainen namen habent/ das ist wan die vnder Figur gleich seynd/ als ich wil subtrahyeren $\frac{5}{12}$ von $\frac{7}{12}$ zeüch die obren 5 von den obren 7 vnd was dir pleibt das ist das vnder vñ sprich 5 von 7 pleibt 2 das ist $\frac{2}{12}$. Wiltu subtrahaiern $\frac{1}{3}$ $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{5}$ so pring yeglichs in ainen pruch dz ist sum̃ier $\frac{1}{3}$ vñ $\frac{1}{4}$ etc. Modern: $(\frac{2}{3} + \frac{4}{5}) - (\frac{1}{3} + \frac{3}{4}.)$

Multipliciren in Zerprochem.

1) $\frac{2}{3}$	mal $\frac{3}{4}$	ist $\frac{6}{12}$	oder $\frac{1}{2}$	5) $6\frac{1}{5}$	mal 9	ist $55\,{}^{4}/_{5}$	
2) 6	mal $\frac{1}{3}$	ist $\frac{6}{3}$	oder 2	6) 6	mal $8\,{}^{1}/_{2}$	ist 51	
3) ${}^{2}/_{3}$	mal 19	ist $12\frac{2}{3}$		7) $9\frac{2}{3}$	mal $\frac{1}{4}$	ist $2\frac{5}{12}$	
4) $6\,{}^{1}/_{3}$	mal $\frac{1}{2}$	ist $3\frac{1}{6}$		8) $6\,{}^{5}/_{7}$	mal $7\,{}^{1}/_{2}$	ist $50\,{}^{5}/_{14}$.	

Item zu multipliciren ain geprochens mit dem andren als $\frac{2}{3}$ mal $\frac{3}{4}$. So machs also multiplicir die obrē figur mit ainander vnd dan die vndren figur auch mit ainander so ist es gemacht/ vnd thů ym also 2 mal 3 ist 6 vnd 3 mal 4 ist 12 die setz vnder 6 vnnd mach ain strichli da zwyschen vñ wirt oder ist $\frac{6}{12}$. (Sämtliche Fälle werden auf den Satz zurückgeführt: Das Produkt zweier Brüche ist gleich dem Produkt der Zähler dividiert durch das Produkt der Nenner. Das Kürzen findet nicht statt.)

Tailen in zerprochem.

1) $\frac{2}{3}$ in[1]) $\frac{4}{5}$	wirt $\frac{10}{12}$		5) $4\,{}^{2}/_{5}$ in 6	wirt $\frac{22}{30}$	
2) 1 in $\frac{1}{2}$	wirt 2		6) 24 in $13\,{}^{1}/_{3}$	wirt $1\frac{32}{40}$	
3) $\frac{3}{4}$ in 5	wirt $\frac{3}{20}$		7) $\frac{1}{2}$ in $7\frac{2}{3}$	wirt $\frac{3}{46}$	
4) $3\,{}^{2}/_{7}$ in $\frac{10}{13}$	wirt $4\frac{19}{70}$		8) $19\frac{2}{3}$ in $1\frac{3}{4}$	wirt $11\frac{5}{21}$.	

So merck das du die tzal die du taylen wilt alweg setzest gegen der lincken Hand vñ die tzal dar mit oder darein du tailen wilt setz gegñ der rechten handt/ Nůn zůmachen dye 8 stuck vnd das erst ist $\frac{2}{3}$ in $\frac{4}{5}$/ Nůn soltu wissen in sunderhayt das du das oder die vnder figur die zů der rechten hanndt stat multiplicier mit dem oder der obren figur die zů d'lincken handt vnd das ist das du solt tailen/ Du solt wissen das man es multipliciern můſs in creitsweiſs gleich als man thůt ainem subtrahieren wan

[1]) »in« muſs mit »durch« übersetzt werden.

wen du woltest subtrahieren $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ so můstu anheben zů der lyncken handt an der vndern figur vnnd multyplycyr mit der obren zů der gerechten hand vñ das stat den oben aber am tailen so wirt das vnden gesetzt vnd das yst der vnderschid vñ am tailen so bedarf man der vndren figur nit multipliciern mit ainander nůn machs vñ sprich 5 mal 2 ist 10 die setz oben vnd dan sprych 3 mal 4 ist 12 die setz vnder 10 vnd tail 12 yn 10 vnd das mag nit gesein vnd pleibt also vnd ist $\frac{10}{12}$ etc.

Die gegebenen Erklärungen kommen der Regel: man multipliziert den Dividenden mit dem reziproken Werte des Divisors, sehr nahe.

Wiltu aber Summieren $\frac{3}{4}$ vnd $\frac{1}{2}$ fiertel vnd $\frac{1}{4}$ ainſs fiertel mit $\frac{5}{6}$ vnd $\frac{1}{3}$ ains achttails so mach auſs den $\frac{3}{4}$ vnd aus dem $\frac{1}{2}$ viertail eytel 16 tail vnd wirt mit dem 1 sechtzehentail $\frac{15}{16}$ wan das minst ist $\frac{1}{16}$/ vñ mach dan auſs dem andren aytel 48 tail vñ wirt $\frac{33}{48}$ (?) vnd setz also $\frac{15}{16}$ vñ $\frac{33}{48}$ wirt $\frac{250}{768}$ (?) tail dz macht 1 gantz vñ $\frac{241}{384}$ tail vñ ist also gemacht.

Merck ain prob vñ ich waiſs auch kayn andre prob über die prochen. (Zum Beispiel $^2/_3$ und $^3/_4$) sprich 3 mal 4 ist 12 Nůn lůg was $\frac{1}{3}$ sey in 12 das ist 4 vñ multiplicier mit 2 wan du 2 drittail hast vnd 4 mal 2 ist 8 die setz/ Nůn lůg was $\frac{1}{4}$ in 12 sey das ist 3 vñ das multyplycir mit 3 wann du 3 vyertel hast vnd sprich 3 mal 3 ist 9 vnd die setz vnder 8 vnd sũmier es zůsamen vñ wirt $\frac{17}{12}$ etc.

Die Proben für die 3 anderen Spezies werden hierauf zurückgeführt.

Regula de Try würt genant regula magistralis od' regula aurea, das ist ain maisterliche ordnung/ oder ain guldine ordnung/ durch die dan alle Handel / rechnungen der gewerb vnnd aller kauffmanschatz nichts hinden gesetzt er fünden werden mag/ vñ haist laysch de try oder de tree dan sie helt yn ir treu stuck d'ordnung dar durch man all rechnung setzen ist.

Das erst ist der kauff . . . vnd sol vornen stan. Das ander ist das gelt . . . sol miten stan. Das drit stuck ist die frag . . . vnd das sol hinden steen/ Ain Exempel Nůn merck es solen al weg hinden vñ fornen des kaufs gleich namen sten/ nit der zal sonder der Zeitt/ gewicht oder maſs/ Darumb man alweg das grösser von wegñ des clainen wechsslen soll/ etc.

Noch merck . . . man mûſs das hinder mit dem mitlen multipliciren/ vnd mit dem fordern diuidiren. Vnde Versus.

Hinden vnd fornen gleich namen rycht/
Das grösser von wegen des clainen zerprich/
Das mittel mit dem hindren multiplicir/
Mit dem fordern dasselbig diuidyr/
Was dyr kompt zu stunden/
Hast du der frag antwurt gefunden/

Item ych kauff 1 Ctr. wollen vmb 7 fl. was costen mich 29 lb./ mach den Ctr. zu pffunden vnd setz also für dich die regel.

lb.	fl.	lb.
100	7	29

Nûn multiplicir 29 mit 7/ Darnach diuidir mitt 100 was kompt so vil costen die 29 lb./ Facit 2 fl. 6 ₰. vnd $\frac{30}{100}$.

Es folgen nun 22 Aufgaben; jeder Aufgabe ist der Ansatz, die Anleitung zur Ausrechnung und das Facit angefügt.

Die umgekehrte Regeldetri ist nicht ausgeschieden. Bei der Aufgabe: »Item 6 maurer machen ainn werck in 15 tagen In wie vil tagen werdens machen 9 maurer« steht: mörck du muſst disem Exempel vnd seyns geleychen die frag herfür setzen.

Die Anleitung zur Probe der Regeldetri wird in Reimen gegeben:

Regel de Try also probir/
Dem exempel ker das hinder herfür/
Was du mit der ersten regel hast funden/
Das setz yn die mit zûstunden/
Das mittl mit dem hindern multiplicyr/
Yeder müntz ir aygen feld formir/
Vnd mit dem fordern diuidir/
Kompt dan wider des ersten kauffs gelt/
So hat dir die erst regel nit gefelt.

Das Büchlein enthält noch die »regel der Geselschaften« Regel fusti, die Regeldetri mit Brüchen für 6 Fälle. Den Schluſs bildet eine Tabelle über die »müntz, das gewycht, maſs, zeyt, Elen«.

Einige Aufgaben:

Item ainer kaufft 27 Ctr. 81 lb. negelein ye 1 lb. lauters vmb 11 ß (Schilling) 3 hlr. vnd 1 lb. fusti vmb 21 hlr. yst die frag was die negelein alle costen/ Nůn mörck ye 100 lb. halten 13 lb. fusti dem zeüch vor heraufs etc.

Item ainer kaufft 100 hönr vnd hennen/ also ye 3 hönr vmb 19 ₰ vnd ye 5 hennen vmb 48 ₰ Ist die frag wie vil seind der hönr/ vnd wie viel der hennẽ yedes besonders/

(Ansatz: 8 3 100 und 8 5 100. Facit $37\frac{1}{2}$ Hühner und $62\frac{1}{2}$ Hennen.)

Nůn ist die ander frag was d kauf an gelt tref vmb die 100 hönr vnd hennen.

Facit: $237\frac{1}{2}$ ₰ und 600 ₰ oder $3\frac{1}{2}$ fl. $102\frac{1}{2}$ ₰ à fl. zu 210 ₰.

Die drit frag ich kauff hönr vnd hennen (ich sag nit wie vil) vmb 3 fl. 19 behm. 8 ₰ als offt ich 3 hönr tzal mit 19 ₰ als oft zal ich 5 hennen mit 48 ₰ wie vil seynd der hönr vnd hennen.

Es ist ein mechtiger herr der wil Söldner bestellñ zů rofs vnd zů fůfs vnd gleich noch so vill zů fůfs als zů rofs vnd wil geben aynem raysigen zů rofs. 20 fl. ain monat vñ ainem fůfsknecht 6 fl. ain monat vnd er wil verkriegen 100000 tausent gul' Nůn ist die frag wie vil er yeglicher zů rofs vnd zů fufs haben mufs/

Ain grosser Herr wil in ain streyt zyehen vnd kompt mit seynem volck an ain prugck da můfs er tzollñ vnd geben von 4 rayssigen reyttern 1 ₰ vnd von 4 fůfsknechten $1\frac{1}{2}$ hlr. vnnd der seyndt noch so vil als der rayssigen Nůn gibt der her dem zoller 100 fl. Nůn ist die frag wie vil yegklicher gewesen seyndt/ vñ wirt der fl. gerait (gerechnet) für 360 ₰ vnd 2 hlr. für 1 ₰. So machs aber also mach drey tail geltz wie vor/ als 4 reytter 1 ₰ oder 2 hlr. vnd 8 fůfsknecht 3 hlr. etc.

Item das korn hat man das vergangen yar geben vmb 20 gro. ain schaff ye 8 ₰ für 1 gro. gerechnet vñ so haben die pöcken das prot pachen das mã vmb 1 ₰ gibt 16 lot Nůn aber so g'lt dz Korn heür 30 gro. ain schaff/ So ist die frag wie vil die pecken yetz lot protz für 1 ₰ pachen sollen das es recht sey.

Es sind zwo frawen die hand ayr bey ainander fail Spricht die ain zů der andren gib mir 2 ayr so hann ich gleich so vil als du/ da sprach die ander so gib mir 2 ayr so hab ich zwaymal als vil als du/ Ist die Frag etc.

Als weiterer Repräsentant der deutschen Rechenlitteratur des 16. Jahrhunderts erscheint uns billig:

Adam Risen/ Rechenbuch auff Linien vnd Ziphren/ in allerley Hanthierung/ Geschäfften vnnd Kauffmanschafft.[1]) Visier vnd Wechselruthen künstlich vnd gerecht zu machen/ aufs dem Quadrat/ durch die Arithmetic vnd Geometrie von Erhart Helm/ Mathematico zu Frankfurt beschrieben.

Das Titelbild zeigt eine Privatschule; im Vordergrund sitzt ein Schüler, welcher im Linienrechnen Unterricht erhält, während

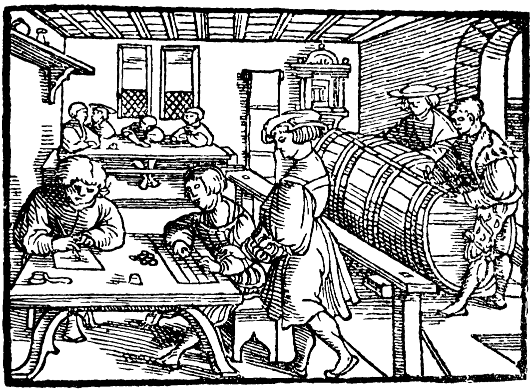


Fig. 37.

ein anderer nebenan schriftlich übt; rechts, von der Schule durch ein Geländer getrennt, sind zwei Männer mit der Anwendung der Visier- und Wechselruten bei Ausmessung eines Fasses beschäftigt. Die »Vorrede in difs Rechenbuch/ Adam Risen« erhebt das Lob der Arithmetik: »Wie hoch von nöten sey Arithmetik/ vnnd die gantze Mathematische Kunst/ kann man hieraus leichtlich ermessen/ dafs nichts bestehen mag/ so nicht mit gewisser zahl vnnd mafs vereint ist/ dafs auch kein freye kunst ohn gewisse Mensuren vnd Proportion der zahlen seyn mag/ Derohalben billich Plato/ als ein haupt der Philosophen/ keinen in sein Schul

[1]) Das dem Verfasser vorliegende Exemplar aus der Münchener Lehrerbibliothek ist vom Jahre 1581. Als früherer Eigentümer hat sich eingezeichnet Johannes Müller in Sanct Annaberg.

oder andern Künsten zugelassen/ der der zahl nicht erfaren were/ als dem nicht möglich/ jrgend in einer Kunst zuzunem̄en/ disputirt vnd bestendiglich beschleufst/ dafs ohn Arithmeticam/ Musicam/ vnnd Geometriam/ welche in der zahl gegründet/ niemandt weise mög genandt werden. Dann diese Kunst/ wie Josephus schreibt/ nicht von Menschen/ sonder von Gott oben herab gegeben ist. Welches wol besunnen haben die Greci/ So sie in einem Sprichwort/ jrgendts einem grofs lob aller künsten zu messen wolten/ sprachen: Er kan zehlen. Auch obgenannter Plato zu einer zeit

Fig. 38.

gefragt ward wo durch ein Mensch andere Thier vbertreffe? geantwortet hat/ Dafs er rechnen kann/ vnd verstandt der zahl habe. Also dafs Rechnen ein fundament vnd grundt aller Künste ist/ dann ohne zahl mag kein Musicus seinen Gesang/ kein Geometer sein Mensur/ vollbringē/ auch kein Astronomus dˋn lauff defs Him̄els erkennen. Dergleichen andere Künst. Isidorus spricht: Nimb hin die zahl von den Dingen/ so vergehen sie. Vnnd es sey kein vnderscheid zwischen Menschen vnd vnvernünfftigen Thiern/ dann erkandtnufs der zahl. Derhalben die kunst defs Rechnens andern freyen Künsten billich fürgesetzet wird/ Angesehen dafs andere künst der nicht mangeln mögen. Derhalben hab ich ein gemein leicht büchlin zusamen gelesen für junge anhebende Schüler/ auff der Linien vnnd Federn/ mit anhangenden schönen Regeln vnd Exempeln.«

Riese bezeichnet also sein Werkchen selbst als die Arbeit eines Sammlers; es müssen ihm daher Schriften über das Rechnen (Petzensteiner, Widmann, Kögel, Kobel, Böschenstein?) bekannt gewesen sein. Seine Quellen gibt er nicht an, nur den Erfinder der Schneckenrechnung nennt er mit Namen./ Einer späteren Ausgabe dieses Buches »Rechnung auff der Linien vnd Federn/ auff allerley Handtierung/ Gemacht durch Adam Riesen« ist Rieses Portrait beigegeben wie S. 195.

Dem Leser wird die Rechenkunst in folgender poetischer Ansprache empfohlen, welche aus den Rechenbüchern von Kobel zusammengesetzt ist:

Pythagoras der sagt fürwar/
All Ding durch zal werd offenbar.
Drumb sih mich an/ verschmeh mich nit/
Durchliß mich vor/ das ich dich bitt.
Vnd merck zum anfang meine Lehr/
Zu Rechenßkunst dadurch dich ker.
In Zal/ in Maß/ vnd in Gewicht/
All Ding von Gott sind zugericht u. s. w.

wie Seite 176.

»Anfänglich folgen die Algoristischen Spezies.

Numerirn. Heißt zehlen/ Lehret wie man jegliche zahl schreiben vnd außsprechen soll/ darzu gehören zehen figuren/ also beschrieben/ 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. Die ersten neun seind bedeutlich/ Die zehend gilt allein nichts/ sondern so sie andern fürgesetzt wirdt/ macht sie dieselben mehr bedeuten. Vnd solt wissen/ daß ein jegliche erste vnd ander mit einander/ wie hie folgt:

$$8\,\dot{6}\,7\,8\,\dot{9}\,3\,2\,\dot{5}\,1\,7\,8$$

Ist sechß vnd achtzig tausent tausent mal tausent/ siben hundert tausentmal tausent/ neun vnd achtzig tausent mal tausent/ drey hundert tausent/ fünff vnd zwentzig tausent/ ein hundert acht vnd sibentzig.

Kompt dir deñ ein zahl zu schreiben/ so schreib das meist zum ersten/ wirdt aber außgelassen das tausent/ hundert/ zehen oder eins/ so setz an dieselbig statt ein o/ wie hie zu schreiben/ fünff vnd zwentzig tausent/ vnnd siben vnd dreyssig/ setz 25037/ Also wirdt für das (fehlende) hundert ein o geschrieben.

Von den Linien.

Die erste vnd vnderste bedeut eins/ die ander ober je zehen/ die dritt hundert/ die vierdt tausent. Also hinfurt die nechst darüber allweg zehen mal mehr. denn die nechste darunder vntergesatzte figur an der erst statt (Stelle)/ das ist/ gegen der rechten Handt bedeut sich selbs/ An der andern gegen der lincken Handt so viel zehen/ an der dritten so viel hundert/ vnd an der vierdten so viel tausendt. Das merck in diesen worten. Eins/ zehen/ hundert/ tausendt. Von der rechten Handt zehle gegen der lincken/ Vñ der lincken Handt sprich aufs/ gegen der rechten/ wie hie:

Linck	7	8	9	5	Recht
	tausent	hundert	zehen	eins	

Seynd aber mehr dann vier ziffer vorhanden/ so setze auff die vierdte ein pünctlein/ als auffs tausendt/ Vnd heb gleich allda widerumb an zu zehlen/ eins/ zehen etc. bifs zum ende. Als dann sprich aufs/ so viel punct vorhanden/ so manchs tausendt nenne. Das hundert/ das ist/ die dritte figur nimb allein in benennung/ Als dann die vnd ein jegliches spacium gilt halb so viel/ als die nechst Linien darüber. Als folgende figur aufsweiset.

100000	●	6	Hundert tausendt
50000	●		Fünfzig tausendt
10000	●	5	Zehen tausendt
5000	●		Fünff tausendt
1000	●	X	Tausendt
500	●		Fünfthundert
100	●	3	Hundert
50	●		Fünffzig
10	●	2	Zehen
5	●		Fünff
1	●	1	Eins
$\frac{1}{2}$	●		Ein halbs.

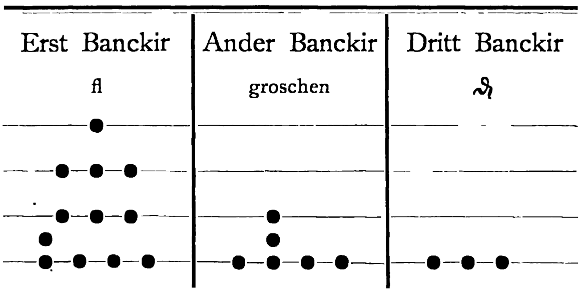
Addirn oder Summirn. Heifst zusam̄en thun/ Lehret wie man viel vnd mancherley zahlen von gülden/ groschen/ pfenning vnd hellern in eine summa bringen soll. Thu jm also: Mache für dich Linien/ die theil in so viel feld/ als Müntz vorhanden/ Lege die fl. besoder/ gro. allein/ hlr. vnd ₰ mach zu gro. was kompt leg zu den gro. Alsdann mach die gro. zu fl. leg es zu den andern gülden/ nach Art eines jeglichen Landes.

Auch soltu mercken/ wenn fünff ₰ auff einer Linien ligen/ dafs du sie auffhebest/ vnd den fünfften in das nechste spacium darüber legest. Defsgleichen auch wenn zween ₰ in einem spacio ligen/ so heb sie auff/ vnd lege einen auff die nechste Linien darüber/ wie dann die nechsten zwey Exempel/ den groschen für 12 ₰ vnd den fl. für 21 groschen gerechnet/ klärlich lehren werden.

Item/ Einer hat empfangen/ wie hernach verzeichnet.

fl.	groschen	₰
123	17	9
234	18	7
307	11	5
678	13	6

Wie viel machts in einer summa? Thu jm also: Leg die fl. insonderheit/ Defsgleichen die Groschen vnd ₰. Mach ₰ zu groschen/ u. groschen zu fl. kommen 1344 fl. 19 grosch. 3 ₰. Ligt also auff den Linien im Banckir.

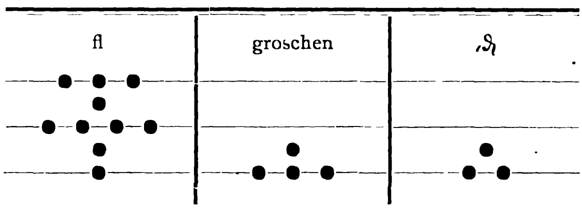


Proba. Wiltu probirn/ ob du es recht gemacht hast/ so nimb ein zahl nach der andern von der hauptsumma/ in massen du sie auffgelegt hast/ bleibet dann nichts ligen/ so hastu es recht gemacht.

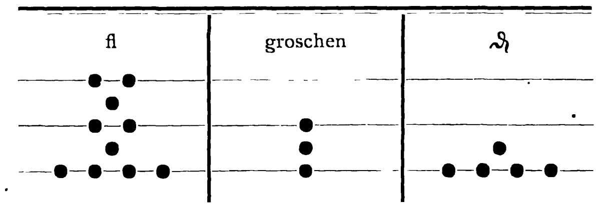
Subtrahirn heiſst abziehen/ Lehret wie man ein zahl von der andern nemmen soll. Die zahl darvon du nemmen wilt/ Leg auff die Lini/ die ander nimb hinweg. Magstu nichts nem̃en/ so resoluir der obern pfenning einen/ also: Heb jn auff leg einen in das nechste spacium darunder/ vnnd 5. auff die Linien vnder dem spacio. Ligt aber ein pfenning in einem spacio/ vnnd soll resoluirt werden/ so leg darfür 5 ₰ auff die Linien darunder. Auch merck/ so dir fürkompt abzuziehen gro. vnd ₰/ so die nicht vorhanden/ daſs du ein fl. in gro. dergleichen ein gro. in ₰ verwechselst/ Alsdann abnemmest/ was hinweg zu nem̃en ist/ als folgend Exempel auſsweiſst.

Item/ einer ist mir schuldig 396 fl. 8 gro. vnd 7 ₰ hat daran geben 279 fl. 16 gro. 9 ₰. Wie viel ist er noch schuldig? Machs also/ Leg auff das gelt das man schuldig ist/ vnd nimb hinweg das gegeben ist. So bleibt ligen 116. fl. 12. gro. 10. ₰. So viel ist er noch schuldig. Ligt also auff den Linien.

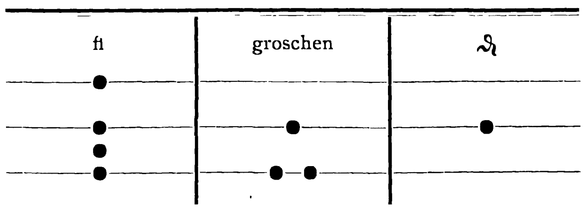
Schuldt.



Daran bezahlt.



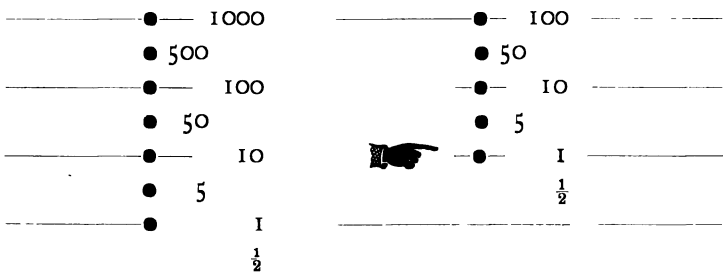
Rest noch.



Proba. Wiltu probiren ob das recht sey/ so leg die abgezogen zahl zur vberbleibenden/ kompt wider die erste auffgelegte zahl/ so ists recht.

Duplirn Heifst zweifeltigen/ Ist nichts anderfs dann mit 2 multiplicirn/ thu jm also: Lege auff die zahl/ welche duplirt soll werden/ schreib 2 für dich/ greiff zu oberst da die ₰ ligen. Vnd wisse dafs ein jegliche Linien/ die mit dem finger berührt wirdt/ nicht mehr denn eins bedeut/ das spacium darunder ein halbes/ darüber fünff/ die nechste Linien darnach zehen. Also hinfurt/ als es die vnderst Linien weren. Wird aber der finger hinweg gethan, so bedeuten sie wie vor.

Exempel.



Oben soltu anheben/ ligt nun ein ₰ im spacio/ so greiff auf die nechste Linien darüber. Sprich: halb 2. macht 1. das leg. Darnach greiff herab auff die nechste Linien/ ligen ₰ da/ so duplir sie/ Was kompt/ leg nider/ Ligt dann aber ein ₰ im spacio/ so thu wie gesagt. Defsgleichen bei den ₰. auff den Linien/ so lang bis nichts mehr zu duplirn vorhanden/ als folgende Exempel aufsweisen.

$$\text{Zwirnt}\left\{\begin{matrix}8967\\7583\\5968\end{matrix}\right\}\text{macht}\left\{\begin{matrix}17934\\15166\\11936\end{matrix}\right.$$

Proba: Halbir die zahl/ die kommen ist aufs dem duplirn/ so kompt die erste aufgelegte zahl wider.

Medirn. Heifst halb machen/ vnd ist nichts anders dann ein zahl in zwey gleiche theil spalten/ Thu jhm also: Leg auf die zahl/ welche du halb machen wilt/ greiff auff die vnderste Linien/ vnd medir das nechste spacium darüber (so anderst ein ₰

darinnen ligt) mit den ₰ auff der Linien/ den halben theil leg nieder. Darnach greiff auff die ander Linien/ medir aber das spacium vnd die Linien zusammen/ also hinfurt vbersich bis kein ₰ auff der Linien zu medirn mehr vorhanden ist/ so hast du alsdann den halben theil. Die Probe wird durch das Duplieren gemacht.

Multiplicirn Heiſst viel machen/ oder manigfaltigen/ vnd lehret wie man ein zahl mit jhr oder einer andern vielfältigen soll/ vnnd du muſst für allen Dingen das einmaleins wol wissen/ vnd auſswendig lernen/ wie hie. (Es folgt nun die Einmaleinstabelle.) Die zahl die multiplicirt soll werden/ solt du aufflegen/ die ander für dich schreiben/ zu oberst anheben. Ligt ein ₰ in einem spacio/ so greiff auff die Linien darüber/ vnnd leg die fürgeschrieben zahl halb/ so du mit einer figur multiplicirst: Wo aber mit zweyen/ so greiff auf die ander Linien ob dem pfenning/ leg allda die meiste figur halb/ Alsdann greiff herab/ leg die erste figur auch halb/ vnnd heb den pfenning im spacio auf. Deſsgleichen so man mit dreyen/ vieren oder mehr figuren multipliciren wil/ soll man vber so viel Linien greiffen/ vnnd von oben herab legen/ Wann aber ₰ auff den Linien ligen/ So greiff auff die öbersten Linien/ multiplicirstu mit einer figur/ so bleib still halten/ leg die fürgeschrieben zahl allda so offt als ₰ auff der Linien ligen. Seind aber zwo figuren/ so greiff auff die nechste Linien ob den pfenningen/ allda leg die letzte figur/ so offt als pfenning ligen auff der Linien. Darnach greiff herab/ vnnd lege die andere figur auch so offt/ als pfenning zu multiplicirn vorhanden seyn/ vnd heb dieselbige pfenning auff/ deſsgleichen wo drey/ vier oder mehr figurn vorhanden weren/ als folgende Exempel auſsweisen. 6789 mal 2 macht 13578 etc. Die Probe erfolgt durch die Division (die übrigens noch nicht gelehrt ist).

Diuidirn Heiſst theilen/ vnnd lehret wie man ein zahl in viel und mancherley theil theilen soll/ darzu gehören zwo zahlen/ die man theilen will/ leg auff die Linien/ darinnen man theilen wil/ schreibe vor dich/ hebe zu oberst an/ Ist ein figur darein zu theilen vorhanden/ so nimb sie auff der obersten Linien so offt du magst/ vnd leg so viel ₰ nieder. Seind aber 2 figuren im Theiler/ so nimb die meiste Figur zu öberst als offt du magst/ vnnd doch also/ daſs du vom vberbleibenden die ander Figur/

das ist/ die erst/ auff der nechsten Linien darunder auch so offt nem̃en magst/ kanstu so thue es/ vnnd lege soviel ₰ nider wann du die erst genommen/ so offt du dann genommen hast. Defsgleichen thu mit 3/ 4 oder mehr figuren. Magstu aber den Theiler nicht ganz sondern halb nemmen/ vnnd durch ein Figur zu theilen ist/ so nimb jhn/ vnd leg ein ₰ in das spacium vnder dem Finger. Seind aber zwo Figuren im Theiler vorhanden/ so nimb die meiste Figur zu öberst halb/ alsdann greiff mit dem Finger herab auff die nechste Linien/ nimb die erste Figur auch halb/ vnnd lege ein ₰ in das spacium vnder dem Finger. Defsgleichen thu auch mit 3/ 4/ oder mehr Figuren/ wie folgt: Theil 13578 in 2 etc. kom̃et 6789. Es folgen Zahlenbeispiele mit 1-, 2- und 3-stelligem Divisor. Die Probe wird durch die Multiplikation gemacht.

Folgen die Species mit Federn oder Kreiten in Ziffern zu rechnen.

Addirn. Lehret viel zahlen in eine Summe zu bringen/ Thu jhm also: Setz dieselben zahlen vnder einander/ die erste vnder die erste/ die ander vnder die ander/ vnd also hinfurt. Darnach hebe zuförderst an/ gegen der rechten Handt/ summir zusammen die ersten Figuren/ kompt ein zahl/ die du mit einer Figur schreiben magst/ so setz sie gleich darvnder/ die ander behalt/ Darnach summir zusamen/ die andern Figuren/ gib darzu das du behalten hast/ vnnd schreib abermals die erste Figur/ wo zwo vorhanden. Vnd thue defsgleichen hinfurt mit allen figuren/ bifs auff die letzsten/ die schreib gantz aufs/ so hastu wie viel in einer Summe kompt/ als folgende Exempel aufsweifsen:

$$\begin{array}{r} 78312 \quad \text{etc.} \\ \underline{87547} \\ 165859 \end{array}$$

Proba. Nun soltu wissen/ dafs ich hierinn zweyerley Proben gebrauchen wil/ ist die erste/ dafs ein Species die ander probirt/ Die ander ist mit 9 also: wirff (von der Summe) 9 hinweg als offt du magst/ was dann vnder 9 bleibet/ behalt für dein Prob. Nimb 9 hinweg von den obern (den Summanden)/ Sodann auch so viel kompt/ so hastu ihm recht gethan.

Subtrahirn Lehret wie du ein zahl von der andern nem̃en solt/ Thu jhm also/ Setz oben die zahl/ davon du nemmen wilt/ vnd die du abnemmen wilt gleich darunder wie im sum̃iren. Darnach mach ein Linien darunder/ vnnd heb zuforderst an/ wie im Addirn/ Nimb die erste der vndersten zahl/ von der ersten Figur der obersten zahl/ was dann bleibt setz vnden . . . Magstu aber die vnder Figur von der obern nicht nemmen/ so nimb sie von zehen/ Zum bleibenden gib die ober/ vnd setz gleich vnder die Linien was kompt. Darnach addir der nechsten vndern Figurn gegen der lincken Handt/ vnd subtrahir fort biſs zum end/ wie folget:

89674	79864
63521	67876

Die Probe erfolgt durch Addition. Hierauf folgt das Duplieren und Medieren.

Multiplicirn. Lehret viel machen/ Must auch vorn anheben/ vnd vor allen Dingen das Einmal ein auſswendig lehrnen/ oder machs nach folgenden Regeln: Hier gibt Riese die Multiplikationskrücken, wie sie auf Seite 96 bei dem Araber Behaeddin vorgeführt wurden. Die Multiplikation behandelt Riese erst mit ein-, dann zwei-, dann dreistelligem Multiplikator oder, wie er selbst sagt, mit ein, zwei, drei Figuren. Zum Schluſs zeigt er »eine Behendigkeit«, d. h. die Behandlung des Falles, wo der Multiplikator am Ende Nullen hat. Die Probe erfolgt durch Division und Auswerfung der 9.

Diuidiren. Lehret ein zahl in die ander theilen. Hinden soltu anheben/ schreib die zahl für dich/ welche du theilen wilt/ vnder die letzte Figur den Theiler/ so du anderst in ein Figur theilst/ vnd nemmen magst. Ist aber der Theiler grösser/ so schreib jn vnder die letzste Figur on eine/ vnd besihe/ wie offt du jn nemmen magst/ als offt nimb jn/ vnd schreib dasselbig wie offt neben der zahl nach dem strichlin/ multiplicir in Theiler/ vnd nims von der ganzen zahl. Alsdann ruck mit dem Teiler fort vnder die nechste gegen der rechten Handt/ vnd besihe aber wie offt du nemmen magst/ so offt nimb vnd setz nach der vorigen Figur. Also hinfurt/ bifs vnden kein Figur mehr zu rucken ist/ wie hie:

455	
10734	(1789
6666	

Wiltu ein zal in zwo Figuren theilen so habe achtung/ das du eine Figur gleich offt als die ander nemest/ als denn vnter die nechsten fort rückest/ Vnd abermals so offt du nemen magst/ nemest. Desgleichen soltu auch teilen mit dreyen oder mehr Figuren.

121		44	
2161		655	
95472	(7956	8801	
12222		572832	(7956
111		72222	
		777	

Proba. Quotient und Divisor werden miteinander multipliziert. »Oder nimb die Prob vom Theiler vnd von der Zahl/ die aufs dem Theiler kom̄en ist/ Multiplicier/ wirff hinweg 9 vnd addir zu dem vberigen die Prob von dem/ so etwas in der theilung blieben ist/ Kompt dann von der Zahl die du getheilt hast/ auch so viel/ so ist es recht gemacht.«

Hierauf folgt die »Progressio«. Nach der Bemerkung: »Die Wurtzel/ den Quadraten vnnd Cubic aufsziehen/ wil ich hie beruhen lassen/ sonder zu seiner zeit/ so ich das Visiern vnd etliche Regeln der Cofs erzehle/ genugsam erkleren« geht Riese zur Regula Detrie über.

»Ist ein Regel von dreyen dingen/ Setz hinden das du wissen wilt/ wirdt die Frag geheissen. Das jhm vnder den andern zweyen am Namen gleich ist/ setz forn/ Vnd das ein ander Ding bedeut/ mitten. Darnach multiplicir das hinden vnnd mitten durch ein ander/ das daraufs kompt theile ab mit dem fordern/ so hastu wie theuwer das dritte kompt/ vnnd dasselbige ist am Namen gleich dem mitteln/ Als hie in folgendem Exempel. Auff Meifsnische werung/ den fl. für 21 groschen 1 gro. für 12 ₰ gerechnet. Item 32 Elen Tuchs für 28 fl./ wie kommen 6 Elen?

Facit 5 fl. 5 gr. 3 ₰. Setz also:

Elen	fl.	Elen
32	28	6

Proba. Wiltu probiren ob du es recht gemacht hast/ so verkehr die Regel also/ das hinden gestanden ist/ setz forn/ das Facit mitten/ vnd das forn gestanden/ hinden/ Machs alsdann nach gesagter Regel/ so muſs wieder kommen das vorhin mitten gestanden. Es folgt nun die Anwendung der Regeldetrie auf: Wachs/ Zin/ Wein/ Weydt/ Korn.

Von gebrochenen Zahlen. Die öberste zahl einer gebrochenen/ der Zehler/ vnd die vnderste der Nenner. Wilt du wissen wie viel ein jeglicher Bruch in sich behelt/ so resoluir den Zehler in seinem werth/ vnd theyl ab mit dem Nenner als $\frac{3}{4}$ fl. multiplicir 3 mit 21 groschen vnd theil ab mit dem Nenner 4/ komen 15 groschen vnd 9 ₰. Also dergleichen von gewichten vnd andern.

Addirn in gebrochenen. Haben die Brüch gleiche Nenner/ so summir die Zehler/ Wo nicht so multiplicier Creutzweiſs/ addir zusammen vnd setz vnder dasselbige die Nenner gemultiplicirt wie hie. Item $5/7$ und $7/9$ (Kreuzweise multipliziert gibt 45 und 49 63stel). Seind mehr dann zween Brüch zu addirn mit ungleichen Nennern/ so addir einen nach dem andern Creutzweiſs. Item $\frac{2}{3}$. $\frac{3}{4}$ vnd $4/5$. Sum̄ir zum ersten die zween Brüch werden $\frac{17}{12}$ darzu $4/5$ kommen $2\frac{13}{60}$. theil.

Subtrahirn in gebrochenen. Haben die Bruch gleiche Nenner/ so nimb einen zehler vom andern/ vnnd vnder das bleibend setz den Nenner. Seynd aber vngleiche Nenner vorhanden/ so multiplicier im Creutz/ nimb eins vom andern/ vnd vnder das bleibend setz die Nenner mit einander gemultiplicirt/ wie in folgenden Exempeln. Item $2/3$ nimb von $4/5$. so bleiben vberig $\frac{2}{15}$. Wiltu etliche gebrochene theil von 1 nemen/ so nim̄ den Zehler vom Nenner/ vnd vnder das bleibend setz den Nenner. Item $5/11$ von 1. nimb 5. von 11. bleiben 6. Darunter setz die 11. also $6/11$. theil. Oder brich das gantz mit vndersetzung 1. vnd vollführs im Creutz/ als $5/7$ von 1. setz $5/7$ von $\frac{1}{1}$. machs so bleiben $\frac{2}{7}$ theil.

Wiltu gantze vnd gebrochene/ von gantzen vnd gebrochenen nemen/ so resoluir die gantzen vorhin in seine theil. Darnach vollführs im Creutz. Hierauf folgt das »Duplirn und Medirn in gebrochnen«.

Multiplicirn in gebrochnen. Die Zehler multiplicir mit einander/ vnnd auch die Nenner/ so hastu es gemacht.

Diuidiren in gebrochnen. Haben Brüch gleiche Nenner/ so theil einen zehler in den andern. Wo aber nicht/ so multiplicir im Creutz/ setz oben was getheilt wirdt/ vnd das da theilt/ setz vnden.

Theil von theilen suchen. Multiplicir die obern mit einander/ desſgleichen auch die vndern/ so hast du es gemacht. Item $^3/_4$ von $^5/_7$ machens $\frac{15}{28}$.

Die Brüche in der Regel Detrie zu gebrauchen/ thu jhm also: Wirt dem fördersten einer zugesetzt so gehe mit dem Nenner ins hinder. Wo dem mittlern oder hindern/ so gehe mit seinem Nenner ins förder. Komen dir in der Rechnung örter so setz darfür also: für ein halb ort schreib $^1/_8$ fl. / für 1 ort setz $^1/_4$ fl. Die Regeldetrie mit Brüchen wird nun angewendet auf »Wachs, Tuch, Hüner, Knechtlohn, Ledder, Fell, Messer, Barchet, Zwilch, Sattin, Harlaſs, Damasckt, Zwibelsamen, Wein, Nota, Arbeyter, Erbtheil, Rossfuter, Ochsenkauff, Pfeffer, Saffran, Kalmus, Vnschlet, Seyffen, Zobel, Schmeer etc.«

Exempel der verkehrten Detrie. Item so das Korn 14 Groschen gilt/ beckt man ein pfenning Brodt/ wiget 34 loth/ wie schwer sol mans backen so es aufschlegt/ vnnd 17 gr. gilt? Machs durch verkehrung/ setz:

17 34 loth 14.

Exempel der zwifachen Detrie. Von Fracht und Fuhrlohn. Item man gibt von 3 Centner 4 Meil ein fl. zu fuhrlohn/ wie viel wirdt man geben von 11 Centnern 120 meil. Setz also:

3 Cent.	1 fl.	11 Cent.
24 Meil.		120 Meil.

Multiplicir mit einander die fördern/ desſgleichen auch die hindern/ vnd stehet also

72 1 fl. 1320.

Die Ausrechnung erfolgt nun nach der einfachen Regeldetrie.

Vom Gewinn nach der Zeit. Item 12 fl. gewinnen in 3 Jahren 7 fl., in wie viel Jahren werden 20 fl. 12 fl. gewinnen? Machs wie folgt.

12 fl.		20 fl. Hauptgut	
	3 Jar		
7 fl.		12 fl. gewinn	
140	3 Jar	144	Facit 3 Jar $\frac{3}{35}$ theil.

Vom Wucher. Vom gewinn/ der auff aufsleihung Gelts geschicht/ das ein zeitlang bleibet beruhen/ welchen die Juden gebrauchen/ alle quartal auffzuschlagen/ solt du folgende Exempel zu hertzen nemmen/ was derselben tragen mag/ vnd ob der billich zu leiden.

Item/ ein Jud leihet einem 20 fl. vier Jar vnnd alle halbe Jar rechent er den gewinn zum hauptgut/ Nun frag ich/ wie viel die 20 fl. angezeigte 4. Jar bringen mögen/ so alle Wochen 2 ₰ von einem flor. gegeben werden? Facit gewinn und gewinns gewinn 69 fl. 14 grosch. 9 ₰ und $\frac{21256480280 45}{39389806391 67}$ theil. Machs also: Rechen zum ersten wie viel die 20 fl. ein halb Jar tragen. Sprich/ ein wochen gibt 40 ₰ was geben 26? Facit 1040 ₰ Hauptgut. Addir den gewinn/ kommen 6080. Sprich/ 5040 ₰ geben 6080 das erste halb Jar/ was geben 6080 das ander halb Jar? Das 0 lesch vorn und hinten aus stehet also:

504   608   6080 etc.

So wurde verfahren bis zum 8. Halbjahr.

Wechsel-Rechnung. Item 1 fl. Reinisch gilt in Müntz 21 gro. und 20 ß (Schilling) in Golt/ wie viel Müntz gebührt sich zu geben für 11 ß und 9 hlr.? Facit 12 gr. 4 ₰ und $\frac{2}{20}$. Stehet also:

240 hlr.   21 gr.   141 hlr.

Vergleichung der Gewicht. Item 7 lb von Padua thun 5 Venedig/ vnd 10 von Venedig thun 6 zu Nürnberg/ vnnd 100 von Nürnberg thun 73 zu Cölln/ wie viel thun 1000 lb von Padua zu Cölln? Facit 312 lb vnd 6/7. Setz also:

7 Padua	5 Venedig	
10 Venedig	6 Nürnb.	1000 Padua.
100 Nürnb.	73 Cölln	

Multiplicir die fördern mit einander defsgleichen auch die mitteln steht: 7000 2190 1000.

Es folgt nun die Gewandt-Rechnung, Fusti, (Saffran, Zin, Pfeffer, Wachs, Wollen), Silber- und Goldtrechnung (Silber, Golt, vergült Silber) Schickung defs Tigels und vom Müntzschlag. (Teilungsrechnungen.)

Von Gesellschaften und Teilungen. Item ir drey machen ein Gesellschaft also/ der erste legt 123 fl. der ander 536. Vnnd der dritt 141. haben gewunnen 130 fl. wie viel gebührt jeglichem? Facit dem ersten 19 fl. 19 ß 9 heller. Dem andern 87 fl. 2 ß. Und dem dritten 22 fl. 18 ß 3 hlr. Machs also: Setz hinden wie viel ein jeder in sonderheit gelegt hat/ summir solches/ vnnd was da kompt schreib forn/ ist dein theiler/ vnd den gewinn mitten/ also:

$$800 \text{ fl.} \qquad 130 \text{ fl.} \left\{ \begin{array}{l} 123 \\ 536 \\ 141 \end{array} \right.$$

Rechen einen nach dem andern/ so kompt einem jeden sein facit/ wie oben bestimmt. (1 fl. = 20 ß, Schilling; 1 ß = 12 hlr., Heller.)

Vom Stich. (Tausch.) Item einer hat Wachs/ das wil er verstechen vmb Ingwer/ gilt ein stein wachs 2 fl. weniger $\frac{1}{2}$ ort/ den setzt der erst am stich für 2 flor. ein ort. Der ander gibt ein stein Ingwer für 8 fl. ein ort/ bar gelt. Wie hoch sol er den am stich setzen? Machs also/ Sprich 1 $^7/_8$ fl. bargelt/ geben am stich 2 $^1/_4$ fl. was geben 8 fl. $^1/_4$ bargelt/ so viel ein stein Ingwer gilt? Rechen es/ so komen 9 fl. 18 ß. Nun hat der erste zu verstechen 258$\frac{2}{3}$ stein Wachs/ wie viel mufs jhm der ander Ingwer vberliffern? Thu jhm also. Rechen zum ersten wie viel das Wachs am baren gelt machet/ Sprich ein stein für ein gülden $^7/_8$. wie kommen 258. stein vnd $^2/_3$? Rechen es/ werden 485. flor. für so viel gülden mufs der ander Ingwer haben/ Sprich: 8 flor ein ort/ geben 1 stein Ingwer/ was geben 485. floren? Facit 58 stein 17 lb vnd $^1/_3$. (1 Stein = 22 lb.)

Regula falsi oder Position. Wird gesatzt von zweyen falschen Zahlen/ mit fleifs examinirt sollen werden/ in massen das fragstück begeren ist/ sagen sie der wahrheit zu viel/ so bezeichne sie mit dem zeichen + plus/ wo aber zu wenig/ so beschreib sie mit dem zeichen — minus. Alsdann nimb ein lügen von der andern/ was da bleibt/ behalt für den theiler/ multiplicir darnach im Creutz ein falsche zahl mit der andern lügen/ nimb eins vom andern/ vnnd das da bleibt theil ab mit fürgemachtem theiler/ so kompt berichtung der frag. Leugt aber eine falsche zahl zu viel/ vnnd die ander zu wenig/ so addir zusammen die zwo Lügen (Positionen)/ was da kompt ist dein theiler. Darnach multiplicir im Creutz/ addir zusammen vnd theil ab/ so geschicht auflösung der Frag/ als folgendt Exempel gründtlich erleutert werden. Item/ einer spricht: Gott grüſs euch Gesellen alle dreyssig. Antwort einer/ wann vnser noch so viel und halb so viel weren/ so weren vnser dreyssig. Die Frag wie vil jhr gewesen? Mach es also: Nimb für dich ein zahl/ die in halb getheilt mag werden/ als 16. Examinier die/ sprich 16. aber 16. vnd halb 16. als 8/ machen in einer summa 40. sollten 30 seyn/ leugt zu viel 10 Setz derhalben jhr sind 14 gewesen/ sprich 14. aber 14. vnd 7. macht zusammen 35. leugt zu viel 5 vnd stehet also:

$$\begin{array}{ccc} 16 + 10 & \\ & 5 \\ 14 + 5 & \end{array}$$

Nimb 5 von 10. bleiben 5. der theiler/ darnach multiplicir im Creutz/ nimb eins vom andern/ vnd theil ab/ so kommen 12. so vil sind der Gesellen gewesen.

Regula Cecis oder Virginum. Dieweil viel vnnd mancherley red sich begeben vnder den Leyen/ vnd vnverständigen der Rechnung. Als wenn Männer, Frauwen vnd Jungfrauwen in einer Zech versamlet/ eine anzahl Gelts vertrinken/ vnd nicht zugleich bezahlen. Solchs zu machen/ soltu mit fleiſs diese hübsche Regel mercken/ welche Cecis genennt wirt. Thu jm also: Schreib vor dich gegen der lincken Handt die anzahl der Personen. Gegen der rechten Handt/ wie viel sie vertruncken/ vnd in die mitte/ wie viel ein jegliche Person/ jegliches geschlechts in sonderheit gibt. Darnach mach das gelt dem wenigsten vberall gleich/ alsdann multiplicir das kleinest an der Bezahlung mit den Personen vnnd nimb von dem/ was sie vertruncken haben/ Was da bleibt ist die zahl/ welche geteilt sol werden.

Ein Exempel: Item 20 Personen/ Männer/ Frauwen vnd Jungfrauwen/ haben vertruncken 20 ₰. ein Mann gibt 3 ₰. ein

Frauw 2 ₰. vnd ein Jungfrauw 1 hlr. wie viel seynd jeder Person gewesen? Machs nach vnterrichtung der Regel/ setz also:

Mach vberall heller und setz:

	Mann	3 ₰			6	5	
20 Person	Frauw	2 ₰	20 ₰	20	4	3	40
	Jungfr.	1 hlr.			1		

Mach dein theiler/ nimb 1. von 6. bleiben 5. den theiler zun Männern/ vnd 3. der theiler zun Frauwen/ Nun multiplicir ein heller denn ein Jungfrauw gibt/ mit 20 Personen/ kommen 20. die nimb von 40. bleiben 20. daraufs mach zwei theil/ also dafs einer mit 5. vnd der ander gleich mit dreyen aufgehaben mögen werden/ seynd 5 vnd 15. Theil ab jeglichen theil mit seinem theiler wirt 1. Mann/ 5 Frauwen/ die nimb von 20 Personen/ bleiben/ 14 Jungfrauwen.« Dieses interessante Beispiel ist eine diophantische Gleichung, welche Riese auf arithmetischem Wege löst. Eine Rechnung »vom Vihekauf« wird in ähnlicher Weise ausgeführt. Die letzte Rechnung handelt vom Schneckengang. Item ein Schneck ist in einem Brun 32. elen tieff/ kreucht alle tag herauff 4 eln $\frac{2}{3}$. vnd fellt defs nachts zurück 3. elen vnd $^3/_4$. in wie viel tagen kompt sie heraus? Machs also: Resoluir einen jeglichen Bruch in seine theil/ vnd setz also $\frac{14}{3}$ theil $\frac{15}{4}$. Multiplicir im Creutz/ kommen 56. das steigen/ vnd 45. das fallen/ nimb eins vom andern/ bleiben 11 der theiler. Nun multiplicir die Nenner mit einander werden 12. darmit multiplicir die 32 eln/ kommen 384. davon nimb das fallen/ als 45. bleiben 339. die theil ab mit 11 werden 30. tag/ bleiben 9. Darzu thu das fallen/ als 45 werden 54 theil ab mit 56 werden $\frac{27}{28}$. theil/ in so langer zeit kompt die Schneck heraufs. Ist recht gemacht/ vnd zum ersten erfunden durch Hansen Cunrad Probierer zu Eifsleben. Das magstu probieren so du jhm nicht glauben wilt/ mit dem Circkel/ Nimb vor dich ein lange Linien/ theil die in 32 theil/ vnd einen jeglichen theil in 12. theil. Als dann nimb zween Circkel mit einem das steigen/ vnd mit dem andern das fallen/ Vollführe es/ kompt dir wie oben.

Beschlufs. Wil also mit diesem Büchlein kurtz begriffen/ alle liebhaber der Rechnung verehret haben. Bitt dieselbigen gar freundtlichen gegenwärtiges gütlich anzunemmen/ Ob jrgendts etwas vbersehen/ oder nicht gantz gründtlich beschrieben/

willigklich recht zu verfertigen/ wil ich vmb einen jeden meines vermögens geflissen seyn zu verdienen/ vnnd zu einer andern zeit jhm das Visieren/ die Regeln Algebre/ vnd das Buchhalten trewlich mitzutheilen geneiget seyn. Geben am Freitag nach Michaelis im Jar 1522. Diese bescheidene und doch selbstbewufste Bemerkung wirft ein helles Schlaglicht auf des ehrlichen Riese Charakter und macht einen wohlthuenden Eindruck gegenüber den devoten Dedikationen und den bissigen Epilogien an den Momus, wie solche in den folgenden Jahrhunderten gebräuchlich werden.

Wie wir aus der Vorrede Stifels zu der Cofs Rudolfs entnehmen, wollte das rechnende Publikum jener Zeit bereits gelöste Exempel. Diesem Verlangen ist Riese nachgekommen. Er setzt den Mechanismus des Verfahrens bei jedem Beispiele auseinander, und diesem Umstande verdanken die Rieseschen Rechenbücher ihre Popularität, ihre weite Verbreitung und ihren zweihundert Jahre dauernden Gebrauch. Ist doch das Andenken Rieses noch in der sprichwörtlichen Bekräftigungsformel »nach Adam Riese« bis auf den heutigen Tag erhalten.

Wir gehen nun dem Rechnen des 15. und 16. Jahrhunderts in seinen Hauptzügen nach.

Die Grundzüge des Rechnens im 15. und 16. Jahrhunderte.

Der Zweck der deutschgeschriebenen Rechenbücher ging zunächst auf den Selbstunterricht. Die Autoren wollten mit ihren Anweisungen Laien in den Stand setzen, durch Privatfleifs die Rechenkunst ohne mündliche Beihilfe zu erlernen. Diese Absicht spricht schon Petzensteiner aus: Auch ein iglicher mag an (ohne) alle vnterweyssung vor im selbs soliches gelernen. (S. Seite 168.) Man hatte dabei vorzugsweise »die Kauffmannschaft« im Auge, und diese Tendenz erklärt teilweise auch die innere Einrichtung der Rechenbücher: man begnügte sich mit handsamen Lösungsweisen; die inneren Gründe des Verfahrens hielt man für entbehrlich und ihre Auseinandersetzung für aufhältlich und zweckwidrig, eine Erscheinung, die wir früherhin schon bei Indern, Arabern und Römern wahrgenommen haben. Es fehlte jedoch nicht an Büchern für die »anfahenden oder angenden Schüler« und nicht an Stimmen, welche der mündlichen Unterweisung das Wort reden. Johann Fischer sagt: »Der anfenglich grund im Rechnen kann vnnd mag nicht ehr vnnd besser gelernet vnd begriffen werdñ/ deñ durch mündliche vnterrichtung/ demnach hab ich gemelten grund (die species genand) durch etliche Exempel allein vnd blos durch satzung der Ziffer gestellet vnd geordnet.« Suevus spricht sich drastisch für den mündlichen Unterricht wie folgt aus:

Glaub mir/ ich habs mit witz erfahrn/
Man kann gar manche Müh ersparn/
Wenn man mündlichen vnterricht/
Wol mercket/ vnd verachtet nicht.
Wer aber auff seim Kopfe sitzt/
Gar billich desto lenger schwitzt.

Nicht selten wird zur Einleitung der Nutzen der Rechenkunst hervorgehoben. Sigmund Suevus stellt die Vorteile derselben in folgenden Punkten zusammen:

»1. In Kirchen Emptern bedarf man der Arithmetica zur Zeit- und Festrechnung auch viele schöne Mysteria vnd Geheimnis der Heyligen Schrifft zu erforschen.

2. In den Schulen werden durch die Arithmeticam alle andern Künste desto förderlicher vnd fruchtbarlicher gelernet.

3. Im Regiment vnd verwaltung der weltlichen Empter/ werden viel schwere Sachen vnd Händel durch die löbliche Rechenkunst geschlichtet.

4. Also auch der Kauffleute gewärb vnd Händel bedürffen viel Rechnung/ das man gedenckwirdige Händel, Verträge vnnd Schulden mit gewissen Ziffern vnd zalen anheffte vnd beide den Gewin vnd Verlust/ durch richtige Rechnung gegen einander halte/ auff das man sich strecke nach der Decke/ Sintemal an allen orten/ zu Posen so wol als zu Gniesen/ die Kauffleute gewinnen vnd verliesen.

5. Die Rechenkunst ist nötig den Handwercks-Leuten vnd sonderlich den Künstlern als Goldschmieden, Müntzmeistern, Vhrmachern, Bildhawern, Mäwrern,

6. in der gemeinen Haufshaltung nach eines jeden Beruf vnd Standt.

Wenn die Rechenkunst auch zu schändlichem Eigennutz und schlimmen Praktiken gebraucht wird, so schaffe man den Mifsbrauch ab. Tollatur abusus et maneat substantia.«

Der Inhalt der Rechenbücher ist durch die Titel der voraufgeführten Schriften bereits angedeutet. Im allgemeinen behandeln sie: das Numerieren, Zahleinteilungen nach griechischem Muster, die algoristischen Spezies auf den Linien und mit Ziffern, die Regeldetri, und zwar die gerade und verkehrte, die einfache und zusammengesetzte, die Rechnung mit gemeinen Brüchen, die Anwendung der Regeldetri auf verschiedene Fälle: Gewinn, Verlust, Tausch (Stich), Gold und Silber (Schickung des Tigels und Münzschlag), Geldwechsel, Gesellschaften. Besondere Formen sind die Regula falsi oder Positionsrechnung, die Regula cecis (cöcis) oder Zechrechnung, die Tolletrechnung. Hierzu kommen die Progressionen, meist im Anschlusse an die Spezies mit ganzen Zahlen, die welsche Praxis, das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel, und Aufgaben aus der Cofs (Algebra) und Geometrie nebst vergleichenden Tabellen über die geltenden Mafse, Münzen und Gewichte, welche damals unentbehrlich waren; endlich »gerechnete Rechenbüchlein« oder sog. Faulenzer als Bestandteil der Rechenbücher oder als selbständige Schriften.

Wie wir bereits erfahren haben, waren im 15. und 16. Jahrhunderte zwei ganz verschiedene Rechnungsweisen gebräuchlich: das Rechnen auf den Linien und das Rechnen mit der Feder, »kryden, zeyfferzahl«.

Das Rechnen auf den Linien

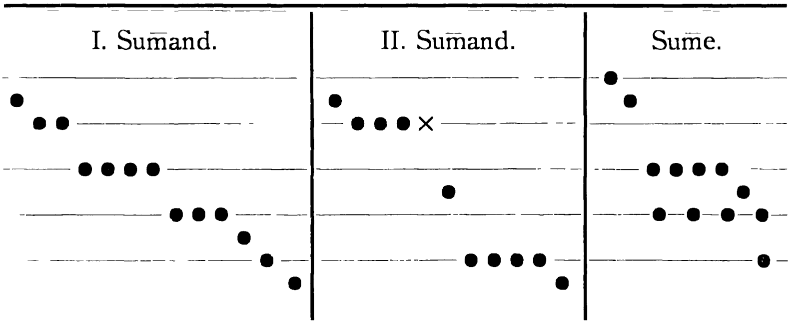
oder auf der linierten Rechenbank, deren Andenken sich noch in den Wörtern Bankhaus, Bankier, Banknote, Bankerott bis auf den heutigen Tag erhalten hat, tritt im 15. Jahrhundert wie urplötzlich auf. Höchst wahrscheinlich aber ist es als Volksrechnen aus dem Altertum in das Mittelalter hinübergegangen, und wenn desselben bis aufs 15. Jahrhundert keiner Erwähnung geschieht, so dürfte der Grund hierzu wohl darin zu suchen sein, dafs ihm die gelehrten Klosterherren als dem Rechnen der Geschäftsstuben keine Beachtung schenkten. Petzensteiner spricht vom Linienrechnen wie von einer männiglich bekannten Sache. Eine

Beschreibung des Linienrechnens befindet sich in dem Sammelwerke Margaritha philosophica von Gregorius Reysch aus Freiburg, welches 1503 zum ersten Male gedruckt wurde. Das 4. Buch dieser Encyklopädie enthält einen Holzschnitt, welcher das Rechnen auf der Linie und mit der Feder so darstellt, wie es von zwei Männern ausgeführt wird; auch ist der Algorithmus calcularis, d. i. eben das Rechnen mit Rechenpfennigen, darin beschrieben.

Man benutzte zum Linienrechnen entweder ein förmliches Rechenbrett, oder ein in die Tischplatte eingegrabenes Liniensystem, oder man zeichnete sich ein solches und wischte es nach dem Gebrauch wieder ab. Das Kandlersche Rechenbuch aus dem 17. Jahrhundert bemerkt dazu: »Mach auf ein Tuch/ Tafel oder Papir etliche Linien/ souil dir vonnöten sein werden«. Die Linien wurden horizontal zum Rechnenden gezogen, was deswegen bemerkenswert ist, weil die horizontale Richtung einen Gegensatz bildet zu den Vertikalkolumnen des Gerbertschen Abakus. Zur besseren Übersicht bezeichnete man die Linien der Reihenfolge nach mit den römischen Ziffern I X C M etc., die Kolumnen oder Spatien mit V, L, D, IↃↃ etc. Später wurden die römischen Ziffern durch arabische (moderne) Ziffern ersetzt oder auch weggelassen, weil das Kreuz auf der vierten Linie zur Orientierung ausreichte. Auf die Linien und in die Zwischenräume wurden Rechen- oder Zahlpfennige gelegt. Ein Zahlpfennig unter der ersten Linie galt $\frac{1}{2}$, ein Pfennig auf der ersten Linie 1, einer im ersten Spatium 5, einer auf der zweiten Linie 10, einer im zweiten Spatium 50 u. s. w. Es tritt also das Zehner- und Fünfersystem zugleich auf und dadurch die Verwandtschaft mit dem alten römischen Abakus in den Vordergrund. Wie bei diesem, reichen 5 Projektile zur Bezeichnung der 9 Einheiten einer Ordnung aus, nur rückt das Fünfersystem des römischen Knopfabakus beim Linienrechnen in die Kolumnen ein, und die Stelle der Knöpfe vertreten Zahlpfennige.

Nach der Einrichtung des deutschen Rechenbrettes konnten auf einer Linie nur 4 Rechenpfennige, in einem Spatium nur je 1 untergebracht werden; es waren daher für ein Rechenbrett mit 5 Linien 25 Rechenpfennige ausreichend. Die Darstellung der Zahlen durch die Marken geschah, indem man die zu legende Zahl nach dem Zehner- und Fünfersystem der Bedeutung der Linien gemäſs teilte. Beim Ablesen der Zahl fing man oben an, also bei den höchsten Sorten, und las in Triaden nach der damals gebräuchlichen Sprechweise.

Bei der Addition wurden die Summanden nebeneinander aufgelegt und die Rechenpfennige von unten nach oben so geordnet, daſs nicht mehr als vier auf eine Linie und nicht mehr als einer in je ein Spatium kamen. »Wo fünff rechenpfennige auff einer linien ligen/ so heb sie auff vnd lege dafür ein jns nehiste spatium darüber. Wo aber zween Rechenpfennig jnn ein spatio ligen/ so heb sie auch auff vnd lege dafür einen auff die nehiste linien darüber.« (Albrecht 1534.) Die Operation nannte man das Elevieren (elevare). Die Zahlen 7436½ und 8054½ wurden wie folgt addiert:



Das Elevieren selbst als manuelle Thätigkeit läſst sich durch Zeichnung nicht darstellen; es kann durch diese bloſs gezeigt werden, wie die Summanden und die Summe liegen. ½ und ½ unter der Linie geben 1 auf der 1. Linie; hier werden 5 Zahlpfennige aufgehoben und dafür 1 Zahlpfennig in das erste Spatium gelegt. 2 Rechenpfennige im ersten Spatium oder 2 mal 50 geben 100, d. i. 1 Rechenpfennig auf der 1. Linie, 300 und 100 sind 400 oder 4 Rechenpfennige auf der 2. Linie u. s. w. Ein wirkliches Rechnen war dabei nicht notwendig.

Die Addition ging über die ersten 5 Einer einer Ordnung niemals hinaus, die Zählstücke waren noch dazu dem Auge dargelegt, und so erscheint die Addition auf den Linien in der That als ein bequemes und recht praktisches Hilfsmittel, namentlich auch für Leute, welche nicht lesen und schreiben konnten. Schwieriger wurde dieselbe, wenn mit mehreren Sorten, z. B. mit Gulden, Schillingen, Groschen, Pfennigen etc. gerechnet werden muſste.

In diesem Falle wurde das Liniensystem durch Vertikallinien in so viele Felder geteilt, als notwendig waren, um die Sorten zu legen. Man nannte diese Felder das »erst, ander und dritt banckir«. Das Neue dieser Rechnungsweise bestand darin, dafs die niederen Sorten in höhere umgewandelt und die aus der Umwandlung sich ergebenden Gröfsen in das Feld der nächst höheren Sorte transferiert werden mufsten. Kandler (1605) sagt darüber: »Wiltu mehr dann einerley Müntz addire als fl., ß (Schilling), ₰, so vnderscheidt das Panckier/ vnd lege jede Müntz an sein ort/ also auch vom gewicht, mafs etc.«

Bei der Subtraktion wurde nur der Minuend aufgelegt, der Subtrahend im Sinn behalten oder angeschrieben. Albrecht beschreibt die Manipulation also: »Du mufst allweg die zal/ von welcher du abziehen wilt/ auff die linien legen/ die ander aber so du abziehen wilt/ schreib von sicherung wegen vor dich/ vnd nim sie von der linien hinweg. Kanstu von wegen der hochliegenden zal das nicht thun/ so resoluir oder verwechsel der öberen rechenpfennig einen/ also/ liegt ein rechenpfennig auff der linien/ so nim jhn auff vnd leg dafür einen jns negste spatium vnter derselben linien/ vnd fünffe auff die linien darvnter. Ligt aber ein rechenpfennig im spatio zu verwechseln/ so nim jhn auff/ vnd lege dafür fünff rechenpfennige auff die negste linien vnter denselben spatio.« Es geschieht hier manuell das nämliche, was bei der schriftlichen Subtraktion im Entlehnen sich vollzieht: eine Einheit höherer Ordnung wird in Einheiten der nächst niederen Ordnung zerlegt, von denen alsdann der betreffende Teil des Subtrahenden abgezogen wird. In dem Beispiel 22732 — 7801 = 14931 lassen sich 8 Hunderter von 7 Hundertern nicht wegnehmen; es mufs deshalb ein Tausender aufgehoben und auf die vorhergehende Linie der Hunderter mit dem zugehörigen Spatium der Fünfhunderter verteilt werden. Auch hier wurde mit der gröfsten Sorte, aber bei den höchsten Stellen begonnen. «Fahe bei den Gulden an/ nim das meiste erstlich.« (Jacob.)

Das Duplieren (Verdoppeln) und Medieren (Halbieren) übergehen wir, weil ersteres nur eine Form der Multiplikation, letzteres nur eine Form der Division ist. Duplieren und Medieren waren sehr einfach, weil 2 Einheiten in einem Spatium eine Einheit auf der nächst höheren Linie geben und auf eine Linie nie mehr als 4 Einheiten zu stehen kamen; aber die Multiplikation und Division mit höheren Zahlen, namentlich mit mehrstelligem Multiplikator und Divisor gestalteten sich sehr kompliziert und konnten viel besser in Wirklichkeit demonstriert als bildlich dargestellt werden, weil die Lage der Rechenpfennige sich mit jedem Zuge änderte. Schon die schriftliche Darlegung des Verfahrens ist mit erheblichen Schwierigkeiten verbunden und bei einzelnen Autoren, z. B. bei Riese in seiner lapidaren Kürze, fast unverständlich. Multiplikand und Dividend wurden aufgelegt, der Multiplikator und Divisor angeschrieben oder gemerkt. Zum Multiplizieren und Dividieren war der Fingergriff notwendig. Diejenige Linie, auf welche der Finger gesetzt wurde, galt 1, das Spatium über dieser Linie 5 u. s. w. Wurde der Finger wieder aufgehoben, erhielten die Linie und das Spatium ihre ursprüngliche Bedeutung wieder. Multiplikation und Division fingen gleichfalls oben, also bei den höheren Stellen an.

Die Multiplikation beschreibt der Regensburger Rechenmeister Kandler wie folgt: »Ich will multiplicirn 3779 mit 5. leg nider die grösser zahl/ die kleiner schreib' für dich oder behalt im sinn greiff auf die vierdt Lini da 3 ₰ ligen/ multiplicir die 3 ₰ mit 5. sprich 3 mal 5/ ist 15. leg 15 nider/ also 1 auff die nechst lini oberhalb deines Fingers leg 1 ₰/ vnd ins Feld darunter auch ein ₰/ heb die 3 ₰ auff/ halt den Finger still/ sprich halb 5 ist 2/ vnd ein halbs/ leg 2 ₰ auff die Lini da der Finger rhuet/ vnnd ein ₰ inn das Feld darunder/ heb das halb auff/ Weiter setz den Finger auf die Lini da 2 ₰ ligen/ sprich 2 mal 5 ist 10. leg 1 ₰ auff die nechst Lini ob dem Finger/ heb die 2 ₰ auff/ halt den Finger still/ sprich halb 5 ist 2 vnd ein halbs/ leg 2 ₰ auff die Lini da der Finger ruhet/ vnd einen in das nechst Feld darunter/ heb den ₰ im Feld auff/ Ruck den Finger weitter herab auf die ander Lini da 2 ₰ ligen/ sprich 2 mal 5 ist 10/ Leg 1 ₰ auf die nechst Lini oberhalb deſs Fingers/ heb die 2 ₰ auff/ halt den Finger still/ sprich halb 5 ist 2 vnd ein halbs/ leg 2 ₰ auff die Lini da der Finger ruhet/ vnd ein inn das Feld darunter/ heb den ₰ auff/ Letzlichen setz den Finger auff die vnterst Lini/ sprich 4 mal 5 ist 20. leg 2 ₰ auf die nechst Lini oberhalb des Fingers/ heb auf die 4/ kompt im Produkt 18895.« Am leichtesten wird man diese Anleitung verstehen, wenn man sich das Liniensystem zeichnet und die Operation in der angedeuteten Weise Zug für Zug mit aufgelegten Münzen ausführt.

Die Division beschreibt Kandler in einem speziellen Beispiel in folgender Weise: »Ich will theilen 7888 durch 4/ leg solche zal nider/ greiff auff die viert lini/ sprich 4 in 7 einmal/ leg 1 ₰ auf die Lini/ nimb 4 ₰ weg/ halt den Finger still/ sprich 4 in 3 halb/ leg 1 ₰ in das Feld darunter/ sprich halb 4 ist 2/ nimb 2 ₰ wegk/ greiff auff die dritt Lini/ sprich 4 in 18 viermal/ leg 4 ₰ auff dieselbig lini/ sprich 4 mal 4 ist 16/ nimb 16 wegk/ halt den Finger still/ sprich 4 in 2 halb/ halb 4 ist 2/ heb 2 ₰ auff/ greiff weitter auf die ander lin herab/ sprich 4 in 8/ 2 mal/ 2 mal 4 ist 8/ nimbs weg/ greiff letztlich auff die vnderst lini/ sprich 4 in 8 2 mal/ leg 2 ₰ nieder/ sprich 2 mal 4 ist 8. hebs auff/ kompt im quotient 1972.« Die Division erscheint hier also als ein wiederholtes Abziehen.

Zur Ausführung der Operationen war die sichere Kenntnis des Einmaleins notwendig, weshalb gerade in jener Zeit die Forderung, dasselbe gründlich zu memorieren, eindringlichst erhoben wurde. »Lern das ein mal eins mit fleis, So wirstu aller rechnung weis.« (Johann Fischer, Ein kurtz Rechenbüchlein für anfahende Schüler [wiederholt] gemacht, um 1580.)

Über die Verwendbarkeit des Linienrechnens äufsert sich Rudolff (1526) in folgender Weise: »Das die vier spezies/ auff den linien durch viel ringere ybung auff der Ziffer gelernt werde/ mag ein yeder aus obenanzeigter vnterweisung bey jme selbst ermessen. Derhalbē dise art d'pfennig fürtrefflich were/ wo sie an ihr selbst vollkommen frembden aufswendige zusprung der ziffer nit begerte. Warlich was Fürsten vnd Herrn Rentkamer/ vrbarbücher/ register/ aufsgab/ empfang/ vnd ander gemeine haufsrechnung belangt/ dahin ist sie am bequemisten/ zu subtilen rechnungen zum dickermal seumlich. Dann wiewol alle rechnung die vier species/ als durch einen werkzeug gemachet werden/ so mufs man doch alles des jhenig so von brüchen geschrieben sampt den so künstlich bei der Regel de Tri zu sagen/ auch bei den linien gleichen und volligklichen verstand haben.« Also, das Manipulieren auf den Linien ist leichter zu lernen, als das Zifferrechnen; es ist bequem bei den gewöhnlichen Hausrechnungen; es bedarf aber der Beihilfe der Ziffern und führt bei schwierigen Rechnungen langsamer zum Ziele als die schriftlichen Formen. Stifel verwahrt sich gegen die Anwendung der Linien beim Bruchrechnen, denn »die Rechenpfennig und Linihen sind allein für gantze zalen erfunden«. Riese stellte das Linienrechnen zwischen das Numerieren und die vier Spezies mit Ziffern, und da ist es am Platze, denn es war ohne Zweifel ein treffliches Mittel, die Kinder in das dekadische Zahlensystem einzuführen.

In England scheint das Linienrechnen nicht im Gebrauche gewesen zu sein; dagegen findet es sich in französischen Schriften. (Chatalon, Arithmetique, 1555.)

Das Rechnen „auf der Feder“.

Das Rechnen mit der Feder oder das schriftliche Rechnen bildet einen tiefgreifenden Gegensatz zum Linienrechnen. Ersteres ist das Rechnen der Wissenschaft, letzteres das Rechnen des Volkes. Das Schriftrechnen erscheint als die folgerichtige Weiterbildung des Algorithmus; denn es fixiert die Resultate der Denkthätigkeit in schriftlichen Zahlzeichen, die durch ihre charakteristische Form und gegenseitige Stellung Wert erhalten; im Linienrechnen erkennen wir das weit ältere maschinelle Verfahren, welches über die primitiven Rechnungsformen der sog. Spezies mit ganzen Zahlen nicht hinausgeht.

Im Ausmafse und in der Gliederung des Rechenstoffes macht sich eine erhebliche Verschiedenheit und eine gewisse Unsicherheit geltend. Schon die Anzahl der Spezies ist schwankend. Riese rechnet dazu: das Addieren, Subtrahieren, Duplieren und Medieren, Multiplizieren und Dividieren und die Progressio, wie aus dem Inhaltsverzeichnis seiner Linien- und Federrechnung ersichtlich ist. Man erhielt 5, 7 oder 8 Spezies, je nachdem man das Numerieren, dann das Duplieren und Medieren, endlich die Progressionen als eigene Spezies gelten liefs. Die wissenschaftlich gehaltenen Schriften von Stifel, Tartaglia, Ramus, Clavius nehmen nur 4 Spezies an.

Die Rechenschriftsteller des 15. und 16. Jahrhunderts beginnen mit dem Numerieren, welchem die Addition folgt, setzen also die Kenntnis des Zahlsystems und der elementarsten Rechensätze, des Eins und Eins, des Eins von Eins etc. voraus. Um bei gröfseren Zahlen die Übersicht zu erleichtern, wurden die 4., 7. und 10. Ziffer durch einen darüber gesetzten Punkt bezeichnet, wie bei Sacro Bosco, Riese, Rudolff, Clavius u. a. Rudolff (1526) sagt: »Weren aber der Ziffer mehr denn 4/ so setz auff das tausent einen punct. Vnter solchem punct fahe widerum an zu zelen/ Eins/ zehen/ hundert/ tausent etc. Das tausent mal tausent oder million bezeichne auch mit einem punct. Beispiel: Linck. 23405639567 Recht.« Er liest: Drei vnd zwantzig tausent/ tausent mal tausent/ vierhundert tauseut mal tausent/ fünff tausent mal tausent/ sechs hundert tausend neun vnd dreifsig tausent/ fünffhundert vnd siben und sechtzig.

Das Wort tausend wurde im Aussprechen der Zahlen so oft wiederholt, als Punkte vorhanden waren. Auch der Umstand, dafs der Wert der Ziffern von rechts nach links anwuchs, verursachte Schwierigkeiten, und selten findet man eine Lehranweisung, die nicht darauf aufmerksam macht. Suevus (1593) bemerkt dazu: »Die Zahlen werden von rechts nach links gesprochen, wie die Hebreer und Chaldeer ihre Schriften lesen, welche auch die zal erfunden haben. Wie auch die Ackerleute aus natürlicher Bewegung das Korn von der rechten gegen der linken in Acker werffen, auch mit der Sichel und Sensen gegen der linken zu schneiden vnd hawen pflegen. Dauon man anfahende Schüler berichten kann.« Die vielfache Wiederholung des Wortes tausend wirkte störend. Man schlug daher vor, für das zweite Tausend, d. h. für die 7. Stelle das Wort Million zu setzen. Clavius (1583) sagt: Man könne jede Zahl nach italienischer Weise mit wenigeren Worten und doch deutlicher aussprechen, wenn man statt milena millia Million sage. Er schreibt: $4\overset{2}{2}\,32908\overset{1}{9}\,56280\overset{0}{0}$ und liest: 42 quadraginta duo millia, millies, millies, millies: 329 trecenta, vigintinove millia, millies, millies, 089 octoginta novem millia millies, 562 quingenta sexagintaduo millia, 800 octingenta. Zu deutsch: 42 Millionen Millionen, 329 tausend Millionen, 89 Millionen, 562 tausend 800. Rudolff und Riese kennen das Wort Million. Letzterer sagt am Schlusse seines Rechenbuches bei dem Kapitel »Von etlicher Dinge zahl in gemein: Item ein Milion gulden ist 1000000 gulden. Item ein Thonna golts ist 100000 gulden.« Vorläufig wird aber das Wort Million zum Aussprechen der Zahlen noch nicht angewendet, sondern es behält seine Sonderstellung bei den Gulden.

1595 waren die Wörter Tonne und Million aus der Terminologie der Münzwerte schon in die Reihe der Zahlbezeichnungen übergegangen. Der mehrerwähnte Suevus schreibt: 136953|80050 und liest: 136 tausend 953 Tonnen, 80 tausend und fünfzig. Dazu gibt er folgende Erklärung: »Nachdem 100000 Kronen auff eine Tonne Goldes gerechnet werden, so ist zu vernehmen, dafs vorgedachte alte Ordnung der Zahlen sehr förderlich ist die grofsen Zahlen in Müntze und Golde so hunderttausend oder mehr erreichen, auf Tonnen zu rechnen«. Wir sehen daraus, dafs sich das Bedürfnis zu einer bestimmten und leichten Aussprache gröfserer Zahlen durch Aufnahme neuer Wörter Befriedigung zu schaffen sucht; die Wörter Million und Tonne erlangten eine erweiterte Bedeutung; eine vollständig gesetzmäfsige Bezeichnungsweise wurde aber damit noch nicht erreicht.

Da das Wort Million aus dem Italienischen stammt, so ist sehr wahrscheinlich, dafs es zuerst von den Italienern gebraucht wurde. In Frankreich kam das Wort Million schon zu Anfang des 16. Jahrhunderts zur Geltung und bald darauf das Wort Billion, eine Zusammenziehung aus Bimillion. In Deutschland bestand die schwankende Schreib- und Leseweise gröfserer Zahlen bis ins 18. Jahrhundert fort. Auch das Wort Nulla ist aus Italien eingeführt und kommt in Deutschland zuerst bei Rudolff und Wreedt (1539) vor. Riese gebraucht das Wort Null nicht, sondern setzt dafür immer das Zeichen o. Die neun bedeutsamen Zahlzeichen hiefsen gewöhnlich figurae, Figuren (Riese), die Null Nulla figura, nulla nota, Nulla, Ziffer, ziphra. Wir sagen, wenn eine Zahl mit 10, 100 multipliziert werden soll, die Null, die Nullen werden angehängt; die Alten sagten: die Null wird für- oder vorangesetzt, und mit Recht, denn die Zahlreihe beginnt bei den Einern, diese stehen voran. So schreibt Johann Wolf von Hersbruck (1527): decima vero nihil omnino significat, sed praeposita caeteris illarum significationem auget. (Die zehnte bedeutet nichts, aber wenn sie den anderen vorausgestellt wird, mehrt sie deren Wert.) So auch Riese, Rudolf u. a.

Die Rechenmeister des 15. und 16. Jahrhunderts behandeln die beiden ursprünglichen Rechnungsarten, das Addieren und seine Umkehrung, das Subtrahieren, zuerst und lassen der Subtraktion die Multiplikation und dieser die Division folgen. Duplieren und Medieren treten wie Vorübungen zur Multiplikation und Division auf. Riese schaltet das Duplieren und Medieren nach dem Subtrahieren ein. Ausnahmsweise folgt die Multiplikation unmittelbar auf die Addition, z. B. bei Grammateus, welcher diese Ordnung damit rechtfertigt, daſs »in dieser Operation (der Multiplikation) werden funden alle eigenschafften der Additio«. Auch in der Geometrie des französischen Professors Mazanam (1691) folgen die Spezies in der von Grammateus eingehaltenen Ordnung aufeinander, also: Addition, Multiplikation, Subtraktion und Division.

Das *Lehrverfahren* geht vom Allgemeinen zum Besondern. Erst kommt die Begriffsbestimmung: »Addieren lehret viel Zahlen in eine Summa bringen. Subtrahieren lehrt, wie du eine Zahl von einer andern nehmen sollt etc.« Dann wird die Operation selbst beschrieben. Dieser allgemeinen Anleitung folgt die Anwendung auf ein spezielles Beispiel, schlieſslich wird die »Proba« auf das Facit gemacht. Stimmt diese, »so hastu ihm recht gethon«. *Addieren* und *Subtrahieren* haben die heutige Form. Riese, Rudolff u. a. bringen aber eine eigenartige Abänderung der Subtraktion, welche namentlich beim Entlehnen der Beachtung wert erscheint. Es sei das Riesesche Beispiel: 79864 — 67876 gegeben. Wir würden rechnen: 6 von 4 geht nicht; 10 entlehnt und 4 sind 14; 14 — 6 = 8. Riese und Rudolff ziehen die 6 von 10 ab und sagen: 6 von 10 bleibt 4; 4 und 4 sind 8. Wir addieren also die in Rechnung stehende Stelle des Minuenden zum entlehnten Zehner und ziehen von der so entstandenen zusammengesetzten Zahl ab; Riese zieht die Stelle des Subtrahenden *erst und in allen Fällen von 10 ab* und addiert dann die betreffende Stelle des Minuenden, was offenbar für Anfänger das Leichtere ist. Auch das neuerdings in Österreich wieder aufgegriffene Verfahren, die Differenz zu bestimmen, indem man die einzelnen Stellen des Subtrahenden durch Daraufzählen ergänzt, war damals (Huswirt) schon bekannt.

Für die *Multiplikation* wird die Kenntnis des *Einmaleins* verlangt. In Ermanglung der Rechenzeichen wurde das Produktentäfelchen so dargestellt:

$$2 \text{ mal} \left\{\begin{array}{c} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array}\right\} \text{ ist } \left\{\begin{array}{c} 8 \\ 10 \\ 12 \\ 14 \\ 16 \\ 18 \end{array}\right.$$

Die Einmaleinstabelle war einfacher und kürzer als dermals, weil das Produkt, welches schon verzeichnet war, nicht wiederholt wurde. Produkte mit gleichen Faktoren wurden als gleichbedeutend erachtet. Dafs zwischen dem Produkte 2 mal 4 und 4 mal 2 ein sachlicher Unterschied besteht, wenn auch das Facit dasselbe ist, fiel nicht ins Gewicht. Weil das Produkt 5 mal 6 schon in der Fünfertabelle vorkam, wurde das Produkt 6 mal 5 bei der Sechsertabelle nicht mehr aufgeführt, sondern gleich mit 6 mal 6 begonnen. Die Neunertabelle hatte nur mehr den Satz 9 mal 9 ist 81. Die Zehnertabelle liefs man als selbstverständlich fallen. Riese hat einschliefslich der Einsertabelle 45 Produktensätze. Für die Zahlen von 6 bis 9, also zur Auffindung der Sätze 6×6, 6×7, 6×8, 6×9, 7×7, 7×8, 7×9 etc. wurden die Regeln des Beha-eddin gegeben. (S. S. 96 u. 97.)

Rudolf sagt darüber: »Schreib die figurn gerichts vnter einander/ setz ein nulla/ für welche du wilt (besser für die kleiner) so bedeut sie zehenmal souil. Demnach wieuil der andern figur abgeht/ dafs sie nicht volligklich 10 ist/ als offt nimb wiederum ab von ehegemelter summa/ die Figur für welche die Nulla gesetzt/ das vbrig zeigt an/ das du begehrt hast.«

8	9	8	9	7	9
70	80	50	70	50	30
14	8	10	7	15	3
56	72	40	63	35	27

Heinrich Glareanus[1]) (1539), Stifel (1544), Lonicerus (1570) empfehlen das andere Verfahren. Soll man z. B. das Produkt von 9×6 finden, sucht man die Differenz der Faktoren zu 10, multipliziert die Differenzen der Faktoren miteinander und subtrahiert »übers kreutz«, also:

$$\begin{array}{ccc} 9 & & 1 \\ 6 & \times & 4 \\ \hline 5 & & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 7 & & 3 \\ 8 & \times & 2 \\ \hline 5 & & 6 \end{array} \quad \text{etc.}$$

Michael Stifel sagt über diesen Modus: »Multipliciren Lernt ein zal durch eine andere mehren. Ligt alles an der nachfolgenden

[1]) Heinrich Loriti aus Mollis, von seiner Heimat Glareanus genannt, gründete 1514 in Basel ein Lehrinstitut, später hielt er Vorlesungen an der Universität Heidelberg.

Tafel (dem sog. pythagoreischen Einmaleins)/ welche einem/ so rechnung zu lernen begert/ võ nöten ist zu wissen/ zu finden ohn dise Tafel/ was man durch sie findet/ ein feine Regula. Setz die zwo figuren (welcher facit du wissen wilt) vbereinander/ vñ neben sie setze die Differentż so jede hat von 10. Multiplicir ein Differentz mit der andern/ kop̄t ein figur so setze sie. Kom̄en zwo/ so ses die erst/ behalt die ander. Darnach addir deine figuren zu samen/ und so du im multiplicirn hast etwas behalten/ so addir es auch hie her. Die 10 so erwachsen mustu hie lassen faren.«

$$\begin{array}{c} 8 \;.\; 2 \\ \underline{7 \cdot 3} \\ 56 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 6 \;.\; 4 \\ \underline{7 \cdot 3} \\ 42 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 3 \cdot 7 \\ \underline{2 \;.\; 8} \\ 6 \end{array}$$

Schon Peter Ramus wies auf die Umständlichkeit dieser Behelfe hin und bemerkt, daſs das Auswendiglernen des Einmaleins viel bequemer und rascher zum Ziele führe. Christian Urstitius, Professor in Basel (1579), läſst die höheren Einmaleinsprodukte dadurch finden, daſs er einen oder beide Faktoren in kleine Summanden zerlegt, z. B. 7 mal 8:

$$\begin{array}{r|l} 8 & \\ 2\;\;3\;\;2 & 7 \\ \hline 16 & \\ 24 & \\ \underline{16} & \\ 56 & \end{array} \qquad \text{oder} \qquad \begin{array}{r|l} 4\;\;4 & 8 \\ 3\;\;4 & 7 \\ \hline 16 & \\ 16 & \\ 12 & \\ \underline{12} & \\ 56 & \end{array}$$

Gewiſs ein instruktives Verfahren, das heute noch in Volksschulen der Beachtung wert ist.

In den schriftlichen Multiplikationsformen mit gröſseren Zahlen herrscht ziemliche Mannigfaltigkeit. Steinmetz (1568) berechnet 365 . 24 also:

$$\begin{array}{r} 365 \\ \underline{24} \\ 1220 \\ 124 \\ 610 \\ \underline{2} \\ 8760 \end{array}$$

Es wird hier 365 erst mit 4, dann mit 2 Zehnern multipliziert, also 4 . 5 = 20; beide Ziffern stehen rechts in der ersten Produktenreihe; 4 . 6 = 24; 4 steht rechts in der zweiten Produktenreihe, 2 an dritter Stelle in der ersten etc. Bei diesem Verfahren wurden die Teile der Einzelnprodukte in verschiedene Reihen zerstreut, und man mufste recht acht haben, dafs jeder Teil die ihm gebührende Stelle erhielt. Ein anderes Beispiel von demselben Autor:

$$
\begin{array}{r}
1567 \\
\underline{356} \\
12335 \\
3550 \\
13342 \\
5606 \\
21 \\
\underline{8} \\
557852
\end{array}
$$

Hier wird die Zahl 1567 erst mit 5, dann mit 6, endlich mit 3 multipliziert; die Produkte werden gleichfalls nach dem Stellenwert auf verschiedene Reihen verteilt.

Daneben findet sich auch unsere Schulmultiplikation, welche Dr. Günther Adam Riese zuschreibt.

Apian rechnet das Beispiel 4876 . 2395 wie folgt:

$$
\begin{array}{r}
4876 \\
\underline{2395} \\
9752840 \\
146288 \\
4383 \\
\underline{24} \\
11678020
\end{array}
$$

Hier beginnt die Multiplikation mit der höchsten Stelle des Multiplikators (2 mal 6 ist 12); bei der Multiplikation mit der nächst niedrigen Stelle (3) wird das Teilprodukt um eine Stelle nach rechts gerückt, im ganzen um 3 Stellen. Einer und Zehner der Einmaleinsprodukte werden auf verschiedene Horizontalreihen derart verteilt, dafs jedes Glied in die ihm zugehörige Stelle kommt.

Lucas Pacioli gibt 8 verschiedene Multiplikationsmethoden an.

Der Fall, in welchem der Multiplikator vor der ersten geltenden Stelle Nullen hat, wird besonders berücksichtigt. Rudolf sagt hierüber: Um viel Schreibens zu verhüten, laſs dich die Nullen nicht weiter anfechten, als daſs du sie endlich dem Facit fürsetzest.

Ein besonderes Interesse erweckt die uns fremdartige, nun ganz auſser Gebrauch gekommene Division. Jacob (1565) behandelt sie folgendermaſsen:

Diuisio heiſst vnd lehret ein Zal in die ander theilen/ das ist/ Diuidiern lehret erkennen/ wie offt vnd manchmal ein Zal die ander beschliesse/ hat allemal zwo Zaln/ eine die getheilt wirt/ die ander/ nach welcher man/ oder die da theilt/ die getheilt wird/ schreibstu für dich nider/ die so da theilt/ schreibstu darvnder gegen der lincken hand/ Also die erste Figur deſs Theilers gegen der lincken hand/ vnder die erst gegen derselben hand/ der die getheilt wird/ so du anderst sie von der obern haben magst/ wa aber nicht/ so schreib sie vnder die ander nechstfolgende Figur/ der so getheilt wird/ besihe als dann/ wie offt du dieselb erste Figur/ von dem so gerichts darüber stehet/ habñ magst/ doch mit dem bescheidt/ daſs du die ander vom vberbleibenden auch so offt vnd manchmal noch nemmen und haben môgst/ wa anders derselben mehr dann eine weren/ wie manchmal du nun dein Theiler haben magst/ so offt schreibstu es gegen der rechten hand/ mit dem vnterscheidt eines geraden oder krummen strichleins/ Als wann du 572832 woltest theilen in (durch) 72. so setzstu es also vntereinander:

572832 (
72

Nun hastu die 7. in der vbergesatzten 57 wol 8. mal/ darfste aber nur 7. mal nemmen/ von wegen daſs du vom bleibenden nicht auch 8. mal 2. nemmen magst (kannst)/ so nim nun 7. mal 7. von 57. Also vnd dergestalt magstu die erst Figur an 49. als 9. nemmen von der/ so gerad ob der 7. stehet (als da ist 7.) so thu es/ wa aber nicht/ wie jetzt/ so fasse 49. zusammen/ vnd nimme es auff einmal von nechstfolgendem Zehener nach 49/ so sprich nun 49. von 50. rest 1. vnd 7. sind 8. Zeiche die 7. mit einem strichlin auſs/ vnd schreib darvber 8. Deſsgleichen soltu alle Zaln mit strichlin im reden/ oder so sie genennet werden/

aufsthun/ Allein die aufsgenommen/ die gegen der rech tenhand hinaufs geschrieben werden/ so dann das beschehen/ mustu jedefs vnd allemal zu der nechstfolgenden statt gehen/ vnd deinen entlehnten Zehener daselbs abnemmen/ als jetzt gehestu zur andern statt gegen der lincken hand/ vnd nimbst hinweg 50. oder allein 5. die doch im verstandt 50. oder 5. mal zehen sind/ von wegen defs orts/ davon sie genommen/ So du denn nun die 7. des Theilers genommen hast vom obern 7. mal mustu auch so offt nemmen die 2. oder die folgendt Figur des Theilers/ darumb sprich 7. mal 2. ist 14. die nimm also/ wie du vor die 49. namest/ nemlich erstlich die 4. gerad von der darob/ vnd folgendt die ander von der nechsten statt gegen der lincken hand/ so du aber nun die erst als 4. von 2. als der darob nicht nemmen magst soltu in allweg den nechsten Zehener entlehnen/ vnd die gantzen 14. auff einmal davon nemmen. Als jetzt sprich 14. von 20/ bleiben 6. zu 2. werden 8. die schreib vber die aufsgestrichnen 2. vnd die entlehnten 20. nimm von der folgenden statt/ nemlich 2. (oder 2. mal 10. bedeutend) von 8. bleiben 6. Stehet nach solchem/ nemlich nach verrichtung der ersten Figur das Exempel also:

6
~~8~~8
~~572~~832 (7
~~72~~

Nun ruckstu ein jede Figur defs Theilers vmb ein statt fort. oder weiter gegen der rechten hand/ vnd besihest weiter/ wie offt du die erste Figur des Theilers/ nemlich 7. oben haben magst/ alles gleich nach vorigem verstandt vnd Condition/ Als 7. in 68. nim̃est du 9. mal/ vnd 9. mal 7. sind 63. nim̃ 3. gerichts hinauff von 8. bleiben 5. die schreib vber 8. vnd 6 nimm hinden von der andern statt/ nimm auch 9. mal 2. nemlich 18. von dem vbergeschribenen/ Erstlich 8. von 8. bleibt 0. vnd 1. von 5. rest 4. Stehet nach solchem dein Diuision also:

4
~~6~~5
~~88~~0
~~5728~~32 (79
~~722~~
~~7~~

Ferrner ruck abermals den Theiler furt/ wie vor/ denn solches so lang vñ offt beschehen muſs/ biſs die erste des Theilers gegen der lincken hand vnter die erste Figur der Zal/ so getheilt wirt (auch gegen derselben hand) komme/ Besihe abermal wie offt du den Theiler haben mögest/ Als 7. in 40. hastu auſs vorigen vrsachen 5. mal/ vnd 5. mal 7. sind 35. von 40. bleiben 5. die schreib vbers 0. nimm hinden die 4 weg/ vnd ferrner 5. mal 2. sind 10. nimm eins/ als ein Zehener von der nechstfolgenden statt/ Als 1. von 5. rest 4. so wirdt darnach dein Operation ein solch ansehens haben.

$$\begin{array}{cccccccl}
 & & \cancel{4} & 4 & & & & \\
 & \cancel{6} & \cancel{5} & 5 & & & & \\
 & \cancel{8} & \cancel{8} & \cancel{0} & 1 & & & \\
\cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{8} & 3 & 2 & & (795 \\
 & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} & & & \\
 & & 7 & 7 & & & &
\end{array}$$

Also ruckstu nun den Theiler weiter fort/ vnd nim̃est 7. in 43. 6. mal/ sprich 6. mal 7. sind 42. von 43. rest 1. das vber die 3. Vnd letzlich 6. mal 2. ist 12. von 12 gehen weg/ vnd dieweil kein Figur mehr gegen der rechten Hand/ darvnder man den Theiler rucken möcht/ vorhandñ ist/ so hat demnach dein Theilung ein ende/ So aber was vberblieben were/ so schreibstu dasselb herauſs/ vnd den Theiler bruchsweiſs darvnder/ wie du dann derselben (kurtz hernach in ordnung folgend) guten bericht empfahen wirst/ darumb dasselbig dich mittlerweil nicht jrren soll/ Stehet demnach die gantz Vertheilung also:

$$\begin{array}{cccccccl}
 & & \cancel{4} & \cancel{4} & & & & \\
 & \cancel{6} & \cancel{5} & \cancel{5} & & & & \\
 & \cancel{8} & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{1} & & & \\
\cancel{5} & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{8} & \cancel{3} & \cancel{2} & & (7956 \\
 & \cancel{7} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} & & \\
 & & \cancel{7} & \cancel{7} & \cancel{7} & & &
\end{array}$$

Trotz dieser in behaglichster Breite gegebenen Darlegung fällt es uns schwer, die Manipulation zu verstehen. Jacob zeigt das Verfahren sogleich an einem Beispiel mit zweistelligem Divisor; dies und die eigenartige Subtraktionsform durch Ergänzung des Subtrahenden zum nächsten Zehner, der Umstand, daſs er Zehner und Einer für sich, oder »so du nicht magst« Zehner und

Einer auf einmal subtrahieren läfst, machen seine Erläuterungen unklar. Es ist daraus zu ersehen, wie schwer es in jener Zeit war, Kindern das Dividieren zu lehren, und es erscheint begreiflich, dafs man die Kenntnis der Division als das Kriterium eines geschickten Rechners ansah. Es ist daher notwendig, das Divisionsverfahren näher zu würdigen. Genau genommen ist dasselbe unsere verkürzte Division, bei welcher die Subtrahenden nicht geschrieben, sondern im Kopfe behalten werden. Wie hier, so kommen beim Übersichdividieren nur die Reste zur schriftlichen Darstellung, und zwar über dem Dividenden. Der Divisor steht unter dem Dividenden und wird fortgerückt, so oft eine Ziffer des Quotienten anzuschreiben ist, d. h. aufs neue angeschrieben. Der Quotient kommt rechts vom Dividenden hinter eine »Virgel« oder einen Halbkreis zu stehen. Um Irrungen zu vermeiden, werden die aufser Gebrauch gesetzten Ziffern successive im Verlaufe der Operation ausgestrichen.

Beispiel: 9808 : 4

Dasselbe wird auf leicht verständliche Weise so gelöst:

~~12~~
Dividend ~~9808~~ (2452 Quotient.
Divisor ~~4444~~

4 in 9 geht 2 mal; 2 angeschrieben; $2 \times 4 = 8$; 8 von 9 bleibt 1; 4 und 9 an der Tausenderstelle werden nun durchstrichen; der über 9 stehende Tausender mit 8 Hundert zusammengenommen gibt 18, d. i. 18 Hunderter; 4 im Divisor neu angeschrieben, 4 in 18 geht 4 mal; 4 im Quotienten angeschrieben, 4 mal 4 ist 16; 16 von 18 bleibt 2; 1 und 8 werden durchstrichen; 2 bildet mit 0 den nächsten Dividenden; also 4 in 20 geht 5 mal etc.

Ein Beispiel mit 2stelligem Divisor: 9342 durch 27.

I. Division.

9342 (3
27

Sprechweise: 27 in 93 geht 3 mal, 3 hinter den Bogen gesetzt. Erste Ziffer des Divisors multipliziert: $3 \times 2 = 6$; 6 von 9 subtrahiert, Rest 3; 3 wird über 9 geschrieben.

Zweite Ziffer des Divisors multipliziert. $3 \times 7 = 21$; 3 über dem Tausender 9 mit dem Hunderter 3 zusammengenommen als 33;

hievon 21 subtrahiert, Rest 12; 12 wird angeschrieben über die zugehörigen Stellen; 33 über der Linie und der Divisor 27 unter der Linie werden getilgt. Nun stehet die Rechnung so:

$$\begin{array}{l} 1 \\ \cancel{3}2 \\ \cancel{9}342\ (3 \\ \cancel{2}\cancel{7} \end{array}$$

II. Division.

Der Divisor 27 wird neu gesetzt, 7 unter die 4, 2 unter die getilgte 7, dem Stellenwert gemäfs.

27 in 124 (nämlich in 1 Tausender 2 Hunderter 4 Zehner) geht 4 mal; a) $4 \times 2 = 8$; $12 - 8 = 4$; 4 angeschrieben; 12 und 2 im Divisor gestrichen; $4 \times 7 = 28$; $44 - 28 = 16$. 44 und 7 gestrichen. Die Division steht nun wie hier:

$$\begin{array}{l} \ \ \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{4} \\ \cancel{3}\cancel{2}6 \\ 93\cancel{4}2\ (34 \\ \cancel{2}\cancel{7}\cancel{7} \\ \ \ \cancel{2} \end{array}$$

III. Division.

27 in 162 geht 6 mal; 6 angeschrieben; $6 \times 2 = 12$; $16 - 12 = 4$; 4 angeschrieben; 1 und 6 getilgt; $6 \times 7 = 42$; 4 und 2 getilgt. Die Rechnung steht nun so:

$$\begin{array}{l} \ \ \cancel{1} \\ \cancel{1}\cancel{4}\cancel{4} \\ \cancel{3}\cancel{2}\cancel{6} \\ 93\cancel{4}\cancel{2}\ (346 \\ \cancel{2}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7} \\ \ \ \cancel{2}\cancel{2} \end{array}$$

Das Verfahren selbst war kurz, und die Rechnungen nehmen weniger Raum ein, als bei der gegenwärtig gebräuchlichen Form; dagegen gab es leicht zu Irrungen Anlafs, weil die zusammengehörigen Ziffern, namentlich bei Aufgaben mit mehrstelligem Divisor, sehr zerstreut standen; das war wohl auch der Haupt-grund, warum diese Divisionsform aufser Gebrauch gekommen ist. Es folgen nachstehend noch zwei Beispiele mit drei- bezw. vierstelligem Divisor.

a) 75824 : 342	b) 43807920 : 1235
(2	~~1~~
~~5~~	~~8~~
~~16~~ (4	~~192~~
~~1748~~ (2	5~~04~~
~~75824~~ (221	~~1688~~
3~~422~~	~~670041~~
3~~44~~	~~1795287~~
3	~~43807920~~ (35472
	~~12355555~~
	~~123333~~
	~~1222~~
	~~11~~

»Um zu wissen das man durch keine gewisse Regeln erkennen mag/ wie offt die letzt Figur des theylers soll genommen werden«, gibt Rudolff den verständigen Rat: »Das einmaleins fertig gelernt/ darnach fleyssiges vberschlahen/ vnd stette vbung müssen solches geben. Nindert hat man sich balder übernommen/ denn wo die letzt des theylers klein/ die folgende grofs gesehen werden. Als wenn man theilt in (durch) 17. 18. 19. bei solchen theilern streicht der quocient nahent zum halben theyl der zal/ so vber dem 1 geschrieben/ dahin must dein fündigkeit richten.« Zugleich bemerkt Rudolff: »Wenn ein zal geteilt sol werden in (durch) 10. scheid ir ab mit einer virgel die erste ziffer (rechts)/ die figuren gegen der lincken sein der quocient/ vnnd die erst abgeschnitten figur der Rest.« Die weitere Verfolgung des hier ausgesprochenen Gedankens hätte Rudolff auf die Decimalbrüche führen müssen. Rudolff zeigt noch eine andere Form des Übersichdividierens. Er sagt nämlich im Anschlusse über die Rechenvorteile mit der »Nulla«, welche er nicht als »notdürfftig Regeln einbilden«, sondern zur »Behendigkeit« geben will, folgendes: »ye weniger Ziffern man macht/ so vil dester fürderlicher auch artlicher die rechnung verführt wird. Derhalben ich preysen mufs Frantzosen/ welche den theyler nicht mehr denn einmal setzen/ nemlich die erst vnter die erst/ die ander vnter die ander etc.

Vnd verfassen den quocient zu stetem gesicht der augen in zwo linien/ zwischen der obern vnd vntern zal. Geschicht alsso:

	In ein	zwo	drey Figurn	
			1	
		22	19343	
	4	168	214295	rest
	2848	3567	1468841	
	356	123	3207	quocient
In	8	29	458	theyl (Divisor).

Dem Übersichdividieren ist ein Übersichmultiplizieren vorausgegangen. Beispiele hiefür finden sich in der lateinischen Arithmetica practica von Heinrich Glareanus (Freiburg i. B. 1539). Hier wird das Exempel 365 · 24 so ausgeführt:

2	Teilprodukte
122	
114	
6200	
365	Multiplikand
24	Multiplikator
8760	Gesamtprodukt

Die höheren Stellen des Multiplikanden werden mit den höheren Stellen des Multiplikators vermehrt und die Teilresultate dem Stellenwerte gemäſs über den Multiplikanden gesetzt, also 2 . 3 = 6, eigentlich 20 . 300 = 6000; 6 kommt an die Stelle der Tausend; 2 . 6 = 12, eigentlich 20 . 60 = 1200; 1 kommt über die 6 an die Stelle der Tausend, 2 an die Stelle der Hunderter u. s. w.

Das Untersichdividieren finden wir im 16. Jahrhunderte bei Tartaglia. Die Division 2596860019 : 38748 führt er in 5 getrennten Operationen in folgender Weise aus:

I. 259686 (6	II. 271980 (7	7440 (0
232488	271236	
27198	744	
IV. 74401 (1	V. 356539 (9	Quotient: 67019
38748	348732	Rest: 7807
35653	7807	

Das ist unsere Form der Division; man darf nur die getrennten Operationen in eine Rechnung vereinigen. Tartaglia, dieser geniale Rechenmeister, empfiehlt zur Sicherstellung des Quotienten die Anlage von Produktentabellen. Sollte z. B. die Zahl 36492 durch 156 dividiert werden, liefs er den Divisor 156 mit den Zahlen von 2 bis 9 multiplizieren, wodurch man bei jeder Partialdivision in der Lage war, die Gröfse des Dividenden sofort zu bestimmen.

Tartaglia unterscheidet genau und bewufst das Dividieren im Sinne des Enthaltenseins und Teilens: »Partire, dividire heifst: eine Zahl in Teile zerlegen; misurare, numerare ist der Akt zu finden, wie oft eine Zahl in eine andere gehe oder darin enthalten sei.«

Das Untersichdividieren war auch den Arabern bekannt.

Die Rechenmethodiker des 16. Jahrhunderts hatten in Behandlung der schriftlichen Rechenformen eine solche Gewandtheit, dafs sie sich bei Anordnung der Ziffern mancherlei Ulk gestatteten. So bauten sie die Ziffern in der Form eines Turmes, einer Galeere über- und nebeneinander. Die Erinnerung an die sog. Schiffsrechnung ist bei älteren Leuten noch nicht erloschen.

Eine bemerkenswerte Erscheinung in der Rechentechnik des 16. Jahrhunderts ist der Mangel an Operationszeichen innerhalb der Elementararithmetik. Die Zeichen + plus und — minus finden sich zwar schon bei Riese und Stifel, aber das Zeichen + deutet noch nicht die additive Verbindung zweier Zahlen, sondern einen Überschufs an, ebenso das Zeichen — einen Mangel. Das Multiplikationszeichen als × erscheint bei der Multiplikation »übers Creutz«; es ist Richtungs-, aber noch nicht Operationszeichen. Von irgend einem Divisionszeichen findet sich in den (dem Verfasser bekannt gewordenen) Schriften des 16. Jahrhunderts keine Spur.

Rechnungsproben. Es war ein schöner Gebrauch des 16., 17. und 18. Jahrhunderts, die ausgeführten Rechnungen auf die Richtigkeit des Facits zu prüfen. Das geschah, wie wir bei Kobel, Riese etc. gesehen haben, entweder durch die entgegengesetzte Rechenoperation oder durch die Neunerprobe. Ersteres war einfacher und natürlicher; aber die Probe der Addition konnte erst dann angewendet werden, wenn man die Subtraktion erlernt hatte, und die Anwendung der Division als Probe der Multiplikation war umständlich. Daher zog man die Neunerprobe vor. Diese beruht auf dem Satze: Zwei Zahlen sind einander gleich, wenn sie, mit gleichem dividiert, gleiches geben, also gleiche Reste lassen.

Rudolff gibt die Anleitung zu den Proben der Spezies in folgender Weise.

Probe der Addition:

$$\begin{array}{r} 4602 \\ 3405 \\ 2300 \\ \hline 10307 \end{array}$$

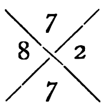
»Lafs ein jede Ziffer für sich selbst natürlich bedeuten/ vnangesehen die stat (Stelle)/ wirf 9 hinweg von den zalen ob der lini/ das minder ist dann 9. schreib auf ein ort/ kompt von der vntern zal (von welcher ebenfalls je 9 weggeworfen werden) auch souil/ so hast du jm recht gethon.« In obigem Beispiele geben alle Ziffern der Addenden $29 = 3 \cdot 9 + 2$, die Ziffern der Summe $1 \cdot 9 + 2$. Der Rest in beiden Fällen ist 2.

Probe der Subtraktion.

$$\begin{array}{r} 69847 \\ 56534 \\ \hline 13313 \end{array}$$

»Wirf 9 hinweg von den vntern zweien zalen/ verstehe vom Rest vnd von der zal so abgezogen ist/ als offt du magst (kannst) dem vbrigen mufs gleich sein die Prob der obern zal.« Die Ziffern des Subtrahenden und der Differenz geben $34 = 3 \cdot 9 + 7$, die Ziffern des Minuenden ebenfalls so viel, die Reste sind also in beiden Fällen gleich.

Probe der Multiplikation.

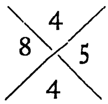


$$\begin{array}{r} 5678 \\ 65 \\ \hline 28390 \\ 34068 \\ \hline 369070 \end{array}$$

»Wirf 9 hinweg von den obern zweyen zalen/ vonn jeder insonderheyt. Multiplicir ein prob mit der andern/ wirf aber 9 hindan als offt du magst/ so dz product grösser ist/ das bleybend mus gleich sein der prob der vntersten zal.« Die Ziffern des Multiplikanden geben $26 = 2 \cdot 9 + 8$; die Ziffern des Multiplikators geben $1 \cdot 9 + 2$; 8 und 2 werden rechts und links ins Kreuz gesetzt. Beide Zahlen miteinander multipliziert geben 16; 9 davon eliminiert, bleiben 7; 7 mufs gleich sein der Probe des Produkts. Dieses gibt $25 = 2 \cdot 9 + 7$.

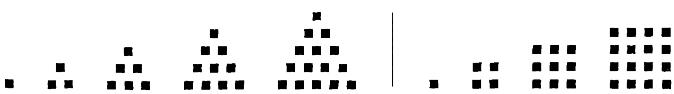
Probe der Division. »Multiplicir des theylers vnd quocients proben mit einander/ thu zu der Prob solches Products die Prob (d. i. den Rest nach Auswerfung der 9) des so in der theylung blieben/ kompt von der zal so geteylt ist worden auch so viel/ so ist es recht gemacht.«

Beispiel: $2848 : 8 = 356$.



Die Probe des Divisors ist 8, des Quotienten 5; $5 \cdot 8 = 40$; $40 = 4 \cdot 9 + 4$; die Probe des Dividenden aus 22 ist nach Auswerfung von $2 \cdot 9$ ebenfalls 4.

Zur Elementararithmetik wurden im 16. Jahrhundert auch die Progressionen gerechnet und meist dem Algorithmus mit ganzen Zahlen angereiht. Michael Stifel führt sie auf Pythagoras zurück: »Man findet das Pythagoras der feyne Philosophus sonderliche lust vnd verwunderung gehabt hab/ an so vilerley art so mancherley progressionum.« Sodann gibt er die Definition mit der Regel: »Progredirn Lernt viel zalen mit gleichen differenz vber sich wachsend in ein summa bringen. Geschicht also: Besihe wie viel der zalen seyen/ das behalt. Darnach addir die erste zal zur letzten/ das collect multiplicir mit dem halbteyl des/ das du behalten hast so kopt dir die summa aller deiner gesetzten zalen. Exemplum 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. Der zalen sind 7/ das behalt ich/ darnach 1 vnd 7 sind 8. Das multiplicir ich mit $^7/_2$ facit 28.« Zu weiteren Beispielen gibt Stifel die Versinnlichung in Punkten also:



Das Magdeburger Rechenbüchlein, gedruckt von Rofs, 1586, führt die »Progressio« als 7. Species auf und gibt folgende Lehranweisung. Thue ihm also:

Addir die erste zal zur letzten/ was daraus wird/ mach halb/ so du magst/ vnd multiplicir durch die zahl der stet/ so hastu wie viel die angegeben zaln in einer summa machen/ Magstu nicht/ so medir die zal der stet/ vnnd multiplicir damit/ als folgende zwey Exempel ausweisen.

Item/ 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. Wie viel machen sie in einer summa? Thu jhm also: Adir 7 zu 25 komen 32/ die medir/ werden 16/ vnd multiplicir durch die zal der stet/ als 19 komen 304. So viel machen gesatzte zalen.

Item/ 3. 6. 9. 12. 15. 18. 21. 24. 27. 30. 33. 36. 39. 42. 45. 48. Wie viel? Mach es also/ Addir 3 zu 48/ werden 51/ sind vngerad/ derhalben zel die statt (Stellen) sind 16/ die medir/ kommen 8. Multiplicir mit 51/ werden 408.

Das Kandlersche Rechenbuch vom Jahre 1605 bringt folgendes angewandte Beispiel. Anno 1570. ist Keyser Maximilianus der ander dises Namens hoch löblichster Gedächtnus/ von Prag gehn Speyr auff den Reichstag verraiset/ vnd da jr Kay. May. den weg durch Nürnberg genommen/ ist dieselb von einem Erbarn vnd Wolweisen Raht daselbst mit einem herrlichen Credentz darinnen 100. stück Golds ligend/ vnderthenigklich verehret worden. Das erst stuck hat gegolten ein Goldgulden zu 5 orten/ das ander 2 Goldgulden/ das drit 3. Goldgulden/ also fort/ ein jedes volgendes stuck um ein Goldgulden mehr denn dz nechst vorhergehende/ ist die frag/ wieuil die 100 stuck Goldgulden gegolten/ vnnd wieuil es inn Müntz mache? Addir 100. und 1. als die erst vnd letste Zal/ wirt 101/ multiplicirs mit dem halben theil der statt/ als 50. Facit 5050 Goldgulden thun in Müntz $6312\frac{1}{2}$ fl.

Das Rechnen mit mehrsortigen Zahlen wurde nur vereinzelt, wie bei Stifel und Tartaglia, als eigene Übungsgruppe ausgeschieden; meist wird es als selbstverständlich bei den Spezies mit unbenannten Zahlen eingeschoben. Wer addieren gelernt hatte, mufste sogleich mehrsortige Summanden, Gulden, Groschen und Pfennig addieren, obgleich bei der Verwandlung der niederen Sorten in höhere schon das Dividieren notwendig war. Auch dieser Umstand spricht für die Annahme, dafs man bei Einführung in die Spezies mit gröfseren Zahlen die einfachsten Rechensätze des Eins und Eins etc. als erlernt voraussetzte.

Die *Bruchlehre* folgt häufig der Regeldetri nach, weil man das Bruchrechnen für schwerer hielt als das Rechnen mit Ganzen. Der Begriff des Bruches machte selbst gewiegten Mathematikern noch zu schaffen. Wir merken das z. B. aus folgender Äufserung Stifels in der Cofs: »Gleich wie $^1/_3$ fl. ist ein dritteyl eines eynigen florens/ also ist $^1/_3$ ein teyl einer eynigen vnitet (Einheit). Derhalben man nicht vnbillich fragt vnd disputieret/ warumb man doch die vnitet also teyle/ so doch alte vnd newe meyster sollicher ding lehren vnd sagen/ das die vnitet sey vnteylbarlich/ vñ auff sollichen grund die gantze Theoretische Arithmeticam gründen vnd bawen.« Solche Teilung, meint Stifel, sei aber den Rechnern erlaubt *wegen des Nutzens*. Riese behandelt die Bruchlehre mit wenigen Sätzen. Wir dürfen aber daraus nicht auf die Entwicklung des Gegenstandes selbst schliefsen; denn Riese wollte »ein gemein leicht Büchlein für anfahende Schüler« schreiben. Er gibt daher nicht alles, was er weifs, das beweist der dreizehnstellige Bruch bei der Wucherrechnung, sondern nur so viel, als er für den vorwürfigen Zweck braucht, und in der That reicht er mit den wenigen Sätzen durch das ganze Buch aus. Eingehender ist die Bruchlehre bei Clavius, Jacob, Urstisius u. a. behandelt. Sie erstreckt sich im allgemeinen zunächst auf die *Schreibweise des Bruches*: »Ein jeder Bruch oder Theil wirdt mit zweien Zaln geschrieben/ vnter welchen eine oben/ die ander vnter das strichlein gesatzt wird/ heifst die ober der Zeler/ die vnder der Nenner/ wirdt im aufsreden der Zeler erstlich/ darnach der Nenner mit sampt hinzusetzung des wörtleins Theil *gelesen*/ Als $^2/_3$ sind zwey drittheil. (Die Silbe »tel« war also damals noch ein selbständiges Wort.) Sodann folgt meist die *Wertvergleichung* mehrerer Brüche: »Wie man erkennen soll/ welcher Bruch vnter zweyen der gröst/ oder ob einer dem andern gleich sey.

$^4/_7$ oder $^3/_5$			$^3/_6$ oder $^4/_8$	
20	21		24	24

Multiplicir creutzweifs des ersten Bruchs Zeler/ mit defs andern Nenner u. s. w. Welcher Bruch die gröst zal vnter sich hat/ der ist auch am gröfsten.« (Jacob.) Diese Wertvergleichung gehört unter das Kapitel Gleichnamigmachen und eilt diesem voraus. Man wufste, wie ein Bruch auf eine kleinere Form zu bringen sei, und behandelte zu diesem Zwecke die Frage: »Wie man erkennen soll, ob eine Zahl in einer andern aufgehe oder in ihr beschlossen sei«, und wie eine Zahl in ihre Componisten (Faktoren) zerlegt wird. Zu den Vorübungen zählte noch die Auflösung der benannten Bruchteile in eine Ordnung mehrsortiger Zahlen, z. B.: »Als wiltu wissen/ wie viel $^3/_8$ Gulden Albus (Weifspfennig) seien, so multiplicir 3 mit 27 (der Reduktionszahl) kommen 81/ die theyl in (mit) 8/ kommen 10 Albus/ das vbrig mach zu Pfennig etc. Wenn man aber ein aufgelöst ding widerumb zu einem Theil oder Bruch machen wil/ so setze es in die Regel detrie/ z. B. 80 lb w. v. Ztr.? 100 — 1 — 80. Facit $^4/_5$ Ztr.« Man unterschied schlechte (echte) Brüche und Brüche von Brüchen und widmete denselben einen eigenen Abschnitt, wahrscheinlich deshalb, weil die Form der Aufgabe nicht sogleich erkennen liefs, ob man es mit einer Multiplikation oder Division zu thun habe. Das obengenannte Magdeburger Rechenbüchlein vom Jahre 1586 behandelt die Bruchsbrüche so: »Item/ $^1/_2$ von $^1/_3$ aus $^4/_5$ fl. thut $^2/_{15}$. Dieser Bruch resoluirt thut in müntz 8 Kr. Die $^4/_5$ fl. machen 48 Fr./ daraus ist $^1/_3$ 16 Kr./ vnnd $^1/_2$ aus 16 ist 8 Kr. Also sihest du klärlich/ dafs diser Bruch machet in Müntz 8 Kr.« Man bezog also die Bruchsbrüche und Bruchmultiplikationen auf benannte Zahlen und fand darin zugleich den Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens. Eine seltsame Bezeichnung hat dieses Büchlein in dem Fall, wo die Bruchdivision wirklich die Form eines Bruchsbruches annimmt, z. B. »$^1/_2$ viertl/ 1 $^1/_2$ viertel/ 2 $^1/_2$ Dritteil/ 3 $^1/_2$ viertl/ 5 $^1/_2$ sechsteil etc. Es setzt dieselben also: $\frac{\text{ð}}{4}\ \frac{\text{ij}}{4}\ \frac{\text{iij}}{3}\ \frac{\text{iiij}}{4}\ \frac{\text{vj}}{6}$ und sagt: Duplir zäler vnd Nenner/ kommen $^1/_8$, $^3/_8$, $^5/_6$, $^7/_8$, $^{11}/_{12}$. — Das Gleichnamigmachen trat selten als eigene Übung auf, meist versteckt bei der Addition und Subtraktion, z. B.

$$\begin{array}{c} {}^1/_2 \qquad {}^2/_3 \\ \hline 3 \\ \underline{4} \\ {}^7/_6 \end{array}$$

Bei der A d d i t i o n wurden Zähler und Nenner beider Brüche gegenseitig »übers creutz« multipliziert; so erhielt man die Zähler der erweiterten Brüche, dann multiplizierte man die Nenner miteinander und gab der Summe aus beiden Zählern das Produkt beider Nenner zum Nenner.

Waren mehrere Brüche zu addieren, galt die Regel: »Summir je zween nach gegebener Lehr/ was für Brüch kommen/ die summir wider/ biſs entlich alle Brüch zusammen kommen.« (Jacob.) Übrigens gibt Jacob an, wie man alle Brüche, wie viel auch ihrer wären, auf einmal summieren soll: »Multiplicir eines jeden Bruchs Zeler in der andern Brüche Nenner/ so wirstu letztlich so vil Zaln haben/ als der Brüch seyn/ die summir vnd setz darunder aller Brüch Nenner durcheinander multiplicieret/ so hastu aller Brüch Summam.« Auf diese Weise erhält er in dem Additionsexempel: $^1/_2 \times {}^2/_3 \times {}^1/_4 \times {}^2/_5$, die Zähler: 60, 80, 30, 48 und den gemeinschaftlichen Nenner 120, also $^{218}/_{120}$ oder $1\,^{49}/_{60}$. Das Verfahren stimmt im wesentlichen mit der modernen Methode überein, nur das Aufsuchen des k l e i n s t e n gemeinschaftlichen Nenners fällt fort. In ähnlicher Weise wie die Addition zweier Brüche wurde die S u b t r a k t i o n behandelt. Scheubel führt die Subtraktion $^7/_9 - {}^3/_7$ so aus:

$$\frac{\dfrac{27}{^3/_7} \text{ de } \dfrac{49}{^7/_9}}{63} \text{ ma (nent } \frac{22}{63}$$

Die M u l t i p l i k a t i o n wird durch Anwendung des Satzes: Dividiere das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner, und die D i v i s i o n durch den Satz: Multipliziere den Dividenden mit dem reciproken Werte des Divisors oder auch durch vorgängiges Gleichnamigmachen vollzogen. Urstisius, welcher die Schriften von Euklid, Ramus, Salignac, den er sehr hoch schätzt, Gemma Frisius und Scheubel als seine Quellen nennt, berechnet $1\,^1/_4$ mal $2\,^2/_3$ und $2\,^1/_2 : 1\,^1/_4$ so:

Simplices		Conjuncta	Datae		Reliqua		
5	8	40	5	5	20	vel	2
4	3	12	2	4	10		1
$1\,^1/_4$ ad $2\,^2/_3$		$3\,^1/_3$	$2\,^1/_2$ à $1\,^1/_4$		2		

Tartaglia berechnet das Beispiel: $2\,^2/_3 \cdot 3\,^1/_4 \cdot 7\,^3/_5$ wie folgt:

$$\text{red.}\quad \frac{8}{3} \;—\;—\; \frac{13}{4} \;—\;—\; \frac{38}{5} \qquad \frac{3952}{60} \;\Big|\; 65\frac{52}{60}$$

Die Division $9\,^3/_4 : {}^2/_3$ führt er so aus:

$$\frac{2}{3} \times \frac{39}{4} — \frac{117}{8} \;\Big|\; 14\frac{5}{8}$$

Der bedeutsame Satz: Brüche bleiben ihrem Werte nach unverändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert, findet sich bei Clavius, der, wie Tartaglia, die Bruchlehre überhaupt mit grofser Klarheit behandelt. Den kritischen Fall $4 : {}^3/_4$ erledigt Tartaglia, indem er bemerkt, es sei absurd zu sagen, 4 soll geteilt werden durch $^3/_4$; man mufs hier fragen, wie oft $^3/_4$ in 4 enthalten sei. In wissenschaftlichen Werken kommen auch die 60-teiligen Brüche vor, welche zu den astronomischen Berechnungen notwendig waren; die Rechenmeister aber lassen sie abseits.

Zur Lösung der praktischen Aufgaben bediente man sich vornehmlich der Regeldetri und der welschen Praktik. Über den Namen R e g e l d e t r i gibt Jacob folgenden Aufschlufs: »Und wird solche darumb de Trie mit verzuckten und gestumpfften Latinischen worten genennt/ die weil ein jedes Exempel vnd Frag/ so derselbigen vnterworffen/ in sich 3. bekannter Zaln hat/ denn mit dem Wörtlein de Trie wil sie nichts anderfs verstanden vnd bedeut haben/ dann so man spreche: Regula de tribus numeris notis/ das ist auff Teutsch sovil/ als ein Regel von dreyen bekannten Zaln/ dardurch je vnd allweg die vierdt vnd vnbekannt/ vermög jres Procefs/ ersucht vnd erlehrnet wird.« Zugleich gibt Jacob den Grund der Regel an: »Wird auch bisweilen Regula p r o p o r t i o n u m genannt/ von wegen ihrer eynheymischen vnd beschlossenen Proportionaliteten, dann in allweg helt sich die erst Zal der Regel de Tri gegen der andern/ wie sich die dritte zu der vierdten. Hat solche Regel erstlich jren Grundt, Vrsprung vnd Herkommen aufs gemeiner vernunfft (dem Hausverstande)/ nachmals aufs der zwenzigsten Proposition des sibenden Buchs Euklides vnd lautet also: Wo 4 Zahlen proportional zalen sein/ so bringt die erst in die vierdt multipliciert souil als die ander in die dritt«, d. h. modern ausgedrückt: das Produkt der äufsern

Glieder ist gleich dem Produkte der innern Glieder. Diese Regel wurde so sehr geschätzt, dafs man sie Regula aurea oder die »gülden Regel« nannte, »denn wie das Gold vnder andern Metallen das köstlichste ist, also ist diese Regel von wegen jres Brauchs die köstlichste vnder allen andern arithmetischen Regeln« Regula mercatorum (Kaufmannsregel) wurde sie genannt, weil sie Käufer und Verkäufer täglich brauchten. Die Anleitung zum Ansatz und zur Berechnung ist fast durchweg gleichlautend: »Setz hinden was du wissen wilt/ welchs vnder den andern zweyen der Frag am Namen gleich ist/ setze forn/ vnd das dritte mitten. Multiplicir das hinder mit dem mittlern vnd theil ab ins (durch das) förder/ was heraufs kompt/ heifst mit dem Namen wie das mittler/ vnd gibt Antwort auff die Frag: Item 24 Eln kosten 18 fl. wie theuwer kommen 36 Eln?

Eln 24 —— fl. 18 —— 36 Eln, »gibt nach der angegebenen Auflösungsmethode $(18 \cdot 36) : 24 = 27$. Setzen wir die Aufgabe in steigenden Verhältnissen der Proportion an, $24 : 36 = 18 : x$, erhalten wir ebenfalls $24x = 18 \cdot 36$ oder $x = (18 \cdot 36) : 24 = 27$. Die Regeldetri ist hiernach in der That nichts anders als eine aus der Proportionslehre gezogene mechanische Regel. Bei Aufgaben solcher Art: 25 Pferde brauchen in 8 Wochen 2 Schäffel Haber, in welcher Zeit brauchen 80 Pferde ebensoviel Haber? liefs sich die allgemeine Regel nicht anwenden, denn dies »were wider alle Vernunfft«, und man mufste in Ansetzung der Aufgabe »das hinder zum fördern, und das förder zum hindern machen«. Die hieher gehörigen Spezialfälle, welche allerdings als solche verständig erkannt werden mufsten, wurden in die Regula de tri conversa oder in die umgekehrte Regeldetri eingereiht. Enthielt die Aufgabe eine längere Reihe von Gliedern, wurden dieselben nach Art des Kettensatzes untereinander gestellt, reihenweise multipliziert und dadurch die zusammengesetzte Aufgabe in eine einfache umgewandelt, wie das Riese bei der »zwifachen Regeldetri und Vergleichung der Gewicht« gezeigt hat. Die Verhältnisse (proportiones) und Proportionen (proportionalitates) werden in wissenschaftlichen Lehrbüchern sehr ausführlich nach Euklid behandelt.

In Frankreich war die Règle de Trois ebenfalls bekannt.

Die Regeldetri bewegte sich in starren, sozusagen in zunftmäfsigen Formen. In der welschen Praxis steht ihr ein freies Rechnen gegenüber, welches die einzelne Aufgabe nach ihrer Eigenart auffaſst, die Zahlen unter Berücksichtigung besonderer Verhältnisse geschickt zerfällt und durch einfache Schlüsse zum Resultate führt. Man schlieſst von einem Vielfachen aufs Einfache, von einem bestimmten Teil aufs Ganze, vom Ganzen auf einen oder mehrere Teile. Warum diese Rechnungsweise Praktik heiſst, sagt uns Jacob: »Wirdt aber die Praktik genennet von wegen jrer behendigkeit/ dann gleich wie in andern Künsten/ der so ein ding nicht allein weiſs vnd verstehet, sondern auch dasselb durch tägliche erfahrung vnd übung gebraucht hat/ vnd darinnen behender vnd auſsrichtsamer geworden ist/ ein Practicus genennet wirdt/ Also auch in dieser Kunst wird der so durch grosse vbung der Regel de Tri vnd gemeiner Rechnung etwan Natur vnd Eygenschafft der Zaln vermerckt/ vnd dadurch von tag zu tag Fortheil vnd Behendigkeit erfahret/ ein Practicus genennet/ davon dann ferner auch die Kunst oder solche subtile Behendigkeit Practica genennet wirt.« Nach dem allgemeinen Glauben haben wir diesen Berechnungsmodus von den Italienern oder Welschen, daher das Beiwort welsche Praxis. Jacob hat Bedenken gegen dieses Attribut; denn er bemerkt, »daſs sie die Walhen — dafür mans hält — erfunden haben.« Pescheck (1741) bestreitet die welsche Abstammung der Rechnungsvorteile direkt und sagt: »Daſs man aber diese Vorteile welsche oder italiänische Praktika titulieret, soll daher kommen, weil sie von Italiänern oder Welschen sollen erfunden sein.« Und mit feiner Ironie setzt der beleidigte Patriotismus bei: »Wer es ohne Beweis glauben will, hat so viel Vorteil, daſs er unter die Zahl der Leichtgläubigen kann recipieret werden. Quasi vero, als wenn die Rechenkunst bei uns Teutschen unter dem Schäffel gestanden habe, da sie doch jederzeit noch viel besser excolieret als bei denen Italienern, wie man aus denen alten Skribenten darthun kann.« Nach unserem gegenwärtigen Wissen wurde die Praktika schon vor Tartaglia behandelt von de la Roche, in Deutschland zuerst von Grammateus, Riese, Rudolf, Apian, Stifel; das hindert uns jedoch nicht, die Italiener, bei denen sich das Städtewesen und der Handel viel früher als in Deutschland entwickelten, als unsere Lehrmeister in der Arithmetik anzuerkennen. Die welsche Praxis lieſs sich nicht in Regeln fassen, denn die »vile solcher Regeln were mehr verdrieſslich als nützlich«; sie muſste deshalb durch Exempel erlernt werden, denen die Autoren auch die Ausrechnung anfügten. Wir lassen einzelne Beispiele zunächst von Tartaglia folgen: Wie viel betragen 27 Ellen, die Elle zu 9 Lire 13 Soldi 8 Piccoli? (1 Lire = 20 Soldi = 240 Piccoli; 1 Soldi = 12 Piccoli.)

Ellen 27	Ellen 27	Ellen 27
L. 9	Soldi 13	Pic. 8
L. 243	81	216 Pic. = 18 Soldi.
17 S. 11	27	
S. 18	351 S. = 17 L. 11 S.	
L. 261 S. 9		

Die Namen der Geldsorten wurden vor die Zahlen geschrieben, eine Übung, welche auch bei deutschen Kaufleuten noch jetzt gebräuchlich ist. Die Aufgabe: Wie viel Lire kosten 128 Ellen, die Elle zu 15 Soldi? wird unter Anwendung aliquoter Teile so ausgeführt (15 Soldi = 10 + 5 Soldi = $^1/_2$ + $^1/_4$ Lire):

Ellen 128 zu 15 Soldi

die Hälfte L. 64
das Viertel L. 32

Betrag L. 96

Nachstehende Aufgaben sind dem Rechenbuche von Simon Jacob entnommen:

Item 8 lb vmb 12 fl./ wie kommen 12. pfundt.

8 ——	12 fl. ——	12	Facit.
	fl. 12		8 lb[1])
	fl. 6		4
	18 fl.		

Allhie merck/ dieweil 8. lb. 12. fl. gelten/ so müssen die 12 lb. auch der art nach/ wie 8. pfundt bezalt werden/ hab derhalben 12. lb. zerfellet in 8. vnd 4. lb./ die dann zusammen wider 12 pfundt machen/ kosten also die 8. lb. auch 12. fl./ die du dann gesatzt sihest/ vnd gleich wie 4. lb. aufs 8 lb. der halbtheil seyn/ also

[1]) Das Pfundzeichen bestand früher aus den horizontal durchstrichenen Buchstaben lb, als Abkürzung des Wortes libra (Pfund). Aus dieser Abkürzung ist das gebräuchliche Pfundzeichen entstanden.

müssen sie auch halb so viel gelts geben. Sprich derhalben halb 12 sind 6. hast also gefunden daſs 8. vnd 4. nemlich die hindern 12. pfundt gelten 12. vnd 6. das sind 18 fl./ nemlich das begert Facit.

Item 8. lb. vmb 19. fl./ wie kommen 23 lb.

8 —— 19 fl. —— 23	
19	8
19	8
9 — 13 — 4	4
4 — 20 — 2	2
2 — 10 — 1	1
fl. 54 — 16 — 7	

Du kannst allhie auſs vorigem bericht an zerstreuwung der pfundt diese art leichtlich verstehn/ dann 23 lb. sind 8, 8, 4, 2 und 1 lb. (1 fl. = 27 albus, 1 albus = 8 ₰.)

Item 1 lb. vmb 12 fl./ 22. alb. 7. ₰/ wie kommen 12 lb.

1 —— 12. fl./ 22. alb. 7 ₰	—— 12.
fl. 144	9 alb
4	9
4	3
1 —— 9	1
12	4 ₰
6	2
3	1
1 —— 4	
fl. 154 —— 4 —— 4	

Allhie hab ich erstlich gesagt ein pfundt vmb 12. gulden/ wie 12. pfundt/ Facit 144. gulden. Fernner hab ich die 22. albus zerstreuwet auff ein gulden (der hat 27. alb.) in 9. 9. 3. 1. alb. vnd sind erstlich 9. alb. $^1/_3$ eines guldens Derhalben/ wann ein lb. noch kost $^1/_3$ guldens/ als der hindern pfundt seyn/ darumb nim $^1/_3$ auſs 12. kommen 4. das sind 4 gulden/ dieweil $1^2/_3$ fl. machen 4. gulden/ die andern 9. alb. geben auch vier gulden/ die 3. alb. geben $^1/_3$. deſs das 9 alb. geben haben/ nim $^1/_3$ auſs 4. gulden/ thut 1 gulden 9 alb. Fernner 1 alb. gibt $^1/_3$ auſs 1 gulden 9. alb. das sind 12. alb. Oder sprich 1. pfundt vmb 1. alb. machen 12. pfundt auch 12. alb. Ferner sind die

12. pfenning zerstreuwet in 4. 2. 1. pfenning/ was der alb bracht hat/ das bringen 4 pfenning halb/ darumb sag halb 12. alb. sind 6 alb. Ferrner 2. pfenning geben wieder halb 6. alb. vnd 1. pfenning gibt halb 3. alb. Summa thut 154 gulden/ vier albus/ vier pfenning.«

In der Folge wird dasselbig Exempel auch anders practiciert, d. h. auf mehrfache Weise gelöst.

Man sieht, dafs die welsche Praxis allen Mechanismus ausschliefst; denn sie nötigt den Rechner, jede Aufgabe nach ihrer Eigenart anzufassen, sich fortwährend zu besinnen, wie er die Zerfällung der Zahlen am zweckmäfsigsten vornehme, die Benennungen von einer Gröfse auf eine andere übertrage, die Teilresultate zusammenfasse etc. Zugleich gibt sie dem schlichten Raisonnement und dem Kopfrechnen ausgedehnten Spielraum. Stifel nennt die welsche Praxis eine inventio ingeniosa, und das ist sie in der That. Wo die Rechenmeister sich dieser Methode bemächtigt und dieselbe zur Geltung gebracht haben, wurde der lernenden Jugend gewifs viel Plage und Leid erspart. In der welschen Praxis ist unsere Schlufsrechnung vorgebildet.

Auch das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel gehörte im 15. und 16. Jahrhunderte der Elementar-Arithmetik an. Da dasselbe auf unbeugsamen Grundsätzen beruht, so hat es sich bis heute wenig verändert. Die lateinische Arithmetica practica per Gemmam Frisium (1542) veranschaulicht die Quadratzahlen durch Punkte, die Kubikzahlen durch einen Holzschnitt, welcher einen in 225 Würfel geteilten Kubus darstellt, und bringt dann folgende Beispiele:

Quadratwurzel:	Kubikwurzel:
2 a) 119025 (3 9	14 a) $\cancel{4}\cancel{1}063625$ 27 (3
$\cancel{2}34$ b) $\cancel{1}\cancel{1}\cancel{9}025$ (34 64 —— 256	14 b) $\cancel{4}\cancel{1}063625$ 9 Triplum 27 Divisor (3

```
c) 119025
     68|5 (345
   ------
     3425
```

```
       1
    14759
c)  41063625
      9
     27  Divisor (34
    -----
    108
     144
        64  Cubus
    -------------
    12304  Summa
```

```
     1759
d)  41063625
        102
      3468     (345
    ----------
     17340
       2550
         125
    ----------
     1759625
```

Rudolff (1525) behandelt das Ausziehen der Kubikwurzel, indem er das Trinom $b(3a^2 + 3ab + b^2)$ mühsamer bildet wie dermals, in folgender Weise:

```
 3
30693
94818816 (456
bacbacba
 48
  12
 ----
240
 300
  125
-------
27125
  6075
   135
-------
36450
 4860
  ·216
-------
3693816
```

Modern:

$$
\begin{array}{rl}
\sqrt[3]{94|818|816} & = 400 + 50 + 6 \\
64\,000\,000 & \\
\hline
30\,818\,816 & : 3 \cdot 160\,000 \\
480\,000 & \\
60\,000 & \\
2\,500 & \\
\hline
542\,500 & 50 \\
27\,125\,000 & \\
\hline
3\,693\,816 & : 3 \cdot 202\,500 \\
607\,500 & \\
8\,100 & \\
36 & \\
\hline
615\,636 & .\ 6 \\
3\,693\,816 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

Ein Mischsystem zwischen dem Rechnen auf den Linien und mit der Feder war die Tolletrechnung. Das Wort Tollet hängt vermutlich zusammen mit „toile", was ursprünglich ein Netz bedeutet, und einem solchen ist das Schema des Tollets vergleichbar. Man bediente sich der Tolletrechnung, welche nur bei Widmann und Apian ausführlich geschildert wird, aber schon zu Petzensteiners Zeit etwas Allbekanntes gewesen sein mufs, zunächst zur Feingehaltsbestimmung der Münzen und bei kaufmännischen Proportionsrechnungen. Die Einrichtung des Tollets ist (nach Treutlein und Günther) aus dem nachfolgenden Schema ersichtlich:

M	M	M
X	X	X
lot	lot	lot
halblot	halblot	halblot
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{64}$
$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{128}$
$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{256}$

Die erste Vertikalreihe diente zur Unterbringung des Legierungsgewichts, in der zweiten wurde der Zusatz, in der dritten der zu berechnende Feingehalt deponiert. Handelt es sich, wie hier vorausgesetzt werden darf, nur um Gewichte, die in der Form 2^n vorkommen, wobei unter n eine beliebige ganze positive oder negative Zahl verstanden wird, so ist leicht erklärlich, dafs mit Einlegung von Rechenpfennigen an einem solchen Schema bequem operiert werden konnte.

Das Kopfrechnen, welches im 19. Jahrhunderte zu einem eigenen Unterrichtszweig ausgebildet wurde, findet man in den Schriften des 15. bis 17. Jahrhunderts höchstens andeutungsweise erwähnt. Gleichwohl ist dasselbe uralt, ja ursprünglich; es hatte, solange die schriftlichen Berechnungsformen wenig ausgebildet waren, gewifs einen gröfseren Spielraum wie heute und war bestimmt überall da im Gebrauche, wo Fingerbeugungen zur gedächtnismäfsigen Festhaltung von Zahlen, Teilresultaten etc. benutzt wurden. Ohne Kopfrechnen hatte ja die Daktylonomia keinen Sinn. Da diese von Lucas Pacioli, Apian, Noviomachus noch gelehrt wurde, ist die Existenz des Kopfrechnens für das

15. und 16. Jahrhundert nachgewiesen. Einige historische Notizen bestätigen diesen Schlufs. Apian sagt in dem deutschen Rechenbüchlein von 1532: „Ob aber einer gar so vngeschickt were/ vnd die zal im sin zu behalten nit vermöcht/ sol er die Finger der linken Hand/ nach derselbigen zal/ welche behalten sol werden/ legen vnd heben. Darnach so er komet zu den andern Figuren sol er die zal/ welche er im sin behalten nach anleytung der finger addiren.“ Dafs in jener Zeit gewandte Kopfrechner gelebt haben, konstatiert Scheurl der jüngere (s. Seite 165), welcher in einem Familienbuche 1457 von seinem Vater sagt: „Er vertrat einen fleifsigen, feinen Buchhalter vnd überbehenden Rechner, desgleichen schwerlich in die Schau kam. Sobald er das Gehalt eines Stückes Silbers höret, wufst er die Kauffsumme im Sinn zu rechnen, desgleichen rechnet er auf einmal mit wenig Ziffern, wie viel feyn drey oder vier Stück Silber hielten, obwohl das Gehalt unterschiedlich was.“

Methodisch geordnete Übungen im Kopfrechnen finden sich zuerst bei Tartaglia, und zwar gehen dieselben den Spezies voraus. Tartaglia läfst erst Additions- und Subtraktionsreihen innerhalb der Zahlreihe von 1—10 bilden, z. B.: $0+0=0$; $0+1=1$; $0+2=2$; $1+1=2$; $2+1=3$. Ausgedehnter sind die Übungen im Multiplizieren, die zunächst auf Erlernung des Einmaleins gerichtet sind. Nachdem das Multiplizieren aller Einerzahlen mit sich selbst geübt ist, werden sie mit den Zehnern von 10 bis 100 multipliziert. Nicht zufrieden damit, lässt er auch die Zahlen von 11 bis 40 mit 2 bis 10, dann alle Zehner von 10 bis 100 mit 11 bis 20 vervielfältigen, eine Übung, die sich der vorigen leicht anreiht; denn, sagt Tartaglia, wer weifs, dafs 3 mal 12 36, weifs auch sogleich, dafs 30 mal 12 360 ist. Hiezu gibt er den Rat, dafs sich jeder besonders in der Multiplikation jener Zahlen üben soll, die bei der Berechnung der Münzen, Mafse und Gewichte seines Wohnortes vorkommen. Auch für die Division fehlen die Vorübungen im Kopfe nicht. Die Zahlen von 0 bis 9 werden mit 1, von 0 bis 19 mit 2, von 0 bis 29 mit 3, von 0 bis 89 mit 9 dividiert, so dafs alle Fälle, in welchen die Division einen einzifferigen Quotienten gibt, vorkommen. Eine Reihe von Aufgaben wird nach ausdrücklicher Bemerkung zu formalen Zwecken gegeben, z. B.: Von welcher Zahl mufs man $^1/_3$ abziehen, um $\frac{1}{4}$ zu bekommen? Von welcher Zahl mufs man $3\frac{1}{2}$ wegnehmen, damit $2\frac{1}{3}$ übrig bleibt? Zu welcher Zahl mufs man $2\frac{2}{3}$ addieren, um $8\,^3/_4$ zu erhalten?

Das Fingerrechnen, welches im frühen Mittelalter mit Virtuosität betrieben wurde, kommt nun immer mehr aufser Gebrauch und wird schon gegen Ausgang des 16. Jahrhunderts historisch erwähnt.

Neben den Lehranweisungen be standen auch sog. Faulenzer. Das „gerechnet Rechenbüchlein“ von Adam Riese aus dem Jahre 1536 ist vermutlich ein solcher. Älter als diese Schrift und die von Wildermuth zitierte arithmetische Praktik des Julii Cäsaris von Padua v. J. 1582 und wohl der älteste bis jetzt bekannt gewordene gedruckte Faulenzer ist:

„Ein nutzlich Rechenbuchlein/ allen den so mit mancherley Warn in verkauffen vnd kauffen handeln. Auch den Castnern/ Handwerkern/ Wirdten/ Pfragnern/ Kelnern/ Knechtẽ vnd Mayden etc. Welchen das Rechnen vnbekannt ist/ vast dienstlich/ darinnen alles das/ damit man in kauffen vñ verkauffen handelt/ gerechnet funden wird. Gedruckt zu Nürnberg durch Fridrichen Peypus im 1526 jar“. (Kreisbibliothek Regensburg.)

„Dis Buchlein hat drey teyl/ darinnen aller gemein fragen/ kauffens vnd verkauffens aufflösung mûgen kurtzlich gerechnet vnd gefunden werden etc.

In dem erstenn teyl ist¦ gerechnet der wert eines yeden dings von eynem heller an bifs auff 29 ₰. wie dann solchs die Ziffer ob den Teffelein anzeigen/ vnd werden also bey eynem

Itm	fl.	lb. (albus)	₰
1	0	0	24
2	0	1	18
3	0	2	12
4	0	3	6
5	0	4	0
6	0	4	24
7	0	5	18
8	0	6	12
9	0	7	6
10	0	8	0
20	1	7	18
30	2	7	6
40	3	6	24
50	4	6	12
60	5	6	0
70	6	5	18
80	7	5	6
90	8	4	24
100	9	4	12
200	19	0	12
300	28	4	24
400	38	0	24
500	47	5	6

yede kauff eynes hellers oder der pfennig vier seytten oder lini herabgesetzt. In der ersten stehet die frag/ das ist võ 1 bifs auf 10. von 10 bifs auff 100. võ 100 bifs auff 500 das du dañ für Centner/ Pfund/ Lott/ Sümer/ Metzẽ/ Fuder/ Aimer/ Mofs oder eln nemen magst. In der andern seytten oder zeyl des teffeleins herab findestu wie viel solchs an gulden treff. In der dritten an pfundten mach. In der vierdten an pfennigen thue/ vnnd solchs durch das gantz buchlein aufs etc.

Das aber mit mererm vnd klarerm Verstand zugebrauchen. Wil ich dir setzen ein gemein exempel/ der bey du onzweyfel die andern alle machen vnd verstehen solt.

Item eyn eln vmb 24 ₰ wie kumẽ 326 eln. Das kurtzlich zu finden/ such herůmb in den plettern des ersten tayls/ wo oben auff den teffelein 24 ₰ stehen. Darnach gehe herab vnnd besich wieuiel 300 elen gellts machen/ so findestu fl. 28 lb. (Albus oder Weifspfennig) 4 ₰ 24. Weiter such hinauf was 20 thun/ so wirstu finden fl. 1 lb. 7 ₰ 18. Zuletzt besich/ was 6 thun/ so findestu fl. 0 lb. 4 ₰ 24. Diese drey summa thu zusammen/ so hastu das die 326 eln mache in summa fl. 31 lb. 0 ₰ 12. Solch mach nit allein von eln/ sonder von wein/ korn/ saltz vnnd schmalz/ auch allen warn verstanden werden.«

Das treffende „teffelein" ist S. 249 beigesetzt.

Ein Gulden wurde zu 252 ₰ oder 8 albus 12 ₰, 1 albus zu 30 ₰ gerechnet.

Es ist bemerkenswert, dafs man in jener Zeit die Kenntnis des Lesens und der Addition voraussetzte, selbst bei Knechten und Mägden.

Die Cofs.

Wie uns bekannt ist, haben sich schon die Ägypter, Griechen und Inder mit der Auflösung algebraischer Probleme befafst. Die alte Kunst Gleichungen zu lösen wurde im Abendlande in Erinnerung gebracht durch Mohamed ben Musa (9. Jahrhundert), Leonardo Fibonacci (13. Jahrh.) und Luca Pacioli (de Borgo), welcher 1494 das erste gedruckte Werk über Algebra veröffentlichte. Riese vollendete 1542 ein Manuskript über Algebra, welches erst neuerdings von Berlet aufgefunden wurde. Grammateus zeigte in seinem Rechenbuche, wie die in Ben Musas Schrift vorkommenden Gleichungen zu lösen seien. Sein Schüler Rudolf von Jauer verfafste 1524 ein deutsches Lehrbuch über die Cofs, welches, beträchtlich erweitert und mit Auflösungen versehen, 1552 von Michael Stifel neu herausgegeben wurde. Auch Stifels Freund, Johann Neudorffer, „der Meyster viler berühmter Schriften / vnd Rechenmeyster zu Nürnberg," welcher Stifel Rudolfs Werk „herein in Preussen (nach Königsberg)" schickte, war in der Cofs wohlbewandert.

Die Cofs führt ihren Namen von der unbekannten Gröfse. Die Ägypter nannten die Unbekannte Hā, die Araber chei, die Lateiner res, die Italiener cosa. Stifel erklärt den Namen wie folgt:

„Damit aber bekant werde der vrsprung / võ welchem geflossen ist der Nahm dieser übung / das es die Cofs genent wirt / verstehe / das die alten difs werck genennet haben ein Kunst von Dingen / darumb das durch sye verborgenheyt der fragen / so von dingen / das ist / von zalen vnd mafsen geschehen auffgelöset werden. Das bezeugen alte bücher (nicht vor wenig jaren) von der Cofs geschriben. In welchen die quantitet Pragma (Res), substantia etc. nicht durch Charakter (Ziffern) / sondern durch ganz geschribene Wort dargegeben sind. (Schade, dafs Stifel diese Schriften nicht nennt.) Vñ sonderlich in practicirung eines yeden Exempels / wirt die frag gesetzt / Ein Ding / mit sollichen worten. Ponitur vna Res. (Ein Ding wird gesetzt.) Dieweil nu dise Kunst von den Graecis zu den latinischen kom̄e / von jhnen mit sampt aller Philosophie aufgenommen / haben sye die wahlen (Welschen) / dem latin nach / zu welsch genennet Regule de le Cosse. Denn Cossa bedeutet ein ding. von dannen kompt das es von den Teutschen die Cofs genennt wirt."

Bis zum Jahre 1520 war die Cofs in Deutschland noch eine ziemlich seltene Kunst. Riese sagt bei der Lösung eines Beispiels in seinem Manuskript über die Cofs: „Von diesem Exempel hat mein Freund Hans Conrad in Eisleben (s. S. 210) gebenn eynem schwartzen munich prediger ordens / welcher Aquinas genanndt wartt / 1 Gulden / von dem auch Andreas Alexander (Professor an der Leipziger Universität) / der erfahrenste Mathematicus gelernt." In welcher Achtung die Cofs damals stand, geht aus der Vorrede des Werkes: „Die schönen Exempeln der Cofs Christoff Rudolffs durch Michael Stifel gebessert vnd sehr gemehret 1553“ deutlich hervor. Stifel erzählt hier folgendes:

„Es hat Christoff Rudolff vom Jawer (Jauer) löblicher Gedechtnis anno 1524 die wunderbarliche vnd ganz Philosophische Kunst des rechnens/ genennet die Cofs/ in deutsche sprach durch den Truck gebracht/ so gantz getrewlich vnd so klar vnd deutlich/ das ich dieselbige/ Kunst ohne allen mündtlichen vnderricht verstanden hab (mit Gotteshülff) vnd gelernet. Welches ich zu Ehren seiner getrewen mitteylung gern bekenne. Vnd dieweil ich einen guten teil vieler feyner Jungen Gesellen/ geschickt zu sollicher Kunst/ hab hören klagen/ das dis Buch der Cofs Christoff Rudolffs nyendert mehr furhanden sey/ so sie doch das selbig gern wolten bezalen dreyfach oder auch vierfach. Was aber diser Christoff Rudolff bei etzlichen fur danck hab/ will ich mich nicht jrren lassen. Ich höret auff ein zeit jm grewlich vnd vnchristlich fluchen/ das er die Cofs hatte geschriben/ vnd das beste hette verschwigen/ nemlich die Demonstrationes seyner Regeln. Und hette seine Exempla aufs der Librey (Bibliothek) zu Wien gestolen. Das sagt einer/ der sich treffenlich gelahrt wüst/ vnd das ansehen haben wolt/ als were jm sehr ernst die künsten zu promouiren. Du lieber Gott was soll doch einer sollichen leuthen rechts thun können: Ob denn gleich Christoff Rudolff seine Exempla nicht alle selbs hette gedichtet/ sondern etzliche in der Librey zu Wien abgeschrieben/ vnd vns dieselbige also durch den truck mitgeteylet/ wem hat er damit schaden gethon? . . . Der Librey in Wien ist es kein schad/ sondern ein Ehr/ das vns vielleicht sollich ding aufs ihr ist kommen/ Vnd zwar verschaffet man solliche Bücher an sölliche örth derhalben das jederman jr geniesse. Item ob Christoff Rudolff die Demonstrationes nicht hatt gesetzt/ so hab ichs doch gethon/ Hetts aber nymmermehr thun mögen (können)/ wa Christoff Rudolff seine Regeln nicht gesetzt hette/ so gar heymlich vnd thewr ist die Cofs gehalten worden/ bei denen die sie gekundt haben/ ehe Christopf Rudolff sie vns hat mitgeteylet/ das ich vielleicht auch nymmermehr erfahren hette, was die Cofs were. Derohalben hab ich mich vnderwunden Chr. Rudolffs arbeit zu mehren/ seyn Buch von Wort zu Wort abzuschreiben/ vnd jedem capitel meynen Anhang zu setzen. Geben zum Haberstro/ bey Königfperg in Preussen. Den letzten Tag des Herbstmonats. Im jar 1552."

Stifel nimmt Rücksicht auf den Lernenden:

„Damit ein anfahender Schüler mit den Surdischen vnd Binomischen Algorithmis vnd Exempeln (als ein schwacher anfenglich) nicht vberladen werde/ ist mein Rath das man halt diese Ordnung. Wenn du gemeyner Rechnung bericht bist/ Nym für dich das fünfft sechst vnd zwelfft capitel des ersten teyls etc." Zugleich hofft er, dafs sein Schüler „auch werde selbst erfinden/ das vor ihm nyemands erfunden hat/ wie mir aus Gaben von Gott beschehen/ das ich sehr viel dings gefunden hab/ davon ich mein lebenlang zuvor nie gelesen hab/ oder etwas da von gehört." Auch ist Stifel bestrebt, die Sache zu vereinfachen und die Regeln zu vermindern: „denn es ist mein fleiss in sollichen sach/ das ich (wa ich kan) aus vielfeltigkeit mache ein einfeltigkeit. Also hab ich aufs vielen Regeln der Cofs ein einige Regel gemacht; wer da will viel vnd schwere ding leychtlich lernen vnd behalten/ der hab wol acht auff solliche vereinigung." Stifel geht nun auf die Rechnungsarten oder den Algorithmo der Cofs ein. Es heifst hier:

„Alle Algorithmi gebrochener Zahlen werden gerichtet nach Algorithmo ihrer gantzen. Bei den zugesetzten und abgezogen zalen wird der zusatz vermerkt bey dem zeichen + bedeut/ Plus. Der abzug bei dem zeichen —. bedeut Minus. Stifel führt hier die Zeichen + und — als etwas Bekanntes an, hat sie also nicht selbst erfunden, wie behauptet wurde. Wie in der Elementar-Arithmetik wird zuerst das Numerieren behandelt: „Numeriren Lernt die zalen der Cofs aussprechen vnd durch ihre Charakter erkennen vnd schreiben. Die alten/ vnser vorfarn (die Griechen) haben erfunden die Cofs vnd die zalen nach natürlicher ordnung genennet/ auch eine jede von kurtz wegen mit einem Charakter genommen vom anfang des wortes oder nahmens also verzeichnet: pragma oder 1 ist kein zal/ sondern gibt andern zalen jr wesen; ꝛc[1]) Radix ist

[1]) Das Zeichen ꝛc scheint ein griechischer Buchstabe, vermutlich π zu sein, aus welchem sich vielleicht unser x als Zeichen für die unbekannte Gröfse entwickelt hat. Im Originaltext gleicht es dem kleinen lateinischen x der Kurrentschrift, dessen rechte Schlinge abwärts gezogen ist.

die Seiten oder Wurzel eines Quadrates; ʒ zensus ist das Quadrat einer Zahl; ce Kubus, eine körperliche Zahl, gleich lang, breit und dick; ʒʒ Zensdezens, das Quadrat einer Quadratzahl; ß Sursolidum „ye vnd ye ein ungeschickte zal/ hat weder radicem, quadratam noch cubicam“, d. h. eine Irrationalzahl; cce Kubus decubo (Kubocubus). Stifel spricht mit keinem Worte von Arabern oder Indern, sondern von den alten Griechen, auf welche er die Cofs zurückführt, und zwar auf das 9. Buch Euklids. Auch andere Schriftsteller dieser Zeit sprechen sich in gleichem Sinne aus: Surdus, qui non constat ex ductu alicuius numeri in se ipsum, vel cuius radix definiri non potest numero integro. Sed de his, et non nullis aliis numerorum divisionibus consulendi sunt libri 7 et 9 Euclidis. (Ein Stümmer, der nicht aus der Zurückführung einer Zahl auf sich selbst besteht, oder dessen Wurzel nicht durch eine ganze Zahl bezeichnet werden kann. Doch hierüber und noch einige Zahlenbildungen sind einzusehen das 7. und 9. Buch des Euclid.)

Wie Stifel die Addition und Subtraction behandelt, mag aus nachstehenden Beispielen ersehen werden:

Addition; 3 ʒ + 8 ꝛc — 4
4 ʒ + 2 ce — 10 ꝛc
―――――――――
7 ʒ + 2 ce — 2 ꝛc — 4.

Subtraktion: 7 ꝛc + 4 — 1 ʒ
4 ꝛc + 3
―――――――――
3 ꝛc + 1 — ʒ

Diese Darstellung der Subtraktion unterscheidet sich nicht von der Addition, und kann als solche betrachtet werden, wenn nicht ausdrücklich 4 ꝛc + 3 als Subtrahend bezeichnet ist. Die moderne Schreibweise setzt: $-(4x + 3)$.

Bei der Multiplikation gibt Stifel die Regel: Seind die zeychen gleich/ als wann du multiplicirst + mit +, oder — mit —. Schreib zum Produkt +. Seynd die zeychen vngleich/ als wann du multiplicirest + mit — oder — mit +, schreib zum Produkt —. Zu weiterem verstand schreib ein zal vnder die ander/ Multiplicir ye ein Zahl in sonderheyt mit allen quantiteten der obern zal/ schreyb die Produkt/ Thu darnach/ eins zum andern. Als

6 ꝛc + 6
5 ꝛc + 8
―――――
30 ʒ + 30 ꝛc
  + 48 ꝛc + 48
―――――――――
30 ʒ + 78 ꝛc + 48

Es ist nämlich $5\,x \,.\, 6\,x = 30\,x^2$ oder 30 ʒ, weil ʒ das Quadrat von x.

Multiplikations-, Divisions- und Gleichheitszeichen sind noch nicht gebräuchlich.

Beispiel einer Addition von Quotienten:

$$\frac{3\,\text{ꝛc}}{2} \text{ zu } \frac{5}{6\,\text{ʒ}} \qquad \text{Facit } \frac{18\,\text{ce} + 10}{12\,\text{ʒ}}$$

Subtraktion von Quotienten:

$$\frac{1\,\text{ꝛc} - 2}{12} \text{ von } \frac{12}{1\,\text{ꝛc} + 2} \qquad \text{Facit } \frac{148 - 1\,\text{ʒ}}{12\,\text{ꝛc} + 24}$$

Modern: $$\frac{12}{1\,x + 2} - \frac{1\,x - 2}{12}$$

und hieraus: $$\frac{148 - x^2}{12\,x + 24}$$

Quotienten-Division:

$$1\,\text{ꝛc durch } \frac{1\,\text{ꝛc}}{100} + 1\tfrac{1}{2}$$

Modern: $$1\,x : \left(\frac{x}{100} + \frac{3}{2}\right)$$

Stehet also: $$\frac{1\,\text{ꝛc}}{1} \times \frac{2\,\text{ꝛc} + 300}{200}$$

$$x \cdot \frac{200}{2\,x + 300}$$

Facit $$\frac{200\,\text{ꝛc}}{2\,\text{ꝛc} + 300}$$

Diese Aufgabe wird erst klar durch die Bemerkung: „Stehet also“, welche den Zweifel behebt, ob $\frac{1\,x}{100}$ oder $\left(\frac{1\,x}{100} + 1\,{}^1\!/_2\right)$ der Divisor sei.

Zur Bezeichnung der Wurzelgröfsen ist zuerst wahrscheinlich ein ganzes Wort, im lateinischen radix, angewendet worden. Es entspricht nun ganz dem Bedürfnisse, eine Abkürzung eintreten zu lassen und etwa statt des Namens nur seinen Anfangsbuchstaben zu setzen. So ist es immerhin möglich, dafs aus dem Buchstaben r als Anfangsbuchstaben des Wortes radix unser Wurzelzeichen $\sqrt{}$ sich entwickelte. Stifel und Rudolf setzen zur Bezeichnung der Wurzelgröfsen, oder der surdischen Zahlen, wie sie dieselben nennen, einen einfachen Haken Stifel hat aber in der That im Gebrauche der algebraischen Zeichen eine Änderung herbeigeführt. Er erzählt selbst: Christoff Rudolff braucht für surdische zalen diese zeichen √ · √√√ · √√ [1]). Dafür brauch ich √ ʒ. vnd für √√√ brauch ich √ ce. vnd für √√ brauch ich √ ʒʒ. Wie viel bequemer diese meyne zeychen seyen den defs Christophori/ wirt ein jeder selbs wol mercken/ der mit diesen Algorithmus will umbgehn. Sind auch vollkommener/ denn sye begreyffen allerley zalen surdischer rechnungen/ Als da sind √ ß 12. √ ʒ ce 13. √ 𝔅/ß 14. √ ʒʒʒ. 15 vnd so fort ahn ohn ende. Erstlich zeygen dir die zeychen selbs wie du die surdische zalen nennen oder aussprechen söllest. Als √ ß 6 heysset Radix sursolida aufs 6. Nachmals zeygen sie dir wie du sye söllest reduciren, denn gleych wie man die gemeyne Brüch bringt vnder einen gleychen nenner also bringt man durch dieses reduciren vilerley surdischer zalen mit vngleichen zeychen vnter ein gemeynes zeychen. Ich soll z. B. multipliciren √ ʒ 6 vnd √ ce 7. Erstlich setze ich die zalen so ledig oben. Vnd yhre zeychen vnden.

6 7
X
√ʒ √ce

Hie zeygen nun die Strich die Regel der operation vnd die zeychen zeigen die weyse des multiplicirens. Ich multiplicire 6 in cubice kommen 216. Vnd 7 multiplicir ich in quadrate in sich kōmt 49. Darnach setze ich die zeychen zusammen, dafs ein zeychen daraus werde (vnd das ist auch ein multiplicatio) als aus √ʒ vnd √ce wirt dises zeychen √ʒ ce.

Stifel verbreitet sich nun eingehend über die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division der Wurzelgröfsen, wobei er hervorhebt, dafs man erst dann multipliziert und dividiert, wenn das surdische Zeichen gleich ist, wie man ja auch bei gemeinen Brüchen nicht addiert und subtrahiert, bevor man sie nicht gleichnamig gemacht hat. Er unterscheidet Rationalzahlen,

---

1) Die Zeichen √√ und √√√ sind im Originaltexte mit einander verbunden und gleichen so einem *n* und *m* der deutschen Kurrentschrift mit rechtsgezogenen Grundstrichen.

von denen jede insonderheit eine Wurzel hat, als $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$; dann Communicantes, welche eine rationale Proportion haben, wie $\sqrt{18}$ und $\sqrt{8} = 3\sqrt{2}$ und $2\sqrt{2}$; endlich „gantz vngeschickte“, wie $\sqrt{14}$ (Irrationalzahlen). Über die Addition der Wurzelgröfsen gibt er folgende Regel: Thu zusammen die Quadrat, das Collekt behalt, multiplizier ein Quadrat mit dem andern, was daraus kommt, multiplizier mit 4. Solcher Prozefs fufst auf der 4. Propositz des andern Buches Euklids. Dann wendet er die Regel in einem speziellen Beispiele an: Ich will $\sqrt{4}$ und $\sqrt{9}$ in eine Summe bringen. Addier zum ersten die Quadrat $(4 + 9 = 13)$. Die behalt. Darnach multiplizier 4 mit 9 kommen 36. Solches Produkt multiplizier mit 4 werden 144. Daraus Radix quadrata ist 12. Dies thu zum ersten Kollekt, nämlich zu 13. Werden 25. Radix quadrata aus 25 ist 5, die Summe beider Wurzeln.

Das Beispiel $(5 + \sqrt{4}) \cdot (2 + \sqrt{9})$ wird so ausgeführt:

$$\begin{array}{l} 5 + \sqrt{4} \\ 2 + \sqrt{9} \\ \hline 10 + \sqrt{16} \\ \quad + \sqrt{225} + \sqrt{36} \\ \hline 10 + \sqrt{361} + \sqrt{36} \end{array}$$

Das ist 35.

An Cofsischen Textaufgaben enthält das Buch über 400. Wir führen hieraus einige Gleichungen an.

Such ein zal/ wenn ich ein vierteyl vnd ein dritteyl derselbigen zal hinzu thu zur selbigen zal/ das 20 werden.

Setz die zal sey 1 ꝛc so kanstu leychtlich gedencken/ das 1 ꝛc vnd $\frac{1}{4}$ ꝛc vnd $\frac{1}{3}$ ꝛc so viel machen als 20. Nemlich $1\frac{7}{12}$ ꝛc oder $\frac{19}{12}$ ꝛc sind gleich 20. So reducier ich nu erstlich mit multipliciren/ auff yeder seyten mit 12. So werden 19 gleich 240. Darnach reducir ich mit diuidirn. Denn ich dividir auff yeder seyten durch 19. so wirt denn 1 ꝛc gleich $12\frac{12}{19}$ vñ ist also die zal gefunden.

Vier seynd mir schuldig ein summa gelts. Der erst/ ander vnd dritt 39 fl. Der ander/ dritt vnd vierd. 55 fl. der dritt/ vierd vnd erst 49 fl. Der vierd/ Erst vnd ander 43 fl. wie vil ist yeder insonderheyt schuldig?

Der erst 1 ꝛc/ der ander 1 B/ der dritt 1 C/ der vierd 1 D. Dieweyl denn der ander/ dritt vnd vierd schuldig synd 55 fl. So ist 1 ꝛc + 55 die summa ihr aller. Item dieweil der dritt vierdt vnd erst schuldig sind 49 fl. so ist auch 1 B + 49 die summa ihrer aller. Darumb ist ꝛc + 55 gleich 1B + 49. facit 1B. 1 ꝛc + 6. Item dieweil der vierd/ erst vnd ander schuldig sind 43 fl. so ist auch 1C + 43 fl. die summa aller vieren. Darumb ꝛc + 55 gleych 1C + 43. fac. 1C. 1 ꝛc + 12. Item so der erst, ander/ vnd dritt schuldig sind 39 fl./ so ist 1D + 39 auch die summa aller. Darumb ist 1 ꝛc + 55 gleich 1D + 39. fac. 1D. 1 ꝛc + 16. Vnd stehen yetzt die summen was yeder schuldig ist also nacheinander. Der erst 1 ꝛc/ der ander 1 ꝛc + 6/ der dritt 1 ꝛc + 12/ der vierdt 1 ꝛc + 16. Summa summarum 4 ꝛc + 34 ist gleich 1 ꝛc + 55. facit 1 ꝛc. 7 drumb steht es yetzt also. Der erst 7 fl. der ander 13 fl. der dritt 19 fl. der vierdt 23 fl.

Die Gleichungen ersten Grades mit einer und mehreren unbekannten Gröfsen sind zusammengefafst unter die „erste Regel Christoffori, da 1 ꝛc gleich einer ledigen Zahl.“

Die zweite Regel umfafst die Aufgaben, „da allwegen 1ʒ (x^2) gleich wird einer ledigen Zahl“, oder die reinquadratischen Gleichungen.

Beispiel: Such ein zal wã ich yhr $\frac{1}{2}$ vñ $\frac{1}{3}$ mit einander multiplicir das 54 kommen. wie grofs ist solche zal? Facit 1 ꝛc · $\frac{1}{2}$ ꝛc mit $\frac{1}{3}$ ꝛc multiplicirt machen $\frac{1}{6}$ ʒ gleich 54 · 1 ʒ · 324.

Extrahir auf beiden Seiten die Quadratwurzel so kompt 1 ꝛc gleich 18 vnd das ist die zal.

Unter der 6. Regel finden sich die gemischt quadratischen Gleichungen. Ein Beispiel:

Such ein zal/ wann ich erstlich davon subtrahier 8/ darnach von der gefundenen (?) zal 6 subtrahir/ die 2 Rest mitteinander multiplicir' dafs difs product 4 mehr sey dann die zal die ich suchen soll.

Gefundene zal sey 1 ꝛc so multiplicir ich 1 ꝛc — 8 mit 1 ꝛc — 6 facit 1 ʒ — 14 ꝛc + 48. gleich 1 ꝛc + 4 facit 1 ʒ · 15 ꝛc 44. Ist die grösser radix 11. die kleiner 4. denn so 1 ʒ gleich 20 ꝛc — 96 so extrahir ich auff yeder seiten die quadratwurzel. Die zal ꝛc neme ich halb vnd lafs das zeychen fahren als von

20 ꝛc neme ich diese zal 10 ahn ein zeychen. Die multiplicir ich quadrate. Fac. 100. Davon subtrahir ich die ledige zal/ von 100 die 96. so bleyben 4. Davon extrahir ich die quadratwurtzel/ die ist 2. Dieselbige wurtzel addir ich zu 10 der gehalbirten zal. Oder subtrahir sie von yhr. Addir ich nun die 2 zu den 10 so kommen 12 vnd ist die gröſser wurtzel. Sagen beide der vergleychung gleych zu.“ Der doppelte Wurzelwert in der Gleichung

$$(x - 8) \cdot (x - 6) = x + 4$$

$$\sqrt{x^2 - 15x + \left(\frac{15}{2}\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 - 44}$$

und hieraus:

$$x - \frac{15}{2} = \pm \, {}^7/_2$$

$$x_1 = 11$$

$$x_2 = 4$$

ist Stifel hiernach völlig geläufig.

In der von Stifel neubearbeiteten Coſs Rudolfs sind die 4 Rechnungsarten mit allgemeinen Gröſsen, die Rechnung mit Wurzelgröſsen, die Gleichungen ersten und zweiten Grades mit einer und mehreren Unbekannten vollständig entwickelt. Die Bezeichnungsweise aber ist noch mangelhaft; sie gibt leicht zu Irrungen Anlaſs, und weil die Zeichen der Multiplikation, Division und der Gleichheit noch fehlen, muſs die Auflösung die wörtliche Auseinandersetzung zuhilfe nehmen. Die Einteilung der Gleichungen erfolgt nach ähnlichen Gesichtspunkten wie heute, und die Überschriften zu den Regeln heiſsen: „da allwegen 1 ꝛc, 1 𝔷, 1 𝔷𝔷, 1 ce gleich wird einer ledigen Zahl.“ Diese Regeln gingen aus typischen Beispielen hervor; es ist daher durchaus begreiflich, daſs für ein solches Beispiel mit Auflösung ein Gulden bezahlt wurde, für jene Zeit, wo ein Mastochse 10 Gulden kostete, ein hoher Preis. Stifel ist sich über die Gründe des Verfahrens vollkommen klar; aber er begnügt sich meist mit der Darlegung der Operation, d. h. mit der Auseinandersetzung des zur Ausrechnung erforderlichen Mechanismus.

Von den alten Kulturvölkern wurden abgekürzte Zeichen in der Algebra nicht angewendet, sondern alles mit Worten geschrieben, selbst die Zahlen. Auf dieser Stufe befindet sich noch die Algebra des Arabers Mohamed ben Musa. Später bediente man sich für oft wiederkehrende Begriffe und Operationen eigener Abkürzungen statt der ganzen Wörter. Ein Beispiel hiefür ist die Cofs Rudolffs. Endlich ersetzte man den Text durch eine vollständig ausgebildete Zeichensprache, und hiezu wurde der Grund von dem französichen Mathematiker Vièta um 1600 gelegt. Die Cofs hat also drei Entwicklungsstufen durchgemacht, und hiernach unterscheidet man die rhetorische, die synkopierte und die moderne symbolische Algebra.

Zur Zeit der Reformation tauchte auch die Zahlenmystik, die vielleicht nie ganz verloren gegangen war, wieder auf. Merkwürdigerweise waren es gerade hervorragende Mathematiker, welche an den mystischen Zahldeutungen Gefallen fanden, so auch Michael Stifel, dessen Algebra wir soeben kennen gelernt haben. Er erzählt uns selbst: Als ich eins mals in der Librey safs/ vnd das 13. Kapitel der geheimen Offenbarung Johannis lase/ vom Thier/ vnd nicht anders kont gedenken/ denn das es bedeutete den Papst Leo X. vnter welchem das Evangelium ist auffgangen. Als ich im weiter lafs von der zal seines Namens/ vnd dabei der vermanung/ zum rechnen die zal des Namens/ da gedacht ich Lieber Gott/ wie ein grosser Trost solt es wohl machen/ wo man dise Rechnung gewislich hette Also versucht ich die sach/ nam für mich disen namen/ Leo decimus/ Nam heraus die Buchstaben/ so bey vns zalen machen/ fand also M. D. C. M. VJ. das geuiel mir/ ohn das es an dem M zuuiel war/ vnd an dem X zu wenig/ hette ich dise rechnung für recht gehalten . . . Aber als ichs Doctori Martino anzeigte/ vnd er mir sagt/ es were nichts gewisses dran/ lies ichs gar fallen.“ In ähnlicher Weise berechnete Stifel den jüngten Tag auf den 3. Oktober 1533 morgens 8 Uhr, wo er ihn mit seinen Pfarrkindern, nachdem sie zuvor all ihre Habe verschenkt hatten, vergeblich erwartete. — Der mehrgenannte Sigmund Suevus deutet die Zahl 7 also: Item 7 ist von 3 vnd 4 zusammengesetzt/ bedeut die 4 Monarchien und Kaiserthumb auff Erden. Denn der Welt gantzes Alter ist bestimmt auf 6000 Jahr: 2000 Jahr vor dem Gesetze/ 2000 Jahr mit dem Gesetze vnd 2000 Jahr nach dem Gesetze. Also sind auch der Welt Reich in 4 Monarchien oder Kaiserthumb ausgeteilt/ die ordentlich aufeinander folgen. Das assyrische, persische, griechische und römische Reich. Darauf das ewige Reich angehen und bestehen wird.“

Würdigen wir nun die Stellung der Arithmetik als Unterrichtsgegenstand.

Die Arithmetik gehörte im 16. Jahrhunderte in höheren und niederen Schulen noch nicht allgemein zu den obligaten Lehrgegenständen; meist wurde sie dem Privatunterrichte überlassen. Die Reformatoren beklagten sich darüber, dafs die Rechenkunst in so geringer Achtung stehe. Melanchthon schrieb an Herzog Albrecht von Preufsen, dafs sich nur wenige auf Mathematik verlegen, und dafs nur wenige unter den Mächtigen sind, welche die mathematischen Studien befördern. Spalatin gegenüber äufserte Melanchthon, es thue not, zwei Mathematiker in Wittenberg anzustellen, damit die aufserordentlich nötige, aber vernachlässigte Mathematik in Achtung komme. Ein Wittenberger Dozent lobt die Arithmetik und bittet die Studierenden, sich nicht durch die Schwierigkeit dieser Disziplin abschrecken zu lassen. Die ersten Elemente seien leicht, die Lehre von der Multiplikation und Division verlangen mehr Fleifs, doch könnten sie von Aufmerksamen ohne Mühe begriffen werden. »Freilich«, setzt er bei, »gibt es schwierigere Teile der Arithmetik; ich spreche aber von diesen Anfängen, die gelehrt werden und nützlich sind« — bei Universitätsstudenten. Der Lehrplan für die Strafsburger Schule unter Sturms Leitung erwähnt die Arithmetik in den ersten acht Klassen nicht; erst im Lehrplane vom Jahre 1578 ist derselben in secunda gedacht. Auch in dem Schulplane, den Sturm für das Gymnasium in Lauingen entworfen hatte, ist die Mathematik nicht unter den Lehrgegenständen aufgeführt. Es fehlt aber keineswegs an Anstrengungen, dem Rechnen die ihm gebührende Stellung in den Unterrichtsplänen zu erringen. Das oberpfälzische Städtchen Nabburg ist hierin mit gutem Beispiel vorangegangen: es bestimmte in der revidierten Schulordnung vom Jahre 1480, dafs mit der Schuljugend an Feiertagen und bei sonst günstigen Gelegenheiten Übungen im Rechnen vorzunehmen seien. In der Zwickauer Schulordnung v. J. 1520 sind dem Sonnabend vorbehalten: »die Rechnung, das singen, der lauff des hymels vnd messung der erden.« Die unterste (sechste) Klasse lernte »Zyphern vnd zal« (d. h. arabische und römische Zahlzeichen), die fünfte

»Gemeyn rechnung«, die dritte Musik, Arithmetik und Astronomie. Der folgenreiche Aufruf Luthers an die Bürgermeister und Ratsherren der deutschen Städte zur Aufrichtung und Haltung christlicher Schulen gedenkt auch der Mathematik. Die braunschweigische Schul- und Kirchenordnung v. J. 1528, ausgearbeitet von Johann Bugenhagen, enthält ein Statut über deutsche Schulen, in welchem das Rechnen als Lehrgegenstand vorgeschrieben ist. Für die Wittenberger Jungfrauenschule wurde 1533 »das Ciffern und etwas von der Arithmetika« verordnet. Die vortreffliche bayerische Schulordnung v. J. 1548 erhob das Rechnen zum obligatorischen Lehrgegenstande, selbst für Dorfschulen. Die Württemberger Kirchenordnung des Herzogs Christoph (1559) führte an allen Schulen durch das ganze Land Lesen, Schreiben, Rechnen und Kirchengesang als Lehrgegenstände ein, und die Schulordnung des Herzogs August von Sachsen (1580) gibt als Spezialziele für das Rechnen: die Spezies, die Regeldetri und die Brüche. Wohl infolge dieser und ähnlicher Anregungen wurde das Ziffernschreiben und das Lesen dekadischer Zahlen schon in die Vorbereitungsschulen aufgenommen, und es finden sich Anleitungen dazu in den Schreib- und Lesefibeln. Den Anfang machte Melanchthon im Enchiridion elementorum puerilium 1524 und in dem »Bökeschen vor die leyen vnde kinder« 1525; ihm folgte Kohlrofs im Enchyridion tütscher Ortographie 1530; Ickelsamer (Rothenburg o. T.) in seinem Büchlein: Rechte weys auffs kürzist lesen zu lernen 1534, und Fuchfsperger (Landshut, Niederbayern) in seiner »Leefskonst« 1542[1]. Auch Geistliche nahmen sich des Rechenunterrichts an, wie aus der Vorrede des Suevusschen Buches zu entnehmen, wo der Verfasser erzählt, dafs er, ohne Ruhm zu melden, vieler ehrlichen Leute Kinder in Renal (Liefftand) neben seinem Kirchenamte im Lesen, Schreiben und Rechnen unterwiesen habe. Suevus widmet sein Buch der Löblichen Kaiserlichen Stadt Breslau, »wo in den Lateinischen und Deutschen Schulen, ja von Jung und Alt inn allen Ständen die Rechenkunst fürtrefflich geliebet und geübet wird«. In ähnlicher Weise spricht sich Jacob aus, welcher sein Rechenbuch dem »Fürsichtigen und weisen Bürgermeister und Rath der Fürstlichen Stadt Coburgk« dediziert »als Beförderern vnd Liebhabern guter Kunst/ auch solche in jren Schulen pflantzen vnd vorsehung

[1]) Siehe Kehr, Geschichte der Methodik, 1882, Seite 166.

thun/ dafs jre Jugend darin geübt vnd aufferzogen werde«. Der Stadtmagistrat München sicherte in der Schulmaisterordnung vom Jahre 1564 jenen Lehrern eine Besoldungszulage zu, »welche die welsch Practica khönnen«. Um 1590 wurde in Nürnberg eine Prüfung für Rechenmeister angeordnet, und es erschienen arithmetische und geometrische Fragen (Quaestiones), welche auf diese Prüfung vorbereiten sollten. (Heer 1616, s. unten.)

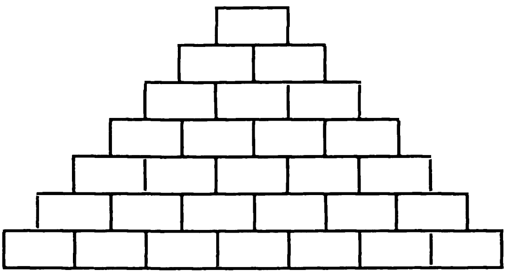
Der Unterricht in Lateinschulen setzte elementare Rechenkenntnisse voraus.

Ein in lateinischer Sprache geschriebenes Kollegienheft des Studenten Wilhelm Schedel aus der Zeit von 1560—1570 (Kreisbibliothek Regensburg) enthält folgende Notizen: »Die Arithmetik gehört zu den 7 freien Künsten. Wie die Grammatik den Pfad bahnt zur Dialektik und Rhetorik, so die Arithmetik zur Musik, Astronomie und Geometrie. Denn wenn die Musik sich mit dem Tone befafst, der Ton aber nach dem Mafse sich richtet und aus einem Zahlenmafse besteht: so ist doch wahrlich ein Zahlenbegriff nötig, welcher der Gesangskunde gebührendermafsen voranzugehen hat. Wenn die Astronomie mit der Bewegung des Himmels und der Gestirne sich befafst, die Bewegung aber auf Länge und Breite zurückführt, welche sich nur durch die Zahlen ausdrücken lassen: so mufs abermals der Zahlenbegriff jenem von den Himmelskörpern vorangehen u. s. w. Die Arithmetik ist also hochzuschätzen und den Jünglingen sorgfältig einzuprägen. Vorzügliches Lob verdienen die Italiener, weil sie ihre Knaben vom zartesten Alter an in den Gesetzen der Arithmetik unterrichten lassen, ein Beispiel, welches heutzutage Nachahmung zu finden scheint in Augsburg, Nürnberg, Ulm, Strafsburg, Leipzig etc. Man sieht hier ein, wie ohne jene herrliche Wissenschaft die Handelsbeziehungen aufhören müfsten, welche gewissermafsen ein Band der menschlichen Gesellschaft sind.« Nach dieser Einleitung geht das Manuskript auf das Rechnen selbst über und behandelt die Fragen: Wie viel Zeichen gibt es, denen ein Zahlwert innewohnt? Was versteht man unter dem digitus, articulus, compositus Numerus? Wie werden die Zahlen geordnet? Von rechts nach links, nach dem Brauche der Araber, von welchen diese Kunst zuerst entdeckt (?) und den übrigen Völkern mitgeteilt wurde. Sodann werden die Spezies, die Regeldetri, die Progressionen und Rechenproben in bekannter Weise durchgegangen. Auch fehlte es nicht an gedruckten Schülerbüchern, welche den Lehrstoff in Frage und Antwort kleideten. Ein solches liegt vor von Luca Lossio Lunaeburgensi v. J. 1557 (gedruckt in Frankfurt 1569) und ist betitelt: Arithmetices Erothemata Puerilia (Arithmetische Fragen für Knaben). Es beginnt also: Quid est arithmetica? Was ist die Arithmetik? Est bene et artificiose numerandi et computandi scientia. (Eine Wissenschaft, regelrecht und kunstgemäfs zu zählen und zu berechnen.) Circa quid versatur Arithmetica? Von Schülerhand übersetzt: Mit wem gehet die Rechenkunst umb? Circa numerum. Quid est numerus? Est multitudo ex unitatibus collecta. (Die Zahl ist eine aus Zusammensetzung von Einheiten entstandene Vielheit etc.) Ähnliche Schriften sind: Arithmethicae präcepta in quästiones redacta etc. d. i. Arithmetische Regeln in Fragen mit nützlichen Beispielen, damit sie leichter den Lernenden vorgehalten und von denselben verstanden werden können von Moriz Steinmetz aus Gersbach 1568; dann: Arithmetices brevis et utilis introductio etc. d. i. Kurze und nützliche Einführung in die Arithmetik zu Nutzen der Anfänger in dieser Kunst von Adam Lonicerus 1570.

Steinmetz behandelt die Sache also: Was ist die Arithmetik? Die Kunst zu zählen und zu berechnen. Was ist die Zahl? Die Menge dessen, worin sich das Eine wiederholt, oder, wie andere wollen, eine Vielheit, bestehend aus der Zusammenfassung der Einheit. Was ist die Eins? Das, wodurch beliebige Dinge in der Benennung eines einzelnen aufgeführt werden, eine Münze, ein Mensch. Ist nun die Einheit eine Zahl? Sie ist selbst keine Zahl, aber der Quell und Ursprung derselben und fafst die ganze Kraft und Bedeutung der Zahl in sich. Wie werden die Zahlen eingeteilt? — Was ist ein Bruch? Der Ausdruck von Teilen irgend eines Ganzen. Wie vielfach sind die Brüche oder Minutien? Wie viel Zahlen werden erfordert zu einem Bruche? Zwei, wovon die eine die Teile des Gebrochenen zählt, Numerator, die andere, welche den Teilen ihre Benennung gibt oder anzeigt, in wie viele Teile das Ganze geteilt worden ist (Denominator).

Diese Schriften sind in lateinischer Sprache abgefafst und augenscheinlich für Lateinschüler bestimmt. Das Lehrverfahren ist analytisch und hat hauptsächlich die Darstellung der Regeln und Auflösungsweisen zum Gegenstande. Es wird dem Schüler in der Frage eine Aufgabe gestellt, die er entweder durch Nachdenken oder aus dem Gedächtnisse zu beantworten hat, es macht sich also hier doch ein methodischer Fortschritt geltend; auch ist das Bestreben, den Regeln auf den Grund zu sehen, unverkennbar. Daraus geht hervor, dafs man für Studenten die verständige Auffassung der Sache als notwendig erachtete, während für den Kaufmann und Handwerker der Kunstgriff genügte.

Es fehlt auch nicht an Versuchen, das Verständnis durch demonstrative Zeichnungen zu erleichtern. Ein Beispiel hierfür gibt Conrat von Ulm 1580. Er verlangt, dafs die Feldmefskunst in die Schulen eingeführt werde, und lehrt diese selbst. Dabei fordert er, dafs ein Feldmesser sein Werk zu beweisen wisse. »Man ziehe in einem Quadrat oder Rechteck, wie in beigesetzter Figur geschehen, nach der Länge und Breite alle Rutenteilungen durch, dadurch werden die Kreuzruten (Quadratruten) unter die Augen gesetzt. Will nun ein Bauersmann dem Messer nicht glauben, so mag er die augenscheinlichen Kreuzruten ordentlich zählen, so wird er mit seinem eigenen Bekenntnis der Wahrheit überwiesen.« Gemma Frisius (Wittenberg 1524) stellt die Quadratzahlen durch Punkte und die Kubikzahlen durch einen perspektivisch gezeichneten Würfel dar, welcher eine solche Zahl von Würfelchen erkennen läfst, die a^3 gleich ist. Die Progressionen wurden durch Punkte (s. Seite 235) oder staffelförmige Figuren versinnlicht, z. B.:



Duplex 1. 3. 7. 9. 11. 13.

Fig. 39.

Steinmetz (1568) berechnet das Beispiel $^3/_4 : {}^2/_3 = {}^9/_8$ und fragt: Potest ne hoc lineari descriptione clarius monstrari? Kann das nicht auch durch Linienzeichnung näher veranschaulicht werden? Er antwortet: Gewifs, und gibt nun eine Zeichnung, welche darstellen soll, wie oft $^2/_3$ in $^3/_4$ enthalten ist.

Der bedeutendste Rechenmethodiker des 16. Jahrhunderts ist wohl der Italiener Tartaglia. Wir finden bei ihm eine Reihe methodischer Grundsätze und Maſsnahmen, deren Wiedereinführung und Wiederanwendung erst in der Neuzeit erfolgt ist, z. B. das Vorgehen in sog. Zahlenkreisen, das Kopfrechnen, welches dem schriftlichen vorausgehen müsse, das Zahlenzerlegen zu praktischen Zwecken, die Reihenbildung bei den Elementarübungen, die Forderung, daſs die Rechensätze memoriert werden sollen, daſs die späteren Übungen in den vorausgehenden ihre Grundlage haben müssen, die verständige Rücksichtnahme auf die Bedürfnisse des bürgerlichen Lebens, die algebraischen Aufgaben u. a. Nach diesen Andeutungen kann die Behauptung, daſs die Geschichte des elementaren Rechenunterrichts erst mit Pestalozzi beginne, wohl nicht aufrecht erhalten werden. Leider sind die trefflichen methodischen Grundsätze Tartaglias bei der Ungunst der Zeiten nicht in verdientem Maſse gewürdigt worden.

Nach all dem darf man sich von dem Rechenmechanismus der letztvergangenen Jahrhunderte keine übertriebenen Vorstellungen bilden. Wir sehen vielmehr, welche Anstrengungen schon in der 2. Hälfte des 16. Jahrhunderts gemacht wurden, um das Wesen der überkommenen arithmetischen Lehren klar zu erfassen. Die Männer jener Zeit bauten schon an den Stufen, auf denen die Arithmetik zur jetzigen Höhe gelangt ist, und wir haben als Erben ihres Wissens keinen Anlaſs, geringschätzend auf ihre Gräber niederzusehen.

Um aber ein richtiges Bild vom Stande des Unterrichts im 16. Jahrhunderte zu gewinnen, dürfen wir nicht übersehen, daſs die Schulen auf dem Lande vielfach sich noch in recht kläglichem Zustande befanden. Dazu war die Zucht im öffentlichen und Privatunterrichte hart, ja nicht selten geradezu barbarisch. Nur einige Beispiele. Thomas Platter wurde 1499 im Alter von 9 Jahren einem Pfarrer übergeben. Platter schreibt über die ihm widerfahrene Behandlung: »Do ging es mier übell, den der Herr was gar ein zornig man, ich aber ein ungeschickt purenbieblein. Der schlug mich grusam übell, nam mich vill malen by den oren vnd zog mich vom herd (Boden) uff, das ich schrei, wie ein geiſs am messer stäket, das offt die nachpuren über in schruwen, eb er mich welte mirden.« Die Eſslinger Schulordnung von 1548 verfügt: »Der Lehrer soll seine Kinder nicht auf den

Kopf schlagen, sie weder mit Tatzen, Schlappen, Maultaschen und Haarrupfen, noch mit Ohrumdrehen, Nasenschnellen und Hirnbatzen strafen, keine Stöcke und Kolben (!) zur Züchtigung brauchen, sondern allein ihnen das Hinterteil mit Ruten streichen.« Über die Baseler Lehrer wird folgendermafsen geklagt: »Nicht anders als mit Schrauben, Pochen, Balgen, Schlägen, Zupfen, Rupfen fahren sie die Schüler an und plagen sie«, und es mufste ihnen eingeschärft werden, »sich zu bezwingen, dafs sie die Kinder nicht auf eine barbarische und henkerische Weise traktieren, ja nicht, wie bisweilen geschehen, ihnen Löcher in den Kopf schlagen, das Fleisch der Beeren ihnen an den Fingern solchermafsen zerquetschen, dafs das Blut zwischen den Nägeln herausspritzt oder Büschel Haare ihnen ausreifsen, oder sie sogar mit den Füfsen treten.« Die Rute war das von der Schuljugend mit Furcht und Schrecken respektierte Symbol der Schulzucht, ja der Schule selbst; die Rute mufste der Schüler küssen, und angesichts derselben mufste er Besserung geloben; durch Überreichung der Rute wurde der Präceptor vor der versammelten Schuljugend feierlich investiert. So blieben die Zustände im wesentlichen bis ins 19. Jahrhundert.

Die Rechenkunst im 17. Jahrhunderte.

Die Rechenlitteratur.

Im 15. und 16. Jahrhunderte waren Gelehrte mit der Neubearbeitung unserer Rechenkunst beschäftigt; Universitätsprofessoren und Mathematiker scheuten sich nicht, den zu ihrer Zeit wenig verbreiteten Algorithmus gemeinverständlich darzustellen und hierdurch zugleich der Astronomie ein gefügiges Werkzeug zu schaffen. Nachdem dieses Ziel erreicht war, wendeten sie sich höheren Gebieten der Mathematik zu. Nepper, Briggius, Vlacq u. a. berechneten zu Anfang des 17. Jahrhunderts die Logarithmen, Leibnitz (1642—1726) erfand die Infinitesimalrechnung, Newton (1646—1716) die Differentialrechnung. Decartes René, ein französischer Edelmann, begründete die analytische Geometrie, und Huighens (1629—1693) erfand die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die gemeine Arithmetik blieb Rechenmeistern, Geistlichen, Feldmessern, Eichmeistern, Buchführern, Stadt- und Ratsschreibern oder blofsen Liebhabern überlassen, welche dieselbe ausschliefslich in den Dienst des praktischen Lebens stellten. Die Fortschritte der Arithmetik erreichen daher nicht entfernt diejenigen, welche die Mathematik zur gleichen Zeit in ihren höheren Gebieten machte. Dagegen mehrte sich die Zahl der Rechenbücher. Erschienen doch während dieses Jahrhunderts in Deutschland allein fast 300 neue Schriften über das Rechnen; daneben bestanden die altbewährten Anleitungen von Rudolf, Riese, Jacob, Fischer u. a. fort. Selbst die traurige Zeit des dreifsigjährigen Krieges blieb mit 60 in Deutschland gedruckten Rechenbüchern nicht viel hinter der Durchschnittszahl der übrigen Decennien zurück. Von den neuen Rechenbüchern des 17. Jahrhunderts waren nur mehr etwa 70 in lateinischer Sprache verfafst, ein Beweis, dafs der Büchermarkt sein Absatzgebiet weiter auf die breiten Schichten des Volkes ausgedehnt hatte. Daneben erschienen auch Rechenbücher, deren Verfasser die alte Richtung nicht gerne verliefsen, der neuen aber doch entgegenkommen wollten, und deshalb deutsch und lateinisch zugleich schrieben. Ein solches Rechenbuch ist der pseudonyme »Clavis arithmetica, Rechenkunstschlüssel vom Jahre 1653, gedruckt zu Augfburg bei Schultes, verlegt zu Regenfburg bei Sigmund Freisinger«. Dieser Rechenschlüssel sagt z. B.: Ein Bruch ist ein theil eines benennten ganzes/ so nach vnrichtiger (nicht aufgehender) Division aufs dem Dividendo kleiner als der Divisor überbleibt. Darauf übersetzt er: Fractio est pars aliquota unius integri ex dividendo residua, divisore minor etc. Diese Stelle ist deswegen bedeutsam, weil sie das Wesen des Bruches, welches die neuere Methodik vielfach verkannt hat, nicht undeutlich als ein Quotientverhältnis bezeichnet.

Die langen Titel der Rechenbücher geben Inhalt und Zweck derselben ziemlich ausführlich an. Meist sind sie bestimmt »für Haufshaltung und Kauffmannschaft, zur konferierung des Wein- und Fruchtmafses, den Weinhändlern und Zäpfern dienlich«; sie wurden aber auch in der Absicht geschrieben, »dafs auf mitkommende Handleitung die Knaben gar leichtlich zu solcher Wissenschaft, so sie anderst guten Lust dazu haben, gelangen können, dabei ihnen auch die Arbeit des Einschreibens/ welche offt mit vielen und groben Fehlern/ auch mit Versäumung

Häufslicher Verrichtungen bei den Eltern geschehen/ ziemlich ersparet«. (Wendler 1667.) Die allgemeine Tendenz geht dahin, »das Rechnen leicht, mit allerhand Vorteilen, Geschwind- und Behendigkeiten« zu lehren. Nicht selten versprechen die Autoren in diesem Punkte mehr, als menschliche Kräfte zu leisten vermögen, wie z. B. die »Arithmetische Anweisung« von J. Kreiling (1670), welche »die Haufshaltung und Kauffmannschaft dem Fundament nach, ohne Auswendiglernen des Einmaleins in einer Stunde« lehren will. Johann Hemeling in Hannover bringt (1677) sogar einen arithmetischen Trichter, »dafs die edle Rechenkunst als durch einen Trichter eingegossen, angelehrt und erlernt werden kann«.

Dem Titelblatt ist oftmals ein allegorisches Bild beigegeben. Das auf S. 270 stehende schöne Titelbild aus Neudörffers Rechenbüchlein v. J. 1627 bringt eine allegorische Darstellung des alten Satzes: Gott hat alles in Mafs, Zahl und Gewicht erschaffen.

Dem Titelblatt- und Bilde folgt zumeist eine Dedikation. Diese hat in Schriften des vorausgegangenen Jahrhunderts öfters noch den uneigennützigen Zweck der Ehrung. So widmete „Conrat von Vlm" sein Büchlein „Geodaisia, Von gewisser und bewährter Feldmessung, Strafsburg 1580 bei B. Jobin, dem Ehrnhafften, fürnemmen vnd frommen Herren Schulmeyster vnd Provisoren Loth Stimmern, Batt Müllern vnd Görg Sebastian Weihen, auch allen züchtigen Knaben in der Teutschen Schul zu Schaffhausen." Solche Selbstlosigkeit der Widmung ist aber im 17. Jahrhunderte verhältnismäfsig selten. Meist wenden sich die Autoren an Adelige, Bürgermeister, Ratsherren, Prälaten, überhaupt an vornehme, mächtige und einflufsreiche Personen in der Absicht, der litterarischen Arbeit Fürsprecher und Verteidiger zu gewinnen. Professor Schwenter an der Universität Altdorf spricht den Zweck der Dedikation rückhaltslos so aus: „Damit mein Wercklein (das geometrische Tischlein v. J. 1618) von bösen und neidischen Menschen nicht obliterirt und verdunkelt werden möge, habe ich nach altem Herkommen und Gewohnheit derjenigen, welche gute und nützliche Bücher in Druck gehen lassen, Schutzherrn gesucht, die auf den Fall des Anstofses mächtig und gelehrt genug sind, dasselbe zu verteidigen." Die Dedikationen fliefsen nicht selten über von Unterwürfigkeit und ergehen sich — ein Zeichen der Zeit — in den devotesten Formeln.

Fig. 40.

Als Beispiel möge nachstehende Widmung aus Rechers selbstlehrender Rechenschule v. J. 1692 dienen: „Alldieweilen ich gar wohl wufste, dafs hierin mehr Neider/ als Gönner finden wurde/ vor welchen ich angeregt mein Wercklein anderst nicht/ als durch höhere Authorität schützen kunnte: Demnach habe mich embsig umbgesehen/ welchem grofsen Herrn und Patronen difs/ wiewol geringfügige Wercklein dedicieren möchte? Allwo der Erste/ den ich erblicket/ warn Ew. Hochfürstliche Durchlaucht (der Fürstbischof von Augsburg). Vnd gewifslich! wem sollte ich gegenwärtige Rechne-Kunst ehunder widmen als dem Fürsten aller Künsten? . . . Gereichet diesem nach an Euer Hoch-Fürstliche Durchlaucht mein vnderthänigste/ demütigste Bitt/ Sie geruhen/ Ihro dise mein Dedication und daher erscheinende gehorsamste Affektion nicht zuwider seyn zu lassen/ sondern in gnädigstem Gefallen von mir an- und aufzunemmen/ und gegenwärtige Rechne-Schule/ welche hiemit wie auch mich selbsten zu dero durchleuchtigen Füsse hinlege/ mit deroselben Durchleuchtigen Augen anzustrahlen, auch das ihme mangelnde Liecht zu ertheilen/ und also wider alle Neidsüchtige Momos/ nach höchst angebohrner Clementz/ gnädigst zu schirmen. Thue mithin unter einem demütigsten Fufs-Buck Ew. Hochfürstlichen Durchlaucht Gottes allmögenden Schutz/ so zu dero höchst-erspriessender Leibs Disposition/ so zu beständiger Glückseligkeit höchstbeglückter Regierung herzinnigst empfehlen."

Der Widmung folgt die Vorrede an den „günstigen, kunstliebenden, ungefärbten" Leser und — ad Zoilum! — eine vorläufige Abwehr der Rezensenten, welche an Derbheit meist nichts zu wünschen übrig läfst. Harsdörffer (1651) wendet sich also an „den spöttischen Meister Klügling:

Ich finde keine Zahl/ auf meiner Rechnungsscheiben/
Dein $\left|\begin{array}{c}\text{ab}\\ \text{üb}\end{array}\right|$ erwitz und kunst genugsam zu beschreiben:
Denn alles was du siehst/ ist ein vernichtet Ding/
so bleibt dein Richterspruch der Zahlen runder (o) Ring."

Wendler schreibt (1667) an den Neidhart oder Zoilus:

„Hör, bleicher Neidhart/ hör! was ich dir nun will sagen;
Difs runde Weltgebäu pflegt zwei Geschlecht zu tragen;
Das erst ist voller Neid/ benagt sein eigen Hertz;
Das ander lacht darzu/ und hält es für ein Schertz.

Vom ersten mustu dich/ samt Deinem anhang schreiben/
Dieweil vor dir gar nichts kann ungetadelt bleiben/
Vom andern schreib ich mich/ sambt meinem gantzen Haufs;
Drum tadle wie du wilt/ ich lache dich nur aus:
Ich frage nichts nach dir/ dein unverschämtes nagen;
Wird endlich dir zur Schand/ vnd mir zum Lob behagen;
Ich such der Jugend Nutz/ und thu so mein Gebühr/
Drum sag ich noch einmal: Ich frage nichts nach dir!"

Wilhelm Häckenawer der jüngere richtet in seinen „Zway künstlich aufsgerechneten Rechenbüchlein (Faulenzern) v. J. 1618 an die Mifsgünner den Bescheid:

Sie wölln mit mir allbereit/
Herfürtretten wol auff den Plan/
Vnd mich jhr kunst auch sehen lahn."

Nebstdem wird in der Vorrede das Lob der Arithmetik und ihr Nutzen, meist in sehr überschwenglicher Weise, hervorgehoben. Zu ihrem Lobe wird gesagt: Gott hat alles mit Mafs, Zahl und Gewicht geordnet." „Die Arithmetik allein umfafst die äufsersten Enden (l'extremitez) des Himmels und der Erde." (Launay.) Harsdörffer preist die Arithmetik, indem er die Anschauungen der Pythagoreer über ihren Wert reproduziert, wie folgt: „Die Rechenkunst übertrifft an Alterthumb/ so an Nutzbar- und Annehmlichkeit alle andern Künsten; denn aus ihr fliefst hervor die rechte Brunnader der Philosophie und machet zu allen menschlischen Lebensgeschäfften vor andern taugliche Subjecta. Keine unter den Wifsenschaften ist so gewifs und sicher, so beweifslich und grundrichtig, so tiefsinnig und kunstständig, als die von den Zahlen handelt und sich von der veränderlichen Dinge Wesen absondert. Niemand kann gegen den Beweifs der Zahlen etwas aufbringen." Schey (1602) findet in der Arithmetik ein Mittel zur moralischen Erhebung; denn „Nachdem wir durch die vbertrettung vnsern ersten Stammeltern im Paradifs an vnsern verstand also geschwecht sind/ das wir von vns selbs nicht mehr den was wir sehen vnd hören wissen können/ hat vns Gott gute Künsten erwecket/ das wir durch selbige vns wieder zuwege brächten was wir durch die Erbsündt verlohren haben/ vnder welchen Künsten dann Arithmetica mit nichten die minste ist."

Hieronymus Beyerlein A. T. S., Augſsburg 1667, preist in Kandlers Rechenbuch die Rechenkunst mit folgendem Poem:

O Thracer/ tummes Volk! wer will euch anderst nennen.
Weiland als wilde Leut; weil ihr nicht konntet kennen
(Ist rechte Barbarey) die Zahl/ so über Vier:
Denn durch das Zählen leucht/ vernünfftig seyn herfür.
Daher ein weiser Mann die Lehre von dem Zählen
Der Natur Band genennt/ dardurch ihm kann vermählen
Der Mensch das wahre Glück; ohn welchs kein Standt besteht/
Wie schlecht er auch sein mag/ ja/ gar zu grunde geht.

Der „Kaiserlich gekrönte Poet" Sebastian Seelmann in Regensburg widmet in demselben Rechenbuche der Arithmetik folgendes Ehrengedicht:

Die edle Kunst/ die Maſs und Zahlen weiset
Die Schwester von den klugen Sechsen her
Die über Meer/ Gebürg und Felsen reiset/
Wo Äthna schwitzt mit seinem Ahulciber,
Ist würdig: daſs man Sie und Ihre Söhne
Mit ew'gen Haar der grünen Daphnis kröne.

Amphion nicht/ auch nicht Apollo haben/
Das Ilium durch ihre Lyr erbaut;
Sie/ diese Kunst/ hat ihnen solche Gaben
Wodurch sie sind gemeistert/ anvertraut/
Ein jedes Werk/ und Wunder von den Siben/
Wird dieser Kunst am ersten zugeschrieben.

Sie hat den Thurn zu Babylon gemessen/
Den Riesen-Berg/ der Wolcken überweist/
Sie ist im Grab des Königes gesessen/
Von dessen Staub Semiramis gespeist.
Sie lehrt! wie hoch/ wie breit/ wie weit/ wie ferne/
Vom Erdball an/ bis in die lichten Sterne u. s. w.

Daſs die Ehrengedichte auch auf die Verfasser selbst sich erstreckten, sei nebenbei bemerkt.

Der weitere Inhalt der Rechenbücher ergibt sich aus dem Folgenden.

Charakteristische Hauptzüge des Rechnens im 17. Jahrhunderte.

Gehen wir nun den charakteristischen Zügen der Arithmetik im 17. Jahrhunderte im einzelnen nach.

Die Numeration ist in der Bezeichnung und Aussprache der Stellen noch sehr veränderlich. Doch gewinnen die Tonne und Million in der Terminologie der Zahlnamen weitere Verbreitung. In dem Rechenkunst-Schlüssel v. J. 1653 steht: 13 695 380 050, was gelesen wird: Dreizehn tausend/ sechshundert/ fünff vnd neuntzig Million/ drey Thonnen/ achtzig tausend/ kein oder nulla hundert vnd fünffzig Cronen. Oder kürtzer also: Hundert sechs vnd dreyssig tausend/ neun hundert 53 Thonnen/ achtzig tausend/ o hundert vnd 50 Cronen. Manche Rechenschriftsteller des 17. Jahrhunderts ersetzen den Punkt über der 4., 7. und 10. Ziffer durch ein unter die 3., 6. und 9. Ziffer gesetztes Komma und ziehen die Hunderter und Einer der Triaden durch einen Bogen zusammen, um anzudeuten, dafs hier, der allgemeinen Regel entgegen, die Stellen von rechts nach links, also die Einer vor den Zehnern gelesen werden. Manche behalten zugleich den Punkt über den Ziffern bei. Wendler (1667) schreibt: 12 567 843 920 und spricht: 12tausent/ fünffhundert siben und sechzig Millionen/ acht Thonnen Gold/ drey und viertzig tausent/ neunhundert und zwanzig. Der Frankfurter Arithmetiker Kegel sagt über diese Numerationsweise (1696): Soll aber eine solche Zahlreihe durch Millionen Tonnen Goldes und schlechte Thaler zugleich ausgesprochen werden, so ist zu beachten, dafs die sechste Zahl uns allein Tonnen Goldes und die vorhergehenden alle Millionen und die nachfolgenden alle schlechte (einfache) Thaler bedeuten, z. B. 689 845 678 456 d. i. 689 tausend 845 Millionen, sechs Tonnen Goldes, 78 tausend, 456. Recher bringt dasselbe Beispiel wie der Rechenkunst-Schlüssel in folgender Bezeichnung: 13 695 380 050 und liest erst nach alter Weise mit Wiederholung der Tausende; dann wie Kegel die Einheiten der 6. Stelle als Tonnen, endlich auch so, dafs er die Einheiten des 6., 7. und 8. Grades als Tonnen zusammenfafst, also: 136 tausend 953 Tonnen, 80 tausend und fünfzig. Die Franzosen hatten nach Launay 1605 schon dieselbe Bezeichnungs- und Sprechweise wie heute und wie wir. Launay schreibt: 1,234 567 890 und liest: mil deux cens trente et quatre millions, cinq cens soixante et sept mil huit cens nonante. Karl Kaukol, Pfarrer in Altenbuch, bringt 1696 den englischen Modus in Vorschlag mit der Begründung: Mir hat die gemeine Teutsche Manier und Weise als in grofsen Zahlen sehr mühsam und verdriefslich geschienen; die englische Manier ist bequemer und wird leichter erlernt. Die Teutschen setzen beim 6. Grad das Mal, die übrigen Tausend zurück: tausend, tausend, tausend etc. Die Engländer aber sagen beim zweiten Tausend million, das dritte heifsen sie milliot, das 4. Tausend milliard, sie geben also jedem Tausend einen besonderen Namen, also: 7 598 350 073 500 006, d. i. 7 Legion 598 Milliard, 350 Milliot, 73 Million, 500 tausend und sechs. Aber nach der neueren englischen Manier: 132 700 005 635 000, d. i. 132 Bimillion, 7 hundert tausend Million, 5 Million, 6 hundert fünf und dreifsig tausend. Das ist unsere heutige Sprechweise mit unbedeutenden Abweichungen.

Der Name Algorithmus war dem 17. Jahrhunderte noch nicht verloren gegangen. Man verstand darunter die Spezies und sprach von einem Algorithmus der ganzen und einem Algorithmus der gebrochenen Zahlen. Die Regeln beziehen sich vorherrschend auf das Äufserliche des Verfahrens; z. B.: »Alle Species arithmetices gehen die Operation a dextris, das ist von hinten an, ausgenommen die Division. Beim Addieren gebrauche das Wörtlein und, beim Subtrahieren von, beim Multiplizieren mal, beim Dividieren in. Das Wörtchen »in« hatte noch die Bedeutung von »dividiert durch«. Die Division 5 in 365 wurde wie zur Zeit Rieses geschrieben 365 in 5. In methodischer Beziehung macht sich eine schärfere Auffassung und Gliederung des Rechenstoffes geltend. Dem Addieren wird jetzt das Eins und Eins, dem Subtrahieren das Eins von Eins innerhalb 10 vorangeschickt, eine Sache, die man früher als selbstverständlich oder doch als bereits erlernt voraussetzte. Bei der Addition treten vielfach zunächst ein- und zweistellige, dann erst mehrstellige Zahlen auf; dabei werden solche Exempel, deren Teilsummen nicht in höhere Ordnungen übergingen, zuerst behandelt, dann erst liefs man Beispiele folgen, in welchen das Überzählen notwendig war; ebenso wurden beim Subtrahieren anfangs Beispiele mit kleineren Zahlen und ohne das Entlehnen geübt. Die Rechenlehrer machten an sich und ihren Schülern empirische psychologische Beobachtungen und brachten diese zu gunsten der Methode bei Verabfassung ihrer Rechenbücher in Anwendung. Ein hübsches Beispiel hiezu erzählt uns Karl Kaukol, welcher die Fälle mit den Nullen zur besonderen Übung zusammenstellt unter der Begründung: »weillen mir in meiner Jugend die Nullen in allen Speciebus entweder in Mitten oder am Ende der Zahlen allzeit grofse Anstöfse und Verdriefslichkeiten erweckt haben«. Die Natur der Spezies wurde in weiteren Kreisen richtig erkannt. Metius (1646) erklärt die Multiplikation als »eine behende und compendiöse Addition, denn durch dieselbe wird nichts anders gesucht als wie oft man irgend eine Zahl mehrmals soll addieren. »Die Division ist ihm eine kompendiöse Subtraktion: »Soll ich dividieren 324 durch 6, so wird nichts anderes gesucht als wie oft 6 in 324 enthalten ist«. Kegel spricht sich ähnlich wie folgt aus: »Es sind aber, wenn man die Significationes characterem (Ziffern) und Numerationem praesupponiert, nur zwey Species, nämlich Additio und Subtractio. Die Multiplicatio ist ein Compendium Additionis und die Divisio Subtractionis, welches alles, wenn es nötig, gar leicht zu demonstrieren wäre.« Der Beisatz, »wenn es nötig wäre«, ist deswegen bedeutsam, weil er zeigt, warum die Rechenmethodiker jener Zeit sich nur an das Gedächtnis wendeten und die tiefere Begründung des Verfahrens als überflüssig ansahen; sie wollten eben nur Regeln haben, »so zum raitten dienlich«. Die richtige Erkenntnis der Spezies verdrängte allmählich das Duplieren und Medieren. Die Forderung, das Einmaleins zu memorieren, wird nun zu einer stehenden Rubrik in den Rechenbüchern. Schey erhebt sie mit den Worten: Es ist aber vor allem notwendig/ dafs du dz einmal ein gantz wol vnd fertig für sich vnd hinder sich aufswendig lehrnest/ dermassen/ dafs es dir so gemein werde wie als das täglich Brodt essen. Dann welcher dz nicht weisst/ dem ist schwärlich/ recht vnd vertig zu multiplicieren/ vnd viel weniger zu diuidiren.« Andere formulieren diese methodische Forderung in Verse, z. B.:

»Wer will der Rechenkunst mit eiffer sein beflissen/
Der muſs zum Fundament das Einmal eins recht wissen.
Ohn dieses kann er nicht in dieser Kunst bestehn/
All angewandter Fleiſs wird ohne Frucht abgehn.«

Das sog. pythagoreische Einmaleins mit Anweisung zum Aufsuchen der Produkte oder die gewöhnlichen Einmaleinstabellen fehlen selten in einem Rechenbuche; dagegen werden die S. 96 und 223 erwähnten Hilfsmittel, die Einmaleins-Produkte mit der dekadischen Differenz aufzusuchen, immer seltener. Zur schriftlichen Multiplikation gröſserer Zahlen ist unser dermals gebräuchliches Verfahren schon in Anwendung; daneben finden sich »Exempla Multiplicationis antecedentia alio modo«, welche aus älteren Rechenbüchern hervorgeholt und wie zum Vergleiche angeführt wurden. Eine kurze, aber komplizierte Form war die Multiplicatio per crocetta, eine Form der Chiasmenmultiplikation, von welcher nach einem Zitate Kandlers Lucas de Borgo sagte, daſs sie mehr Verstand erfordere, als alle anderen Methoden.

	Beispiele mit Berechnung:	Erläuterung:
I.	$43 \cdot 43$	
	43	a) $3 \cdot 3 = 9$
	43	b) $4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$
	1849	c) $4 \cdot 4 + 2 = 18$
	2	
II.	$743 \cdot 43$	
	743	a) $3 \cdot 3 = 9$
	43	b) $3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 24$
	31949	c) $4 \cdot 4 + 3 \cdot 7 + 2 = 39$
	3 2	d) $4 \cdot 7 + 3 = 31$
III.	$726 \cdot 726$	
	726	a) $6 \cdot 6 = 36$
	726	b) $2 \cdot 6 + 6 \cdot 2 + 3 = 27$
	527076	c) $6 \cdot 7 + 2 \cdot 2 + 7 \cdot 6 + 2 = 90$
	3923	d) $2 \cdot 7 + 7 \cdot 2 + 9 = 37$
		e) $7 \cdot 7 + 3 = 52$

Aufser dieser Form bringt Wendler noch folgende Multiplikationsmethoden:

I.

$$\begin{array}{r} 4\,286 \\ 2\,458 \\ \hline 8\,572\,000 \\ 1\,714\,400 \\ 214\,300 \\ 34\,288 \\ \hline 10\,534\,988 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r} 6453 \\ 8564 \\ \hline \cancel{2}\cancel{5}\cancel{8}\cancel{1}2 \\ \cancel{4}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}9 \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{3}\cancel{9}4 \\ 55263 \end{array}$$

III.

$$\begin{array}{r} 3425 \\ 543 \\ \hline 1712505 \\ 13707 \\ 102 \\ \hline 1859775 \end{array}$$

Bei I beginnt die Multiplikation mit dem höchsten Grade im Multiplikator, also $2 \cdot 6$, eigentlich $2000 \cdot 6 = 12$, bezw. 12000 etc. Bei II wird 6453 erst mit 4, dann mit 6, dann mit 5, endlich mit 8 multipliziert, ganz nach unserer Weise. Zum Produkt der 2. Stelle wird aber das Produkt der ersten addiert, zum Produkt der 3. Stelle das Produkt der beiden vorhergehenden, zum Produkt der 4. Stelle das Produkt der 3 vorhergegangenen etc.; auf diese Weise erhält man in den nicht ausgestrichenen Randziffern 55263492, das Gesamtprodukt. Man rechnet also, um die 2. Produktreihe mit der ersten als Summe zu erhalten: 6 mal $3 = 18$; dazu 1 aus der 1. Reihe ist 19; $6 \cdot 5 = 30$, dazu 8 aus der ersten Reihe ist 38 und 1 aus 19 ist 39 u. s. w. Beim dritten Beispiel wird erst 5 mit 543, dann 2 mit 543 vermehrt und so jede Stelle des Multiplikanden mit dem ganzen Multiplikator; die höheren Stellen aus der zweiten Produktreihe treten in die erste Produktreihe ein, daher sich hier 7 Ziffern finden, ebenso rücken höhere Stellen aus der dritten Produktreihe in die zweite. Man rechnet also: $3 \cdot 5 = 15$; 5 wird angeschrieben, 1 tritt unter die Zeile in die Zehnerstelle; $4 \cdot 5 = 20$; 0 wird angeschrieben; 2 kommt unter die Zeile an die Hunderterstelle; $5 \cdot 5 = 25$; 25 wird ganz angeschrieben. Nun wird 2 (20) mit 543 multipliziert: $3 \cdot 2 = 6$; $+ 1 = 7$.

$4 \cdot 2 = 8$; $+ 2 = 10$; 1 rückt in die erste Reihe an die fünfte Stelle u. s. w.

Die Divisionsform des 17. Jahrhunderts ist das bekannte Übersichdividieren. Nebenbei findet man auch Exempla Divisionis antecedentia alio modo (Wendler), z. B.:

I.

```
   22
 19339
1561914
 342
———————
  4567
```

342 ist der Divisor, 4567 ist der Quotient, 1561914 der Dividend; die Reste stehen über dem Dividenden.

Die abzuziehenden Teilprodukte sind nicht angeschrieben. Das Verfahren, welches an die von Rudolf erwähnte französische Manier erinnert, ist kurz; das Kopfrechnen hat dabei einen weiten Spielraum.

II.

```
4564 | 20830096 | 4564
        2574··
         2920·
          1825
```

Das ist unsere abgekürzte Divison.

III.

```
486 | 225504 | 464
       1944··
      ————————
        311
       2916
      ————————
        194·
        1944
      ————————
```

Das ist die gegenwärtige Divisionsform der Volksschule. Metius bringt diese Form schon 1646, und wahrscheinlich reicht sie noch viel weiter zurück. Den Divisionsbeispielen fügt Metius Produktentäfelchen an, welche sämtliche Produkte des Divisors mit den Zahlen von 2 bis 9 ausweisen. Diese Produkte läfst er durch fortgesetztes Duplieren und die Addition finden. Es sei der Divisor 786754 gegeben, so ist sein Duplikat 1573508; hiezu der Divisor addiert, gibt das 3. Produkt 2360262 u. s. w. Der Einflufs Tartaglias (s. S. 232) ist hier unverkennbar.

Auch Kegel empfiehlt das Unterwärtsdividieren, z. B.:

$$\begin{array}{r|c|l} 21 & \cancel{1}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{1}\cancel{3} & 6453 \\ & \cancel{1}\cancel{9}\cancel{1}\cancel{6} & \\ & \cancel{1} & \end{array}$$

Er erläutert sein Verfahren also: Sage 2 in 13 hab ich 6 mahl/ 2 mahl 6 ist 12 und 12 von 13 bleibt 1, dieses setze unter die 3, und sage auch 1 mahl 6 ist 6, von 15 bleibt 9. 2 in 9 hab ich 4 mahl/ 2 mahl 4 ist 8, von 9 bleibt 1, dieses setze unter die 9 und sage auch 1 mahl 4 ist 4, von 5 bleibt auch 1, dieses setze unter die 5. 2 in 11 hab ich 5 mahl/ 2 mahl 5 ist 10, von 11 bleibt 1 u. s. w. Kegel dividiert also nicht mit dem ganzen Divisor, sondern mit seinen einzelnen Stellen nacheinander, wie beim Übersichdividieren. Die Forderungen an die Schwierigkeit der Exempel steigen. Wendler verlangt, dafs 18stellige Zahlen durch 9stellige dividiert werden; in dem vorliegenden Exemplare seines Rechenbuches sind aber diese Beispiele wie im Ärger offenbar von der Hand eines Schülers durchstrichen.

Zu Anfang des Jahrhunderts waren die Zeichen + und —, welche in dieser Form + und ÷, ∴ auftreten, schon in die Elementararithmetik übergegangen, wie aus nachstehendem Beispiel von Schey zu ersehen ist: Item 5 Vässer mit Schabzüger/ die halten/ nach Abzug der Tara/ wie hernach verzeichnet ist/ cost jeder Centner 2 3/8 Cr. wieuil machts alles?

Ct.	lb.
9	+ 9
5	÷ 12
5	+ 48
6	÷ 28
4 1/2	+ 19
29 1/2	76
	40
	36

Er gibt dazu folgende Erklärung. In diesem Exemplo addier erstlich/ wo Bey dz zeichen + gesehen wird/ macht 76 lb. (Pfund). Addier auch die lb. darbey dz Zeichen ÷ gesehen wirt/ werden 40 lb. Die nimb ab von 76 lb. bleiben 36 lb. etc.

Die Zeichen plus und minus deuten also immer noch einen Überschuſs, bezw. einen Mangel an. Bei Recher (1692) dagegen haben sie schon die Bedeutung von Operationszeichen. Die Multiplikations-, Divisions- und Gleichheitszeichen kommen, wie es scheint, in den elementaren Rechenbüchern des 17. Jahrhunderts noch nicht vor.

Der löbliche Gebrauch, die Probe über die Rechnungen zu machen, besteht fort; aber die Neunerprobe erweckt Miſstrauen, da sie unzuverlässig sei; denn „die Species nach gemeinem Weg durch 7, 8, 9, 11 u. dgl. Probzahlen zu probieren, ist in versetzten Zahlen die Summa falsch und die Probzahl recht, als wenn man für 54 wollte 45 setzen oder 27 für 72." (Wendler) Bessere Rechenbücher erklären die Probe, wie z. B. das von Pfarrer Recher: „Die Wahrheit der Prob erhellet dannenhero. Dann weilen das Product nichts als alle oberen Zahlen in eine Summa verfasset/ folgt das/ fern man bei jenem 9 so vielmahl abziehet/ als bei disen/ gleiche Rest herfür kommen müssen". — Das Linienrechnen wird von Wendler 1667 noch behandelt, verschwindet aber gegen Ende des Jahrhunderts aus den neu erschienenen Rechenbüchern, ein Zeichen, daſs das schriftliche Rechnen ausgedehnte Verbreitung gefunden hatte. Schon aus diesen wenigen Notizen geht hervor, daſs der nie rastende Menschengeist auch im Rechnen trotz der ungünstigsten Zeitverhältnisse vorwärts drängte.

Am deutlichsten drückt sich der Fortschritt in der Bruchrechnung aus. Dieselbe scheint den Rechenmeistern jener Zeit bedeutende Schwierigkeiten gemacht zu haben. Der Clavis Arithmeticae leitet seinen Generalbericht von den Brüchen mit einem Zitat Ciceros ein: „Sine fractionibus Arithmetices peritus nemo esse potest. Ohne Kenntnis der Brüche kann niemand für einen Rechenmeister gehalten werden." Pfarrer David Karl Kaukol von Altenbuch schrieb 1696 eine „Gründlich-auſsführlich und gantz klahre Unterweisung, welcher maſsen die offt kopffbrechende Brüch in der Rechenkunst leicht zu lernen sind." Die Vorrede dieses Buches bestätigt vorige Annahme. Kaukol berichtet: „Ich gibe diesem meinem Traktätlein von den Brüchen den Namen Filum Ariadne oder der Ariadne Faden/ derentwillen: weilen nach des sinnreichen Ovidii Fabelgedicht die Ariadne dem Theseo/ damit er in dem cretischen

Labyrinth nicht irrgehe/ einen Kneil Faden mitgegeben/ durch dessen Hülffe er nach überwundenem Minotauro aus dem Labyrinth wiederum kommen möchte. Dann wann ich bei mir erwege/ was die Arithmetischen Brüche/ absonderlich in dem Verstand allein aufszurechnen (wiewohl nicht also in der Operation) vor eine Verwirrung verursachen/ dafs man offt weder hinter- noch für sich kommen kann/ so darf ich sie dem Labyrinth zu Creta nicht unrecht vergleichen. Die Brüche pflegen oft, wie dem Schreiner in einer sauberen Arbeit die Äste, grofse Verdriefslichkeit zu erwecken derentwegen der Schreiner das Brett weder wegwerfen noch die Arbeit gleich heimsagen kann; also auch in vorfallenden Rechnungen weder die Occasion zu entfliehen noch das Facit unausgesetzt ohne Schamröte kann verlassen werden." Kaukol bemerkt, dafs ihm noch kein Buch zu handen gekommen sei, das die Brüche allein, vollständig und gründlich behandelt habe, und dafs er deshalb „aus dem grofsen und mit vielen Fachen und Schubladen wolversehenen künstlichen Kasten der Rechenkunst das Schublädel der Brüche vor die Hand genommen und ex professo die ganze Unterrichtung gegeben habe."

Kaukols Buch gibt die Erklärung des Bruches; es sagt, was der Zähler und Nenner sei, und wie die Brüche geschrieben und eingeteilt werden. Kaukol unterscheidet: 1. Rechte Brüch, wo der Zähler kleiner als der Nenner; 2. Brüche einem Ganzen gleich; 3. Brüche, wo der Zähler gröfser als der Nenner; 4. vermischte Brüche; 5. Brüche von Brüchen ($^2/_3$ von $^1/_2$); 6. unordentliche Brüche ($\frac{1}{2}$—4, d. i. ein halb Viertel); 7. unordentlich vermischte Brüche ($1\,^1/_2$—4, d. i. anderthalb Viertel).

Die gesamte Bruchlehre wird in »Accidensen oder Zufällen« abgehandelt. Die erste Accidens heifst contractio fractionum, Zusammenziehung, ein Ausdruck, welcher zutreffender ist als unser »verkleinern«. Hierzu bemerkt der Verfasser: Wann so ringe und einfältige Brüch sich zeigen, denen mans gleichsam an der Nasen ansehen kann, mit welcher Zahl sie sich kürzen lassen, ist gut rathen; wenns aber grofse und schwere Brüch seynd, mufs man mit dem Fundament daran, nemlich der Zehler mufs durch das Dividirn des Nenners so lang suchen, bis er diejenige Zahl findet, aus welcher der Bruch durch die Multiplikation gemacht ist worden. Die zweite Accidens handelt von der Auffindung des allgemeinen Nenners, des communis denominator. Hier faſst Kaukol die einzelnen Fälle ins Auge und gibt die Regeln: 1. Man multipliziere die Nenner sämtlicher Brüche. 2. Wann in unterschiedlichen Brüchen gleiche Nenner gefunden werden, so durchstreicht man alle bis auf einen. 3. Derjenige Nenner, welcher den andern durch das Dividieren exakt aufhebt, wird auch ausgestrichen, und 4. die Nenner werden durch einen gemeinschaftlichen Faktor »cancelliert«. Ein Beispiel:

$$\begin{array}{ccccc}
 & 4 & & 4 & \\
 & & 2 & 2 & \\
8 & 18 & 12 & 14 & 20 \\
\underline{9} & & & & \\
72 & & & & \\
\underline{3} & & & & \\
216 & & & & \\
\underline{7} & & & & \\
1512 & & & & \\
\underline{5} & & & & \\
7560 & & & &
\end{array}$$

Die dritte Accidens hat die Auflösung der Brüche in begehrte Sorten zum Gegenstande, z. B. $^2/_3$ fl. wie viel Kr.? Die vierte: eine ganze Zahl zu einem begehrten Bruch zu machen und umgekehrt; die fünfte: die Brüche von Brüchen zu einfachen Brüchen zu machen, z. B. $^1/_2$ von $^2/_3$.

$$\frac{1}{2} \text{ von } \frac{2}{3} \begin{array}{l} \text{das ist } 1 \text{ mal } 2 \\ \text{das ist } 2 \text{ mal } 3 \end{array} \Big\rangle \text{ ist } \Big\langle \begin{array}{l} 2 \\ 6 \end{array}$$

Hier liegt offenbar eine Bruchmultiplikation vor. Warum diese Operation bei den Vorübungen auftritt, mag sich aus der Thatsache erklären, daſs die Bruchmultiplikation und -Division den Rechenmeistern jener Zeit nicht recht klar war. Die sechste Accidens macht »unordentlich vermischte Brüch zu puren Brüchen, z. B. $^1/_2$—3 (ein halbes Drittel); der Zähler bleibt, sage 2 mal 3 ist 6, gibt $^1/_6$; $17\,^3/_4$ thut $\frac{71}{4}$; $5\,^1/_2$—3 (sechsthalb Drittel); sage: 2 mal 5 ist 10 und 1 ist 11; 2 mal 3 ist 6, gibt $^{11}/_6$. Eigentümlich erscheint die Bezeichnung; die neuere Schreibweise für den Bruchsbruch ist noch nicht üblich.

Bei der Bruchaddition wurden Zähler und Nenner übers Kreuz multipliziert und den Produkten der gemeinschaftliche Nenner gegeben, z. B. Versamble $^7/_8$ und $^5/_6$ Ellen (Recher):

$$\begin{array}{llll}
\multicolumn{2}{l}{^7/_8 \times \frac{5}{6}} & & \\
\hline
40 & 42 & 3 & \\
 & \underline{40} & 44 & \\
 & \underline{82} \text{ oder} & 82 & (1\tfrac{17}{24} \text{ Ellen.} \\
 & 48 & 48 &
\end{array}$$

Hier ist von einer Aufsuchung des kleinsten gemeinschaftlichen Nenners abgesehen. Kaukol stellt beide Manieren einander gegenüber und sagt: dieſs ringe Exempel (unter B) ist ohne den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner elaborirt/ nur um den Unterschied der mühsamen Arbeit zu zeigen:

A.

$$\begin{array}{ll}
 & \underline{12} \\
\frac{1}{2} & 6 \\
\frac{2}{3} & 8 \\
\frac{3}{4} & 9 \\
^1/_4 & \underline{3} \\
 & \frac{26}{12} \text{ oder } 2^1{}_6
\end{array}$$

B.

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\
\frac{3}{4} & & \\
^7/_6 \times \frac{3}{4} & & \\
28 & & \\
\underline{18} & & \\
\frac{46}{24} \times \frac{1}{4} & & \\
184 & & \\
\underline{24} & & \\
\frac{208}{96} \text{ oder } 2\,^1/_6 & &
\end{array}$$

Unter A haben wir einen modernen Ansatz. Die Bruchsubtraktion wurde ähnlich behandelt. Ein Beispiel aus Rechers Rechenbuch:

$$\begin{array}{lccc}
 & \multicolumn{3}{c}{\text{nimb}} \\
\text{Von} & \frac{2}{3} & \times & \frac{1}{4} \\
\hline
 & 8 & : & 3 \\
 & \underline{3} & & \\
\text{Rest} & \frac{5}{12} & &
\end{array}$$

Der Doppelpunkt ist hier lediglich Trennungszeichen.

Bei der **Bruchmultiplikation** wurde das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert. Einige Beispiele.

Launay 1605:

$$\begin{array}{cccc} 3\frac{1}{5} & & 2\frac{3}{4} & 16 \\ \frac{16}{5} & — & \frac{11}{4} & \underline{16} \\ & & & \overline{17|6} \\ & & & 8\frac{4}{5} \end{array}$$

Seine Regel heifst: Multipliez les numerateurs l'un par l'autre et aussi les denominateurs, also genau wie im Deutschen. Die Ausrechnung ist elegant. Launay dividiert 176 durch $2 \cdot 10$ und zwar erst mit 10, indem er wie bei einem Decimalbruche im Zähler rechts eine Stelle abschneidet, sodann 17|6 durch 2.

Neudorffer 1627:

$$\begin{array}{ccc} 12\frac{1}{3} & & 9\frac{3}{4} \\ \hline \frac{37}{3} & — & \frac{39}{4} \\ \hline & 273 & \\ & 117 & \\ \hline & \frac{1443}{12} \text{ ist } 120\frac{1}{4}. & \end{array}$$

Bei der **Bruchdivision** wurden verschiedene Fälle unterschieden. „Zum ersten (Neudorffer): Wann die Brüch gleiche Nenner haben/ so läfst man dieselben fahren/ vnd dividiert nur die Zehler in einander: $\frac{3}{8}$ $\frac{7}{8}$ (2 $^1/_3$. Zum andern: Wann die Brüch aber vngleiche Nenner haben, so reducirs zuvor vnter einen Namen vnd procedir darnach wie oben vermeldt. Als

$$\begin{array}{ccc} \frac{5}{8} & & \frac{3}{4} \\ & 8 & \\ 5 & & 6 \ (1\,^1/_3 \end{array}$$

Zum dritten: Da aber bei jedem Bruch etliche Gantze stünden/ müssen sie gleichfalls vnter der Brüch allgemeinen Nenner gebracht werden u. s. w."

Kaukol sagt über die Bruchdivision: „Die Manier zu reden ist: Ich soll $\frac{4}{5}$ zerteilen durch $\frac{1}{2}$. Wieviel mal $\frac{1}{2}$ macht $^4/_5$?" Das Beispiel $^2/_7$: $^2/_3$ berechnet er so:

$$\begin{array}{lll} \text{Dividendus } \frac{2}{7} — 6 & \multirow{2}{*}{oder} & \\ \text{Divisor } \frac{2}{3} — 14 & & \end{array} \quad \frac{6}{14} \text{ oder } \frac{3}{7} \text{ Quotus.}$$

Hier werden $\frac{2}{7}$ in $^6/_{21}$ und $^2/_3$ in $^{14}/_{21}$ verwandelt; $\frac{14}{21}$ sind in $\frac{6}{21}$ so oft enthalten als 14 in 6 oder $\frac{6}{14}$ d. i. $^3/_7$ mal. Von da zur Umkehrung des Divisors ist nur ein Schritt.

Die Frage, ob es eine Multiplikation der Brüche geben könne, wurde von den Arithmetikern des 17. Jahrhunderts noch vielfach erörtert. Sie sagten: Multiplizieren heifst vermehren; nun ist aber $\frac{1}{2}$ mal $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$, das ist weniger als $\frac{1}{2}$; die Multiplikation mindert also, ist eine Dimination. Kaukol legt sich diesen Widerspruch so zurecht: Es ist ein Unterschied zu machen zwischen der Multiplikation in ganzen Zahlen und in der Multiplikation in Brüchen; denn die Natur beider ist verschieden. Bei ganzen Zahlen sind „mal, von, aus“ ganz unterschieden; bei Brüchen gilt eins was das andere. Wenn ich sage $\frac{1}{2}$ mal $\frac{1}{2}$, so ist dem Verstand nach gleich so viel als $\frac{1}{2}$ von $^1/_2$ oder $\frac{1}{2}$ aus $\frac{1}{2}$. Indem aber die Multiplikation in Brüchen die Ziffer ihrer Natur nach vermehret, verrichtet sie ihr Amt multiplicando, ungeachtet diese Vermehrung gegen dem Gantzen zu vermündern scheint. Also gibt es in den Brüchen eine wahrhafte Multiplikation, doch in Verstand der Brüchen, nicht in Verstand der Gantzen.“ Recher ist sich über diesen Fall klar. Er sagt: „Dafs bei der Bruchmultiplikation das Produkt. kleiner sein müsse als jedwedere vermehrende Zahl, erhellet 1. aus dem Quaesito als wenn ich frage/ wie viel $\frac{1}{2}$ mal $^5/_6$ seyn/ wo klar/ dafs ich nur den halben Teil aus $^5/_6$ verlange. 2. Weilen in Multiplikation der Brüchen/ der Nenner geteilet wird/ welches doch der Eigenschafft des Vielfältigens nicht zuwider/ denn je kleiner der Nenner oder Theiler wird, je mehr werden der Theil, welches dann der Vervielfältigung rechte Eigenschafft ist.“ Die gleichen Zweifel bestanden über die Bruchdivision, weil der Quotient die beiden teilenden Zahlen übertreffe. Diese Zweifel wurden meist durch Anwendung der Proportionen oder durch die Beziehung auf benannte Zahlen zu erklären versucht, z. B. $^4/_5$ durch $^2/_5$ gibt 2. $^4/_5$ fl. sind 12 Batzen, $^2/_5$ fl. sind 6 Batzen; 6 Batzen sind in 12 Batzen 2 mal enthalten, also ist das Facit ebenfalls 2. (Recher.)

Die Rechnungen mit benannten Zahlen sind noch nicht in eigene Übungsgruppen zusammengestellt. Das Resolvieren, „aus grofsen Sorten kleine machen,“ wird meist bei der Multiplikation, das Reduzieren, „aus kleinen Sorten grofse machen," bei der Division vorgetragen.

Als schriftlicher Ansatz besteht die Regeldetri in althergebrachter Weise fort; doch werden schon Zweifel über den sonst so hochgepriesenen Wert der „güldenen Regel" laut. Die Stimmung des 17. Jahrhunderts in dieser Sache bringt J. M. Kegel (1696) wie folgt zum Ausdruck: „Was aber den Processum calculandi oder die Art zu rechnen anlanget/ so ist dieselbige in der gantzen Welt fast unterschieden/ indem dieser Teutsch/ jener Französisch/ ein anderer Italiänisch/ und so ferner zu rechnen pflegen/ diese erlangen zwar endlich alle einen Zweck/ doch mit ungleicher Leichtigkeit/ Manier und Geschwindigkeit. Ob ich nun zwar einem jeden seine Weise gefallen lasse/ so mufs ich dennoch gestehen, dafs die kürzeste und geschwindeste Art zu rechnen die allerbeste/ und denen Kauff- und Handelsleuthen am nützlichsten und bequemsten sey. Denn es nicht selten geschiehet/ dafs mancher Handelsmann zeit zwo oder drey Stunden wohl mehr als drey bifs vierhundert Posten und Exempla ausrechnen mufs; wann er nun nach der gemeinen und langweiligen Teutschen Regel de Trie alles verrichten sollte/ so würde ihm die Zeit solches zu thun viel zu kurtz werden. Daher achte ich am nöthigsten/ dafs man die Jugend ohne viel Zeit auf die langsame Rechnung zu wenden/ bald Anfangs so viel möglich nach der Kürtze zu rechnen anweiset/ und dieses nicht unbillich/ indem es ihnen auch viel leichter zu erlernen seyn wird/ wenn sie nicht gantze Berge voll Zahlen vor sich sehen und darüber erschröcken möchten, welche Vielheit ihnen nur den Verstand verdunkelt/ die Lust verhindert/ und ihre Hoffnung zweiffelhaftig macht." Kegel empfiehlt daher die welsche Praxis; doch wird die Kenntnis der Spezies vorausgesetzt, weil diese der italienischen Rechnung den Weg bahnen mufs. Die Regeldetri wird also als langweilig, umständlich und schwer begreiflich der welschen Praxis nachgestellt. In der That hatte letztere gegen Ende des 17. Jahrhunderts eine solche Ausbildung erlangt, dafs man sie mit Recht die das 17. Jahrhundert charakterisierende Rechnungsart genannt hat. Genau genommen erscheint die welsche Praxis als eine Sammlung von Rechnungsvorteilen, z. B.:

I. 4) 6845 mal 24
6)27380
1 64280

II. 7896 mal 11
7896
86856

III. 73456 mal 12
146912
881472

IV. 6453 mal 21
12906
135513

V. 6734 mal 101
6734
680134

VI. 423 mal 31
2115 (5
12690 (6 + 423
13113

VII. 4567 mit 41
27402 (6
191814 (7 ÷ 1
÷ 4567
187247

Noch ein praktisches Beispiel:

Einer kauft zu Augsburg 48 Stuck Barchent zu $4\frac{2}{3}$ fl. das Stuck. Führt die nach Regensburg/ gehen Unkosten darauf 18 fl. Allda verkauft er wieder 1 Stuck pro $5\,^1/_2$ fl. Frag; was er gewonnen oder verlohren?

48 Stuck		48 Stuck	
zu $4\,^2/_3$ fl.		zu $5\,^1/_2$ fl.	
192		240	
+ 32		+ 24	
224		264	Losung
+ 18	Unkosten	— 242	Hauptgut
242	Hauptgut	22 fl.	Gewinn.

Fassen wir die sachlichen Gesichtspunkte, nach welchen die praktischen Rechnungen geordnet wurden, ins Auge, so begegnen uns die Formen des vorigen Jahrhunderts wieder, zum teil mit anderen Namen und neuer Zuthat. Eine grofse Ausdehnung hatte die Wechselrechnung. Sie gliederte sich in die Cambio commune und in die Cambio reale. Erstere war die „Verwechslung oder Veränderung der gröfsern Münz in die kleiner und der kleinern in die gröfser,“ unser Resolvieren und Reduzieren mit Münzen; letztere war „die Hauptwechslung des Geldes von einem Land oder Stadt in die ander,“ einschliefslich des Wechselbriefes. Die Wechselrechnung hing aufs innigste zusammen mit den damaligen politischen Zuständen und der daraus hervorgegangenen Misere in den Geld-, Mafs- und Gewichtsverhältnissen. Die Vielgestaltigkeit derselben brachte es mit sich, dafs die Geschäftsleute hunderte von Reduktionszahlen merken, oder bei ausgedehnterem Geschäftsbetriebe beständig in den Übersichtstabellen nachschlagen mufsten. Bei der Wechselrechnung im Sinne der Wertvergleichung verschiedener Münzsorten wird der Ausdruck All'Parij in modernem Sinne gebraucht. Besondere Formen der Wechselrechnung waren die Rechnung über Land und die Kassierrechnung. Bei ersterer war zu merken, „das allwegen deren Ort/ Müntz/ Mafs/ Eln/ Gewicht und dergleichen allda die Wahren werden kaufft/ in derselben Ort Müntz/ Mafs/ Eln/ Gewicht/ da solche wieder verkaufft/ transferiert werden.“ Die Kassierrechnung bezog sich auf die Auszahlung des Geldes in Würfen.

Neudorffer bringt in seinem Rechenbüchlein mehrere Wechselbriefe. Einer derselben lautet wie folgt:

„Laus deo 1599 adi 10. Jenner in Antorff[1])
per fl. 1300 à 65 kr.

Ehrnfeste/ fürneme/ günstige/ liebe Herrn/ euch geliebt auff diesen meinen ersten Wechselbrieff (anho) zu bezahlen dem Hans N. vnnd mit verwandten etc. fl. dreyzehenhundert/ jeden zu 65 kr. den werth allhie von Peter Hochen empfangen. Hiermit was euch lieb/ den Gnaden Gottes befehlend.“

Weiterhin finden sich Stich- und Tauschrechnungen, die Gesellschaftsregul mit Faktorey-Rechnung, in welcher der Faktor als Gesellschaftsmitglied erscheint, Proviggions-, Courratagie- und Assekuranz-Rechnungen, Abzugsrechnungen, Garbulier- oder Fusti-Rechnungen (unsere Tararechnung), Erb- und Teilungsrechnungen, Alligations- oder Vermengrechnung, Müntzrechnung, früher Schickung des Tigels genannt, und die Regula coeci. (Blindenrechnung?) Letztere war schon Riese bekannt. Mauracher erklärt ihren Namen also: Coeci wird sie geheifsen/ nicht darumen, dafs sie irrig Positiones ausführe/ sondern gleichsam ohne Bemühung und blindlings ihren Prozess zu Ende bringe; den Namen Virginum führet sie vom würdigsten Geschlecht/

[1]) Der deutsche Name für Antwerpen, das im 17. Jahrhunderte ein Hauptstappelplatz für den deutschen Handel gewesen zu sein scheint.

weilen doch niemand so unhöflich/ daſs man bei einem Gastmahl den Frauenzimmern nicht den Vorrang lasse. Dazu kommen noch Haushaltungs-, Pfund-, Zentner-, Ellen-, Getränk-, Honig-, Eisen- oder Schinrechnungen, Getreide-, Fisch-, Holzrechnungen, — allzuviel des Guten.

Gegenüber den Rechenbüchern des vorigen Jahrhunderts ist die groſse Mannigfaltigkeit der Gegenstände, welche der Berechnung unterstellt werden, bemerkenswert. Man findet daher in den Textaufgaben einen reichen, interessanten Wechsel. Es wird gekauft und verkauft: ein Stübel Schmaltz, ein Vaſs Wein/ 1 Ztr. Reiſs/ Seyffen/ schöner Flaxs/ 170 Eln Leinwandt/ ein Wagen mit Heu/ 1 Stoſs Aichen-Holtz/ 24 Sümmer Korn, ein Väſslein mit Gummi, 2 Sack mit Pariſskörnern/ ein Sack mit Muskatennüſs/ ein Väſslein mit Calmus/ ein Sack mit Piper (Pfeffer)/ ein Thunen Hering/ ein Vaſs Galles/ 3 Sack Weinbeerlein/ zween Säck mit Negelein/ 3 Stumpf Saffran/ ein Vaſs Alaun/ 6 Körb mit Feigen/ 3 Säck mit Baumwollen/ 7 Fässer mit schwebel/ zween Säck mit Zwiffelsamen/ 70 Bockfell/ 12 Vaſs mit Messing/ 9 Vässer mit Zwetschgen/ Parmasan-Käſs/ Koriander/ Capern/ Melliſs Zucker/ Buderzucker/ braun Farin, Auripigmentum/ Angelika/ Cubeben/ Tobin, Samet/ Taffet/ Catiſs/ Terzanell, rother Blurs Samet/ Sticklein Spitz/ 72 Elen Guldenstuck/ 170 Ellen Zwirnband/ 38 Ellen seidene Schnur/ 27 Ellen schwartz seidene Spitz/ 3 Stück weiſs Parcallen/ grüen Seidenband/ wullene Börtlein/ altes Papier/ Bleyweiſs/ 10 Blasen Grünspan/ 1 Vaſs Kupferwasser/ 1 Fäſslein Berg-Grün/ Salpeter, gestoſsene Gelbspän u. s. w.

Ein Teil der praktischen Aufgaben weist auf die ausgedehnten Handelsbeziehungen: Man kauft zu Schweinitz in der Schlesi Wachs, zu Wien Rabarbara, zu Costenz am Bodensee 36 Zuber Nüſs, zu Ofen in Vngarn 735 Ochsen das baar vmb 23 fl. $^1/_2$ ort. und man gibt ins hundert fünff Ochsen in kauff (glückliche Zeit!); einer kaufft zu Würtzburg in Franchen etliche saure vnd vnzeitige Wein vnd verkauft sie an einen Nürnberger Heffner (Hefenfabrikannten); es wird gehandelt mit Französisch Papier, Türckischen Saffran, Genueser Sammet, Florentiner Taffet, Moscowiter Juchten, Niederländisch Pfund-Leder, Böheimischen Alaun, ciprianischer Wolle, holländischem Einfaſsband, englischem Tuch, Foenum graecum (griechischen Fenchel), Fernambuck etc.

Andere Aufgaben werfen Licht auf die Zeitverhältnisse und politischen Zustände, z. B.: Ein Ingenieur begehrt die äufserliche Böschung eines Walls nach einem Achteck zu proportionieren, — ein Hofschneider kauft zur Leichenbegängnis seines Fürsten zum Trauerhabit etlich Stück schwartz Landtuch, — ein Bixenmeister schiefst mit Cartaunen, — ein Commandand läfst 300 steinerne Kugeln hauen, — einer macht einen Gewinn bei einem Freyschiefsen, — man gibt monatlich einem Reuther 8 Reichsthaler. J. Mayestät in Frankreich (Schey, 1602) begert in seinen Dienst 9. Monat lang 10000 Eydgenossen/ gibt allwegen auff ein fendlein oder 300 derselben/ jeden Monat zur Besoldung 2000. Sonnencronen. Wieviel machts gemelte Monat jedem fendlein insunderheit/ auch alle 10000 Eydgenossen in einer summa? — Item/ ein Oberster sampt seinem Fendrich/ Leibschützen/ Doppelsöldner vnnd Muscatier treffen auff etliche Türcken/ die erlegen sie/ vnnd befinden an barschafft bey ihnen 462 Dukaten/ die haben sie vnter einander getheilet/ solcher gestalt: So offt der Oberst 9 Dukaten nam/ gab man dem Fendrich $3\frac{1}{2}$, vnd so offt der Fendrich 7 nam, gab man dem Schützen 3/ vnd so offt der Schütz 4 nam/ gab man dem Musketier 4 Dukaten. Ist die Frag/ was einem jeden aufs der Theilung worden sey?

Eine Frau gibt ihrer Köchin das Jahr 6 fl. Wenn sie 20 Wochen 6 Tag gedient/ verheurath sie sich. Frag/ wie vil ihr die Frau schuldig? — Ein Buch-Füehrer verlegt ein Rechenbuch von 20 Bögen/ gibt dem Verfertiger 16 fl. 40 kr. vom Bogen zu setzen und zu drucken 1 fl. 50 kr. — Item der Schemel Jud zu Genfsburg leyhet einem armen bedrangten Christen 20 fl./ der soll zahlen alle Wochen 1 ₰ vom fl. für wucher/ vnd will alle viertel Jahr den Zinfs oder Wucher zum Hauptgut schlagen. Nu lest der Christ solches 24 Jahr anstehen/ darauff begehrt der Jud seinen Wucher oder Zinfs/ er wölle das Capital gern dahinten lassen. Ist die Frag/ was dann der Wucher seyn werde den fl. zu 60 kr./ den kr. zu 7 hl. gerechnet. Facit 6300 fl. 30 kr. 4 hl (Diese Aufgabe hat ihr Vorbild bei Riese, s. Seite 207.) — Item/ zween wöllen mit einander stechen (tauschen)/ der erste hat Perlin/ gilt das lot 10 fl./ setzts in Stich p. 12 fl./ vnd will $\frac{1}{3}$ baar Geld haben/ vnd der ander hat Seiden/ kost das Pfd. 9 fl. ∸ (weniger) 1 ort/

wie soll er das in stich setzen/ dafs er gleich werde? facit 11$\frac{2}{3}$ fl. (1 fl. = 4 Orth oder Quart = 20 ß oder Schilling = 15 „Patzen/ vnd 1 Patz hat 4 kreutzer"; der fl. hat 60 kr. vnd 1 kr. 4 hl. in Geld.)

Die Vielseitigkeit und Mannigfaltigkeit der Textaufgaben ist ein weiterer Beweis dafür, dafs die Arithmetik im 17. Jahrhunderte nicht stille stand, sondern auch unter der Hand der Rechenmeister unablässig der Vervollkommnung entgegen ging, namentlich in Rücksicht auf die Bedürfnisse des Volkslebens.

Die Cofs wurde im 17. Jahrhunderte noch ebenso und mit den gleichen Ausdrücken und Zeichen wie ehedem von Stifel behandelt, z. B. von Wendler 1667. Eine Weiterbildung erfuhr dieselbe durch den französischen Mathematiker Vièta. (Vergl. Seite 260.)

Das Wurzelausziehen weicht fast nur in der äufseren Form von der dermals gebräuchlichen Methode ab. Nachstehendes Beispiel ist der Schrift von Metius entnommen.

Erste Operation:

440	363	699	712	
7	6	0	3	Facit.
343				
97				

Zweite Operation:

Dividend	97,363	1. quot.	quad.	
Divisor	14 700	7	49	
Subtrah.	95 976	30	300	
	1 387	210	14700	Divisor
	216 c.	36 qu.	6	2. Quotient
	216	7560	88200	
			7560	Produkt
			216	
			95976	Subtrahend.

Dritte Operation:

Dividend	1387,699	Quot.	Quad.	
Divisor	1732 800	76	5776	
		30	300	
		2280	1732800	Divisor
			0	3. Quotient.

Vierte Operation:

Dividend	1387 699,712		Quot.	Quad.	
Divisor	173 280 000		760	577600	
Subtrah.	1387 699 712		30	300	
			22800	173280000	Divisor
Rest	512 c.	64 qu.		8	4. Quotient.
	512	1459200		1386240000	
				1459200	
				512	
				1387699712	

Das Kopfrechnen wurde auch im 17. Jahrhunderte geübt, obschon seiner als besonderer Form des Rechnens nicht eigens gedacht wird. Karl Kaukol gibt eine diesbezügliche Andeutung, indem er beiläufig bemerkt, „dafs die Arithmetischen Brüche absonderlich in dem Verstand allein auszurechnen (wiewohl nicht in der Operation) Verwirrung verursachen.«

Die Zahlenmystik ist noch nicht erloschen. Launay sagt in der Dedikation an Monseigneur Guillaume de Rosmadec, Vicont de Mesneuf etc.:

Die Einheit, welche die Quelle und der Ursprung der Zahlen ist, stellt uns den einen Gott in drei Personen dar, den Schöpfer und Urquell aller Dinge, welcher in seiner Ewigkeit ist ohne Anfang und Ende. Der Nürnberger Stadtgerichtsbeisitzer Harsdörffer (1651) deutet die Zahl 7 wie folgt: Jede siebente Zahl entsteht aus dem Quadrat und Dreieck, und weil hiedurch alles vollkommen abgemessen werden kann, ist auch solche Zahl der Vollkommenheit zugeeignet und wird auch die heilige Zahl in der heiligen Schrift genennet, weil viel Geheimnusse darinnen verborgen liegen. 7 ist die richterliche Zahl, weil aus derselben die Veränderungen, welche sich mit dem Menschen begeben, zu richten und zu urteilen. Das Kind ist in dem 7. Monate vollkommen, wenn es 7 Stunden überlebt, kann man ein Urteil fassen von seinen Kräfften; nach zweimal 7 Tagen wendet es seine Augen dem Lichte zu, nach 7 mal 7 Tagen kann es die Augen völlig regieren, nach 7 Monaten schiefsen die Zähne ein, nach 3 mal 7 Monaten fängt es an zu reden etc. 7 ist die Zahl der Reinigung, welches Elisa wohl verstanden und den Naemann siebenmal in dem Jordan hat waschen heissen. Noe hat eins von den 7 reinen Tieren opfern müssen u. s. w. Die Null deutet er also:

Es ist die runde Welt dem Glückstopff zu vergleichen/
ob dessen Dockenkram sich freut der Pöbelhauff/
und wogt die Seele hin/ läſst manche Zettel reichen/
find aber nur ein Null und leider nichts darauf.
So weiset die Figur der schnöden Welt Natur.

Die Decimalbrüche.

Die bedeutsamste Erweiterung erhielt die Elementar-Arithmetik in diesem Jahrhunderte durch die Erfindung der Decimalbrüche. Die Erfindungen werden nicht urplötzlich gemacht, sondern meist von langer Hand vorbereitet. So hatten auch die Decimalbrüche ihre Vorläufer in den Sexagesimalbrüchen der Griechen. Johannes von Sevilla (12. Jahrh.) und Cardanus (1501—1575) kannten die Decimalbrüche dem Prinzip nach und wendeten dieselben zur annäherungsweisen Ausziehung der Quadratwurzel an. Um nämlich beim Ausziehen der Quadratwurzel aus nicht quadratischen Zahlen einen Näherungswert zu erhalten, pflegte man der gegebenen Zahl Nullenpaare anzufügen; ein Nullenpaar gab dann den Näherungswert in Zehnteln, ein zweites in Hundertsteln, ein drittes in Tausendsteln an etc. Sollte z. B. der Wert $\sqrt{7}$ bis auf die Tausendstel berechnet werden, setzte man $\sqrt{7\underline{00}\,\underline{00}\,\underline{00}}$ und erhielt 2645; man teilte dann 3 Ziffern rechts ab und setzte $2\frac{645}{1000}$. In astronomischen Berechnungen wurde nun der gemeine Bruch $\frac{645}{1000}$ in Grade, Minuten und Sekunden der Sexagesimalbrüche umgewandelt. Buchner, Kurtzer Entwurff von der Historie der Rechenkunst 1714, sagt, daſs sich Regiomontanus der Decimalbrüche zur Berechnung von Sinustafeln bedient habe. Bei Rudolff, Riese, Launay und anderen älteren Rechenmeistern finden sich die Decimalen embryonalisch im Abstreichen von Stellen bei Divisionen.

Eine diesbezügliche Stelle in Kandlers Rechenbuch v. J. 1605 heiſst: Wenn du in (durch) 10. 100. 1000 solt abteilen/ merck/ daſs du allemal souil Figurn gegen der rechten Hand von der

Zal/ so du theilen wilt/ mit eim strichlein abschneidest/ souil nulla bei dem teiler gesehen werden.

$$\text{Teil}\begin{Bmatrix}6789\\6789\\6789\end{Bmatrix}\ \begin{matrix}\text{in}\\\text{(durch)}\end{matrix}\ \begin{Bmatrix}10\\100\\1000\end{Bmatrix}\ \text{quotient}\ \begin{Bmatrix}678/9\\67/89\\6/789\end{Bmatrix}.$$

Eine weitere Ausbeutung findet dieser Gedanke hier jedoch nicht.

Der französische Professor Mozanam (1691) schreibt die Erfindung der Decimalbruchrechnung Simon Stevin zu: Cette manière de compter et de diviser les especes differentes de dix en dix est appelée Dixme, ou Arithmetique Decimale, par Stevin, qui passe pour en être l'Inventeur[1]). Nach Villicus, Zur Geschichte der Rechenkunst, gab Simon Stevin (1548—1620) die erste zusammenhängende Lehre über die Decimalbrüche in einer kleinen Schrift „La Disme" (der Zehnte) i. J. 1585. Hiernach setzte Stevin an Stelle des Decimalkomma eine mit einem Kreise umschlossene Null. Die Decimalen wurden mit eingeklammerten Ziffern in der Reihe der natürlichen Zahlen bezeichnet, z. B. der Bruch: 34,7605 als $34^{(0)}7^{(1)}6^{(2)}0^{(3)}5^{(4)}$. In dieser Form wurden die Decimalbrüche auch bei den Spezies angewendet. Die Aufgabe: $0{,}0426 \cdot 0{,}28 = 0{,}011928$ wird so berechnet:

$$\begin{array}{rrrrr}
 & 4^{(2)} & 2^{(3)} & 6^{(4)} & \\
 & & & 2 & 8^{(2)} \\
\hline
 & 3 & 4 & 0 & 8 \\
 & 8 & 5 & 2 & 0 \\
\hline
1^{(2)} & 1^{(3)} & 9^{(4)} & 2^{(5)} & 8^{(6)}
\end{array}$$

Als selbständiges Bruch- und Maſssystem ist die Decimalbruchrechnung (nach Wildermuth, dessen Ausführungen hier folgen) das erstemal in deutscher Sprache dargestellt in der Logistica decimalis, Kunstrechnung der zehnteyligen Brüchen, denen Geometris, Astronomis, Landmessern, Ingeneuren, Visirern, vnd insgemein allen Mechanicis vnd Arithmeticis, zu vnglaublicher Leichterung jhrer Mühesamen Rechnungen, Extraktionen der

[1]) Diese Weise, die Zahlen in den verschiedenen Spezies (unter der Einheit) von Zehn zu Zehn abzuteilen und damit zu rechnen, wurde von Stevin, welcher für den Erfinder derselben gehalten wird, Zehntel- oder Decimalrechnung genannt.

Wurtzeln, sonderlich aufs den Irrationalzahlen etc., vber die mafs dienstlich vnd notwendig. Beschrieben durch Johann Hermann Beyern D. Med. ord. zu Franckfurt am Mayn. Anno MDCXIX. Getruckt durch Nicolaum Hoffmann. Dr. Beyer erzählt, wie er zu der Erfindung der Decimalbrüche gekommen, auf folgende Weise: Zu der Invention dieser zehentheyligen Brüchen ist mir erstlichen A. 1597, als ich mich zuweilen (so vil ich anderer meiner Amptsgeschäften halben Zeit hatte) in den Mathematischen Künsten erlustrirte, von den Gestirnkünstlern folgender gestalt Anlafs gegeben worden. Ich habe dermalen in acht genommen, dafs die Mechanici, wenn sie eine vorkommende Quantitet abmessen, gar selten eine gantze Zahl ihrer Grundmafs (als Ruthen, Ellen, Schuh, Grad etc.) antreffen. Vnd derhalben dasjenige, was weniger ist, als ein solches Mafs, bruchweifs beyfügen müssen. Wie denn die Landmesser, was vnter einer Ruthen lang ist, mit Schuhen, Zollen etc. theilen: Und die Astronomi ihre Circulbögen, wann sie ringere Theile als Grad haben, mit sechzigtheiligen subordinirten Scrupuln messen, vnd zehlen. Die astronomische Art der continuirlich verjüngten Brüchen, unter gleicher Benennung, habe ich vermeinet, dafs sie auch bei andern Abmessungen gebraucht werden möchte. Nachdem ich aber ferner betrachtet, dafs die Hexecosten oder sechzigtheiligen Brüche, einen von der gemeinen Rechenkunst abgesonderten und sehr mühsamen Calculum erforderten: Hab ich meine mechanische Brüche weder in sechtzig Theile, noch in andere Denomination, sondern allein in zehen, als einer hierzu sonderlich bequemen vnd gleichsamb privilegirten Zahl, setzen wöllen: wegen grofser Vortheile, welche im addiren, subtrahiren, vnd vornemblich im multipliciren vnnd dividiren, eintzig bei 10 vnd bei keiner anderen Zahl zu finden. Darauf ich ferner diesem Werk embsig nachgedacht, vnd die gantze mechanische Bruchrechnung, in gewisse Reguln vnnd praecepta Notationis, Numerationis, vnnd Extractionis radicum verfasset: Auch dieselbige, auff etlicher Kunstliebenden anhalten A. 1603 in offenen Truck, neben der Visirkunst, Teutsch vnd Lateinisch publicirt."

Beyer teilt zur Veranschaulichung eine Linie, an deren Stelle man sich aber irgend ein anderes Ganze, „es sei was es wölle," denken könne, in 10 gleiche Teile, die er, wie bei den

Sexagesimalbrüchen, Primen, erste Theil, erste Scrupul, erste decalepta, erste decimalia, erste Zehnder, Zehender des ersten Grades, der ersten Zerfällung nennt; ferner „wird dieser Primen ein jedes wider in zehen theil gebrochen. Welche Secunde, zweite Theil, zweite Scrupul, zweite Zehender benamset werden.“ Weiter „wirdt jedes zweite Theil oder Secunde in 10 Tertzen oder dritte Scrupul. Vnd ein jede Tertz in zehen Quarten vnd so fortan zertheilt. Welche zehntheilige Erkleinerung, so weit es die Noth erfordert, vnd das Werck leydet oder zugibt, beharrlich mag vnd soll continuirt werden.“ Wie die Benennung, so ist auch die schriftliche Bezeichnung der Teile den sechzigteiligen Brüchen entnommen. Über den Ganzen steht 0, das Zeichen der Grade, über den Zehenteln, Hunderteln etc. der Reihe nach I, II etc. $123,459872^0$ schreibt Beyer $\overset{\mathrm{O}}{123}.\overset{\mathrm{I}}{4}.\overset{\mathrm{II}}{5}.\overset{\mathrm{III}}{9}.\overset{\mathrm{IV}}{8}.\overset{\mathrm{V}}{7}.\overset{\mathrm{VI}}{2}$ Zoll, oder $123^0.\overset{\mathrm{III}}{459}.\overset{\mathrm{VI}}{872}$ Zoll, endlich $123^0.459\,\overset{\mathrm{VI}}{872}$ Zoll. 40,0136 Quadrat-Ruten schreibt er $40^0.0\,\overset{\mathrm{IV}}{136}$ Quadrat-Ruten; 9,874 C' aber $\overset{\mathrm{O}}{9}.\overset{\mathrm{I}}{8}.\overset{\mathrm{II}}{7}.\overset{\mathrm{III}}{4}$ oder $\overset{\mathrm{O}}{9}.\overset{\mathrm{III}}{874}$ Cubische Schuh. Die Punkte sind Trennungszeichen. 0,000054 schreibt Beyer einfacher als $\overset{\mathrm{VI}}{54}$. Für die Multiplikation gibt er die Regel: „Setze über die letzte Stelle der rechten Hand die zwei addierten Zeichen der letzten Ziffern des multiplicanti und multiplicantis; von denen an zeichnet man jede neheste Ziffer, gegen der linken Hand zu, natürlicher Ordnung nach.“ 0,124385 mal 0,0643 = 0,0079979555 schreibt Beyer: $\overset{\mathrm{III}}{124}.\overset{\mathrm{VI}}{385}$ mit $\overset{\mathrm{IV}}{643}$ macht $\overset{\mathrm{V}}{799}.\overset{\mathrm{X}}{79555}$. Das Facit wird gelesen: 799 fünfte Scrupel und 79555 Zehente Scrupul. Für die Division gibt er die Regel: „Belangend den dividendum, soll er beyde an Zeichen vnd an Zahlen dem divisori gleich, oder grösser seyn. Da aber ein Mangel erscheinen würde, solstu denselben alsbald ersetzen, wie vnterschiedlich folgt.“ Diese Ausgleichung geschieht durch Mehrung der Stellen rechts, „die den Werth im geringsten nicht ändern“. „So nun der dividendus an Zeichen vnd Zahlen richtig ist, dividirestu die Zahlen, vngeacht der Zeichen, allermaſsen wie sonsten bei der Arithmetik gebräuchlich ist. Den Quotienten aber zu bezeichnen: Subtrahir das letzte Zeichen deſs Theilers vom letzten des Dividendi: Vnd das restirende Zeichen schreibe vber die letzte Ziffer defs Quotienten, so geben sich die Zeichen der obigen Ziffern defs Quotienten natürlicher Ordnung nach für sich selbst an die Handt." Bleibt bei der Division ein Rest und will man den Quotienten „genawer vnd schärpffer" haben, so hängt man eine Null an, und vermehrt das Zeichen jeder weiteren Stelle um 1. Hierauf zeigt der Verfasser, wie die Decimalbrüche in Sexagesimalbrüche verwandelt werden und umgekehrt, wie man die Quadrat- und Kubikwurzel daraus zieht, und wie sie bei verschiedenen praktischen Rechnungen und Messungen zu verwenden sind. Die Ausführung der Logistica decimalis gereicht dem praktischen Arzte Dr. Beyer ebenso zur Ehre wie ihre Erfindung. Dafs er sie, wenn ihm auch Stevin vorangegangen ist, selbständig gemacht hat, geht aus seinem eigenen schlichten Berichte hervor.

In dem Rechenbuche Manuale Arithmeticae et Geometricae Practicae In het welcke Beneffens de Stockrekeninge of te Rhabdologia J. Nepperi, kortelijck ende duydelijck 't gene den Landmeters ende Ingenieurs etc. Door Adrianum Metium 1646[1]) (erste Auflage 1633) finden sich De vier Specien in Arithmetica door tienden gelijck de selvige in de practique van Geometria gebraykelijch is. (Von der lateinischen Ausgabe dieses Buches war 1626 schon die 2. Auflage erschienen.) Der Verfasser schreibt $28^{0}\,6'\,7''\,5'''$, das beduyt 28 roeden ofte maden[2]), 6 scrupula prima, 7 scrupula secunda, 5 scrupula tertia. Daneben finden sich Zahlen mit Trennungspunkten $27^{0} : 0' : 5''$ d. i. 27 maten 5 scrup. secunda; $0 \cdot 7' \cdot 3''$, d. i. 7 scrupula prima, 3 scrup. secunda. Metius wendet also die Zeichen für die Rute, den Fufs, Zoll und die Linie auf die Bezeichnung der Decimalen an, während Beyer römische Ziffern wählte. Im Addieren und Subtrahieren wurde auf die gemeine Manier verwiesen. Ein Additionsbeispiel:

$$\begin{array}{llll} 28^{0} & 6' & 7'' & 5''' \\ 27 & 0 & 5 & \\ & 0 & 7 & 3 \\ \hline 56 & 4 & 5 & 5 \end{array}$$

[1]) Handbuch der praktischen Arithmetik und Geometrie, worin nebst den Stückrechnungen oder der Rutenlehre des J. Nepper kurz und deutlich das für Erdmesser und Ingenieure Notwendige zusammengestellt wird durch Adrian Metius.

[2]) Das bedeutet 28 Fufs oder Maden.

facit: 56 maten 4 scrupula prima, 5 scrupula secunda, 5 scrup. tertia. Beim Multiplizieren ist es, wie Metius sagt, nicht nötig, dafs man die Ziffern gleicher Werte oder gleichen Grades unter einander stellt, sondern man rechne, wie es beim Multiplizieren gebräuchlich ist; nehme aber in acht, wie viel scrupeln Multiplikator und Multiplikand mitsammen haben und zähle sie ab von rechts nach links. Es sollen a) 456 Ruten 7 scrup. prima durch 5 Ruthen 8 scrup. prima 5 scrup. sec. b) 4 Ruthen 6 scrup. sec. mit 3 scrup. sec. multipliziert werden.

a)
$$\begin{array}{r}
456\,7' \\
\underline{58\,5''} \\
228\,3\,5 \\
3\,653\,6 \\
\underline{22\,835} \\
26\,716'9''5'''
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r}
4^0 0' 6'' \\
\underline{0\,0\,3''} \\
12\,1\,8 \\
00\,0 \\
\underline{0\,00} \\
0{,}12\,1\,8''''
\end{array}$$

Im Beispiel a) wurde der Multiplikand in erste Scrupeln verwandelt (wir würden 456,7 schreiben), der Multiplikator in Scrupeln zweiter Ordnung, d. h. in Hundertstel; das Facit gibt demnach 2671 Ganze, 6 Zehntel, 9 Hundertstel, 5 Tausendstel, welche Metius als erste, zweite und dritte scrupuli bezeichnet. Im zweiten Beispiele findet sich das Decimalkomma, ob hier zum erstenmale, wäre noch zu untersuchen. Die Regel für die Division lautet: Man dividiert nach gemeiner Manier und subtrahiert, um den Wert des Quotienten zu bestimmen, die Zeichen (des Divisors und Dividenden) von einander. Der Rest gibt den Wert des Quotienten. Das Beispiel $5'\,7''$ durch $8^0\,6'\,5''\,6'''$ wird so ausgeführt:

$$\begin{array}{l}
57000\ (6''\ 5'''\ 8''' \\
\ \ 8656 \\
\underline{\ 51936} \\
\ \ 50640 \\
\underline{\ \ 43280}\ \text{etc.} \\
\ \ \ldots\ldots
\end{array}$$

Es scheint, dafs Metius die Decimalen lediglich als „geometrische Brüche“ betrachtet und daher nur auf die geometrischen Mafse angewendet hat, er steht also an allgemeiner Auffassung der Sache Dr. Beyer nach.

Auch die Arithmetica nova militaris von Andreas Böckler, Nürnberg 1661, wendet die Decimalen nur auf das Längen-, Flächen- und Körpermafs an. Die Ganzen werden „mit einem Commate oder Strichlein“ abgesondert. Das Zeichen der Rute ist 0, des Schuh (Ingenieurschuh) 1, des Zolls 2, des Grans (der Linie) 3 etc. Böckler bezeichnet nur die letzte Decimale und setzt ihr Zeichen hinter einer Lunula rechts an den Bruch, also: 123,6543(4 und liefst: 123 Ruten, 6 Schuh, 5 Zoll, 4 Gran, 3 Quarten. Fehlen die Ganzen, so wird die Stelle nicht bezeichnet. 3(1 heifst 0,3; 4(2 = 0,04. Beim Flächenmafs wird die „gevierdt oder Creutz-Ruthe“ zunächst wieder in 10 Teile geteilt, von denen jeder 1^0 lang und 1′ breit ist; ein solcher Teil heifst Rienfufs oder Riemenfufs, weil die Rechtecke mit Riemen verglichen werden können, eine Benennung, welche im folgenden Jahrhunderte gang und gäbe wird. Das Zeichen des Rienfufses ist 1; $\frac{1}{100}$ einer Quadratrute ist ein Quadratfufs, sein Zeichen ist 2; $^1/_{10}$ eines solchen ist ein „Riendaumen oder Rienzoll“, 1′ lang und 1″ breit. 345,6789(4 wird ausgesprochen: 345 gevierdte Ruten, 6 Rienfufs, 7 gevierdte Schuh, 8 Riendaumen 9 gevierdte Daumen. Böckler teilt hier die Decimalen auch in Gruppen zu 2 Stellen und liest 67 Quadratfufs, 89 Quadratzoll. Beim Kubikmafs wird die Sache noch verwickelter. $^1/_{10}$ Kubikrute ist ein Schacht oder Schiffufs, 1^0 lang, 1^0 breit und 1′ hoch; sein Zeichen ist 1. $\frac{1}{10}$ eines Schachtes ist ein Rienfufs, 1^0 lang, 1′ breit und 1′ hoch und hat das Zeichen 2. $\frac{1}{1000}$ einer Kubikrute ist ein Kubikfufs mit dem Zeichen 3. $\frac{1}{10}$ Kubikfufs oder ein Schiffsdaumen ist 1′ lang, 1′ breit und 1″ hoch, sein Zeichen ist 4. $\frac{1}{10}$ von einem Schiffsdaumen ist ein Riendaumen, 1′ lang, 1″ breit und hoch; er hat das Zeichen 5. $\frac{1}{100}$ Schiffsdaumen oder $\frac{1}{1000}$ Kubikfufs ist ein Kubikzoll, sein Zeichen ist 6. 123,456781(6 wird demnach gelesen: 123 Kubikruten, 4 Schachten, 5 Rienfufs, 6 Kubikfufs, 7 Schiffsdaumen, 8 Riendaumen und 1 Kubikzoll. Die Mafse stiegen also in 10facher Verkleinerung abwärts und hatten eigene Namen für jede Stelle, wodurch die Aussprache sehr schwerfällig wurde. Deshalb macht Böckler den Vorschlag, nach 3 Stellen abzuteilen und die Decimalen beim Lesen zusammenzufassen. Die 4 Spezies behandelt Böckler wie Dr. Beyer.

In der Schrift des Engländers Wingate, 2. Ausgabe von John Kersey 1668, stehen die Decimalbrüche unserer Methode schon näher. Wer sie aufgebracht hat, sagt Wingate, wisse man nicht, obgleich die Erfindung neu ist; jedenfalls habe sie in wenigen Jahren solche Fortschritte gemacht, dafs sie nun die höchste Stufe ihrer Entwicklung erreicht zu haben scheine. Die Mathematiker verdanken ihr in der Anfertigung ihrer trigonometrischen Tafeln, ihrer Tabellen für Zinseszinsrechnung so grofse Erleichterung, dafs sie die Decimalbrüche zu den nützlichsten Erfindungen zählen, die seit langer Zeit gemacht wurden. Wenn bei Münzen, Mafsen, Gewichten etc. das Decimalsystem eingeführt wäre, meint Wingate, dann könnte die Arithmetik viel leichter und schneller erlernt werden — ein Wink für den Rechnungsmethodiker der Neuzeit. Die Decimalbrüche entstehen nach Wingates Definition nicht blofs durch die fortlaufende Teilung eines Längenmafses, sondern sind ganz allgemeine Brüche, deren Nenner 1 mit einer oder mehreren Nullen rechts ist; man braucht ihn nicht zu schreiben, im Falle man vor die Decimalen einen Punkt oder ein Komma setze, indem er immer aus 1 und so vielen Nullen bestehe, als im Zähler Stellen seien. Wingate schreibt wie wir 285,82 oder 285.82; aber ·5 statt 0,5; ·25 statt 0,25, bezeichnet also die Stelle des Ganzen nicht besonders. Die 3 ersten Spezies behandelt er übereinstimmend mit dem gewöhnlichen Verfahren; für die Division gibt er die Regel: Man füge dem Dividenden rechts beliebig viele Nullen an und dividiere dann wie mit Ganzen. Um sodann die Qualität der ersten Stelle des Quotienten, von der alle übrigen abhängen, zu bestimmen, schreibe man den Divisor unter den zuerst dividierten Teil des Dividenden; die Stelle desselben, unter welche die Einer des Divisors zu stehen kommen, bestimmt die Qualität der ersten Stelle des Quotienten. Hat man z. B. die Division 2,34 : 52,123, so erhält man nach der Regel 448. Nun schreibt man den Divisor unter den zuerst dividierten Teil des Dividenden

$$\begin{array}{l} 2.34\,000 \\ \;\;52.125 \end{array}.$$

Die Einer des Divisors stehen unter den Hunderteln des Dividenden, also sind in der ersten Stelle des Quotienten Hundertel, und man erhält 0,0448. Wenn es nötig ist, hat man im Dividenden zur Bezeichnung der Stellen der Ganzen links

Nullen anzuhängen, so dafs man über den Einheiten des Divisors noch eine Stelle bekommt, die dann weiter entscheidet. Bei 0,0758 : 0,000064 würde sich die Untereinanderstellung so gestalten:

$$\begin{array}{l} 0\,000{,}0758 \\ 0{,}000\,064 \end{array}$$

Die Einer des Divisors stehen unter der Stelle der Tausender des Dividenden, die erste Ziffer des Quotienten mufs daher auch Tausender enthalten. (Wildermuth.) — Stellen wir die verschiedenen Schreibweisen der Decimalbrüche im 17. Jahrhunderte zusammen, so ergibt sich für 0,784 bei Beyer $78\overset{\text{III}}{4}$, bei Metius $0^{0}7'8''4'''$, bei Wingate .784, bei Böckler 784(3, bei Wallis $0<784$.

Die Arithmetik als Unterrichtsgegenstand.

Wenden wir nun unsere Aufmerksamkeit den Schulverhältnissen, der Stellung des Rechnens in den Lehrplänen und dem unmittelbaren Betriebe des Rechenunterrichts zu.

Wollen wir gegen das 17. Jahrhundert nicht unbillig sein, müssen wir vor allem die trüben Zeitverhältnisse ins Auge fassen: Auf dem Anfange des Säculums lastet die Gewitterschwüle, welche dem Dreifsigjährigen Kriege vorherging, die folgenden Jahrzehnte füllt der unheilvolle Krieg, und die zweite Hälfte desselben steht unter dem Eindrucke seiner Nachwehen. Gleichwohl wurden weitere Versuche gemacht, das Rechnen, wenigstens in Städten und Märkten, als obligatorischen Unterrichtsgegenstand einzuführen. Das bayerische Landrecht für die Fürstentümer Ober- und Niederbayern v. J. 1616 gibt eine diesbezügliche Vorschrift: Hier heifst es Kap. III, Titl. 10, Art. 3: Dieweil auch an den deutschen Schulhaltern, dadurch die Jugend zu guten Schriften und fertiger künstlicher Rechnung gezogen werden soll, nicht wenig gelegen, sollen Städte und Märkte dieselben zu sich bringen. Die Weimarsche Schulordnung v. J. 1619 schreibt vor: „Endlich soll auch billig den Knaben, wenn sie etwas lesen und schreiben können, ein wenig von der Rechenkunst gewiesen werden, dafs sie die Ziffern und Zahlen kennen lernen und nur das Leichteste vom Addieren, Subtrahieren etc.

verstehen und brauchen mögen". Vom Schulmeister verlangt diese Schulordnung, dafs er guten Verstand habe, rechnen zu lehren. Auf dem Lande aber war im günstigsten Falle eine Pfarrschule vorhanden. Wollten die Leute der Filialen ihre Kinder unterrichten lassen, so mufsten sie dieselben in die Pfarrschule schicken, sofern nicht eine „Winkelschule" im Orte unterhalten wurde. Es fehlte noch an der äufseren Schuleinrichtung, namentlich an geeigneten Schulräumen; die Wohnstube des Schulmeisters war zumeist auch Schulstube. Es fehlte nicht minder an Lehrmitteln, ganz besonders aber an technisch und methodisch gebildeten Lehrern. Die Küster der damaligen Zeit hatten meist selbst nicht das nötige Wissen, noch viel weniger Methode, führten aber eine harte Zucht. Ein um 1700 erschienenes Buch gibt eine drastische Schilderung von der Qualität des Lehrpersonals jener Zeit: „Sieben böse Geister", sagt es, „welche heutiges Tages guten Teils die Küster oder sogenannten Dorfschulmeister regieren, als da sind: der stolze, der faule, der grobe, der falsche, der böse, der nasse und der dumme Teufel, welchem kommt hintenach gehunken, als ein überleier, der arme Teufel. Der eine ist ein Mäurer oder Ziegeldecker, der andere ein Seiler, der dritte ein Schlächter. Da gehen sie denn ihrer Nahrung nach, lassen indes die Kinder alleine sitzen, dafs die grofsen die kleinen auffsagen lassen müssen, oder es informiret die Frau schlecht genug; oder sie jagen die Kinder fort, und lassen sie, solange es Schulzeit ist, auf dem Kirchhoffe herumb lauffen und spielen. Soll so ein dummer Teufel einmal eine Superintendentenpredigt ablesen aus einer Postille, so erschrickt er davor, wie die Israeliten vor dem Riesen Goliath. Geschriebenes können sie viel weniger zu Wege bringen. Es gibt wenig oder keinen unter den Schulmeistern, welche orthographisch schreiben können, ja sie haben selten so viel Geschicke, einen Brief nur abzuschreiben. Geschweige denn, dafs sie sich selbst einen geschickten Brief concipieren und stilisieren. In der Rechenkunst können ihrer etliche das Einmaleins nicht; wenn sie addieren, fangen sie vorne bei den Thalern an. Ja sie können nicht einmal numerieren, wissen nicht, wie sie ein Halbes anschreiben sollen, machen aus $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{1}$. Wäre also das beste, dafs man die Küster, ehe man sie aufnimmt, in allen Stücken examiniere oder dafs man eigene Schulen oder Seminarien gründe, darinnen junge Leute zu künftigen Schulmeistern erzogen werden. In diesem Schlufssatze legt die Epistel den Grundschaden blofs und trifft, wie das Sprichwort sagt, den Nagel auf den Kopf.

Das Lehrpersonal, welches den Unterricht zur Lebensaufgabe hatte, wurde nicht selten den Müfsiggängern beigezählt. Das Wendlersche Rechenbuch vom Jahre 1667 läfst sich über diesen Punkt wie folgt aus: Simon Stenius, der Wohlredenheit Professor weiland zu Heidelberg, sagt: Wer Neun Jahr in der Schul die Kinder gelehrt/ den mag man mit Wahrheit in das Martyrer Buch schreiben; denn des tages siben oder acht Stund aneinander mit der ungezogenen Jugend zubringen/ selbige in Lesen/ Rechnen und Schreiben unterrichten/ sollte es nicht eine gröfsere Arbeit sein als Holzhauen? Zur Zeit Herren Trotzendorffs hat sich ein solcher Rültz gefunden/ der die Schreiber und Praeceptores nur für Müfsiggänger gehalten/ da bat der fromme Mann, die Obrigkeit wolte diesen groben Gesellen ihm in seine Straff geben: Da legt er ihm ein Buch für/ das mufs er den gantzen Tag neben ihm sitzend unverändertes Gesichts ansehen/ darnach fraget er ihn/ wie ihm der Müfsiggang gefalle? Der Gesell gab zur Antwort: Er wollte lieber 8 Tage Holz schlagen/ als einen halben Tag in solcher Angst sitzen. So recht/ mein Gesell/ so hastu auch erfahren/ wie der Schreiber und Schulmeister Müssiggang schmeckt. Zu geschweigen des grofsen Undanks und üblen Nachreden/ welche man wie bittere Pilulen in sich schlucken und verdauen mufs. Gleichwohl erweckt der liebe Gott allezeit solche Leut, die zu solchem schweren Dienst sich gebrauchen lassen.“

Es sind hier die städtischen Schreib- und Rechenmeister gemeint. Das waren gebildete Leute, welche selbst auf Kosten der Magistrate ihre Ausbildung empfingen, wie das Wendler bezeugt: „Dann vermittelst dero (der Stadtobrigkeit) mir gereichten Beyhülffe zu Nürnberg und Altdorf ich dasjenige erlernet/ womit ich andern angenehm Dienst leisten kann; Gibt demnach ein fruchtbarer Acker billich wieder/ was man in denselben gesäet hat.“ Wie Paritius (1706) mitteilt, mufsten die Rechenmeister vor ihrer Anstellung eine Prüfung bestehen. Paritius schreibt hierüber: „Es werden auch denen angehenden Schul- und Rechenmeistern in defs Heil. Röm. Reichsstadt Nürnberg vor

Antrettung einer Schule durch ordentliche Herren Examinatores und Visitatores der deutschen Schreib- und Rechenschulen gar Löblich dergleichen Euklidische Fundamentalfragen/ durch allerhand Arithmetische Terminos gewöhnlich proponiert und zu beantworten vor- und aufgegeben, wie denn Anno 1616 ein solcher verordneter Rechenmeister und Visitator allda (Heer) dergleichen Questiones Arithmeticas et Geometricas für diejenigen so sich ins Examen und folgends zu dem teutschen Schulstand zu begeben gesinnet/ zur Anlafs und Nachricht/ jedoch ohne die Beantwortung derselben Fragen, gestellt und in Druck gegeben hat."

Die Schulen in Städten standen zweifellos auch unter entsprechender Aufsicht. Für Regensburg bestätigt dies der vorerwähnte Wendler: Dabei denn der Obrigkeit und Statt Väterliche Aufsicht/ und Verpflegung nach deroselben Würden nicht zur Genüge kann gerühmet werden/ in deme so wol auf Weltlich: als Geistlicher Banck unterschiedliche Herren Deputierte die Schul-Visitationes, umb/ mehrern Fleis bey Lehrern und Zuhörern zu erwecken/ verrichten/ und solche Anstalt machen/ dafs nicht ein einiger Knab einem Lehrmeister in die Handwerks-Schul ohne Erlernung des lieben Catechismi/ Lesens/ Schreibens und Rechnens forthin eingedinget wird/ sintemalen auch die allerärmsten aus Obrigkeitlicher milden Bezahlung hochrühmlichst und dankschuldigst die Wohlthat der Information zu geniefsen haben."

Über die Funktionsbezüge der Rechenmeister geben uns „die Sätz und Ordnungen Einer Ehrbahren Zunfft der Bürgerlichen Teutschen Schuelhaltern in München v. J. 1696 Aufschlufs. Diese Satzungen enthalten unter Ziffer 8 die Bestimmung: Für Lehrgeld soll ihnen alle Quatember Von jedem Kind bezahlt werden/ als welche allein Lefsen und schreiben lehrnen/ dauon mögen sye alle Quatember einfordern 24 kr. Von denen welche gemaine Rechnung lehrnen 40 kr. Von der welschen Practica aber 1 fl.

Im allgemeinen galt das Rechnen lediglich als ein Geschäftsvorteil. Die Eltern wollten, dafs es rasch für den alltäglichen Gebrauch erlernt werde. Pfarrer Kaukol berichtet darüber: „Weilen aber die Eltern selbst als auch die Jugend in dieser spitzfindigen Arbeit der Brüchen den völligen Grund nicht sogar als vielmehr nur die äufserste Nothwendigkeit und dieses auch zur Gewinnung der Zeit gantz succinct und kurz, folgends nicht wenig obscur zu geben und erlernen verlangt haben/ also hat notwendig erfolgen müssen/ dafs man nicht alles fleifsig durchsuchen konnte und dafs man nur soviel als insgemein nöthig erscheint/ davon lernete.“ Kaukol zeichnet hier die allgemeine Stimmung und Richtung. Deshalb genügte das Merken der Regeln, ihre Anwendung und Einübung an Beispielen. Ein bewufstes Hinwirken auf wirkliches Verständnis schien nicht allgemein zu den unerläfslichen Forderungen eines guten Rechenunterrichts zu gehören; daher die Klage über mangelndes Interesse seitens der lernenden Jugend.

So schreibt Hennig Hohnstein, „dafs die löbliche, scharfsinnige Rechenkunst, welche die ingenia excoliere und ausschärffe, in den meisten Schulen so gar neglieret, hindangesetzet und von vielen verachtet wird in der Meinung, die arithmetica möchte ihnen die Töpffe in der Küche umstofsen und ihrer viele schimpfflich von dieser Kunst zu reden sich vernemen lassen: hetten sie Geld“, setzt er mit beifsendem Spott hinzu, „sie möchten es doch wohl zeln“ u. s. w. Die geringe Liebe der lernenden Jugend zur Rechenkunst veranlafst den Scholarchen zu einer Strafrede gegen die „faulen und groben Gesellen, welche sich lieber nach dem aushangenden Bierkrantze umsehen, als der sinnreichen Kunst zu pflegen, die freilich viel Mühe, Nachdenken und Fleifs erfordert“. Damit hängen die eindringlichen Aufmahnungen an die Schreib- und Rechenschüler zusammen.

In dieser Hinsicht ist eine Ansprache Wendlers an die Schüler von Interesse. Sie lautet:

„Euch Schreib- und Rechenkunst beflissenen Knaben lege ich zur ferneren Aufmunterung vor nachfolgende Histori. Im Anfang des wider geoffenbarten Evangelij war zu Braunschweig ein alter Prediger/ wann der auf die Examina in die Schulen kommen/ hat er den Schülern also zugesprochen: Liebe Kinder ihr sollt daran gedenken/ was hier an diesem Ort/ vor eurer Zeit/ für Leut gesessen/ deren viel zu hohen Ehren kommen seyn: Etliche sein hochgelehrte Doctores worden/ etliche Cantzler/ Fürst- und Königliche Räth/ Regenten/ Burgermeister/ Syndici/ Secretarii/ Prediger/ Schulmeister und dergleichen/ welche zuvor eben so kleine arme Schülerlein gewesen sind/ wie ihr ietzt seit/ und haben sich müssen der Ruthen/ so wol als ihr/ unterwerffen:

Sehet zu/ folget ihrem Exempel nach/ seit Fromm/ Fleissig und Gehorsam/ so wird euch Gott auch erhöhen/ dafs ihr grofse Herren und ansehnliche Leute werden könnet. Nun eben dieser dreieinige Geber aller guten und vollkommenen Gaben lasse euch wachsen an Weifsheit/ Alter und Gnaden bei Ihme und den Menschen/ Er numerire euch zu seinem Seegen/ Subtrahiere alle Fehler und Unarten/ und Multiplicire von Tag zu Tag seine Barmhertzigkeit/ damit ihr künfftiger Zeit mit eurem Nechsten auch dividiren könnt dasjenige/ worinnen er euch nach der Regul seines heiligen Worts auffwachsen lassen/ Amen.

Um den Unterricht angenehm zu machen, wurden „Ergötzliche Aufgaben" eingeschaltet, welche meist der Cofs angehören. Wir geben nur ein Beispiel: Item/ ein alter Wolff kam für eines Bauern Schaafstall/ und sprach: Seyd gegrüfst ihs liebsten Schäflein alle 80. Darauf danket ihm ein alter Widder/ antwortend: Nein, Wolff, unser seind nicht so viel als du sagst; denn wann unser zweimahl so viel wären, $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}$ so vil/ und noch 5 darzu/ so wären unser ebensovil als du gemeldt.

Die gleiche Tendenz verfolgen die Reimregeln und Reimaufgaben. Das arithmetische Rechenbüchlein der Specierum und Regula de trie von Michael Schmid (Heilbronn 1705) enthält über die Regeldetri folgende Reime:

Sie ist die Regul dreier Zahlen,
Die Frag setz hinden allemahlen,
Was wie die Frag den Namen hat,
Sollt setzen an die vordere Statt,
Das übrig so den Wert bedeut,
Kommt in die Mitt zu jeder Zeit.

Ein Beispiel über die Regeln der Bruchdivision:

Kommt Division der Brüch ans Werk,
Mein Rechner so behalt und merk:
a) Den Bruch durch eine ganze Zahl,
Den Nenner nehme so viel mal.
b) Ein Ganzes durch den Bruch allhier,
Die Ganz mit dem Nenner multiplicir,
Und teile mit dem Zähler drein.
So mag es wohl gerechnet sein.

c) Und Bruch durch Bruch hält auch nicht schwer;
Den Divisoren, — den verkehr,
Multiplicir die Zähler dann,
Zuletzt die Nenner. Recht gethan.

Nachstehend folgen einige Proben von Reimaufgaben:

Berichte mich/ bitt dich mein Rechner in Eyle:
Was kommt heraufser zum richtigen Theile:
Wann sechzigmahl/ funffzigmahl/ vierzigmahl drey
Man theilet/ in vierzigmahl/ dreifsigmahl zwei.

Beliebter Rechner/ bring herbei:
Wann man dreyhundert vierzig drey/
Von tausend eilf und zwelffen nimbt/
Wie viel der Überschufs bestimbt?

Ein hüpsche Mühl/ als man befunden/
Mahlt 12 Mafs Korn in dritthalb Stunden/
Mein sagt: Wie vil demnach sie dann
In achthalb Stunden mahlen kann?

Die Neigung zur Versifizierung des Lehrstoffes rief in der 2. Hälfte des 17. Jahrhunderts sogar eine Arithmetica poëtica (von Meichsner) ins Dasein, welche kaum eine vereinzelte Erscheinung ist. Es wiederholt sich hier ein Gebrauch der poesievollen Inder, der, schon von Sacro Bosco im Abendlande angeregt, sich bis in die 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts in der deutschen Rechenlitteratur erhalten hat.

Es bedarf keines Beweises, dafs durch die Versifizierung der Regeln und Aufgaben die arithmetischen Lehren nicht deutlicher, verständlicher und behaltbarer wurden, und der in der Zeitrichtung liegende ausgedehnte Gebrauch der Fremdwörter mufste den Rechenunterricht nur noch mehr erschweren.

Die Quaestiones arithmeticae erscheinen im 17. Jahrhunderte auch in deutscher Sprache. Ein Repräsentant der in Fragen abgefafsten arithmetischen Schriften ist das Büchlein Arithmeticae et geometricae quaestiones für diejenigen, so sich ins Examen und folgends zu dem deutschen Schulstand zu begeben gesinnet, von Johann Heer, Schreib- und Rechenlehrer in Nürnberg, 1616. (Vgl. Seite 305.) Hier finden sich die Fragen: 1. Was ist die Arithmetica und was lehrt sie? 2. Wie viel Zahlzeichen werden dazu gebraucht? Was haben sie für ein figürliches Aussehen und wie werden sie ausgesprochen? 3. Was ist eine Zahl? Wozu wird das 1 angenommen und was für Eigenschaften hat das Null? 4. Wie werden die Zahlen eingeteilt und unterschieden? 5. Wie viel sind Species Arithmeticae? 6. Was lehret jede, und wie werden sie probiert? 7. Was sind gebrochene Zahlen? Ist es auch nützlich, darin zu laborieren? 8. Wie vielerlei Arten sind die Brüche? 9. Wie kann man einen Bruch durch eine mensur in seine kleinste Form bringen? 10. Wie werden Brüche gleichnamig gemacht? Wie kann man unter mehreren Brüchen erkennen, welcher der gröſste sei? 11. Wie werden die Brüche nach ihrem Werte resolvieret? 12. Wie werden die Brüche nach den Speciebus am vorteilhaftesten behandelt? 13. Was ist und lehret Regula de trie? Was hat sie für eine Ordnung und wie wird damit prozedieret? 14. Müssen in der Regula de trie allweg drei Dinge bekannt sein? 15. Muſs die Fragzahl jederzeit hinten zur rechten Hand stehen? 16. Warum multiplizirt man die hintere und mittlere Zahl mit einander und dividiert das Produkt durch die erste oder vordere Zahl? Woher hat dieser Prozeſz seinen Grund und Demonstration? 17) Kann einer bei diesem bishero angeführten arithmetischen Wissen für einen Rechenmeister passieren und erkannt werden, oder wird eine mehrere Wissenschaft von einem Arithmetico erfordert? Es folgen nun Fragen über Progressionen, Wurzeln etc. Während ältere Rechenbücher die Anleitung direkt geben mit der Weisung: Fac sic! Thu jhm also! ist hier die Forderung gestellt, den Gegenstand durch Nachdenken unter Benutzung der einschlägigen Litteratur sich klar zu machen, und es tritt sogar die Frage nach dem Grunde auf, allerdings eine seltene Erscheinung in den Rechenbüchern des 17. Jahrhunderts.

Zu Beginn dieses Abschnittes wurde bemerkt, daſs die Gelehrten die Arithmetik den Rechenmeistern überlieſsen, und daſs ihre Weiterbildung nicht gleichen Schritt hielt mit den folgenreichen Entdeckungen in der höheren Mathematik. Das konnte nicht anders sein; denn der Hauptsache nach war die elementare Arithmetik ausgebaut, und nur von einer Seite konnte sie noch eine tiefgreifende Besserung erfahren, von der Methodik. Und blicken wir auf die Zeitbestrebungen, so finden wir in der

That die Pädagogen und Methodiker schon in voller Arbeit, wenn auch vorerst nicht speziell auf dem Gebiete des Rechnens. In Bacon von Verulam, Locke, Ratich, Comenius traten Männer auf, welche sich gegen das zu ihrer Zeit herrschende Unterrichts- und Erziehungswesen wandten und verlangten, dafs der Unterricht naturgemäfs sein müsse; sie eiferten gegen das verständnislose Auswendiglernen, lehrten in der Muttersprache, schufen Unterrichtsmittel in ihrem Sinne, tadelten die harte Zucht und drangen auf Verbesserung der Elementarschulen.

Bisher erschien die Aneignung nützlicher Kenntnisse als Ziel des Unterrichts. Nun wird die Forderung gestellt, dafs der Unterricht die Geisteskräfte des Kindes anregen und in ihrer Entwickelung fördern müsse. Diese Idee ist mit Entschiedenheit ausgesprochen und in musterhafter Weise ausgeführt von Johann Amos Comenius, Bischof der mährisch-böhmischen Brüdergemeinde (1592—1671). Comenius entwarf 1628 den Plan zu einer grofsen Unterrichtslehre, der Didactica magna, in welcher er seine Erziehungs- und Unterrichtsgrundsätze entwickelte. Hier heifst es: Die Jugend insgesamt mufs gebildet werden; dazu bedarf es der Schulen. Die Jugend beiderlei Geschlechts ist den Schulen anzuvertrauen. Die Schulen sind einer Umgestaltung und Besserung bedürftig. Die Grundlage der Schulverbesserung ist eine sorgfältige Ordnung in allem. Wenn man sicher lehren und lernen wolle, so beachte man die Natur. Die Natur aber achtet auf die passende Zeit; sie bereitet den Stoff, ehe sie eine Gestalt einzuführen sich anschickt. die Natur nimmt sich für ihre Thätigkeit ein passendes Subjekt; sie verwirrt sich nicht in ihren Werken, schreitet im einzelnen, jedes für sich bildend, vor; sie beginnt ihre ganze Thätigkeit von innen heraus; die Natur macht keinen Sprung, sondern entwickelt stufenweise; sie vollendet stets das Angefangene und vermeidet sorgfältig Gegensätzliches und Schädliches. Es genügt nicht, etwas sicher zu können; man mufs auch Leichtigkeit (Fertigkeit) anstreben. Darum beginne der Unterricht frühzeitig, vor dem Verderben der Geister, mit gehöriger Vorbereitung derselben. Man gehe vom Allgemeinen zum Besondern, vom Leichten zum Schwerern, übereile sich nicht, beachte das Lebensalter und lehre alles vermöge der sinnlichen Anschauung; denn mehr gilt stets ein Augenzeuge als zehn, die blofs vom Hören wissen.

Man lehre alles zur augenblicklichen Verwendung nach ein und derselben beständigen Methode. Des Lernens halber soll man die Kinder nicht schlagen; ihnen vielmehr alles klar auseinanderlegen, und damit sie sich das alles leicht einprägen, möge man alle möglichen Sinnesthätigkeiten herbeiziehen. In allen Dingen lege man einen guten Grund, so dafs alles nachher auf diesen Grund sich stütze. Alles Zusammenhängende ist beständig zu verknüpfen, alles durch fortlaufende Übungen zu befestigen. Die Worte sollen nur in Verbindung mit Sachen gelehrt werden. Der sachliche Lehrstoff ist zu beschränken, Fremdartiges ferne zu halten. Alles, was einer wissen soll, mufs ihm gelehrt werden, und zwar mit Angabe der Ursachen. Alles möge in Aufeinanderfolge gelehrt werden: zu ein und derselben Zeit immer nur eines. Man halte sich so lange bei einer Sache auf, bis sie begriffen ist. Die Unterschiede der Dinge möge man recht hervorheben, damit die Kenntnis aller Dinge eine klare sei. — Comenius will ein System von Schulen: eine Mutterschule in jeder Familie, eine deutsche Schule in jeder Gemeinde, eine Lateinschule in jeder Stadt und eine Hochschule in jeder Provinz. Die Idee der Mutterschule verlangt, dafs die Hauptsachen der Gegenstände zuerst gelernt werden. Auf das Rechnen angewendet, heifst dies: Die Arithmetik schlägt ihre Wurzeln, wenn der Knabe versteht, was die Begriffe Wenig und Viel bedeuten, und etwa bis 10 zählen kann, wenn er beobachtet, dafs drei mehr sind als zwei, und dafs zu drei eins zugefügt vier gibt u. s. w. Indem Comenius die Lehrziele für die Volksschule angibt, fordert er für das Rechnen, dafs die Kinder mit Ziffern und Steinen rechnen lernen, je nach Bedürfnis, und dafs sie kunstgerecht die verschiedenen Ausdehnungen, Länge, Breite, Abstand etc. ausmessen. — „Wo zur Erbauung von Städten, Burgen, Denkmälern, Zeughäusern ein einziges Goldstück aufgewendet wird, da müssen 100 aufgewendet werden, um einen einzigen Jüngling zu unterrichten, welcher, Mann geworden, anderen zu aller Sittlichkeit und Tugend Führer sein kann (Lehrerbildung). Denn ein guter, weiser Mann ist das kostbarste Kleinod des ganzen Staates, in welchem mehr liegt als in glänzenden Palästen, mehr als in Haufen Goldes und Silbers, mehr als in ehernen Pforten und Riegeln.“ Diese Brosamen aus dem Originalwerke des geist- und liebreichen

Comenius lassen auf den ersten Blick die Morgenröte einer besseren Zeit für die Jugend erkennen. Die Didactika magna weist Anfang, Ziele und Mittel einer gründlichen Bildung der Jugend mit ungeahnter Klarheit und Energie nach. In der Idee der allgemeinen Volksschule ist das pädagogische System des Comenius auch der Jetztzeit noch voraus, und es hätte den Rechenunterricht von Grund aus neu gestalten müssen; denn alles, was Pestalozzi nachmals für das Rechnen erdacht, ist nachweislich in seinen Grundlagen schon in der Didactica magna enthalten. Da brauste der Sturm des Dreifsigjährigen Krieges über die deutschen Lande. Comenius starb als Flüchtling auf fremdem Boden, nachdem er bereits eine Schuleinrichtung geschaffen hatte, in welcher seine Lehren in Wirklichkeit umgesetzt werden sollten. Sein geniales Werk blieb unbeachtet, wurde vergessen, und erst einer späteren Zeit war es vorbehalten, dem erhabenen Denkmale pädagogischer Erkenntnis eine bleibende Stätte in der deutschen Nationallitteratur und in den Herzen der Lehrer zu sichern. Als die 30 Jahre des Greuels und der Verwüstung vorüber waren, und der Friede zurückkehrte, war von den Volksschulen fast die letzte Spur verschwunden. Kaum hatten die Lateinschulen in den Städten noch ein kümmerliches Dasein gefristet; die Nachweisungen über die Dotation der Küster- und Schulmeisterstellen waren verloren gegangen; dem in Elend und Barbarei aufgewachsenen Volke mangelte der Sinn für geistige Interessen; die Staatsregierungen hatten vollauf zu thun, um die gänzlich verwirrten Verhältnisse der Staatseinrichtung und Landesverwaltung wieder zu ordnen. Aber gerade in dieser Zeit mufste ein wohlgeordnetes Schulwesen als das Hauptmittel zur geistigen und sittlichen Hebung des Volkes erscheinen, und damit auch zur Verbesserung der materiellen Lage desselben.

Dafs ein gut organisiertes Schulwesen in der Reihe der neuen Staatseinrichtungen nicht fehlen durfte, erkannte mit weitsehendem Blicke Herzog Ernst von Gotha, der 1640 zur Regierung gelangte. Noch waren die letzten Kämpfe des furchtbaren Krieges nicht ausgefochten, richtete Herzog Ernst schon seine Aufmerksamkeit auf das Schulwesen und entwarf einen Plan, nach welchem in allen Gemeinden seines Landes Schulen errichtet werden sollten. Er ordnete eine Generalvisitation der noch vorhandenen Schulen an, und der hierüber ergangene „spezielle und sonderbare Bericht“

erweiterte sich zum Schulmethodus, einem der kostbarsten Dokumente pädagogischer Weisheit früherer Jahrhunderte. Diese Lehrordnung verdient deshalb besondere Aufmerksamkeit, weil sie sich dem Unterricht des niederen Volkes zuwandte, also den Volksschulunterricht ins Auge faſste, wogegen die pädagogischen Koryphäen der damaligen Zeit, wie Sturm, Neander, Trotzendorf, Ratichius u. a. ihre Thätigkeit mehr auf das höhere Schulwesen ausdehnten. Aus eigener Initiative schuf Herzog Ernst eine populäre Schuleinrichtung, die seit den Zeiten des Karl Borromäus ihresgleichen nicht gehabt hatte. Herzog Ernst führte den Schulzwang ein: „Alle Kinder, Knaben und Mägdlein, so wol in Dörffern als in Städten, sollen, sobald sie das fünffte Jahr ihres Alters zurückgeleget, in die Schule auf die von der Cantzel geschehene Abkündigung ohne Auffenthalt geschicket und dabey so lange, biſs sie was ihnen zu wissen nöthig ist und nachgehends (im Schulmethodus) stückweise erzehlet wird, gelernet haben, und zwar nicht nur im Winter, sondern auch im Sommer beständig gelassen und nicht aus eigener Willkühr davon abgezogen, noch viel weniger gar herausgenommen werden, biſs sie auf geschehene Erforschung von den Vorgesetzten zur Loſszehlung tüchtig erachtet worden und ordentlich abgedancket haben.“ Die allgemeine, alljährliche Schulaufnahme fand an einem bestimmten Termine statt. Täglich wurde ein sechsstündiger Unterricht erteilt; nur am Mittwoch und Samstag trat eine Beschränkung der Unterrichtsstunden ein. Selbst in den Ferien muſsten die Lehrer mit den Kindern, die nicht zur Arbeit gebraucht wurden, 2 Stunden repetieren. Jedes Kind sollte ein Lehr-, Gesang- und Rechenbüchlein haben. Die Schüler waren in 3 Klassen eingeteilt. Der Fortgang des Unterrichts durfte sich nicht nach den besser Begabten richten, sondern man muſste „auf den groſsen Haufen“ achten. Bei allen Lektionen sollten die besseren Schüler beginnen, dann erst die übrigen verhört werden. Auf lautes, deutliches Sprechen und Lesen war beständig Rücksicht zu nehmen, „damit die Kinder fein laut reden und nicht in sich murmeln, jedoch auch nicht gar zu sehr schreien, den Ton und Klang verändern und nicht immer in einem Laut bleiben, Alles recht deutlich und eigentlich vorbringen, und nicht einen Vocalem oder Consonantem für den andern und insonderheit die letzten Syllaben recht aussprechen, den Unterschied der Commatum und Punctorum etc. wohl beachten, nicht zu geschwinde darüber eilen.“ Nach den Vorschriften des Schulmethodus (Kap. II—V) soll das Rechnen in der Mittelklasse mit der Kenntnis der Zahlen beginnen. Es beschränkt sich hier auf die feste Einprägung des Einmaleins und die Addition und Subtraktion. Die Oberklasse soll die Regeldetri und die Bruchrechnung üben. Methodisch bedeutsam sind die Ratschläge: Das Kind soll sich der Gründe seines Verfahrens bewufst werden. Den Zoll sollen die Schulmeister der Jugend nicht blofs vorsagen, aus dem Abrifs zeigen und an die Tafel vormalen, sondern auch an dem Lineal nachweisen, das eben eine Elle lang ist. (Mafsstab und messen.) An einem runden Hute soll gezeigt werden, dafs der Umfang eines Kreises dreimal so grofs ist als sein Durchmesser.

Der Schulmethodus gibt über den Umfang und die Methode sämtlicher Lehrgegenstände eingehende Vorschriften, ebenso über die Schulzucht, das Verhalten des Kindes und der Präceptoren, die Pflichten der Eltern, die Schulprüfung.

Herzog Ernst sorgte auch für Lehrbücher. Rektor Reyher schrieb in seinem Auftrage ein ABC-Buch, ein deutsches Lesebuch, eine Arithmetik und den „Kurzen Unterricht von den natürlichen Dingen“ nebst methodischer Anweisung. Veranschaulichungsmittel aller Art wurden herbeigeschafft. Selbst das Verhalten der Jugend aufser der Schule wurde durch Vorschriften geregelt. Bis zum Jahre 1650 hatte Herzog Ernst schon über 77000 Gulden zur Besserung der Lehrerbesoldungen ausgegeben. Auch die Gemeinden und Patrone zog er zur Aufbringung der Mittel für das junge Schulwesen heran. Er hob die Anstellung der Lehrer auf Ruf und Widerruf auf, gründete einen Lehrerreliktenfond und empfahl testamentarisch die Errichtung eines Schullehrerseminars.

Ein treuer Zögling der Gothaischen Schule, August Hermann Francke, führte die menschenfreundlichen Absichten des Herzogs Ernst mit staunenswürdigem Erfolge weiter aus.

Durch solche Neuerer wurden die Bildungs-Ideale und Bestrebungen des 18. Jahrhunderts vorbereitet, welches man das „pädagogische Jahrhundert“ genannt hat.

Die Rechenkunst im 18. Jahrhunderte.

Die Rechenlitteratur.

In der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts sind die Schreib- und Rechenmeister noch in Thätigkeit. Diese Männer waren als Methodiker Autodidakten; denn Schulen, an welchen sie sich hätten zum Lehrer vorbilden können, gab es noch nicht. Dafs sie auf den Selbstunterricht angewiesen waren, berichtet der Regensburger Schreib- und Rechenmeister Georg Heinrich Paritius (Paricius) 1706, dessen Bildnis[1]) anbei folgt. Paricius, ein intelligenter, geschickter und fleifsiger Mann, der technische Leiter eines Vereins zur Pflege des Kunstrechnens und namhafter Rechenschriftsteller, erzählt nämlich, dafs er sein Compendium verfafst habe, um in unterthänigster Observance zu zeigen, was massen er sich angelegen sein lasse, auf möglichste Art sich je mehr und mehr zum Schulstande geschickt zu machen und neben dem Schreiben auch die Rechenkunst (als welche bei einem deutschen Schullehrer haubsächlich erfordert wird) der Jugend unverdrossen beizubringen.

Fig. 41. Georg Heinrich Paritius.

[1]) Dieses Bild ist der Schreibschule des G. H. Paricius v. J. 1710, einem Meisterwerke der damaligen Schönschreibekunst, entnommen. Über dem Porträt steht: Georg Heinrich Paritius, in der Kunst-Rechnungs lieb- und übenden Gesellschaft der Practicirende — unter demselben: So pflegt das Angesicht Paritij zu lachn̄, den Schreib- und Rechenkunst unsterblich sucht zu machn̄.

Wir müssen daher mit den unterrichtlichen Leistungen dieser Männer nicht blofs billige Nachsicht üben, sondern denselben unsere vollste Achtung zollen. Bei dieser Sachlage tragen die Rechenbücher vorerst noch die Signatur des 17. Jahrhunderts. Die umfangreichen Titel derselben weisen wie ehedem den Rechenstoff en gros aus. Die Vorrede wirft nicht selten Licht auf interessante Zeit- und Schulverhältnisse. Das Lob der Rechenkunst besteht in althergebrachter Weise fort, und Ehrengedichte an die Verfasser der Rechenbücher nehmen hinter den Vorreden einen breiten Raum ein. M. C. E. Paritius widmet z. B. der Arithmetica und in brüderlicher Liebe dem Verfasser Georg Heinrich Paritius folgendes Ehrengedicht:

„Die grofs und kleine Welt kan/ werther Freund bezeigen/
Wie hoch durch deine Kunst die Wissenschaften steigen/
Mit welcher mancher prangt im allergrösten Staat/
Und sieht den edlen Stamm/ der sie getragen hat/
Mit niedern Augen an. So ists/ die blossen Zahlen/
Sind nach dem schlechten Schein von aussen rohe Schalen/
Die unsre Hand veracht/ sobald die süsse Frucht
Den frohen Mund gelabt/ die man darinnen sucht.
Was nützt denn diese Kunst? Sie reichet an die Sterne/
Und zeiget deutlich an/ was unser Aug von ferne
Umsonst zu sehn bemüht. Sie mifst das Erden-Rund/
Sie mifst das tieffe Meer/ die Jahre/ Tag und Stund.
Gott selbsten kunte sie bei seinem Bau nicht missen/
Solt anders unser Geist von seiner Weifsheit wissen.
Sie hat dem wilden Meer die Gräntzen selbst gesetzt/
Dafs ihre grimme Fluth den Menschen nicht verletzt.
Sie herrschet in der Lufft und drucket sie zusammen/
Und zeigt so Reiff und Schnee/ als schweffelichte Flammen.
Sie hält der Sternen Heer in ihrem freien Lauff;
Durch sie schiest Laub und Grafs und alle Beume auff.
Doch zeigt die kleine Welt/ der Mensch/ am allerbesten/
Was ihre Kraft vermag. Sie mufs den Leib verkösten/
Und rechnet accurat auf vieler Jahre Frist/
Wie viel der Menschen sind/ wie grofs die Scheuer ist/
Die ihren Unterhalt pflegt Speifs und Trank zu reichen.
Und soll der Patient nicht nach und nach erbleichen/

So wägt der Medicus erst nach Proportion
Die bittere Artznei: sonst folget schlechter Lohn.
Die Arbeit des Gemüths wird noch so viel versüsset/
Wenn man sie nach dem Maaſs der Zeiten täglich misset.
Kommt aber unser Thun nicht nach der Regul raus/
So streicht man aus Verdruſs die gantze Rechnung aus.
Es lallt kaum unser Mund/ so fengt er an zu zehlen/
Und pflegt bei freier Wahl die gröste Zahl zu wehlen.
Wächst aber der Verstand/ so wachset auch sein Licht/
Sobald ihm diese Kunst eröffnet ihr Gesicht.
O lobenswerther Schluſs/ den unsre alten Lehrer
Mit höchsten Fug gefaſst/ daſs dieser Kunst Verehrer
Der edlen Musen-Schaar gewidmet sollten sein;
Die andern gingen nicht in ihren Tempel ein.
Es stunden diese Wort an ihrer Schulen Thüren:
Drum durffte niemand nicht/ wie jetzt geschicht/ studieren/
Der nicht an dieser Kunst sich lange Zeit ergötzt/
Und gleichsam auf der Prob Verstand und Sinn gewetzt.
Wohlan/ geliebter Freund/ so wird bei unsern Lehren/
Durch deine Wissenschaft/ sich auch der Nutzen mehren/
Den unserer Jugend jetzt Minerva selbst verspricht/
Indem sie deine Hand vorhero abgericht.
Und dieses ist der Zweck der wiederholten Blätter/
Von deiner Rechen-Kunst/ ja den die theuren Vätter/
Der werthen Regen-Stadt bei deinem Thun erzielt/
Als deren Huld dein Fleiſs je mehr und mehr gefühlt.
Gott segne ferner dich/ Gott segne deine Jugend/
Die du nun unterweiſst zur Wissenschafft und Tugend/
So hat dein seltner Fleiſs hier Lob und Ruhm davon/
Und einst nach dieser Zeit der Sternen Glantz zum Lohn.
M. C. E. P.

Auch die Zurechtweisung neidsüchtiger Rezensenten ist bei den Autoren noch in Übung. Der edle Paricius fertigt den Momus mit zwei Zeilen also ab:

Hör, Mome! laſs du mich wie ich dich laſs zufrieden,
So bleibe ich in Ruh und du von mir geschieden.

Das Sulzbacher Rechenbüchlein v. J. 1705 weist die „Thadler. deren es viele giebet“, so zurecht:

Ad Zoilum.

Mein Thadler thu nicht also richten/
Du möchtest doch kein klügeres dichten/
Als dieses ist/ lüsts aber dich/
So stell dein Fleifs auch hier wie ich/
Und lafs difs Werk sein unveracht/
Bifs du ein Besseres hast gemacht.

Doch fehlt es nicht an versöhnlichen Apostrophen an die gefürchteten Kritiker. So sagt Mercklein (Ansbach 1732) offen und ehrlich, wie ein Mann: „Sollte ich nun in einigen Stucken es nicht nach dem Willen aller getroffen oder als ein Mensch gefehlt haben, so bitte ich mir, wie es Christen gebührt, eine modeste Censur aus; ich werde nicht nur gerne hinzusetzen, was vergessen sein sollte, und ändern, was in der That sollte besser von andern beliebet werden, sondern auch zu rechter Zeit wissen, dasselbe öffentlich zu rühmen.“

Die Dedikationen werden namentlich in der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts seltener und verlieren viel von ihrer devoten Sprache. Bei Pescheck (1741) vermissen wir das unterwürfige Ansuchen um die Gunst eines hohen Herrn; er stellt sein Rechenbuch unter höheren Schutz mit dem Spruche: Manu Christi Protegente!

In der 2. Hälfte des 18. Jahrhunderts unterlassen vie derle Autoren die Dedikation ganz: das Zeitalter der Autklärung drückt also schon in gewissen Äufserlichkeiten der Rechenlitteratur seinen Stempel auf. Die treibenden Ideen der französischen Revolution hatten eine andere Zeit geschaffen, und die Schlagworte Freiheit und Gleichheit zogen ihre Kreise sogar auf das scheinbar neutrale Gebiet des Rechnens.

Einen guten Eindruck machen die in den Rechenbüchern enthaltenen Ermahnungen an die Jugend. Der „Hertzliche Wunsch des Paricius an die Kunst- und Tugend-Liebende Jugend“ lautet also:

So viel Ziffern sich in diesen Blättern zeigen/
Die eine schlechte (schlichte) Hand zu euren Diensten weiht;
So vieler Seegen soll sich einsten zu euch neigen/
Die Rechnungs-Wissenschaft hat keinen nie gereut/

Zählt gleich ein Schüler jetzt nur Ziffern auf der Charten/
Wird gleich die Hoffnung nur mit Dinten abgespeist;
So wird es doch geschehen, dafs wann ers kann erwarten/
Ihn dermahl einst die Kunst auch Thaler zehlen heifst.

J. D. de Montalegre sculpsit Zittavia 1741.

Fig. 42.

Ähnliche Ermunterungen zum Fleifs treten auch in den Titelbildern und den hiezu gehörigen Erläuterungen an den Tag. Als Beispiel hiefür möge vorstehendes Kupferblatt aus Peschecks Arithmetischem Hauptschlüssel (Zittau 1741) dienen, welchem nachstehende Erklärung, zugleich als Empfehlung des Buches, beigegeben ist:

„Der Trieb zur Wissenschaft bringt hier ein Kind geführt,
Das gleichsam für Begier zu guten Künsten brennet;
Weil Fähigkeit und Lust sein Hertz von innen ziert
Und hinter ihm der Fleifs sich seinen Schatten nennet.
Seht! wie die Rechenkunst sich auf dem Throne zeigt,
Dem die fünf Species zu so viel Stuffen dienen;
Seht! wie sie auf diefs Kind den Scepter gnädig neigt,
Und wie ihm Phöbus selbst zum Schutz-Gestirn erschienen;
Doch seht und spottet auch die Faulheit, die hier träumt,
Die auf ihr Ebenbild die trägen Glieder strecket,
Und Zeit und Unterricht vergeudet und versäumt,
Weil weder Trieb noch Lust ihr lasses Aug erwecket.
Sie liegt und läfst so Buch als Zirckel neben ihr
Den Händen, die sich gern höchst-nutzbar mit verweilen,
Drum nehmt ihr, was sie hat; Drum kommt und folget hier
Den Kindern nach, die sich in ihre Habschaft theilen.
Wifst, dafs die Rechen-Kunst die Kunst des Reichthums sey,
Durch die wir in der Welt die goldne Zeit genüfsen.
Kommt euch was fremde vor? Der Schlüssel liegt dabey.
Wer diesen Dietrich hat, weis alles aufzuschlüfsen."

Die formal bildende Kraft des Rechnens wird hervorgehoben. Der Neumarkter Schul- und Rechenmeister Joh. Mich. Dannberger (1742) thut dies also:

Lehrn Rechnen, draus erblickht, wie dein Verstand geschickt.
Rechnen schärpft die Blöde Sünen, Mehrer Weisheit zu gewinnen.

Es fehlt auch nicht an Hinweisen auf religiös-sittliche Momente. Dannberger macht bei der Wechsel- oder Tauschrechnung die Erinnerung:

Ungerechtes Gut erwerben,
Bringt gar selten Nutz den Erben.
Gewünnen liegt nicht allezeit
an Menschlicher Geschicklichkeit.

Bei der Regula de Trye oder dem Lehrsatz von dreien Zahlen spricht er, allerdings im Konflikt mit der Orthographie, den Wunsch aus:

Wahre threu soll nit vergehen/
bifs wir Einfs in Dreyen sehen.

Ja er gibt, „dann der Jugent zum Nutzen und Frommen, zwei Alphabet mit Versen, das erste das Tugent: das ander aber das Laster-ABC“ betitelt. Der Eingang zum Tugend-ABC lautet:

O Mensch vernimm und wohl versteh
Das erste christlich ABC
Und merkhe, dafs der/ ienig Christ
in Christi Schuell der beste ist,
der wohl nachlebt diesem ABC.

Jedes Blatt beginnt mit einem Spruch, in dessen Mitte eine mit grofsem Fleifs gezeichnete Initiale steht. Bei den Buchstaben D und L heifst es:

Das D macht doll durch Teufels Kunst
Vor guette Waar gibts läären Dunst
Durch Diebstahl und durch andre Dückh
Bringts endlich an den Galgenstrückh.

Beim L richt auf der Lucifer
sein Laster-Schuell und Lumpen-Lehr
Er liebkost, lüegt und lacht mit Lüst,
So lang bis du gefangen bist.

Die Rechenbücher beginnen noch mit der Definition der Arithmetica; die Einteilung der Zahlen in Digiti, Articuli und Compositi, in gerade und ungerade, in Prim- und zusammengesetzte Zahlen etc. kehrt wieder, weil sich die Autoren hievon Nutzen für die Bruchlehre und die Zerstreuung der Zahlen bei der welschen Praktika versprechen. Das Linienrechnen ist nun aus den Rechenbüchern völlig verschwunden, besteht aber, wie es scheint, im Leben des Volkes noch fort, denn Paricius bemerkt, dafs die Numeri Romani bei der bekannten Zahlpfennigrechnung gebraucht werden. Die Zahl der neu erscheinenden Rechenbücher nimmt im 18. Jahrhunderte stetig zu; Murhard zählt deren an 400 für Deutschland allein. Allmählich zeigen die Titel der Rechenbücher eine veränderte Tendenz an. Früher war man bestrebt, die Rechenkunst kurz, auf das allerkürzeste, leicht, geschwind, behend, selbstlehrend, recht ordentlich und künstlich zu lehren; nunmehr wird der Schuljugend das Rechnen zum „einfeltigsten, jedoch deutlichsten dargestellt, demonstrativ und faſslich“ gelehrt. Es erscheinen „Überzeugende Gründe der Rechenkunst, Vernünftige Gedanken zur nützlichen Erlernung der mathematischen Wissenschaften, insonderheit wie der Verstand zu seinen Verrichtungen vollkommener zu machen“. Die Herausgabe neuer Rechenbücher wird mit der Notwendigkeit klarer und deutlicher Anweisungen motiviert: „Ich habe“, sagt Paricius, „mein Rechenbuch dem Druck übergeben wollen/ nicht als ob dem rühmlichen Fleiſs des seeligen Herrn Wendlers hierdurch ein Abbruch geschehen sollte, sondern vielmehr um das, was bei Herrn Wendlers Rechenbuch (1667) gar zu kurz und dunkel abgefasset, durch diese meine Erläuterung desto deutlicher und heller zu machen“. Pescheck, der Rys des 18. Jahrhunderts, meint selbstbewuſst: „Unangenehm wird der Arithmetische Hauptschlüssel bei denen Informatoribus zu erblicken sein, welche mir alles Böse an den Hals wünschen, nur dessentwegen, weil ich die Rechenkunst so deutlich und leicht vorgetragen, daſs auch ein begieriger Mensch eines fähigen Ingenii dieselbe propria marte (durch eigenen Fleiſs) erlernen kann. Und Clemm bemerkt 1759: Die Absicht, warum ich schreibe, hieſs mich vorzüglich faſslich und deutlich sein; ich will die Mathematik nicht in ein Gedächtniswerk verwandeln. Während die Rechenbücher der letztvergangenen Jahrhunderte vorzugsweise noch die „Kauffmannschaft“ als ihr Absatzgebiet betrachten, mehren sich nun die Schriften, welche „der Jugend zu gute“ geschrieben und zum Teil für Anfänger bestimmt sind, z. B. die Arithmetica oder das Rechenbüchlein der Schuljugend im Fürstentum Sulzbach, gedruckt daselbst bei Lichtenthaler 1705; die Arithmetica Portensis oder die Anfangsgründe für die Pförtnische Jugend von Joh. Georg Gotthold Hübschen, Leipzig 1748; Kurze Anleitung zur Rechenkunst zum Gebrauche in den untern Schulen von Anton Barth, Priester der Gesellschaft Jesu, München 1772; Rechenbuch fur das gemeine Leben, besonders für die Landjugend, Göttingen 1776; Rechenbuch für Kinder von Andreas Grüning, Altona 1783; Gründliche Anweisung zur Rechenkunst für Anfänger in öffentlichen Schulen von M. Metternich zu Maynz 1783; Rechenbuch für ein junges Frauenzimmer, Danzig 1791; Melchinger, Deutlicher Unterricht in den Anfangsgründen des Rechnens, 1791; Schmalzrieds Anfangsgründe im Rechnen u. a. Paricius gibt in seinem Rechenbuche bei den einzelnen Lehren erst eine General-Information für solche, welche des Rechnens kundig sind, dasselbe aber wiederholen wollen, dann einen „Unterricht", welcher eine spezielle Lehranweisung im Anschlusse an ein vorgängiges Exempel für Anfänger enthält.

Es entspricht ganz dem Geiste des Jahrhunderts, wenn die Rechenmethodiker sich Klarheit über die Natur der Zahlen zu verschaffen suchten. Barth sagt hierüber 1772: „Eine Zahl entsteht, sobald wir mehr einzelne Dinge von der nämlichen Art zusammenfassen; z. B. wenn wir zu einem Buch' noch ein anderes stellen, so haben wir zwei Bücher. Stellen wir aber zu einem Buche ein Licht, so haben wir weder zwei Lichter noch zwei Bücher, weil die einzelnen Dinge, das Licht und das Buch, von ungleicher Art sind. Doch wenn wir sie nur schlechthin als Einheiten betrachten, können sie eine Zahl ausmachen, weil sie als Einheiten oder Dinge zu einerlei Gattung gehören". Clemm spricht sich 1759 über diesen Gegenstand wie folgt aus: „Eine Zahl besteht aus einer Menge von Teilen, z. B. 10 Gulden aus Einheiten, von denen jede ein Gulden ist. Folglich hat in der Arithmetik die Einheit selbst noch eine Gröfse und ist eigentlich nur ein Verhältnis, keine absolute, sondern nur eine respektive Einheit". Und Barth bemerkt: „Die Zahlen ungleicher Art sind nichts anders als verschiedene Teile des nämlichen Ganzen, z. B. 3 Gulden 7 Kreuzer 3 Pfennig sind Zahlen ungleicher Art und gehören unter die Gattung der Brüche". Indem solche vernünftige und sachgemäfse Anschauungen sich verbreiteten, wurden die Zahlen aus dem geheimnisvollen Dunkel ihres Begriffs herausgehoben und dadurch der Zahlenmystik, die in früheren Jahrhunderten selbst die gelehrtesten und fähigsten Männer berückte, der Boden entzogen. Nun konnten auch die Begriffe der arithmetischen Elementarfunktionen festgestellt werden, daher verschwindet das Duplieren und Medieren; die Numeration wird aus der Reihe der Species ausgeschieden; denn „sie ist keine Rechnungsart, sondern nur ein nötiger Vorbericht, die Zahlen zu erkennen, auszusprechen und zu schreiben. Als Species kann nur jene Rechnungsart erachtet werden, „da aus zwo bekannten gegebenen Zahlen eine dritte hervorgebracht wird“ (Paricius und Mercklein). Früher wurde erklärt: Addieren heifst, zusammenzählen, gebrauche das Wörtlein **u n d**, nun wird definiert: Addieren heifst, eine Zahl finden, die mehreren gegebenen Zahlen zusammen gleich ist u. s. w.

Die Rechentechnik.

Im 18. Jahrhunderte wird der Kampf zwischen der alten und neuen **N u m e r a t i o n** endgültig zu gunsten der letzteren entschieden. Bis zur Mitte des Jahrhunderts behauptet die alte Schreib- und Leseweise gröfserer Zahlen noch den ersten Platz, obgleich man längst erkannt hatte, dafs sie unpraktisch ist. Paricius bemerkt (1705): Nachdem es der menschlichen Vernunft schwer fällt, so viel tausend mal tausend zu begreifen, kann man die Summen nach Tonnen und Millionen sprechen. Er empfiehlt aber auch, im Anschlusse an Kaukol, dessen Bruchlehre er benützte, die englische Numeration. Weiter sagt er: Die **F r a n z o s e n** bemerken, wie die Engländer, die Tausend; jeder aufsteigenden Million geben sie einen besondern Namen; die zweite heifsen sie Bimillion, die dritte Trimillion, die vierte Quatre-Million, die fünfte Cinque-Million. Clemm meint, **d a f s d i e D e u t s c h e n d i e s e N a m e n v o n d e n F r a n z o s e n a n g e n o m m e n**, weil sie keine eigenen haben, und weil durch öftere Zusammensetzung der Tausende Verwirrung entsteht. Elend (1724) schreibt: $34|56\overset{\mathrm{III}}{7}|890|35\overset{\mathrm{II}}{7}|863|52\overset{\mathrm{I}}{1}|002|165$ und spricht die Zahl in alter Weise nach Tausendern, dann aber auch in Trillionen (III), Billionen (II) und Millionen (I). **M e r c k l e i n** und **C l e m m** schreiben: $4''',123,745''630,456'378,934$ und lesen wie Elend. **W a g e n t r u t z** (1737) schreibt: $\underset{,}{2}\,\underbrace{43}\;\underset{,}{6}\,\underbrace{\dot{8}7}\;\underset{,}{5}\,\underbrace{2\dot{9}}\;\underset{,}{8}\,\underbrace{7\dot{8}}\;\underset{,}{1}\,\underbrace{32}$ und liest gleichfalls erst mit steter Wiederholung der Tausende, fügt aber bei: $10\dot{0}\,000$ ist eine Tonne, $100\dot{0}\,000$ oder ein tausend mal tausend ist eine Million. Pescheck (1741) sammelt die bisher üblichen Leseweisen, spricht aber die Zahl an der 6. Stelle als Tonnen, bei gröfseren Zahlen gebraucht er die Ausdrücke Bimillionen, Trimillionen, Quadrimillionen. Hübsch (1748) schreibt: $\overset{\text{IV}}{7}\,\overset{\text{III}}{593}\,\overset{\text{II}}{218}\,\overset{\text{I}}{400}\,916$ und liest die höheren Zahlen in Potenzen von Tausend, also 7 vierte Tausend ($= 7\cdot 1000^4$), 593 dritte Tausend, 218 zweite Tausend, 400 erste Tausend, 916 — eine Leseweise, welche sich nicht einbürgern konnte. Die französischen Ausdrücke für die Potenzen aus 1000, welche mit den deutschen erst vergleichsweise angeführt werden, treten nach und nach mit diesen als gleichberechtigt auf und verdrängen endlich die alte deutsche Sprechweise ganz. Die gegenwärtig gebräuchliche Manier im Lesen gröfserer Zahlen scheint namentlich durch den Hallensischen Professor und Kanzler Wolf (1713) weitere Verbreitung erlangt zu haben. Wolf sagt: Gleichwie man zehn mal zehn hundert nennt, so nenne man zehn mal hundert—tausend, tausend mal tausend—eine Million, tausend Millionen—eine Billion etc. Diese Benennung geschieht zu dem Ende, damit man sich in grofsen Zahlen nicht verwirre. Die Zahl: $2^{\cdots},125{,}473^{\cdot\cdot}613{,}578^{\cdot}432{,}597$ liest er in Trillionen, Billionen, Millionen etc., ganz so wie dies heutzutage geschieht. Das Wort Tonne hat sich in der Zahlenterminologie nicht behauptet, wohl deshalb, weil es neben der Million überflüssig war und neue analoge Wortbildungen wie die Million nicht zuliefs. Das Wort Milliarde für 1000 Millionen ist erst in neuester Zeit in Deutschland zu weiterer Verbreitung gelangt.

Das Aussprechen gröfserer Zahlen erfolgte früher wohl gröfstenteils mechanisch nach den Signaturen: man merkte sich, so viele Punkte über den Ziffern stehen, so oft mufs das Wort Tausend wiederholt werden; der Bogen unter den Hundertern und Einern der Triaden war das Zeichen, dafs die Einer vor den Zehnern auszusprechen seien. Die senkrechten Striche unter den Ziffern deuten an, dafs man hundert zu sagen habe. In der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts tritt das Bemühen an den Tag, den Schülern den Stellenwert der Ziffern klar zu machen. Man sprach deshalb von Einern, Zehnern, Hundertern und reihte die Ziffern nach dem Stellenwerte in graphische Schemate. Eine in dieser Hinsicht interessante methodische Auseinandersetzung ist die des Jesuiten Spengler v. J. 1773. Dieselbe lautet wie folgt: „Alle Zahlen, sie mögen grofs oder klein sein, auszudrücken, bedienen wir uns nur 10 Zeichen. Bei jedem, das Null ausgenommen, mufs man einen doppelten Wert unterscheiden. Den ersten Wert hat ein solches Zeichen sozusagen von seiner Natur oder von der ersten Einsetzung, den andern Wert bekommt es von dem Orte, wo es steht. Steht es am ersten Orte rechter Hand, so bedeutet es schlechterdings Einheiten, steht es am zweiten Orte, so bedeutet es so viel mal zehn, als es sonst Einheiten bedeuten würde. Das Zeichen 0 bedeutet für sich selbst nichts, doch dienet es, den Wert der andern zu vermehren. Also, wenn 3 allein steht, bedeutet es 3 Einheiten, setzet ihr aber zwo Nullen darnach und schreibet 300, zeiget es schon dreihundert an, weil das Ziffer 3 nun schon am dritten Orte steht. Es ist leicht, kleine Zahlen auszusprechen. Aber wenn eine Zahl aus vielen Ziffern besteht, braucht es schon einen Vorteil. Man soll z. B. die Zahl $3'''405\cdot621''543\cdot021'230\cdot567$ lesen. Teilet diese Zahl, von der rechten Hand angefangen, in ihre Klassen ab, also dafs ihr jeder Klasse 3 Ziffern gebet. Nach der ersten Klasse macht oben ein Düptlein, nach der zweiten ein Strichlein etc. Alsdann sprecht jede Klasse ebenso aus, als ob sie allein stünde; folget ein Düpflein, sprecht tausend; folget ein Strichlein, sprecht Million, bei 2 Strichlein Billion etc. Die Zahl heifst also: 3 Trillionen, 405 tausend 621 Billionen, 543 tausend 21 Millionen, 230 tausend 567". Nachdem Spengler das Zahlen*lesen* geübt, folgt das Zahlen*schreiben*, denn ersteres ist leichter als das letztere, worauf man in früheren Jahrhunderten keine Rücksicht genommen hatte. „Eine Zahl", fährt Spengler fort, „welche man aussprechen hört, recht zu schreiben, fällt insgemein den Anfängern recht beschwerlich. Doch diese Beschwernifs wird vermindert durch folgende Tabelle. (S. Seite 327.)

In dieser Tabelle seht ihr, dafs nach der ersten Klasse oder nach 3 Ziffern die Tausende, nach der 2. Klasse oder nach 6 Ziffern die Millionen etc. kommen. Wenn ihr also eine Zahl aussprechen hört, so könnt ihr alsogleich schliefsen, wie viele Ziffern, wie viele Klassen ihr braucht; schreibt dann jede Klasse sonderheitlich. Wird eine Klasse im Aussprechen gänzlich ausgelassen, oder bekommt sie nicht 3 Ziffern, so füllt die leeren Plätze mit Nullen.“

3	5	8	4	2	1	9	6	7	5	4	8	3	2	1
Hundert Billionen	zehn Billionen	Billionen	hunterttausend Millionen	zehntausend Millionen	tausend Millionen	hundert Millionen	zehn Millionen	Millionen	Hundert tausend	zehn tausend	Tausend	Hundert	Zehner	Einheit

Das Addieren hat längst die dermals gebräuchliche Form angenommen. Die Subtraktion wird im doppelten Sinne gefafst, als Wegnehmen und Unterschiedsuchen. „Die Abziehung gebrauchen wir, um zu erkennen, um wie viel eine gegebene Gröfse eine andere übertreffe, oder was für ein Unterschied zwischen zwoen Gröfsen sey; oder endlich was für ein Rest bleibe“. Demgemäfs erscheint das Subtrahieren in der schriftlichen Form bald als Addition der Differenz zum Subtrahenden, bald als wirkliches Abziehen oder Wegnehmen des Subtrahenden vom Minuenden. Das Riesesche Verfahren, vom entlehnten Zehner abzuziehen und zum Reste die rechtsstehenden Einer zu addieren, war, wie es scheint, wieder aufser Gebrauch gekommen. Die Aufgaben ohne und mit Entlehnen werden nun allgemein streng auseinandergehalten, wie beim Addieren die Aufgaben ohne und mit Übergang der Teilsummen in höhere Ordnungen. Pescheck läfst bei der untern Zahl borgen, weil dieses Verfahren beim Dividieren bequemer ist, führt aber die gegenwärtig gebräuchliche Weise, welche bald allgemein wird, als Lehre der Mathematique an.

Bei der Multiplikation besteht die Forderung, das Einmaleins zu memorieren, mit gleicher Eindringlichkeit fort. So schreibt Hemeling, Schreib- und Rechenmeister der Stadt Hannover, in seinem arithmetischen Trichter v. J. 1711:

»Wer fertig will im Rechnen sein,
Der lehrne wohl das Einmalein.«

Tobias Beutels Arithmetik v. J. 1721 (10. Auflage) enthält die Mahnung:

»Gleich wie man einen Turm durch Staffeln mufs ersteigen,
So mufs das Einmaleins den Weg zum Rechnen zeigen.«

»Kein Rechnen sagt dir wie es soll,
Du könst das Einmalein dann wohl.«
(Mauracher 1746.)

Man beschränkt sich aber auf die Kenntnis des sog. *kleinen* Einmaleins. »Weil von 10 bis 100 alle einfachen Zahlen wieder vorkommen, so auch von 100 bis 1000, hat man genug, wenn man die schnelle Addition von 1 bis 9 auswendig kann.« (Clemm.) Die Einmaleinstabellen enthalten wie ehedem die Produkte mit gleichen Faktoren nur einmal. In den einzelnen Gesetzchen wechselt der Multiplikand, also: 2×3, 2×4, 2×5; 3×3, 3×4 etc. Dem sog. pythagoreischen Einmaleinstäfelchen gibt man vielfach den Vorzug, weil es weniger Platz beansprucht, und weil man sogleich »für sich und hinter sich« multiplizieren, also sofort wissen kann, wieviel 7 mal 9 und 9 mal 7 sei. Merkwürdigerweise taucht gegen Ende des 18. Jahrhunderts die Multiplikation mit dem dekadischen Komplement wieder auf. Barth (1772) verlangt von seinen Schülern nur die Einmaleinsprodukte $2 \cdot 2$ bis 2 8, dann $3 \cdot 3$ bis $3 \cdot 8$, dann $4 \cdot 4$ bis $4 \cdot 8$; diese müssen sie auswendig lernen. Die in den Gesetzchen für 6, 7, 8 und 9 enthaltenen Produkte werden mit Hilfe der *Finger* gefunden. Lassen wir ihn selbst sprechen: »Mache mit beiden Händen eine Faust und zähle bei jeder 5 zum voraus. Um so viel nun jeder Faktor die Zahl 5 übertrifft, so viel Finger strecke in jeder Hand aus, die übrigen lasse liegen. Die ausgestreckten Finger bedeuten Zehner. Multiplizierst du nun die Zahlen der liegenden Finger durcheinander und setzest das Produkt zu den gefundenen Zehnern, so erhältst du das Facit. Beispiel: 6 mal 7. Weil $6 - 5 = 1$ und $7 - 5 = 2$, so streckest du an einer Hand einen, in der andern zwei Finger in die Höhe und zählest 30. Weil aber in der einen Hand 3 und in der andern 4 Finger liegen geblieben, so sagst du 3 mal 4 ist 12; 30 und 12 ist 42.« Dazu gibt Barth eine Tafel mit Abbildungen der diesbezüglichen Fingerstellungen. Dem Rechenmethodiker ist dieses Verfahren ein neuer Beweis dafür, dafs den Rechenschülern die Einprägung des Einmaleins eine schwere Aufgabe ist, welche ihnen durch psychologische Hilfen erleichtert werden mufs[1]).

In den schriftlichen Multiplikationsformen zeigt sich auch im 18. Jahrhunderte noch eine erhebliche Mannigfaltigkeit, z. B.:

695	695	47	6754
9	9	39	98
45	5415	1263	545432
81	84	36	6860
54	6255	21	4436
6255		1833	35
			661892

Doch behauptet die jetzige Schulmultiplikation den Vorrang.

Beim Dividieren wird der Unterschied zwischen Enthaltensein und Teilen selten erfafst. Gewöhnlich heifst es: Dividieren heifst suchen, wie oft eine Zahl in einer andern beschlossen oder enthalten sei; wie oft sie davon kann abgezogen werden. Das Übersichdividieren erhält sich durch das ganze Jahrhundert, beschränkt sich allmählich auf die Division mit einstelligem Divisor und verschwindet in den ersten Decennien des 19. Jahrhunderts. Pescheck heifst das Übersichdividieren die spanische Art. Das Untersichdividieren tritt nun häufiger mit unwesentlichen Abänderungen auf. Pescheck berechnet das Beispiel 19 in 113506 so:

19 in 113506 | 5974
6847
1973
1

[1]) In der Walachei werden heute noch die Einmaleinsprodukte, welche sich aus den Faktoren von 5 bis 10 ergeben, mit Hilfe der Finger gesucht. Man verfährt dabei (nach Villicus) wie folgt: Die Finger jeder Hand, vom Daumen an gerechnet, erhalten die Werte 6, 7, 8, 9, 10, der Daumen gilt also 6, der Zeigefinger 7 u s. w. Soll nun das Produkt 6 mal 9 gefunden werden, legt man über den Daumen (6) der einen Hand den Goldfinger (9) der andern Hand. Die Anzahl der übrig bleibenden Finger, hier 4 Finger an der einen und 1 Finger an der andern Hand, mit einander multipliziert, gibt $1 \cdot 4 = 4$; das ist die Zahl der Einer. Hierzu setzt man so viele Zehner, als Finger an beiden Händen zu dieser Multiplikation, einschliefslich der 2 aufeinanderliegenden, nicht gebraucht worden sind, also $4 + 1 = 5$ Zehner; somit ist $6 \cdot 9 = 54$.

Hier werden die Produkte aus dem Divisor und den Bestandteilen des Quotienten nicht angeschrieben, sondern im Kopfe subtrahiert. Pescheck bemerkt, das sei die Art der Kaufleute, um den Platz zu menagieren. Diese Form steht dem Übersichdividieren näher als dem modernen Verfahren. Die Reste werden wie beim Übersichdividieren gewonnen, nur wird der Divisor dem Dividenden vorangesetzt und nicht fortgerückt. Daneben hat Pescheck das gegenwärtig eingeführte Verfahren, welches er die »frantzösische Art« nennt. Beispiel:

```
12 in 3560870| 296739
      24
12 in 116
      108
12 in  80 etc.
```

Mauracher (1746) behandelt das Untersichdividieren in abgekürzter Weise, indem er die Reste mit der nächstfolgenden Ziffer des Dividenden anschreibt:

```
Divisor | Dividend
      8 | 98760
        | 18      )
        |  27     |
        |   36    } Reste.
        |    40   )
        | 12345 Quotient.
```

Barth (1772) hat nachstehende Form:

```
66734 | 205 109/325
 325
650
 1734
  325
 1625
  109
```

Mercklein (1732) verbindet das Untersichdividieren mit dem Übersichdividieren. Die Produkte aus dem Divisor und den Bestandteilen des Quotienten setzt er unter den Dividenden, die Reste darüber. Um Verwirrung zu vermeiden, werden die aufser Gebrauch gesetzten Ziffern, dem Gange der Rechnung folgend, ausgestrichen. Beispiel:

```
          13
        337·792
332) 3659 4368 (110224
        332
         332
           6 64
            664
            1328
```

„Diese Art der Division", sagt Mercklein, „ist die leichteste, geschwindeste und gibt auch dem Wurzelausziehen Licht. - Man hat mehrere Arten der Division, der Anfänger aber lerne nur eine".

Paricius dividiert wie folgt:

```
239 | 720000 | 3012
      717|||
      ··3||
      239|
       61|
      478
      132
```

Clemm hält die beiden Hauptformen des Dividierens vergleichsweise gegen einander und bemerkt: »Das Untersichdividieren ist leichter, das Übersichdividieren bei kleinen Zahlen kürzer, bei gröfseren aber verwirrend, weil man genötigt ist, die Ziffern auszustreichen, und weil man Ziffern, die oft mehrere Zoll auseinanderstehen, zusammennehmen mufs. Endlich kann man das Übersichdividieren ohne lebendigen Lehrmeister nicht erlernen.« Spengler macht auf den bereits (S. 88) erwähnten Mangel unseres Divisionsverfahrens aufmerksam, welcher namentlich dem Anfänger beschwerlich fällt, indem er bemerkt: „Diese Art zu dividieren ist nun ziemlich verdriefslich, weil man die Sache erst versuchen mufs, oft mehrmals. Dies geschieht absonderlich dann, wenn die zweite Ziffer des Divisors eine grofse Zahl, z. B. 9 oder 8 ist. Um dieser Beschwernus in etwas abzuhelfen, ist die Regel dienlich: So oft die erste Ziffer des Divisors in der ersten Ziffer des Dividenden enthalten oder, wenn die erste Ziffer des Divisors gröfser als die erste Ziffer des Dividenden, so oft die erste Ziffer des Divisors in den zwei ersten Ziffern des Dividenden enthalten ist, eben so oft mufs auch die zweite Ziffer des Divisors in der zweiten oder dritten Ziffer des Dividenden enthalten sein. Beispiel: 198 in 8023. Fragt, wie oft ist 1 in 8 enthalten? Antwort 8 mal. Aber dieser Quotient 8 ist zu grofs, weil die zweite Ziffer 9 in 0 nicht enthalten ist. Es ist auch 7 zu grofs, denn werden 7 von 8 abgezogen, bleibt 1, welches mit der nächsten Ziffer des Dividenden 10 macht u. s. w.« Man sieht, dafs die schwerfällige Regel für den Unterricht der Anfänger nicht brauchbar ist, und dafs das Probieren, wie oft der Divisor in jeder Klasse des Dividenden enthalten sei, doch nicht beseitigt wird. Das sah Spengler selbst ein, darum empfahl er nach dem Vorgange von Tartaglia, Metius (1633 u. 1646), Elend (1724) u. a. die Anlage eines Produktentäfelchens, in welchem sämtliche Produkte des Divisors mit den Zahlen von 2 bis 9 enthalten sind. Solche Produktentabellen sind zwar ein Auskunftsmittel für den ersten Unterricht, aber für die allgemeine Praxis wegen der mit ihrer Herstellung verbundenen Zeitversäumnis nicht anwendbar. So bleibt der Mangel unserer Divisionsformel noch bestehen, und wir sind genötigt, den Rat zu befolgen, den uns vor fast 400 Jahren Rudolf gegeben hat: »Das einmaleins fertig gelernt/ darnach fleyssiges vberschlahen/ vnd stete vbung müssen solches geben.« Die Stellung des Divisors zum Dividenden wechselt; er steht bald vor, bald hinter, bald unter demselben, und heute noch hat er im Rechnen der Volksschule keinen festen Platz.

Die Terminologie des Rechnens ist im 17. und 18. Jahrhunderte, mehr noch in letzterem, überreich an Fremdwörtern, ganz dem Gebrauche der Zeit entsprechend; ja, es finden sich deren genug sogar in Schülerbüchern. Sehen wir ab von den zahlreichen lateinischen Redewendungen und beschränken uns auf die Kunstausdrücke in den Grundrechnungsarten, so finden wir nach der Numeratio oder Notatio für die zu addierenden Zahlen die Benennungen: aggregandi, termini addendi, colligendi, summandi. Das Ergebnis der Addition hiefs Summa, Aggregat, Collect, das Schlufsergebnis bei Teilsummen Summa summarum. Die Zahl, von welcher abgezogen wurde, hiefs Integrum, numerus minuendus, superior, minuendus; die Zahl, welche abgezogen werden soll: Subtrahendus, Subducendus, Subtractor, Subtrahens, inferior. Was übrig bleibt, ist das residuum, reliquum, die differentia. Die Zahl, welche multipliziert wird, heifst multiplicandus, die, mit welcher vervielfältigt wird, multiplicans, multiplicator, beide auch factores. Die Zahl, welche dividiert werden soll, heifst dividendus, mensurandus, numerus divisus, totum; die Zahl, mit welcher dividiert wird: dividendus, mensura, divisor; das Ergebnis der Division hiefs quotus, quotiens. Gegen Ende des Jahrhunderts treten die Fremdwörter in den Rechenbüchern mehr und mehr zurück, und die alten deutschen Ausdrücke: Zusammensetzung, Abziehung, Vervielfältigung etc. gelangen wieder zu ihrem Rechte.

Bei Anwendung der Species ging man auch im 18. Jahrhundert nach Art der italienischen Praktika auf Rechenvorteile aus. Es wurden a) einziffrige Zahlen bei der Addition gleich gemacht durch Zu- und Abzählen und dann multipliziert, z. B. $5 + 7 + 8 + 6 = 4 \cdot 6 + 2 = 26$. b) Zahlen, welche nahe an Zehnern oder Hundertern standen, wurden ab- oder aufgerundet, das Fehlende wurde addiert, der Überschufs subtrahiert, z. B. $246 + 95 = 246 + 100 - 5$, oder $8 \cdot 96 = 800 - 32$. c) Beim Multiplizieren wurde der Multiplikator in Eimaleinszahlen zerfällt und mit jeder einzeln multipliziert, z. B.: $67869 \cdot 36$; $67869 \cdot 6 = 407214$; $407214 \cdot 6 = 2443284$. War der Multiplikator kein Einmaleinsprodukt, wurde das nächstliegende angenommen, und das Resultat schliefslich durch Addition oder Subtraktion richtig gestellt, z. B.: $23 \cdot 356 = 24 \cdot 356 - 1 \cdot 356 = 8544 - 356 = 8188$. d) Ebenso wurde der Divisor in Faktoren zerlegt; „wann er eine gedoppelte oder Primzahl, so zerfället man solchen Divisoren in 2 oder mehrere einfache Zahlen, welche, mit sich selbst vermehrt, den Divisor bis auf 1 mehr oder weniger wieder hervorbringen, das überbleibend oder abgehend setzt man rechter Hand neben den Divisor und bezeichnet den Excefs mit +, den Defect mit − und operiert wie folgt:

4352 durch 17

$$\begin{array}{lr} \underline{17} & \underline{4352} \\ 4 & \underline{1088} \\ 4 + 1 & 272 \\ & \underline{16} \\ & 256 \end{array}$$

Teile 4352 erst durch 4, den Quotus wieder durch 4. Wegen 1 ist der 17. Teil aus dem Rest 272 zu suchen, das ist 16; 16 von 272 subtrahiert, gibt 256". e) Gewisse Zahlen wurden in bequeme Quotienten umgewandelt, z. B. 25 in $\frac{100}{4}$, $12\frac{1}{2}$ in $\frac{100}{8}$, $16\frac{2}{3}$ in $\frac{100}{6}$, $33\frac{1}{3}$ in $\frac{100}{3}$, 250 in $\frac{1000}{4}$ u. s. w.

Die Neunerprobe besteht fort, aber auch die Klage über ihre Umständlichkeit und Unzuverlässigkeit. »Man hat zwar«, sagt Clemm, »eine sogenannte Neunerprobe, allein diese ist so beschaffen, dafs man bei derselben leichter irren kann, als bei der Addition selbst; nebendem ist sie auch so weitläufig, dafs man weniger Zeit braucht, das Exempel noch einmal durchzugehen, als diese Prob zu machen. Eine Prob aber, die weitläufiger und beschwerlicher ist, als die Operation selbst, ist nicht anzuraten«. Und Spengler bemerkt: Die Neunerprobe ist nicht untrüglich; denn wenn ihr um 9 oder 18 etc. gefehlt hättet, würdet ihr dennoch eine gleiche Zahl oben und unten ins Kreuz bekommen. Auch das Büchlein für die Karlsschule empfiehlt statt der Rechenproben die wiederholte Durchrechnung.

Das Rechnen mit mehrsortigen Zahlen wird nun fast allgemein als eigene Übungsgruppe behandelt. Es schliefst sich dem Rechnen mit »ledigen« (reinen oder unbenannten) Zahlen an. Den Vorkursus hiezu bilden Belehrungen über die geltenden Münz-, Mafs- und Gewichtssysteme mit vielen Unterabteilungen, »schwartzer und weifser Müntz, Mafse der trockenen und nassen Wahr, vom Saltz (Pfund und Scheiben), vom gemeinen, böhmischen, Apotheker-, Gold- und Silbergewicht etc.« in fast endlosen Reihen. Paricius gibt über die Addition mehrsortig benannter Zahlen die Regel: »Will man die Exempla additionis in mehrfachen Benennungen in eine Summe bringen, so fängt man bei der geringsten Sorte an zusammenzuzählen, kommendes (die Summe) dividiert man durch dessen Wert oder Wechsel (durch die Reduktionszahl, z. B. die Summe der Kreuzer durch 60) und macht gröfsere Sorten daraus, schreibt auch die daraus kommenden gröfseren Sorten zur nächsten (zweiten Stelle) und die geringen Sorten, die in der Division übrig bleiben und kein Ganzes ausmachen, hinwiederum an die erste Stelle. (Es werden also auch hier die mehrsortigen Zahlen als Brüche aufgefafst.) Dabei ist zu observieren, dafs in einem Termino weniger stehen müssen/ als deren ein Ganzes in sich enthält, denn wenn deren mehr als ein Ganzes sind, machen sie einen Soloecismum Arithmeticum«. Die Subtraktion mit mehrfachen Benennungen heifst Paricius die gedoppelte Subtraktion; in der That findet hier ein zweifaches Subtrahieren statt, bei den Zahlen und den Sorten; es mufs deshalb auch nicht nur bei höheren Zahlordnungen, sondern auch bei höheren Sorten entlehnt werden. Der Multiplikation geht wie im vorigen Jahrhunderte die Übung voraus, »wie macht man aus grofsen Sorten kleine«, und der Division die Übung, »wie aus kleinen Sorten grofse zu machen (unser Resolvieren und Reduzieren). Bei der Multiplikation und Division wird gezeigt, wie man die höheren Sorten in niedere auflöst und dann multipliziert oder dividiert, oder wie man bei der niederen Sorte anfangend multipliziert, bei der höheren anfangend dividiert. Zur Zeitrechnung ist die Bemerkung gegeben: »Weilen die Monate ungleiche Täg haben, so mufs man allweg besehen, wie viel Täg derselbe Monat hat, von dem man abzieht und notfällig entlehnt.«

Die Bruchlehre, das subtile Kapitel des Rechnens, wird weiter ausgebildet und, abgesehen von den meist undeutlichen Ansatzformen, nicht selten mit grofser Ausführlichkeit, in systematischer Ordnung und organischer Entwicklung der Begriffe, Lehrsätze und Regeln behandelt. Zunächst wird eine Definition des Bruches zu geben versucht. Paricius fragt: »Was seynd gebrochene Zahlen? Teile oder Stücke eines gantzen/ und werden mit 2 Zahlen geschrieben; die obere Zahl (Zehler) zehlet wie viel Teile eines gantzen verhanden, die untere (Nenner) nennet, in wie viele Teile das Ganze zerlegt ist, oder was für Teile es sind, z. B. Drittheil, Vierdtheil.» Clemm sagt: »Brüche sind geometrische Verhältnisse, d. h. Zahlen, welche durch eine andere dividiert werden.« Auf die Wertvergleichung zweier oder mehrerer Brüche wurde Gewicht gelegt. »Den Wert eines Bruches zu erkennen«, bemerkt Spengler, »mufs man weder den Zähler noch den Nenner allein betrachten, sondern das Verhältnis des Zählers zum Nenner und gilt jederzeit jener Bruch mehr, in welchem der Zähler minder oft im Nenner enthalten ist, also gilt $\frac{2}{3}$ mehr als $\frac{6}{13}$. Unter zwei Brüchen, die den nämlichen Nenner haben, ist derjenige der gröfste, welcher den gröfsten Zähler hat. Ist in zwei Brüchen der Zähler gleich oft im Nenner enthalten, so sind beide Brüche gleich.« Nebstdem werden die

Brüche nach ihren besonderen Eigentümlichkeiten in Gruppen gefafst, wie das schon Kaukol im vorigen Jahrhunderte gethan hat. Die Anwendung der Species auf die Brüche machte besondere Vorübungen notwendig, welche noch heute in Geltung sind. Sie lassen sich in zwei Gruppen zusammenfassen: erstens Formveränderungen, bei welchen die Brüche ohne Veränderung ihres Wertes in kleineren oder gröfseren Zahlen ausgedrückt wurden; zweitens: Die Anwendung der Brüche auf unterschiedliche Sorten von Münzen, Mafsen und Gewichten. Zur Formveränderung gehörte die Contractio oder Zusammenziehung, das sog. Verkleinern. Diese Funktion ist aus dem Bedürfnisse hervorgegangen, mit kleinen Zahlen zu rechnen, »denn es ist gewifs, dafs man mit einer Fraktion (fractio, das Brechen), die durch kleinere Zahlen ausgedrückt ist, im Rechnen jederzeit leichter fortkomme, als mit eben dieser Fraktion, wenn sie aus grofsen Zahlen besteht, und es werden die arithmetischen Funktionen leichter mit $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{3}$ als mit $\frac{16}{32}$ und $\frac{9}{27}$ vorgenommen. Man mufs daher die Brüche zu reduzieren wissen. Um einen Bruch in kleineren Zahlen auszudrücken, dividiert man Zähler und Nenner durch die nämliche Zahl. Um diese Zahl zu finden, beachte: Wenn im Zähler und Nenner die letzte Zahl eine 0 ist, können beide durch 10 dividiert werden, wenn die letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist, durch 5, wenn sie eine gerade Zahl ist, kann man beide so lange halbieren, bis man auf den kleinsten Ausdruck kommt, oder endlich: man dividiert den Nenner durch den Zähler, den Rest durch den vorhergehenden Divisor u. s. f. Die Zahl nun, so zuletzt also dividiert, dafs es aufgeht, ist der gesuchte Maximus communis Divisor.« (Barth.) Dabei findet auch ein Eingehen auf die Gründe des Verfahrens statt. Paricius fragt: »Können alle Brüche verkleinert werden? Nein, nur die komponierten. Was ist Ursache, dafs man nicht alle Brüche verkleinern kann? Weil nicht alle Brüche aus komponierten oder durch Multiplikation gemachten, sondern bereits aus denen kleinsten oder Primzahlen bestehen. Wobei erkenne ich, ob ein Bruch schon in den kleinsten und Primzahlen besteht? Wenn die wiederholte Division zuletzt nicht aufgeht.« Zu den Formveränderungen gehört auch das Gleichnamigmachen. Hierbei wurden mehrere Fälle unterschieden, die von Kaukol schon bezeichnet sind. Nenner, welche in anderen schon »exacte enthalten waren«, wurden durchstrichen oder ausgelöscht, z. B.: $\frac{1}{\cancel{3}}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{5}{\cancel{12}}$ $\frac{7}{16}$ $\frac{11}{24}$. Man suchte dann für die übrigen Nenner noch den gemeinschaftlichen Faktor. »Der Beweis dieser Regel ist ganz leicht. Man darf nur nicht übersehen, dafs der Wert eines Bruches nicht geändert wird, so lange das Verhältnis des Zählers zum Nenner dasselbe bleibt; also bleibt auch der Wert eines Bruches ungeändert, wenn man Zähler und Nenner mit derselben Zahl multipliziert.«

Die Resolution und Reduktion der Brüche bezweckte die Anwendung derselben auf benannte Zahlen, z. B.: a) $^5/_6$ fl. wie viel machens Kreuzer? b) $21\,^1/_3$ Loth, was machens für einen Teil eines Pfundes?

Berechnung:

$$\text{a)}\quad \begin{array}{c} 5 \\ \hline 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 60 \\ \underline{5} \\ 300 \\ 66 \end{array} \ (50 \text{ Kr.} \qquad\qquad \text{b)}\quad \begin{array}{c} 21\frac{1}{3} \\ \hline 64 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ \underline{3} \\ 96 \end{array} \quad \begin{array}{c} \overbrace{64}^{32} \\ 96 \end{array} \Big| \frac{2}{3} \text{ Pfund.}$$

Der Reduktion wurden auch die Partio aus Brüchen oder die Brüche aus Brüchen, sowie die unordentlichen und unordentlich gemischten Brüche unterstellt, z. B.: $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{5}$ aus $\frac{1}{2}$? Oder $\frac{1}{2}$ — 5, d. i. $\frac{1}{2}$ Fünftel, $3\,^1/_2$ — 3, d. i. $3\,^1/_2$ Drittel. Beide Formen gehören aber, wie leicht ersichtlich, der Bruchdivision bezw. der Multiplikation an, denn $\frac{1}{4}$ von $\frac{2}{5}$ aus $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}$, und $3\,^1/_2$ Drittel ist $3\,^1/_2 \cdot {}^1/_3 = {}^7/_2 \cdot {}^1/_3$. Pescheck macht die Anwendung auf benannte Zahlen also: $^1/_4$ von $^2/_3$, das ist so zu verstehen. Du hättest einen ganzen Thaler in 3 Teile, also in 3 Achtgroschenstücke, geteilet und von solchen 3 Teilen 2 Teile, d. i. 2 Achtgroschenstücke, abgenommen, das wäre $\frac{2}{3}$. Diese $\frac{2}{3}$ oder 16 Groschen wollest du hinwieder in 4 Teile zerteilen und von solchen 4 Teilen einen wegnehmen, das wären nun 4 Groschen oder $\frac{1}{6}$ Reichsthaler. Auch beim Gleichnamigmachen und den Spezies wird die Beziehung der Brüche zu benannten Zahlen festgehalten.

Bei der Bruchaddition finden sich die komplizierten Formen des 17. Jahrhunderts neben den Formen des 19. Jahrhunderts:

a) bei Dannberger 1742; b) bei Pescheck 1741: c) bei Barth 1772; d) bei Spengler 1773.

$$\text{a)}\quad \begin{array}{ccc} \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} & \text{Und} & \frac{4}{5}\times\frac{3}{4} \\ \hline 4 & & 16 \\ \frac{3}{} & & \underline{15} \\ \frac{7}{6} & \cdot >< & \frac{31}{20} \\ & \overline{186} & \\ & \underline{140} & \\ & \frac{326}{120} & \end{array} \qquad \text{b)}\quad \begin{array}{c|c} \multicolumn{2}{c}{24} \\ \frac{1}{3} & 8 \\ \frac{3}{4} & 18 \\ \frac{5}{6} & 20 \\ \frac{7}{12} & 14 \\ \frac{13}{24} & 13 \\ \hline & 73 \end{array}$$

$$\text{c)}\quad \frac{2}{5}+\frac{3}{7}=\frac{14}{35}+\frac{15}{35}=\frac{29}{35}$$

$$\text{d)}\quad \begin{array}{ll} \text{Gegeb. Brüche} & \frac{3}{5}+\frac{1}{2}+\frac{3}{4} \\ \text{Reduz. Brüche} & \frac{24}{40}+\frac{20}{40}+\frac{30}{40} \\ \text{Summe der Brüche} & \frac{74}{40}=1\frac{34}{40}=1\frac{17}{20} \end{array}$$

Elend (1724) hat für die Bruchsubtraktion folgenden Ansatz:

$$\begin{array}{ccc|l} 9\,{}^{1}/_{2} & & 4\,{}^{3}/_{5} & \\ \hline 4 & \tilde{5} & 15 & \\ \hline 4 & 20 & {}^{6}/_{10} & \frac{9}{10}\ \text{facit}\ 4\,{}^{9}/_{10} \end{array}$$

Bei der Multiplikation der Brüche werden bestimmte Übungsgruppen formiert, z. B.: Brüche mit Brüchen, Ganze mit Brüchen, Ganze mit Ganzen und Brüchen, Ganze und Brüche mit Ganzen und Brüchen, unordentlich vermischte mit unordentlich vermischten Brüchen.

Die Ansatzformen lassen Zweifel über die gestellte Aufgabe übrig. Elend rechnet z. B.: ${}^{2}/_{3}\cdot{}^{5}/_{7}$ so: $\frac{2-5}{3-7}$; facit $\frac{10}{21}$. Paricius berechnet die Aufgabe: 24 Eln, jede vor 5 $^3/_4$ fl., was machts? deutlicher, aber umständlicher also:

$$\begin{array}{cccccc} & & \underline{5\,^3/_4} & & 72 & \\ \frac{24}{1} & \begin{array}{c}\text{mal}\\ \text{mal}\end{array} & \frac{23}{4} & \text{seynd} & \frac{48}{552}; & \text{facit } 138 \text{ fl.} \\ & & & & \cancel{444} & \end{array}$$

Das Bedenken, dafs die Multiplikation in ganzen Zahlen mehret, in Brüchen aber mindert, besteht fort. Wolf sucht es mit einem mathematischen Beweise zu beseitigen, der allerdings, ganz im Gegensatze mit seiner sonstigen Schreibweise, nicht recht klar ist. Nachdem Wolf die Regel über die Bruchmultiplikation gegeben, sagt er: „Wenn man einen Bruch durch einen Bruch multiplizieren soll, z. B. $^4/_5$ mit $^3/_7$, soll man ein Stück von demselben geben (nach einem früheren Satze). Weil nun der Nenner der blofse Name ist (?), so mufs eigentlich der Zähler des zu multiplizierenden Bruches durch den Nenner des andern dividiert werden, also der Zähler 4 des Bruches $^4/_5$ durch den Nenner des Bruches $^3/_7$. Damit er sich nun dividieren lasse, mufs der zu multiplizierende Bruch in einen andern verwandelt werden, welches geschieht, wenn man ihn durch den Nenner des Multiplikanden 7 multipliziert. Also ist die Multiplikation eines Bruches durch einen Bruch in der That eine Division." — Elend erklärt verständlicher und zutreffender, aber auch nicht völlig korrekt: „Um so viel der Zähler eines Bruches vermehrt wird, um so viel gröfser wird der Bruch. Um so viel der Nenner eines Bruches vermehrt wird, um so viel kleiner wird der Wert des Bruches. Spengler sagt: »Eine Gröfse mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren, heifst den halben Teil derselben nehmen. — Wenn der Multiplikator ein Bruch ist, so ist die Multiplikation gleichsam mit einer Division vermischt; ich mufs nämlich die gegebene Gröfse mit dem Nenner des Bruches dividieren, damit ich den angezeigten Teil derselben Gröfse erhalte.« Das sog. Kürzen der Brüche, welches darin besteht, dafs man Zähler und Nenner der Faktoren gegenseitig aufhebt oder mit ein und derselben Zahl dividiert, ist noch nicht allgemein gebräuchlich.

Bei der Bruchdivision werden die beiden Fälle, wonach die Brüche entweder gleichnamig oder ungleichnamig sind, richtig auseinander gehalten. Die Regeln für diese Fälle lauten nach Paricius: »Wenn die Brüche gleiche Nenner haben, teilt man den Zähler des Dividenden durch den Zähler des Divisors. Wenn die Brüche ungleiche Nenner haben, werden sie gleichnamig gemacht und prozediert wie vorhin.« Lechner berechnet die Aufgabe: Dividier $^2/_5$ in (durch) $^3/_{16}$ mit vorgängigem Gleichnamigmachen also:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{2}{5} & \times & \frac{3}{16} & \cancel{1}\,(2 & \\ \hline \frac{15}{80} & & \frac{32}{80} & 3\cancel{2} & \mid 2\tfrac{2}{15} \\ & & & \cancel{1}5 & \end{array}$$

Mercklein dagegen gibt die Regel: Man wende den Divisoren um und multiplicire Zehler mit Zehler und Nenner mit Nenner.

Elend wendet diese Regel für das Beispiel $^3/_4 : {}^2/_5$ in nachstehender Formel an:

$$\frac{3}{4}\ \frac{\cancel{2}}{\cancel{5}}\ \frac{5}{2}\ \Big|\ \frac{15}{8} \text{ oder } 1\tfrac{7}{8}.$$

Die Regel über das Stürzen des Divisors schien manchem Rechenmeister unfaſslich; man findet sie deshalb selten in den gewöhnlichen Rechenbüchern; selbst der gründliche Paricius ging über dieselbe hinweg, und noch seltener begegnet man dem Versuche zu ihrer Erklärung. Umsomehr verdient der Scharfsinn desjenigen unsere Achtung, der sie erfunden hat. — Dannberger, Schul- und Rechenmeister zu Neumarkt i. O. (1742), rechnet durch Schluſs: $^1/_2$ in $^2/_3$. Theyle $^3/_6$ in $^4/_6$ ist der Theyl $^1/_6$, und $^1/_6$ bleibt übrig, das ist auf 1 Sechstheil $\frac{\frac{1}{6}}{6}$ oder $\frac{1}{36}$ auf einen Theyl. Die Rechnung ist falsch, neu die Darstellung des Bruchsbruches.

Die Unsicherheit, welche die wechselnde Stellung des Divisors verursachte, sucht Elend mit dem Vorschlage zu beseitigen: Setzet den Divisor zur rechten, um allen Irrtum zu vermeiden. Der Umstand, daſs bei der Bruchdivision der Quotient gröſser als der Divisor und Dividend ist, erregt immer noch Zweifel. Mercklein widerlegt sie, wie ehemals Tartaglia, treffend, wie folgt: Wenn ich $25\,^3/_4$ durch $^7/_9$ dividiere, und es kommt im Quotienten $33\frac{3}{28}$ heraus, so darf man nicht meinen, $33\frac{3}{28}$ sei ein solcher Teil von $25\frac{3}{4}$, sondern nur dies ist der Verstand, $\frac{7}{9}$ sei in $25\frac{3}{4}$ $33\frac{3}{28}$ mal enthalten.

Die Unklarheit in den Ansätzen, welche durch den Mangel allgemein gültiger Operationszeichen veranlafst wurde, besteht durch die erste Hälfte des 18. Jahrhunderts fort. Die Zeichen $+$, $\div$ oder $\div\!\!\cdot$ (plus und minus) waren, wie bereits bemerkt, schon zu Rudolfs Zeit gebräuchlich, hatten aber nicht die allgemeine Bedeutung der additiven und subtraktiven Verbindung zweier Gröfsen. Das liegende Kreuz, unser Multiplikationszeichen, findet sich häufig bei Bruchadditionen und -Subtraktionen, weil hier, um die Brüche unter gleiche Benennung zu bringen, »übers Creutz« multipliziert werden mufste. Erst durch den Einflufs des hallensischen Kanzlers Wolf scheint der einheitliche Gebrauch unserer Operationszeichen eine weitere Verbreitung erlangt zu haben. Wolf bemerkt: Die Mathematiker haben für die Addition das Zeichen $\dagger$, welches sie durch »und, mehr« aussprechen, $3 \dagger 4$ heifst 3 und 4; — ist das Zeichen der Subtraktion. Das Zeichen der Multiplikation ist ein blofser Punkt. Die Zahlen, so eine arithmetische Proportion bilden, schreibt man $3 \cdot 5 \therefore 6 \cdot 8$, oder besser nach meiner Art: $3 - 5 = 6 - 4$; die einer geometrischen $3 \cdot 12 :: 5 \cdot 20$, oder besser mit Herrn von Leibnitz: $3 : 12 = 5 : 20$. Hier ist der Doppelpunkt als Zeichen der Division und das Zeichen $=$ als Zeichen der Gleichheit zweier Quotienten angewendet.

Mercklein sagt, dafs $=$ das Zeichen der äqualität, $\rhd$ das Zeichen der Majoritatis, $\lhd$ das Zeichen der Minoritatis sei, und dafs diese Zeichen Hariot, ein Engländer, zuerst gebraucht habe. Weiter bemerkt er: Cartesius nimmt als Zeichen der Gleichheit $\propto$, andere haben auch andere Zeichen. Ein jeder hat seine Freiheit hierinnen, doch wäre zu wünschen, man bliebe bei einerlei. Mercklein wendet die Zeichen $+$, $-$, . und :, welche er als plus, minus, mal, durch, multiplicatum per . . ., divisum per . . . . übersetzt, in konsequenter Weise an. Von Spengler und Barth (1772) werden unsere Operationszeichen bereits als etwas Bekanntes angeführt; letzterer bemerkt zugleich, dafs die Mathematiker die Zeichen $+$, $-$, . und : angenommen haben, um im Schreiben kürzer davon zu kommen.

Die Sexagesimalbrüche verschwinden nach und nach aus den Rechenbüchern; an ihre Stelle treten allmählich die *Decimalbrüche*. Paricius hat dieselben in seinem Hauptwerke v. J. 1706 noch nicht, bringt sie aber in dem später erschienenen Compendium, ein Beweis, daſs er erst in der Zwischenzeit mit denselben bekannt geworden war, und daſs er sie für wichtig genug hielt, um die Jugend damit bekannt zu machen. Er nennt die Decimalbruchrechnung »jene Kunst, welche lehret, die Teile der *geometrischen Ruten* vermittelst gewisser Zeichen kürtzlich und auf leichte Art auſszurechnen«. Paricius beschränkt also ihren Gebrauch wie Böckler auf die Längen-, Flächen- und Körpermaſse.

Die Beziehung der Decimalbrüche zum Zahlsystem der Ganzen und die erleichterte Berechnung hebt Paricius richtig hervor, indem er bemerkt: »Es hat 1 Ruthe 10 Schuh, 1 Schuh 10 Daumen (Zoll), ein Daumen 10 Gran (Linien), 1 Gran 10 Scrupel etc. — daraus sowohl die *Convenience mit der gemeinen Rechnung als auch die Facilité erhellet*, alſs wodurch wegen gleicher Auf- und Absteigung derer Zahlen / die öffteren Brüche vermieden werden.« Beim *Linienmaſse* bedeutet 0 die Ruten, die erste Ziffer nach den Ganzen die Schuh, die zweite die Daumen oder Zoll, die dritte die Gran oder Linien, die vierte die Skrupel. Durch eine Ziffer hinter der »Lunula« zeigt er an, wie viele Ziffern abgeschnitten werden sollen, z. B.: 369|4358 (4. Es ist offenbar, daſs entweder der Decimalstrich oder die Ziffer hinter der Lunula entbehrlich ist, und der wohl hundertjährige Gebrauch dieser Ziffer erklärt sich aus dem Umstande, daſs sie den Rechner der Mühe überhob, die Stellen zu zählen. Paricius führt auch Beyers Schreibweise an: »Andere«, sagt er, »zeichnen mit römischen Buchstaben, indem sie über jeden Teil sein behöriges Zeichen setzen, also: $\overset{\text{o}}{360}\,|\;\overset{\text{I}}{4}\;\;\overset{\text{II}}{3}\;\;\overset{\text{III}}{5}\;\;\overset{\text{IV}}{8}$. Allein teils wegen Kürze, teils auch wegen der in der Trigonometrie und Astronomie leicht entstehenden Confusion wird die Zeichnung post lunulam der andern vorgezogen.« Bei den *Flächen* und *Körpern* kehrt die Böcklersche Notation mit den Riemen- und Schachtschuhen, Schiffsdaumen, oblongen Skrupeln etc. wieder. Paricius macht aber zur Vereinfachung dieser umständlichen und verwickelten Bezeichnungsweise den praktischen Vorschlag: »Man gebe in der Linienberechnung jedem Teil eine, in der Flächen-berechnung jedem Teil zwei, in der Körperberechnung jedem Teil drei Zahlen oder Stellen, wie hievon Alberti in seinem Tractat de Mensula Prætoriana Cap. I handelt; denn, weil in schlechten (einfachen) Ruthen jeder Theil in 10 Theile abgeteilt ist, sind 9 in Flächen, wo die Quadratruthe in 100 Quadratschuh getheilt ist, sind 99, und endlich in körperlichen Dingen, allwo eine Kubikruthe 1000 Kubikschuh hat, sind 999 subordinierte Partes der Terminus ultimus, die niemals können überschritten werden.« Die Formeln der Spezies sind im wesentlichen mit den heutigen identisch.

Für die Division wird aber noch die Regel gegeben: »Man findet das Zeichen des Quotienten, indem man das Zeichen des Divisors vom Zeichen des Dividenden subtrahiert; der Rest ist das Zeichen des Quotienten. Das Beispiel: 4269342 (5 durch 321 (2 oder 42,69342 : 3,21 führt Paricius so aus:

$$
\begin{array}{ccccccc l}
 & \cancel{1} & 9 & & & & & \\
\cancel{1} & 0 & 5 & 6 & & & & (5 \\
\cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{6} & 9 & 3 & 4 & 2 & (13 \mid 300\,(3 \\
3 & \cancel{2} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \quad (2 \\
 & 3 & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} & \cancel{2} & & \\
 & & 3 & 3 & 3 & & &
\end{array}
$$

Es wird nach gemeiner Art dividiert; dabei ergibt sich der Quotient 13300; der Dividend hat 5, der Divisor 2 Stellen; 2, das Zeichen des Divisors, von 5, dem Zeichen des Dividenden, subtrahiert, gibt 3, das Zeichen des Quotienten; es sind deshalb von 13 300 drei Stellen abzuschneiden; 42 bleiben im Rest.

Bei diesem Verfahren ergeben sich also zwei Brüche, der Decimalbruch 0,3 und der gemeine Bruch $\frac{42}{321}$. Um bei der Division lediglich einen Dezimalbruch zu erhalten, gibt Paricius die Regel: »Wenn etwas übrig bleibt, so setzt man an den Dividenden einige Nullen und dividiert weiter, vermehrt aber auch nach der Anzahl der hinzugesetzten Nullen das Zeichen des Dividenden. Paricius behandelt noch die Fälle: wenn der Divisor gröfser ist als der Dividend, und wenn der Rest nicht aufgehen will. Im Hinblick auf letzteren Fall sagt er: Man resolviert bis auf die kleinsten Theilgen. Bleibt hernach doch noch etwas übrig, so heifst es: Minima non curat Prætor. Und wie in den Brüchen der Civil-Rechnung $\frac{2}{25}$ eines Hellers ein Kaufmann dann und wann nicht achtet, sondern selbe dem Käufer par generosité zur Zugabe schenket, also können auch hier gar so kleine Theilgen keinen Schaden bringen und darf sie der Feldmesser, ohne seinem Gewissen Leid zu thun, sicher fahren lassen.« Des periodischen Decimalbruchs geschieht noch keiner Erwähnung, dagegen findet sich das Medieren eines Decimalbruchs mit dem Schlufssatze: Bleibt am Ende ein Bruch, so sage allemal halb 10 ist 5 und das Zeichen vermehr um 1. Paricius nennt die Decimalbruchrechnung wie Beyer Logistica decimalis, schreibt aber ihre Erfindung dem holländischen Mathematiker Simon Stevino zu.

Elend gebraucht den neuerdings von Dr. Hartmann wieder erfundenen Ausdruck »Decimalzahlen« statt der Decimalbrüche. Er erklärt sie als Brüche, deren Nenner in der Proportion von 10 steigen, und fafst sie in ihrer allgemeinen Bedeutung auf, nicht blofs rücksichtlich ihrer Verwendung in Längen-, Flächen- und Körpermafsen. »Eine Prime ist $\frac{1}{10}$ des Ganzen, eine Sekunde ist $\frac{1}{10}$ der Prime oder $\frac{1}{100}$ des Ganzen, eine Tertie heifst $\frac{1}{10}$ der Sekunde oder $\frac{1}{1000}$ des Ganzen. Eine Quadratprime heifst ein Numerus planus, dessen jede Seite eine Prime ist. Eine Kubikprime ist eine Numerus solidus, dessen jede Seite eine Prime ist. Ein Ganzes wird mit überschriebener Null, Primen werden mit überschriebenem Strich, Sekunden mit 2, Tertien mit 3 Strichen bezeichnet. Die Decimalen gelten nach ihrer Stelle, wie die ganzen Zahlen. Alle Decimalzahlen können auf einerlei Benennung gebracht werden. Die Summe und Differenz zweier Decimalzahlen behält die Benennung, welche die vorhabenden Zahlen hatten. Wenn zwei Decimalzahlen miteinander multipliziert werden, so ist das Zeichen des Produkts zusammengesetzt aus den beiden Zeichen der Faktoren. Wenn eine Decimale durch eine andere dividiert wird, so ist der Überschufs des vom Dividenden abgezogenen Zeichens des Divisors das Zeichen des Quotienten. Decimalzahlen auszusprechen: $\overset{0}{34}\ \overset{\mathrm{I}}{3}\ \overset{\mathrm{II}}{4}\ \overset{\mathrm{III}}{5}$. Sprecht jedes mit seinem Zeichen aus, so heifst die Zahl: 34 Ganze, 3 Primen, 4 Sekunden, 5 Tertien — oder sprecht alle Zahlen zusammen unter dem letzten Zeichen aus, dann heifst sie 34345 Tertien. Darauf folgt das Schreiben der Decimalzahlen, wobei auch die Form 65 3007 (IV statt 65,3007 vorkommt.

Mercklein berichtet über die Decimalen nachstehendes: »In der Mathematik ist die Decimalrechnung eingeführt worden. Der Nutzen hievon ist unaussprechlich, weil hierin alle verdriefslichen Brüche hinweg bleiben, und ich allemal gleich weifs, wie viel jeder Bruch in Ganzen von kleineren Stücken schon ausmache. Es wäre zu wünschen, dafs diese vortreffliche Rechnungsart eingeführt würde. Was machen die gemeinen Brüche für Verdrufs im Frucht-, Wein- und Gewichtmafs. In der Astronomie ist die Logistica sexagenaria so beschwerlich, dafs dem Calculo Astronomicæ ein grofser Vorteil zuwachsen würde, wenn die Decimalrechnung darin üblich wäre. Alleine, ich weifs nicht, soll ich sagen, ein Zwang, der bisherigen Authoren Methode zu behalten, oder eine Furcht, die Arbeit dürfte zu verwirrt fallen, hat bisher diese vortreffliche Rechnungsart noch vor der Thür stehen lassen. Die einzige Geometrie hat dieser Künstlerin die Pfort eröffnet und viel Nutzen mit Dank von ihr gehabt.« Mercklein verweist die Decimalrechnung auf das engere Gebiet der Längen-, Flächen- und Körpermafse und teilt die Rute in 10 Schuh, den Schuh in 10 Zoll, den Zoll in 10 Gran, das Gran in 10 Skrupel. Indem er, wie Böckler und Paricius, die Entstehung der geometrischen Decimalen auseinandersetzt, gibt er Aufschlufs über den Namen »Riemenschuh«. Er sagt nämlich: »Wenn man eine Quadratrute, deren eine Seite in 10 (gleiche) Teile geteilt ist, ansieht, wie ihre Teilungspunkte durch Parallelen zusammengehängt werden, so wird erstlich der ganze innere Platz in 10 gleiche abhängende Riemen eingeteilt, deren jeder deshalb, weil er einem Stück Riemen-Leder gleichsieht, Riemenrute heifst.« Indem er erklärt, wie aus einem Würfel 10 Platten, aus einer Platte 10 Balken, aus einem Balken 10 kleinere Kubi entstehen, gibt er den Rat, das Experiment an einer Rübe zu machen. Mercklein führt nun die ältere Bezeichnungsweise der Decimalen (Rute = 0, Schuh = I, Zoll = II etc.) an; »weil aber dies leicht Konfusion macht, so bezeichnen die Neueren die Ruten mit 0, oder machen auch nur, wenn die Zahlen der Ganzen ein

Ende haben, ein Komma, die Bruchzahlen setzen sie schlechterdings hinter einander. Nach der letzten Bruchzahl setzen sie ein Lunulam und darhinter schreiben sie die Anzahl derer Bruchzeichen, also = Mens. Lin. 75,05032 (5; Mens. quad. 75,05032 (5 □; Mens. cub. 75,05032 (5 C. Er liest: 75 Quadratruten, 5 Quadratschuh etc, 75 Kubikruten, 50 Kubikschuh etc. Mercklein hält es für notwendig, die Beisetzung des □ und C besonders zu empfehlen, weil sonst die gröfsten Irrtümer entstehen.»

Von Spengler (1773) und in den Anfangsgründen der Arithmetik zum Gebrauch an der Herzoglichen Karlsschule werden die Decimalbrüche schon ganz in der dermals üblichen Weise behandelt. Spengler bemerkt: »Es ist unbekannt, zu welcher Zeit und von wem diese Gattung der Brüche eingeführt wurde; soviel ist jedoch gewifs, dafs sie in unserem Jahrhunderte zur Vollkommenheit gelangten.« — Es besteht die Vermutung, dafs die Erfindung der Decimalbrüche mit den Bestrebungen zur Berechnung der Logarithmen zusammenhängt. Die Decimalbruchrechnung gehört zu den nützlichsten Erfindungen, und ihr Wert ist mit der Einführung metrischer Mafse etc. in neuerer Zeit gestiegen. Sie kommt aber in vielen deutschen Rechenbüchern des 18. und 19. Jahrhunderts nicht vor, weil sie bei dem Mangel dekadischer Mafs- und Wertsysteme im bürgerlichen Leben nur eine beschränkte Verwendung finden konnte.

Die Regeldetri bietet sachlich keine neuen Gesichtspunkte; man sucht dieselbe aber zu begründen. Paricius erklärt sie aus dem 6. und 7. Buch Euklids wie folgt: »Wenn 4 Zahlen proportional sind, dann sind sie es auch in verkehrter und umgekehrter Weise, so dafs man jedes Exempel 8 mal verkehren und 7 mal probieren kann. Man multipliziert den zweiten mit dem dritten Satz und dividiert das Produkt mit dem ersten, weil die zweite und dritte Zahl mit einander multipliziert ebensoviel bringen, als die erste Zahl mit dem Facit. Man dividiert dieses Produkt durch den ersten Satz, damit der Quotus oder die vierte unbekannte Zahl die Frage beantworte«. Damit nicht zufrieden, führt Paricius den anschaulichen geometrischen Beweis und leitet ihn mit der Aufgabe ein: »Zeige mir den Grund alles dessen deutlicher! Antwort: Der fernere Grund dieser Operation fliefst aus demjenigen, was Euklid in der 16. Proposition des 6. Buches seiner Elemente anführt, nämlich: In 4 Proportionallinien verhält sich die Länge der ersten zur Länge der zweiten, wie sich die Länge der dritten zur Länge der vierten verhält, und das Rechteck, welches aus den beiden mittleren entsteht, fafst allezeit just so viel in sich als das Rektangulum der beiden äufsern. Also gehts in Numeris eben auch zu«. Um alles noch deutlicher zu machen, werden die proportionierten Linien, das Rektangulum extremorum und das Rektangulum mediorum, graphisch dargestellt und die Anwendung des hier veranschaulichten Satzes auf Ganze und Bruchzahlen gemacht.

Die welsche Praktik, welche früher dem Andrange, die einzelnen Rechnungsfälle unter bestimmte Regeln zu fassen, mit Erfolg widerstrebte, wird nun doch unter einheitliche Gesichtspunkte gebracht, welche teilweise mit den bei den Spezies angewendeten Rechenvorteilen (s. Seite 333) zusammenfallen. Paricius unterscheidet 9 Fälle: 1. Das Hintersichmultiplizieren, d. i. die Umkehrung der Faktoren, z. B. $3\,{}^1/_5$ mal 6 gleich 6 mal $3\,{}^1/_5$. 2. Das Kontrahieren oder Aufheben der gegen einander komponierten oder geraden Terminen, d. h. der Divisor (1. Glied) und der Dividend (2. oder 3. Glied) werden mit dem gemeinschaftlichen Faktor dividiert. 3. Die Abkürzung der Nullen. 4. Die Zerstreuung in vielfach teilende Rationen. 5. Die Proportionierung der zerstreuten Teile. 6. Die Verwandlung der Sorten in Ganze höherer Ordnung. 7. Die Zerstreuung der Sorten nach dem Einmaleins. 8. Die Vergleichung des Divisors gegen den Dividenden oder das Kürzen. Beispiele zum 4., 5., 7. und 8. Satze:

ad 4. 1 Elle k. 45 kr. w. k. 40 Ellen?	ad 5. 24 lb. k. 19 fl. w. k. 90 lb.?
45 — 40	12 45
30 20	6 22 : 30
15 10	1 3 : 45
30 fl.	fac. fl. 71 : 15

ad 7a) 1 Ztr. —	45 fl. =	12 Batz.[1]) —	47 Ztr.	
	412 =	3	9	
	2061 =	—	5 + 2	
adde:	91 =	9		
	2152 fl.	9 Batzen.		

b) 1 Ztr. —	45 fl.	12 Batz. —	47 Ztr.
	366 =	6	8
	2198 =	6	6 ÷ 1
	45 =	12	
	2152 =	9	

ad 8. 2 Eln — 3 fl. — 4 Eln
$\frac{1}{2}$ primi + 2; fac. 6 fl.

Die Textaufgaben, welche wie im vorigen Jahrhunderte nach sachlichen Gesichtspunkten geordnet wurden, brachte man in Unterabteilungen, z. B. die Tauschrechnung: 1. Es wird verstochen War um War gleichweg; 2. War um War mit Aufgebung baren Geldes; 3. mit gleicher Übersetzung, damit ein Stich dem andern gleich sei; 4. um ein gewisses aufs Hundert zu gewinnen; 5. um einen begehrten Teil baren Geldes zu haben. Die Gewinn- und Verlustrechnung hatte etwa folgende Unterabteilungen: Einer kauft, a) wie soll er verkaufen, damit er eine bestimmte Summe gewinne? b) Ob und was hat er gewonnen? c) Einer verkauft und hat gewonnen oder verloren, wie hat er verkauft? d) Wie hätte er verkaufen sollen, damit er eine gewisse Summe gewonnen hätte? e) damit er ein bestimmtes procento gewinne? f) damit er bestimmte Prozente in einer gewissen Zeit gewinne? Es wurden also die einzelnen Fälle genau unterschieden und in Gruppen zusammengestellt, und in dieser Schematisierung oder begrifflichen Abteilung des Rechenstoffs ist unzweifelhaft ein methodischer Fortschritt erkennbar. Von den Textaufgaben selbst lassen wir nur das Beispiel einer Stichrechnung von Paricius folgen: »Zwei stechen, A hat Butter, gibt den Zentner per 12 fl. bar / setzt selben in Stich per 15 fl. / gibt 6 Monat Zeit / und wil $\frac{1}{5}$ bar Geld haben. B hat Rosinen /

1) Der Gulden ist zu 15 Batzen gerechnet. Die Zeichen — , : und = sind lediglich Trennungszeichen.

den Zentner per 18 fl. und gibt 8 Monat Zeit. Ist die Frag / wie hoch er sie im Stich ansetzen soll / damit ein Stich dem andern gleich sei?

$$
\begin{array}{rrrrcccr}
 & 12 & 15 & & 9 & & & 8 \\
\div & \underline{3} & \underline{3} & & \underline{6} & > 3 < & & \underline{18} \\
 & 9 & 12 & 9| & \underline{54} & — 3 — & & \underline{144} \\
 & & & & 6 & & & 16 \\
 & & & & & & & \underline{3} \\
 & & & & & & 6\,| & \underline{48} \\
 & & & & & & & 8 \text{ fl.} \\
 & & & & & & & \underline{18} \\
 & & & & & & \text{Fac.} & 26 \text{ fl.}
\end{array}
$$

Die Regula falsi wird seltener, weil sie für die Jugend zu schwer erschien und im bürgerlichen Leben keine Verwendung fand; wo sie vorkommt, wird sie durch Zurückführung auf die Proportionen erklärt, z. B. von Elend also: »Wenn 3 Zahlen jede besonders mit einer Zahl multipliziert werden, so verhält sich die Differenz des 1. und 2. Produkts zur Differenz des 1. und 3. Produkts, wie die Differenz der 1. und 2. Zahl zur Differenz der 1. und 3. Zahl. Wenn auch zu jedem Produkte eine Zahl addiert oder von demselben subtrahiert wird, ehe die Differenz wird genommen, so bleiben doch die Differenzen in gedachter Proportion. Das ist das Fundament der sogenannten regula falsi oder positionum, welche man ehemals vor ein Rathwerck angesehen, so man aus Grund- oder Lehrsätzen nicht herleiten, wohl aber durch Probe a posteriori beweisen könne. Sucht z. B. eine Zahl, die mit ihrer Hälfte, dem vierten und fünften Teil 78 mache. Nehmet eine Zahl nach Gefallen, verhandelt sie nach deren gegebenen Umständen (der Aufgabe) und suchet zu der herauskommenden, der genommenen und gegebenen Zahl die 4. Proportionalzahl, diese ist die gesuchte Zahl. Nehmet 20, die Hälfte 10, das Vierteil 5, ein Fünftel 4, Sa. 39; setzt 39 — 20 — 78, kommt 40.

Um den Unterricht angenehm zu machen, werden Rechenaufgaben und -Regeln vielfach noch in Verse gekleidet. Nachstehende Reimaufgaben sind dem Manuskripte des obengenannten Neumarkter Schuel- und Rechenmeisters Joh. Michael Dannberger entnommen:

Einstmahls da die Wildten Thier,
auch redten kunnten als wie wür /
Verliefs ein betagter Hirsch den Waldt /
und sucht in Veldern Unterhalt /
da traff ganz Ungefehr ihn an /
des Morgens früh ein Pauers Mann /
Sye grüſsen einander freundlich
und reden gar vernünftiglich.
Vonn villen Dingen weith: und preith /
hieher zu setzen ist nit Zeit /
Zuletzt hub an der Paur und fragt /
auf wievill Jahr der Hirsch betagt,
der Hirsch antwortet wie das wür
Sechshundert Jahr erleben schier,
ich halt dafür, es trifft nit ein /
mein Alter würdt so hoch nit sein
Wenn man die Jahr wie angeregt /
ganz richtig dreymahl vor sich legt /
darvon nimbt ein fünftelmahl
darnach ein Virtl an der Zahl
recht abgetheilt mit Neun Zu mahl
hiezu gelegt Sechs an der Zahl
so würdt doch nit erscheinen klar
wie angefiehrt Sechshundert Jahr
demnach nun Rechner gib Bescheidt
Wie alt der Hirsch war selber Zeit.

Lösung.

Setz an die Frag der . 600. Jahr.
Dreymahl sovil . 3
1800
HierVon dz fünftl . 555
360 ⎰ 90
HierVon auch dz Viertl 44

Diſse . 90 . theile mit . 9 . khommen
10
DarZurgelegt . 6
. 16 . Jahr ist der Hirsch alt.

In folgender Aufgabe ist die. Schneckenrechnung des Hans Probierer aus Eisleben (Vergl. Seite 210) zu erkennen:

Es stund auf einen Grienen Raum
ein schöner frischer Dannenbaum
an selben stig Vonn unten auf
ein Wurm hinan: mit schnellen Lauf
in solcher Ordnung Allemahl /
daſs täglich Er stäths an der Zahl
fünff Ellen kham den Paumb hinan
und fiel wiederumb zurückh alsdann
zwey ganzer Ellen bey der Nacht
aus Leibs Schwachheit wie ich eracht;
Gleich so verlieſse seinen Süz
ganz oben von des Paumbes Spüz
ein hipscher schneckh und eylt herab
wie sein tragenter Gang es gab
täglichen richtig allemahl
zwey ganzer Ellen an der Zahl
kehrt aber nächtlich seinen Lauf
kroch wider ein halbe Ellen hinauff /
So thuen es diſse Thierlein beydt
ja immerforth ohn Unterscheidt
bis daſs am Dannenpaumb alldar
obschon Vonn guetter höch Er war
Nach Neun Tägen wie es sich findt
beyde zusammen khommen sindt.
Drauſs Rechner mach nun offenbar /
wie hoch der Dannenpaumb dann war.

Tag		Ellen		Tag
1	———	5	———	9
	nimb ab	2		3
		3		27

27 Ellen der Wurmb.

Tag		Ellen		Tag
1	———	2	———	9
2	nimb ab	$\frac{1}{2}$	zuruckh	3
2		$1\frac{1}{2}$		27
		3		

$\left.\begin{matrix}27\\2\end{matrix}\right\}$ $13\frac{1}{2}$ Ellen der Schneckh.

Der Wurmb	27	Ellen
Der Schneckh	$13\frac{1}{2}$	Ellen
Thuet zusammen	$40\frac{1}{2}$	Ellen.

Der Reesische Ansatz.

Neben den Proportionen, welche namentlich in wissenschaftlichen Schriften sehr ausführlich nach Euklid behandelt werden, und neben der Regeldetri wird im 17. und 18. Jahrhunderte der Reesische Ansatz als Lösungsformel gebraucht. Die ersten Spuren dieses Ansatzes finden sich in der indischen Lilavati und nachmals bei Riese (S. Seite 206). Eingehender ist er behandelt in dem Rechenbuche des Engländers Wingate 1668 (2. Auflage). Wingate entwickelt die Ansatzformel aus den Proportionen. Der Name »Reesischer Ansatz« stammt von Kaspar Franz van Rees, geb. 1690 zu Roermonde im Limburgischen. Er verfafste als Hauslehrer ein Rechenbuch in holländischer Sprache, welches, ins Französische übersetzt, unter dem Titel erschien: L'arithmetique éclaircie oder Règle générale d'Arithmetique, La Laye 1737. Diese Übersetzung übertrug 1739 Professor Kahle ins Deutsche, und aus Kahles Rechenbuch ist die Reesische Regel nachmals in andere Rechenbücher übergegangen. Auch an eigenen Anleitungen zur Anwendung derselben hat es nicht gefehlt. Solche sind z. B.: die Allerleichteste und deutlichste nach der Reesischen Regel eingerichtete Rechenkunst, Tübingen, 1758; Schmalzrieds vollständige Anleitung zur reesischen Rechnung, 1778—1806. In Frankreich, England, Holland und in der Schweiz scheint diese Ansatzformel keine weitere Verbreitung erlangt zu haben, und selbst in Deutschland beschränkte sich, nach Wildermuth, ihr Verbreitungsgebiet auf die südlichen und nordwestlichen Landesteile. Clemm hat diesen Ansatz von Flattich erhalten.

In Kahles Rechenbuch ist zur Reesischen Regel folgende Anleitung gegeben: »Man mufs alle Zahlen, welche in einer vorgelegten Frage befindlich sind, in zweien Kolumnen oder Gliedern aufschreiben, die eine Kolumne zur rechten, die andere zur Linken; daher müssen diejenigen Zahlen, deren eine aus der andern bestimmt wird, nicht in einerlei Kolumne stehen, sondern in unterschiedene gesetzt werden. Wenn also gesagt wird, 100 fl. bringen 4 fl., so müssen 100 fl. auf einer Seite stehen, 4 fl. auf der andern. Die Dinge, welche einerlei Namen haben, und die auf eine Seite zu stehen kommen, müssen auch, da sie zum andernmal vorkommen, mit ihrer Zahl auf die andere Seite gesetzt werden, d. h. es müssen in einer Kolumne so oft die Namen der Dinge mit den zugehörigen Zahlen sein, als auf der andern. Alle Zahlen, welche sich in einer Kolumne befinden, müssen mit einander multipliziert werden. Sind die Multiplikationes geschehen, so wird man zwei Produkte haben, wovon das eine den Teiler, das andere die zu teilende Zahl ausmacht, aber nicht auf gleichgültige Art. Denn das Produkt derjenigen Kolumne, in welcher das Frage- oder unbekannte Glied befindlich ist, mufs jederzeit der Teiler sein«. Weiterhin ist gezeigt, wie man die Multiplikation vereinfachen könne, wenn man vor ihrer Ausführung die Glieder der rechten und linken Seite mit der gleichen Zahl dividiert, wie man die Brüche einrichtet u. s. w. Diese Anleitung, an sich schon unklar, bezweckt lediglich die Erlernung eines mechanischen Kunstgriffes. Man hat nur die Glieder der Aufgabe nach ihrer Ordnung anzuschreiben und die Ausrechnung mit Hilfe einiger äufserlicher Regeln zu vollziehen. Gleichwohl hat dieser Ansatz unter süddeutschen Lehrern viele Freunde gefunden, so dafs ihn der Nürtinger Reallehrer Schäffle 1830 »das Schofskind der Schullehrer« nennen konnte, und zum Schaden der lernenden Jugend hat sich dieser Mechanismus bis in die neueste Zeit im Schulunterrichte erhalten. Dafs man den Reesischen Ansatz aber auch in verständiger Weise behandeln könne, hat Prändel, Professor an der Pagerie und Ehrenmitglied der Akademie der Wissenschaften in München, im Jahre 1812 wie folgt gezeigt:

»Es lassen sich die meisten Aufgaben, die im gemeinen Handel und Wandel vorkommen, in Proportionen einkleiden, denen das erste Glied mangelt, und nach den gegebenen Vorschriften berechnen, z. B.: Was kosten 3 lb., wenn 18 lb. für 10 fl. gekauft werden? Es verhält sich der unbekannte Preis für 3 lb. zu dem Preis von 18 lb., wie sich die Anzahl dieser Pfunde zu einander verhalten, also:

$$? : 10 = 3 : 18 \text{ und hieraus } \frac{10.3}{18} = 1\,{}^2\!/_3 \text{ fl.}$$ Herr von Rees

suchte dieser Methode im Ansetzen der Proportionen eine bequemere Wendung zu geben, indem er die Bruchform so darstellte, dafs er den Querstrich zum Senkstrich machte und die Faktoren des Zählers zur rechten des Striches setzte, folglich der Nenner oder der Divisor zur linken zu stehen kam. Er fing demnach den Ansatz mit dem mangelnden Gliede in Gestalt einer Frage an, setzte rechts daneben jene Zahl, welche die Frage veranlafst, links kam die Zahl zu stehen, welche die gleiche Benennung mit der Fragezahl hat, und rechts daneben das 4. Glied, welches, wenn der Ansatz geschlossen ist, gleichen Namen mit dem unbekannten Gliede ausweist. Obige Aufgabe bekommt nun folgende Stellung:

$$\begin{array}{r|l} \text{fl. ?} & 3 \text{ lb.} \\ \text{lb. } 18 & 10 \text{ fl.} \end{array}$$

Sprechform: Wie viele Gulden kosten 3 lb., wenn 18 lb. 10 fl. kosten? Man sieht, dafs die gleichnamigen Glieder zu beiden Seiten des Senkstriches verteilt werden, und dafs der Ansatz mit jener Benennung schliefst, die ihn mit dem Fragezeichen anfängt.« Der ganze Ansatz stellt ein Quotienten-Aggregat aus 2 Produktreihen dar; die Produktreihe links des Striches ist der Divisor, die Produktreihe rechts des Striches der Dividend. Es können daher nach dem Satze: Ein Bruch bleibt seinem Werte nach unverändert, wenn man seinen Zähler und Nenner mit ein und derselben Zahl dividiert, die Zahlen auf beiden Seiten nach Belieben gekürzt werden. Nur die Einser pflegt man wegzulassen, weil 1 weder multipliziert noch dividiert. »Demnach gestaltet sich die Ausrechnung so:

3 :	fl. ?	3 lb.
	lb. ~~18~~	~~10~~ fl.
2 :	~~6~~	5
	3	$^5/_3$ fl. = 1 $^2/_3$ fl.

Sehr oft fügt es sich, dafs entweder in der Mitte oder am Ende eines Reesischen Ansatzes Lücken entstehen, wenn blofs jene Zahlen, welche die Aufgabe enthält, genommen werden. Diese Lücken sind dann durch die bekannten dazwischenliegenden Unterabteilungen auszufüllen, z. B.: Ein Spezereihändler bezieht 8 Zentner Gewürz, von dem 6 Loth als Muster für 42 Kreuzer angerechnet werden. Wie hoch kommt die Lieferung? Ansatz und Berechnung:

	fl. ?	8 Ztr.
	Ztr. 1	100 lb.
	lb. 1	32 Loth
: 6)	Loth 6	42 Kr.
: 2)	Kr. 60	1 fl.
	3	7
		16
		112
		8
		8960
		~~222~~
		~~8960~~ | 2986 $^2/_3$ fl.
		3333

Hier mufs zwischen Ztr. und Loth und fl. und kr. die Verbindung so hergestellt werden: Wie viel fl. kosten 8 Ztr., wenn 1 Ztr. 100 lb., 1 lb. 32 Loth hat und 6 Loth 42 kr. kosten und 1 fl. 60 kr. gilt. Führt man diese Aufgabe auf eine geometrische Proportion zurück, so ist zu folgern: Das Geld, welches 8 Ztr. kosten, ist in dem Gelde, das 6 Loth kosten, so oft enthalten, als 8 Ztr. in 6 Loth enthalten sind, obgleich hier der Quotient nur durch einen Bruch dargestellt wird. Da nun die Zahlen, welche ineinander enthalten sein sollen, kraft des Divisionsgesetzes gleiche Benennung haben müssen, so ist hier vor allem notwendig, dafs die 42 kr. durch die Unterstellung des Nenners 60 zu Gulden, und die 8 Ztr. durch die Multiplikation mit 100 zu Pfund und mit 32 zu Loth gemacht werden. Die Skizze des Proportionssatzes fällt demnach so aus:

$$8 = \frac{42}{60} = 8 \,.\, 100 \,.\, 32 : 6 \quad \text{d. i.} \quad \frac{42 \,.\, 8 \,.\, 100 \,.\, 32}{60 \,.\, 6},$$

daraus erhellt nun sonnenklar, dafs der aus der Proportion hervorgegangene Bruch die nämlichen Faktoren im Zähler, wie der Reesische Ansatz zur rechten, und eben die Faktoren im Nenner, wie dieser Ansatz zur Linken hat. Die Probe wird gemacht entweder durch die Umkehrung des Exempels oder durch Einsetzung des Facits an Stelle des Fragegliedes. Letztere, die aufgehende Probe, beruht auf der Haupteigenschaft der Proportion, vermöge welcher das Produkt der inneren Glieder gleich ist dem Produkte der äufseren Glieder, folglich gleiche Produkte gegen einander aufgehen.

Es gibt Rechnungsfälle, welche zwei oder drei Ansätze zu fordern scheinen, z. B.: Jemand wünscht 1000 Stück Kronenthaler gegen Konventionsthaler auszuwechseln. Wie viel bekommt er dafür? Hier hält man für notwendig, zuerst zu berechnen, wie viel Gulden 1000 Kronenthaler machen. Weifs man dies, so läfst sich in einem zweiten Ansatze leicht bestimmen, wie viel diese Anzahl Gulden in Konventionsthalern betragen. Werden diese 2 Rechenfälle in einem Ansatze abgefertigt, so erhält man den Kettensatz.

Beide Ansätze getrennt: Beide Ansätze vereinigt:

a) fl.?	1000 Kr.	b) Kv.?	1000 fl.	c) Kv.?	1000 Kr.
Kr. 1	$2\frac{7}{10}$ fl.		$2\frac{7}{10}$ fl.	Kr. 1	$2\frac{7}{10}$ fl.
	1000 . $2\frac{7}{10}$ fl.	fl. $2\frac{2}{5}$	1 Kv.	fl. $2\frac{2}{5}$	1 Kv.
		$\cancel{12}$	$\cancel{5}$	10	27
		$\cancel{10}$	$\cancel{27}$	12	5
		2	9	4	9
		4			25
		8	9000 = 1125 Kv.		225
					5
					1125 Kv.

Der Kettensatz ist also eine Verbindung mehrerer Ansätze nach der Reesischen Regel.«

Wie die Regeldetri, die Ansätze der Praktika und die Proportionen, so ist auch die Reesische Regel aus dem Bedürfnisse hervorgegangen, für bestimmte Aufgaben einfache, kurze und rasche Lösungsweisen zur Hand zu haben. Diesem Zwecke entspricht der Reesische Satz im Geschäftsleben, wenn man sich durch die umgekehrten Verhältnisse nicht beirren läfst. In der Schule liefse er sich nur durch die vorgängige Behandlung der Proportionen erklären. Weil aber die Proportionen für Kinder der Volksschule zu schwer sind, so kann auch die Reesische Formel, wenn sie mehr sein soll als äufserliches Regelwerk, in der Elementarschule nicht geübt werden.

Aus dem Bestreben, den Reesischen Ansatz vom Mechanismus zu befreien, ist die sog. Basedowsche Regel entstanden, welche in dem »Gemeinverständlichen Rechenbuch von Fr. Gottlieb Busse, Lehrer der Mathematik am Philantropin zu Dessau, Leipzig 1786«, enthalten ist.

Nach dieser Regel wird, wie Wildermuth mitteilt, die Aufgabe: 1200 Menschen reichen mit 2400 Ztr. Mehl 4 Monate; wie viele Menschen werden mit 4000 Ztr. 3 Monate reichen? wie folgt angesetzt:

1200 Menschen, 2400 Ztr., 4 Monate.
— Menschen, 4000 Ztr., 3 Monate.

Das Gegebene und Gesuchte wird also in 2 Sätzen zusammengestellt. Die Glieder dieses Ansatzes werden, wie beim Reesischen Ansatz, in zwei Säulen geordnet, von denen die rechte die Faktoren des Dividenden, die linke sämtliche Faktoren des Divisors enthält, also:

— Menschen	1200 Menschen.
2400 Ztr.	4000 Ztr.
3 Monate	4 Monate.

Dieser Ansatz wird nach folgenden Regeln formuliert: »1. Man schreibt das Frageglied links und das im Zweisatze darüberstehende (gleichnamige) Glied rechts. 2. Man nimmt jedes Glied der unteren Reihe einzeln vor und fragt: Wenn blofs das vorhabende Glied zweimal so grofs wäre, als es anjetzt ist, würde dann die gesuchte Zahl auch zweimal gröfser oder etwa zweimal kleiner ausfallen müssen, als sie wirklich sein wird? Im ersten

Falle wird die Zahl des weggenommenen Gliedes als ein Multiplikator in die rechte, im zweiten Falle aber als ein Divisor in die linke Seite gesetzt. Also wird bei 4000 gefragt, wenn ich zweimal so viel Vorrat hätte, würde ich dann auch zweimal so viel Menschen ernähren können? Allerdings, 4000 ist deshalb als ein Multiplikator anzusetzen. Beim Glied 3 Monate frage ich, wenn ich die Menschen zweimal so lang unterhalten sollte, würde ich dann auch wohl zweimal so viel aufnehmen dürfen? Ganz gewifs nicht, sondern es dürfen nur halb so viel aufgenommen werden, und es ist deshalb 3 als ein Divisor zu setzen. 3. Jedes Glied der oberen Reihe mufs dem unter ihm stehenden gerade entgegengesetzt werden. 4. Endlich werden die so erhaltenen Säulen behandelt wie bei der Kettenregel«. Den Gliedern des Divisors und Dividenden wird hiernach ihre Stelle durch logische Schlüsse angewiesen, und insoferne weist die Basedowsche Regel einen Fortschritt aus; auch dadurch unterscheidet sie sich von der Reesischen Kettenregel, dafs ihre Erklärung der Proportionen nicht bedarf; die 3. und 4. Regel sind aber noch nicht begründet. So erscheint die Basedowsche Regel als ein Mittelglied zwischen dem Reesischen Ansatze und dem Zweisatze mit der Schlufsrechnung des 19. Jahrhunderts.

Wurzelextraktionen.

Das *Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzel* wurde im 18. Jahrhunderte vielfach noch zur Elementararithmetik gerechnet. Nach der Natur der Sache weicht es nur in der äufseren Form von dem gegenwärtig gebräuchlichen Verfahren ab. Paricius behandelt das *Ausziehen der Quadratwurzel* wie folgt:

```
  234
119025 | 345
  964
    4
------
  256
    685
      5
------
   3425
```

»Die Zahl wird von rechts nach links in Gruppen zu zwei und zwei geteilt. Man sucht dann eine Zahl, welche, mit sich selbst multipliziert, annähernd 11 gibt; das ist 3; 3 mal 3 ist 9; 9 von 11 bleibt 2. Man dupliert den Quotienten 3 und schreibt das Duplum 6 unter die nächste Ziffer 9. Dieses Duplum 6 ist als Teiler zu gebrauchen. 6 ist in 29 4 mal enthalten. Setze 4 in den Quotienten und rechts neben den Divisor 6, unter die punktierte Null. Schreibt diese 4 auch noch einmal unter sich selbst und multipliziert obige 64 damit, gibt 256. Dieses Produkt 256 zieht man von den darüberstehenden 290 ab, den Rest 34 schreibt man (wie im Dividieren) darüber. Das ist eine Operation. Weil nun noch ein Punkt übrig ist, dupliert man den ganzen Quotienten, das Duplum wird 68, als zweiter Divisor. Setze 6 unter den 2. Punkt, 8 rechts daneben; 68 in 342 geht 5 mal; 5 wird in den Quotienten gesetzt, darnach auch neben das Duplum 68 unter den Punkt und 685 damit multipliziert. Die ganze Operation ist in den Versen enthalten: Duplir und dividir, vermehr und subtrahier.«

Elend verfährt beim Ausziehen der Kubikwurzel unter Hervorhebung des geometrischen Gesichtspunktes in folgender Weise:

```
          300 | 763 (— 67
          216 | : : :
        -----------
           84  763
7 —        10  8 : :   tripl. quad.
49 —           1 8 :   tripl. rad.
        -----------
               343     cubus
               162 }
                   }   drei Balkenstücke
               72  }
             756       drei Tafelstücke
            ----------
             84763
             00000
```

Hiezu gibt derselbe nächstehende Erklärung: »Weil eine Zahl von mehr als 3 Ziffern mehr als eine Ziffer zur ganzen Wurzel hat, so zerteilt die Zahl in Glieder dergestalt, daſs von rechts an nach je 3 Ziffern ein Strich gesetzt werde. Zu dem im ersten Gliede (300) enthaltenen Kubus 216 sucht die Wurzel 6 (60) und zieht den Kubus 216 von 300 oder 216000 von

300000 ab, bleiben 84 bezw. 84000, dazu addiert das folgende Glied 763, kommt 84763. Weil nun in diesen 84763 enthalten sind 1. drei Tafelstücke, das ist das Triplum quadrate des gefundenen gröſseren Teils mit dem kleineren Teil multipliziert, 2. drei Balkenstücke, d. i. das Triplum des schon gefundenen gröſseren Teils mit dem Quadrat des kleineren Teils, so macht aus dem schon gefundenen gröſseren Teile der Wurzel 6 oder 60 ein Quadrat 36 (3600), multipliziert es mit 3, kommt 108 oder 10800, weshalb 108 unter die 3. Zahl vom Ende gelegt werden muſs und gebraucht diese Zahl als Divisor, um jene Zahl zu finden, welche durch Multiplikation des gröſseren Quadrats drei Tafeln macht. Nehmt das Triplum des gröſseren Teils der Wurzel 6, d. i. 18 (108) mit dem Divisor 108 (10800), sucht in der oben stehenden Zahl 84763 den Quotienten 7 und schreibt denselben als kleineren Teil der Wurzel an den gehörigen Ort, daſs ihr 67 habt, setzt ihn auch vor den Divisor zur Anzeige, daſs diese Zahlen mit einander multipliziert werden sollen. Unterzieht einen Strich, setzt den Kubus des Quotienten 7, nämlich 343 so unter, daſs dessen letzte Ziffer unter der letzten Ziffer des 2. Gliedes stehe. Multipliziert ferner mit dem Quadrat 49 das triplum rad. 18 und setzt auch dieses gebührend unter, so habt ihr die drei Balkenstücke. Endlich multipliziert das triplum quadrati mit der vorgesetzten Zahl 7 und schreibt solches gebührend unter, so habt ihr die drei Tafelstücke, diese addiert in eine Summe und subtrahiert dieselbe wie das Beispiel zeigt.«

Das Wurzelzeichen wurde noch nicht in allgemeiner Anwendung gebraucht, sondern nur vor Irrationalzahlen. Elend bemerkt hierüber: Nicht aus jeder Zahl läſst sich eine vollkommene Wurzel finden, z. B. nicht aus 7; 39; 149. Wenn aus solchen Zahlen nun eine Radix verlangt wird, so setzt man davor das signum radicis, $\sqrt{}$; z. B. $\sqrt{7}$ heiſst Radix quadrata aus 7.

Zur Geschichte der Maſse.

In das letzte Viertel des 18. Jahrhunderts fällt eine auſserordentlich wichtige Veränderung im Berechnungswesen, nämlich die Einführung eines Urmaſses.

Die Zeitmafse sind allen Völkern der Erde durch unabänderlich bestehende Ordnungen gegeben; daher rechnet man überall nach Tagen, Stunden, Monaten und Jahren. Bei Feststellung der Raum- und Wertmafse aber hatten Willkür und Zufall einen fast unbeschränkten Spielraum. In Deutschland waren die geltenden Münz-, Mafs- und Gewichtssysteme so recht das Bild der zerrissenen territorialen Verhältnisse und politischen Zustände. In jedem deutschen Lande, ja selbst in den meisten Städten galt eine andere Elle; die Hohlmafse gleicher Gattung waren da gröfser, dort kleiner; das Zentnergewicht differierte selbst in nahegelegenen Orten bis zu 20 Pfund. In der Schweiz hatte jeder Kanton seine eigentümlichen Münzen, Mafse und Gewichte. In Frankreich gab es im letzten Drittel des vorigen Jahrhunderts über 50 verschiedene Gewichts-, Hohl- und Längenmafse. Diese Verschiedenheit wirkte schon störend auf den internen, noch ungünstiger aber auf den internationalen Verkehr. In kaufmännischen Geschäften mufsten Hunderte von Währungszahlen gemerkt und damit operiert werden. Die Reduktionen ergaben selbstverständlich nicht immer genaue, sondern vielfach nur Näherungswerte. Zudem waren die Mafse selbst da, wo sie in Geltung standen, nicht genau bestimmt; es fehlten die Normalmafse, und die Mafs- und Gewichtstabellen der Rechenbücher enthielten zahlreiche Abweichungen und Fehler. Diese, das Gemeinwesen schädigende Zerfahrenheit war die wohlverdiente Strafe für die Willkür, mit welcher man von der durch höhere Gesetze vorgezeichneten Ordnung abwich. Der Wunsch nach einem allgemeinen, unveränderlichen Mafs- und Gewichtssysteme ist daher begreiflich und so alt, als die im Mafs und Gewicht herrschende Verschiedenheit selbst, so alt als die Unabhängigkeit verschiedener Nationen des Erdballs. In der That fehlt es nicht an Andeutungen, dafs die Alten ihre Mafse von einer bestimmten unwandelbaren Einheit herleiteten.

So lange die Römer Beherrscher des zivilisierten Europa waren, hatten die ihnen unterworfenen Völkerschaften das gleiche Mafs und Gewicht. Eisenschmid beweist in seinem klassischen Werke: de Ponderibus et Mansuris mit sehr triftigen Gründen, dafs der altrömische Fufs 132,45 Pariser Linien gleich gewesen sei. Andere setzen 130,7″. Und Placidus (Regensburg) lieferte 1808 in einer Zusammenstellung der verschiedenen Fufsmafse den Nachweis, dafs diese in Deutschland, Schweden, Dänemark, Wien, Strafsburg, London, Amsterdam nirgends über 7,5 Pariser Linien, d. i. höchstens 0,0125 m vom Pes romanus abweichen.

Im Mittelalter wurden die Mafse von der Obrigkeit vorgeschrieben. Ein Beispiel: »Wir Heinrich der Schenckh von Reichenekk/ Purgermeister der Stat und die gemain der Purger ze Regenspurg veriesen und tun chunt/ . . . daz wir ein maz hie haben sullen vnd wellen/ daz man allen leuten geben schol bei naht vnd pei tag/ als hernach geschriben stet/ und der sullen gen fünfzehen an den Emer, vnd daz ist genannt ein viertail. vnd daz selb maz halbes ist genant ein halbes viertail vnd der sullen gen dreizzich an den Emer vnd daz selb maz halbes ist genant ein chopf vnd der sullen gen 60 an den Emer gen. (1354.)« Am Rathause in Regensburg waren der Werkschuh, das sechsfufsige Klaftermafs und die Elle in Metallstäben als Mustermafse zur allgemeinen Vergleichung angebracht; allein diese Mafse waren roh gefertigt und nicht vor Abnützung geschützt. Vielfach bestand auch die Vorschrift, dafs Hohlmafse und Gewichte mit einem kleinen Überschufs gefertigt werden sollten. Allein diese Vorschriften waren nur von lokaler Bedeutung, und der in bester Absicht amtlich verordnete Zusatz konnte die heillose Mafs- und Gewichtsverwirrung nur begünstigen.

Bei dieser Sachlage mufste die Einführung eines Urmafses, das, wenn es verloren gehen sollte, immer wieder aufgefunden werden konnte, als die Erlösung von einem grofsen Übel erscheinen. Frankreich griff diesen Gedanken zuerst auf, und weil es als geschlossenes Staatswesen aus dem Mittelalter in die Neuzeit übergegangen war, konnte es auch mit Aussicht auf Erfolg an die grofse Aufgabe herantreten. Man brachte die Länge eines Sekundenpendels, die Gröfse einer Bienenzelle, die Entfernung der Pupille in den Augen Erwachsener, den scheinbaren Durchmesser der Sonnenscheibe als Normalmafse, von welchen alle anderen Mafse abgeleitet werden sollten, in Vorschlag. Allein die diesbezüglichen Verhandlungen verliefen ohne Resultat. Es war der Sturm einer gewaltigen Revolution notwendig, um das Althergebrachte mit einem Male wegzufegen und die Vorurteile gegen die Neuerung zu vernichten. Und in der That hat die schreckliche Revolution auf dem Gebiete der Mafse einen Triumph zu verzeichnen, indem sie der »Freiheit« heilsame

Schranken setzte und der »Gleichheit« verdienstvollen Vorschub leistete. Als im Jahre 1789 die drei Stände der französischen Nation zusammentraten, verlangte der dritte Stand energisch eine Reform der Wert- und Raummafse. Auf Antrag des hochbegabten und berüchtigten Abbé Talleyrand wurde schon unterm 8. Mai 1790 von der konstituierenden Versammlung beschlossen, in Verbindung mit England ein Münz-, Mafs- und Gewichtssystem zu schaffen, das von allen Völkern der Erde angenommen werden könnte. Diese grofse kosmopolitische Idee sollte durch eine aus Franzosen und Engländern bestehende Kommission verwirklicht werden. England, gekränkt wegen der Beihilfe, welche die französischen Republikaner den englisch-amerikanischen Kolonien in ihrem Freiheitskriege geleistet hatten, lehnte das gemeinsame Vorgehen ab und schuf ein eigenes Mafssystem, dessen Grundlage der Yard ist (1 Yard = 3 engl. Fufs = 0,91439 m), welcher von der Länge eines Sekundenpendels in Greenwich hergeleitet wurde. Frankreich ging also allein an die Arbeit. Die Kommission einigte sich darüber, dafs das Urmafs den Ausdehnungsverhältnissen der Erde zu entnehmen sei, und beschlofs, den zehnmillionsten Teil des Erdquadranten oder den vierzigmillionsten Teil des Erdumfanges als Fundamentaleinheit festzusetzen. Dazu war eine neue Gradmessung notwendig. Da einzelne Mitglieder der Kommission von der Revolution hinweggerafft wurden, konnte die Arbeit, an welcher bisher der berühmte Mathematiker Laplace hervorragenden Anteil hatte, erst 1799 zu Ende geführt werden. Unterm 19. Frimäre des Jahres VIII (10. Dezember 1799) wurde das Gesetz über das neue Mafs- und Gewichtssystem erlassen. So wurde unter den Greueln der Revolution ein grofses Friedenswerk geschaffen. Die neue Mafseinheit, welche 10 faktisch gemessenen Erdgraden (Barcellona—Dünkirchen) entnommen und in zwei ganz gleichen Platinstäben fixiert wurde, erhielt den Namen Meter (mètre), von dem griechischen Worte Metron, das Mafs. Zur Ableitung der Ober- und Unterabteilungen dieses Mafses wurde die Decimaleinteilung angewendet, weil dieselbe dem gebräuchlichen Numerationssysteme zu Grunde liegt und beim Rechnen selbst die gröfsten Vorteile bietet. Um der nationalen Eifersucht vorzubeugen und das neue System auch anderen Völkern annehmbar zu machen, wählte man nicht französische Bezeichnungen, sondern entnahm die Termini den neutralen Sprachen der alten Griechen und Römer. Die Vielfachen der Grundeinheiten bezeichnete man mit deka = zehn, hekto = hundert, kilo = tausend, myria = zehntausend. die decimalen Teile der Grundmafse wurden mit den lateinischen Wörtern deci (0,1), centi (0,01) und milli (0,001) benannt. Aus den Längenmafsen wurden die Flächen-, Hohl- und Körpermafse und die Gewichte hergeleitet. Ein Quadrat mit 10 m Seitenlänge war das Ar, eigentlich are, vom lat. area, der Flächeninhalt. (Das im Deutschen eingebürgerte Wort Areal hat denselben Ursprung.) Die Grundlage des Körpermafses war das Kubikmeter, welchem, insofern es als Raummafs z. B. beim Handel mit Brennholz dient, der Name Stere gegeben wurde. Stere ist gebildet nach dem griech. Worte stéreon, d. i. Körper, wovon auch das Wort Stereometrie abgeleitet ist. Als Einheit für die Hohlmafse wurde das Liter (litre) = 1 Kubikdecimeter bestimmt. Die Gewichtseinheit war das Gramm (griech. gramma = das Eingegrabene, der Stempel auf einem Gewichtsstück, das Gewicht selbst. Gramma bedeutet allgemein das Geschriebene, daher Grammatik, die Kenntnis, richtig zu schreiben.) Das Gramm ist das Gewicht eines Kubikcentimeters destillierten Wassers bei einer Temperatur von $+4^0$ Celsius.

Das metrische System ist einfach, denn es hat nur einen Ausgangspunkt, das Meter, und es gibt dem Rechnen die denkbar gröfste Vereinfachung. Mit 12 Wörtern ist die ganze Nomenklatur dieses Systems dargestellt, welche für alle Teile desselben ausreichen und Verwechselungen mit älteren Mafsen ausschliefsen. Es ist originell und universal in dem Gedanken seiner Ableitung. 100000 Meter nach der Centesimal-Einteilung geben einen Erdgrad; es gehört der ganzen Erde an und kann in allen Staaten der Welt eingeführt werden. Am 1. Januar 1872 wurde das metrische System, welches bereits Italien und die Schweiz angenommen hatten, auch in Deutschland zur Geltung gebracht. Am 4. Dezember 1871 kam das Gesetz über die Ausprägung der deutschen Reichsgoldmünzen zu stande, und durch das Gesetz vom 9. Juli 1873 traten die Landeswährungen aufser Geltung.

Die Entwicklung des modernen Rechenunterrichts.

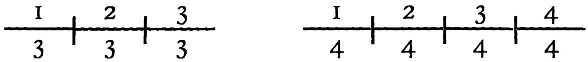
In den Volksschulen des 18. Jahrhunderts scheinen grofsenteils noch traurige Verhältnisse bestanden zu haben; denn die Klagen über dieselben sind allgemein. Aus der grofsen Zahl der ungünstigen Urteile über die damaligen Schulzustände seien nur einige hervorgehoben. Gabriel Ternen, Pfarrer zu Roitsch und Ranchin bei Delitzsch klagt in seiner Schrift, Der wohl-informierte Dorfschulmeister und Kinderlehrer, 1748 (2. Auflage), wie folgt: Als ich zum Predigeramte berufen worden, wurde ich gewahr, wie bei jungen und alten so grofse und ganz unglaubliche Unwissenheit vorhanden und dafs aus solcher das böse Ding, das gottlose und freche Leben, herkomme, und ich befand demnach, dafs alles an der üblen Erziehung der Jugend gelegen sei. Nun ist's wohl an dem, dafs wir Schulen genug haben, mafsen selbst kein Dorf ist, da nicht ein Schulmeister oder Kinderlehrer sich aufhalte; aber leider sind die wenigsten Schulen gut eingerichtet. Was für ungeschickte Leute lehren in den Dorfschulen! Ihrer viele sind nicht wert, dafs sie Schulmeister heifsen. Sie sind auch keine Meister, sondern Pfuscher. Derjenige, der sonst zu nichts in der Welt geschickt ist, der will ein Schulmeister werden, und den verständige Leute nicht gern eine Saue anvertrauen, und den die Bauren nicht gerne zum Kuhhirten machen würden, der soll zu einem geistlichen Hirten gut genug sein .... Sie prügeln denen Kindern den Catechismum und den historischen Glauben und Christum ins Gedächtnis, wie er ins Herze komme, da mögen sie selbst zusehen. Allein, was ist Ursach? Dafs man einen Dorfschulmeisterdienst für was geringes hält, und schlechte Leute dazu nimmt, als verdorbene und versoffene Bursche oder gar Soldaten, die sich bei grofser Herren Schreibern insinuieren und ihnen einen Thaler in die Hand drücken, damit sie bei ihren Herren eine Intercession, wenn ein Schuldienst offen, einlegen. Oder es hat des Herrn Schneider oder Gärtner, der das Kammermädgen nimmet und sonst nicht viel vergessen, das Glück, einen Schuldienst davonzutragen. Weil christliche und geschickte Subjecta solche Dienste scheuen, geschieht, dafs Fratres ignorantia die Schanze glücklich einnehmen. — Was ist verächtlicher in der Welt als ein Schulmann und ein Schulhaus?

Jener hielt allezeit die Nasen zu und schlofs die Augenlider, wenn er vor einer Schulen vorbeiging. Allerdings in den Schulen sind manche bittere Coloquinthen. Dafs wir nicht sagen vom Getümmel und Geschwärme, ingleichen vom Unflat, welchen sie von der Jugend müssen einfressen, und das währet einen Tag und alle Tage, Prodeunt cum luce labores; sie bekommen Gestank vor Dank, Unehre vor Ehre, lose Worte vor Geld. Sie haben Esels Arbeit, hingegen Zeisigs Futter. Es geht ihnen wie dem berühmten Schulrektor Trotzendorf, der schreibet von sich selbst: Artes liberis tradebam totius tempore vitae, et quae sunt mundi praemia? pauper eram. (Die Kinder allezeit ich in der Lehr thät üben, was war denn mein Gewinn? dafs ich ein Bettler blieben.)

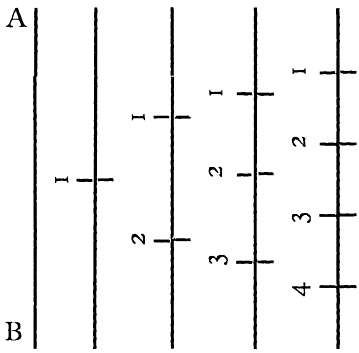
1767 schreibt Pfarrer Franz Steer von Neuötting: Wie sieht es aus in unseren deutschen Schulen? Wie geht es her darinnen? Das Herz in meinem Leibe erweicht sich aus Mitleiden, so ich für die unschuldige Jugend habe. Was für Unordnung und was für Ausschweifungen sieht man nicht selbst an den Schulmeistern und an ihrer Lehrart? Die meisten können ja selbst nicht ordentlich buchstabieren u. s. w. Braun, der Reformator des bayerischen Schulwesens, konstatiert: Viele der bisherigen Lehrer verstehen unter Schulzucht nichts anderes als wacker prügeln, immer verweisen, immer drohen, immer die Rute und das Tatzbrettlein in der Hand haben. Wo solche Zustände bestanden, war begreiflicherweise ein erspriefslicher Rechenunterricht nicht zu erwarten. Dazu kam noch, dafs die Rechenmeister nicht selten mit ihrer Wissenschaft hinter dem Berge hielten, jedenfalls in der Sorge um das tägliche Brot, damit ihre Kunst nicht zu gemein werde. Schon Karl Kaukol deutet dies an mit der Bemerkung: »Mein lieber Vatter selig hat all seinen Herrn Scolaren ganz offenhertzig alles entdeckt«, und von sich selbst sagt er, dafs er »hab alles getreulich und offenhertzig ans Licht geben und nichts verhalten wollen«. Paricius versichert, dafs er »in denen arithmetischen Wissenschaften seinen Schülern alles deutlich und ohne Vorbehalt vortrage und dergestalt anweise/ damit man die Sachen begreiffen/ fassen/ und zum künfftigen wirklichen Nutzen bringen möge«. Gabriel Ternen bestätigt diese Vermutung mit der Erklarung: »Mancher Meister ist mit seiner Kunst so neidisch, dafs ihm der Discipul die Sache fast abstehlen mufs; so sollen es rechtschaffene Schulmeister nicht machen, sondern es mufs mit ihnen heifsen. Inculcat non occultat — nach Trichters Weis, hier Treu und Fleifs! Die Konstatierung dieser Thatsache ist notwendig, um die Selbstlosigkeit zu begreifen, mit welcher die Schulmänner gegen Ende dieses Jahrhunderts nach der besten Methode, nach den besten Anschauungsmitteln suchen. Doch weist, wie aus den bisherigen Betrachtungen hervorgeht, die Rechenlitteratur in methodologischer Hinsicht schon zu Beginn des 18. Jahrhunderts mancherlei Verbesserungen und Fortschritte nach, die, zum Teil im 17. Jahrhundert begründet, nun allgemeiner werden.

Bei der Numeration steigt man von kleinen Zahlen zu gröfseren auf. Man setzt das Zahlenlesen vor das Zahlenschreiben. Bei der Addition werden erst ein-, dann zwei-, endlich mehrstellige Zahlen addiert, und zwar nimmt man erst Aufgaben ohne Übergang, dann mit Übergang der Teilsummen in höhere Ordnungen. Schon Pescheck beachtet die Ausdehnung der Zahlreihen und nimmt a) Zahlen nicht über 9; b) Zahlen, welche nicht über 20, 30, 90 gehen; c) Zahlen, welche nicht über 100, d) nicht über 1000 steigen, in Behandlung. Beim Subtrahieren kommen erst Beispiele an die Reihe, in welchen die untere Post kleinere, dann solche, bei denen die untere Post gröfsere Zahlen an den einzelnen Stellen hat; es sind also die Aufgaben ohne und mit Entlehnen von einander geschieden. Die Multiplikation wird auf die Addition zurückgeführt. »Denn wenn du wissen wilt, wie viel sei dreimal 225, so setze diese 225 dreimal unter einander und addiere«. (Sulzbacher Rechenbüchlein v. J. 1705.) Das Einmaleins wird aus gleichen Summanden entwickelt. Beim Memorieren desselben soll »ein treuer Lehrmeister den Kindern wohl helfen, wenn er erstlich nur 1 mal 1, 2 mal 2, 3 mal 3 .... fürgibt. Wenn sie dieses können, mufs man ihnen zeigen, dafs eine jede Wurzel um so viel steigt, als sie an sich selbst bedeutet, als zum Exempel: Wenn du wissen wilt, wie viel 5 mal 6 seye und zuvor gelernt hast, das 5 mal 5 thut 25, so thue zu diesen 25 wieder 5, wird daraus 30«. (Ebenda.) Die schriftlichen Multiplikationen wurden erst mit ein-, dann mit mehrstelligem Multiplikator vorgenommen; die Fälle, in welchen der Multiplikand oder der Multiplikator am Ende oder in der Mitte Nullen hatten, wurden gesondert behandelt.

Das Warum? tritt häufiger als früher auf, z. B.: Warum bei den Zehnern zwei-, bei den Hundertern drei Zahlzeichen sind, warum man beim Multiplizieren gröfserer Zahlen mit mehrstelligem Multiplikator die Partialprodukte um je eine Stelle einrücken mufs u. s. w. Diese wenigen Beispiele zeigen von der Erkenntnis, dafs man beim Unterrichte nicht blofs auf den Lehrstoff, sondern auch auf die Fassungskraft der Schüler Rücksicht nehmen müsse; es tritt das Bestreben hervor, einen vom Leichteren zum Schwereren aufsteigenden Stufengang einzuhalten und das Neue an das bereits Bekannte anzuknüpfen. Spengler sagt: Eilt im Lehren nicht zu sehr, schreitet erst dann weiter, wenn das, was zuvor gesagt wurde, vollständig begriffen und geübt ist, und Barth verlangt, dafs man die Jugend nicht überlade und seine Lehrart nach der Fähigkeit der mittelmäfsig begabten Schüler einrichte. Selbst an Beispielen der Veranschaulichung fehlt es nicht. Stigler sagt 1757: Die Brüche kann man sich am leichtesten einbilden, wenn man eine gerade Linie in etliche gleiche Teile teilt, z. B.:



In dem Büchlein des Jesuiten Barth v. J. 1772 findet sich die Bruchtabelle genau so, wie sie 20 Jahre später von Pestalozzi dargestellt wurde. Barth sagt: »Um sich einen deutlichen Begriff von den Fraktionen zu machen, wollen wir die Linie A B nach und nach in verschiedene, jederzeit gleiche Teile teilen«, also:



Er zeigt daran, dafs $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4} = 1$, dafs $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, dafs also die sog. Erweiterung eines Bruches lediglich eine Formveränderung desselben ist.

Der häuslichen Übung wird das Wort geredet und in Anordnung der Exempel (namentlich von Pescheck) absichtlich auf eine kontinuierliche Wiederholung des bereits Erlernten Rücksicht genommen.

Auch die Schulordnungen verlangen, dafs alles deutlich gelehrt werde. Die Gräflich Waldecksche Schulordnung v. J. 1704 schreibt z. B. vor: »Die aufzugebenden Exempel soll der Präzeptor an die Tafel schreiben und selbst erst den Schülern deutlich machen, hernach denen andern in der Stille auf dem Schieffersteine imitieren lassen«. Die Schulordnung der Franckeschen Stiftungen v. J. 1721 verlangt: Der Docens hat bei den Scholaren dahin zu sehen, dafs er ihnen jederzeit den rechten Grund der Regel zeige. — Die Braunschweigisch-Lüneburgische Schulordnung v. J. 1737 bestimmt: Man übe vor allen Dingen die Kinder in kleinen, leichtbegreiflichen Zahlen und deren Addition und Subtraktion, z. B.: Wie viel hast du Finger an der Hand? Wie viel derselben strecke ich jetzt aus? Um die Multiplikation begreiflich zu machen, zeige der Lehrer, wie das Einmaleins aus einer wiederholten Addition entstanden, welches durch deutliche Vorstellung an der Tafel erst den Sinnen, dem Verstande und dem Gedächtnisse aufs deutlichste einzuprägen. — Allein diese Verbesserungsversuche bezogen sich nur auf Einzelheiten; im ganzen blieb es bis in die Mitte des 18. Jahrhunderts beim Alten. Und selbst dann, als die Schulorganisation schon grofse Fortschritte gemacht hatte, blieb die Unterrichtspraxis noch weit hinter billigen Forderungen zurück. Als Beleg hierfür mag eine köstlich naive Stelle aus den »Leiden und Freuden eines Schulmeisters von Jeremias Gotthelf« angeführt sein: »Der Lehrer pflegte denen, die rechnen wollten (also nicht mufsten), eine Addition vorzuschreiben und sie dann mit ihnen zusammenzuzählen. Gab es über 10, so sagte er, da behaltet man eins, stieg sie auf 20, sagte er, hier behaltet man 2 u. s. f. Weiter liefs er sich nicht ein, nur dafs man zuletzt nichts behalten dürfe, sondern alles hinsetzen müsse, sagte er noch. So ging es lange, bis man addieren konnte, aber noch länger, bis man durch das Abziehen war. Beim Multiplizieren happerte es. Noch schlimmer ging es beim Dividieren. Man wufste zwar wohl, dafs man da von vorn anfangen müsse, und beim Multiplizieren hinten; a selten kam einer vor dem Schulaustritt dahin, dafs er sa konnte: 4 in 2 geht nicht, 4 in 24 geht 6 mal. Und

Fig. 43. Professor Freiherr Friedrich v. Wolff (1679—1754).

ging darum so mühselig und langsam, weil auch nicht das Geringste ein Grund angegeben war, weil r nie wufste, warum man es so machen müsse und nicht and Und eben deswegen vergafs man alles alsobald wieder. Ni nur mufste man alle Winter von vorn anfangen, nicht wufste man vom Rechnen gar nichts mehr, sobald man aus

Schule war, sondern ob einer Species vergafs man die andere. Als einst der Herr Pfarrer uns eine Addition beim Schulexamen aufgeben wollte, sagte der Schulmeister: Verzeiht, Wohlehrwürdiger Herr Pfarrer, solches haben wir lange nicht gerechnet; sie können es kaum mehr, wir sind jetzt beim Dividieren. Darüber verwunderte sich kein Vorgesetzter, man fand das ganz natürlich, denn der Statthalter sagte: grade so gings mir auch, und wenn es mir lange nicht zu Handen kommt, vergesse ich es noch jetzt.«

Die erste mächtige und umgestaltende Anregung zur Verbesserung der Lehrmethode im Rechnen ging von dem berühmten Kanzler Wolf an der Universität Halle aus. Er bemerkt in dem »Auszug aus den Anfangsgründen aller mathematischen Wissenschaften«, dem vorstehendes Porträt (s. S. 370) entnommen ist, i. J. 1713: »Ich pflege die Mathematik aus zwei Ursachen zu recommandiren, einmal wegen der unvergleichlichen Ordnung, in welcher sie ihre Sachen gründlich ausführt, darnach wegen ihrer Lehren, welche im menschlichen Leben vielfältig genützt werden. Es ist aber nicht genug, dafs man beim Lehren blofs die Wahrheit sagt, der Schüler mufs auch begreifen, dafs es Wahrheit ist. Der Nutzen der Mathematik fällt weg, wenn man die von den Alten gebrauchte Lehrart nicht einhält und ihre Lehren auf gemeine Art vorträgt, nach welcher sie mehr in das Gedächtnis als in den Verstand gefafst werden. Zwar kann bei Anfängern nicht die volle Schärfe im Erklären und Beweisen in acht genommen werden; denn die Natur thut weder in den Seelen noch im Körper einen Sprung (wörtlich nach Comenius); gleichwohl mufs der erste Unterricht in der Mathematik so vorgenommen werden, dafs er eine Veränderung im Verstande bewirkt.« Wolf behandelt den Lehrstoff analytisch in folgender Weise:

1. Erklärung. Die Rechenkunst ist die Wissenschaft, aus gegebenen Zahlen andere zu finden.

Anmerkung. Die Wissenschaft bedeutet eine Fertigkeit, alles, was man von einer Sache behauptet, aus unumstöfslichen Gründen darzuthun.

2. Erklärung. Wenn man viele einzelne Dinge von einer Art zusammennimmt, entsteht daraus eine Zahl, z. B. wenn man zu einer Kugel noch eine legt, so hat man zwei Kugeln.

Der 1. Zusatz: Also erfordert jede Zahl eine gewisse Einheit, und es lassen sich keine Zahlen mit einander vergleichen, auch nicht zusammensetzen, welche nicht aus einerlei Einheiten entstanden, z. B. wenn ich sage 6, so mufs jede Einheit, die zu dieser Zahl genommen wird, ein Ding von einer Art, als etwan ein Hund, ein Apfel, ein Haus, ein Thaler, ein Groschen sein.

Der 2. Zusatz. Eine Zahl wird gröfser gemacht oder vermehrt, wenn man andere Zahlen von ihrer Art hinzusetzt; hingegen wird sie vermindert, wenn man eine oder mehrere Zahlen von ihrer Art hinwegnimmt. Und weiter kann man keine Veränderungen mit den Zahlen vornehmen.

Der 3. Zusatz. Wenn eine Zahl vermehrt wird, sind die Zahlen, die zu derselben gesetzt werden, entweder alle für sich derselben gleich, oder sie sind gröfser oder kleiner als dieselbe. Daher gibt es zwei verschiedene Arten zu vermehren.

4. Zusatz. Ebenso ist klar, dafs, wenn eine Zahl vermindert wird, man entweder eine oder mehrere kleinere Zahlen nach einander von derselben wegnimmt, oder auch nur eine Zahl so viel mal von ihr wegthut, als man kann. Demnach sind 2 verschiedene Arten, eine Zahl zu vermindern.

Anmerkung. Hieraus sind die 4 Rechnungsarten entstanden.

3. Erklärung. Addieren heifst eine Zahl finden, welche verschiedenen Zahlen von einer Art zusammengenommen gleich ist.

Zusatz. Weil eine jede Zahl aus Einheiten zusammengesetzt ist, so geschieht das Addieren, wenn man zu der einen gegebenen Zahl die Einheiten der anderen gegebenen Zahl nach und nach zählt.

Anmerkung. Die Einheiten der Zahlen stellt man sich anfangs durch Finger vor, und verrichtet das zum Addieren nötige Zählen so lange, bis man in dem Gedächtnisse behalten, wie viel eine jede kleine Zahl zu einer andern genommen ausmacht. (Also auch hier wird der Anschaulichkeit schon das Wort geredet.)

5. Erklärung. Multiplizieren ist, aus zwei gegebenen Zahlen eine Zahl finden, in welcher die eine der gegebenen Zahlen so viel mal enthalten ist, als die andere Einheiten hat. (Produkt, Faktoren.)

Zusatz. Multiplizieren ist nichts anderes, als eine Zahl etliche Male nehmen.

6. Erklärung. Dividieren heifst, aus zwei gegebenen Zahlen eine Zahl finden, welche andeutet, wie viel mal eine gegebene Zahl in der andern enthalten ist.

1. Zusatz. Dividieren ist nichts anderes, als eine Zahl von einer andern etliche Male subtrahieren.

Der 1. Grundsatz. Eine jede Zahl ist sich selbst gleich.

2., 3., 4., 5., 6. Grundsatz. Wenn man Gleiches zu Gleichem addiert, Gleiches von Gleichem subtrahiert etc., so erhält man Gleiches.

1. Zusatz. Wenn daher zwei ein Exempel nehmen und keiner von beiden fehlet, so mufs einerlei herauskommen.

Aufgabe. Zahlen zu addieren. Wolf zeigt das Verfahren mit Verweisung auf den Stellenwert der Ziffern.

Beweis. Vermöge der geschehenen Rechnung enthält die gefundene Zahl in sich alle Einer, Zehner, Hunderter etc. der vorgegebenen Zahlen in sich und ist so grofs, als alle zusammengenommen.

Anmerkung. Wenn man daher alle Teile der gegebenen Zahlen als Einer ansieht, so nimmt man wahr, dafs man in die Summe allezeit nur den Überschufs der summierten Zahlen über 9 schreibt. Hieraus ist klar, dafs man bei der Summierung der Zahlen bei jeder Reihe so viel 9 wegläfst, als man Einheiten zur folgenden Reihe zählt — eine sehr einfache Erklärung der Neunerprobe. Die 2. Anmerkung weist das Verfahren und die Richtigkeit der Neunerprobe nach.

In ähnlicher Weise wie Wolf spricht sich Christian v. Clausberg in seiner demonstrativen Rechenkunst 1732 aus. Er bemerkt hier: Es ist bekannt, dafs die Arithmetik in allen (?) sogenannten Rechenbüchern als ein Gedächtniswerk betrieben wird. Allein diese Lehrart hat mir alle Zeit sehr seicht erschienen, und daher habe ich geglaubt, dafs man im Unterricht hauptsächlich auf den Verstand zu sehen habe. Dieser empfindet grofses Vergnügen, wenn er ein Ding aus dem Grunde verstehen lernt und begreifen kann, warum man durch diese Regeln ein solch Exempel auflösen könne. In einem andern Werke sagt Clausberg sinnig: Wenn der Hauptzweck der Rechenkunst in der Auflösung aller dabei vorfallenden Aufgaben bestehe, so sei einer der Nebenzwecke die Schärfung des Verstandes als ein Schleif- und Wetzstein des Geistes (ein Ausdruck, der nachmals durch Dinter zu einem geflügelten Worte in der Schullitteratur geworden ist). Man lerne durch das Rechnen distinkt, ordentlich und vorsichtig denken.

Nach Wolfscher Lehrart wird das Rechnen behandelt von Elend (1724), Mercklein (1732), Stigler (1757), Barth (1772), Spengler (1773), in dem für die Hohe Karlsschule verfaſsten Schriftchen v. J. 1785 u. a. Mercklein's Buch basiert, wie der Verfasser selbst sagt, auf den von Wolf gegebenen Anregungen; doch weicht dasselbe in Anordnung des wissenschaftlichen Lehrgangs insoferne ab, als es von Beispielen ausgeht und sich so der elementaren Lehrweise nähert. Mercklein rechtfertigt sein Verfahren wie folgt: Daſs ich einigermaſsen die Schranken der wissenschaftlichen Methode verlassen habe und in jedem Teil die Definitionen und Hypothesen vorausgesetzt, hernach die Axiome und Theoreme angefügt, statt der Demonstration derselben aber anschauliche Beispiele (Exempla illustrantia) und die Probleme am weitläufigsten zuletzt angeführt, wird man mir zu gut halten. Ich schreibe für Anfänger und weiſs aus Erfahrung, daſs es die zarten Ingenia abschreckt, wenn man sie mit Demonstrationen in althergebrachter Weise überfällt; hingegen wenn sie anfangs problematice handgeleitet und durch das Leichtere und Lustigere successive zu dem Schweren angeführt werden, so habe ich wahrgenommen, daſs sie desto eifriger zu den Demonstrationen selbst geeilt haben. Ich habe zum Vertheidiger den berühmten Professor Sturm, der selbst diesen Rat erteilt. — Spengler gibt die Ursache und den Beweis, so oft es anging; er läſst ihn weg, wenn er ihn umständlich aus der Algebra herleiten müſste, weil er den im Denken noch wenig geübten Knaben nicht unverständlich und verdrieſslich werden will. — Die Anfangsgründe der Arithmetik zum Gebrauche der Karlsschule in Stuttgart 1785 fordern, daſs von jeder Veränderung der Zahlen Grund und Beweise angeführt werden, welche den Fähigkeiten der Zuhörer angemessen sind. Die Beweise werden aber nicht in Buchstaben, sondern in Zahlen und Beispielen gegeben, jedoch so, daſs der

Lehrling einsieht, wie die Schlüsse nicht blofs auf den vorliegenden Fall beschränkt sind. — In Hauffs Lehrbuch der Arithmetik 1793 ist zu lesen: Die Arithmetik ist eine reine Vernunftwissenschaft. Bei allen Vernunftschlüssen sollte man ebensoviel auf den formalen als den materialen Nutzen sehen, den die Beschäftigung mit denselben verschafft. Der formale Nutzen ist aber um so gröfser, je weniger auf der einen Seite des Stoffes ist, der durch sie der Receptivität gegeben wird und je mehr auf der andern Seite dessen ist, was die Spontaneität aus diesem Stoffe herauszuarbeiten vermag. (Man sieht, dafs Diesterweg bei Hauff in die Schule gegangen ist.) Auch Clemm hat von Wolf gelernt, denn er sagt, dafs er die von ihm geschöpften Namen beibehalten habe.

In der von Wolf angebahnten Richtung tritt der Einflufs des Bacon von Verulam und Lockes unverkennbar hervor. Man begegnet hier einer Lehrart, welche nach dem Muster der griechischen Philosophen und Mathematiker auf Geistesbildung abzielt und zu diesem Zwecke die Logik heranzieht. Weil aber den psychischen Kräften der Jugend Rechnung zu tragen ist, erlaubt man sich Abweichungen vom streng wissenschaftlichen Systeme. Der Lehrstoff wird analytisch in organischem Zusammenhange entwickelt und in knappen, präcisen Sätzen dargestellt. Man gab Erklärungen, Grundsätze (Axiome), Lehrsätze (Theoreme), Lehnsätze, welche vorläufig als wahr angenommen wurden, Beweise, Aufgaben, Auflösungen. Dazu kommen Zusätze, welche einen allgemeinen Satz auf einen besondern Fall anwenden, oder einen neuen Satz ableiten. In den beigefügten Anmerkungen wurde das erläutert, was etwa in den Erklärungen, Grund- und Lehrsätzen noch dunkel geblieben sein sollte. Es ist keine Frage, dafs diese Methode für Anfänger an den humanistischen Anstalten sich eignete und hier, richtig angewendet, gute Erfolge erzielen mufste; für die Kinder der Volksschule war dieses Lehrverfahren jedoch nicht brauchbar, weil es elementare Rechenkenntnisse voraussetzte. Die Forderung, den Erfolg des Unterrichts auf den Verstand zu bauen, gilt jetzt noch den höheren Schulen, für den einfachen Bürger und Landmann erschien die gedächtnismäfsige Erlernung der rechnerischen Kunstgriffe für ausreichend, und das noch im Jahrhunderte der Menschenrechte. Allein die Sonne scheint, wie Wildermuth treffend bemerkt, für alle, wenn sie auch für den einen früher als für den andern aufgeht, und eine Wahrheit, die in irgend einem Lebenskreise aufgegangen ist, wird über kurz oder lang auch die andern beleuchten. So war es auch hier. Die Prinzipien, welche der Unterrichtsbehandlung an den Gelehrtenschulen zu grunde lagen, wurden nun auf alle Schulen ohne Unterschied angewendet, und der strenggläubige Pietismus reichte in diesem Bestreben dem liberalen Philanthropismus die Hand. In allen deutschen Landen wurde seit Mitte des Jahrhunderts der Organisation des Volksschulwesens die gröfste Aufmerksamkeit zugewendet. In Österreich schufen Felbiger und Kindermann, in Bayern Braun, in den Rheinlanden Overberg auf Anregung und unter der Fürsorge erleuchteter Fürsten und Regierungen ein geordnetes Volksschulwesen, in Preufsen wurden Rochows Schuleinrichtungen vorbildlich. (Bayerns Kurfürst Max Joseph erwarb sich durch seine Principia matheseos 1743 einen Ehrennamen in der Litteratur der Mathematik.) Mit den Klagen über die ungenügende Befähigung des Lehrstandes an den Elementarschulen erhoben sich auch energische Forderungen zur Heranbildung eines sachlich und methodisch besser geschulten Lehrpersonals.

Nun entstanden an vielen Orten Schullehrerseminarien, in Habelschwerdt und Stettin 1732, in Magdeburg 1736, in Rudolstadt 1747, in Hannover 1751, in Breslau 1767, in Karlsruhe 1768, in Würzburg 1771, in Helmstadt 1773, in München 1774, in Minden 1776, in Halberstadt 1778, in Idstein 1779, in Gotha 1780, in Kassel und Kiel 1781, in Detmold 1783, in Wesel 1784, in Dresden 1785, in Ludwigslust und Mecklenburg 1786, in Altenburg, Berlin und Breslau 1787, in Weimar und Öhringen 1788, in Salzburg 1790, in Greifswalde und Bamberg 1791, in Petershagen, Dessau und Stade 1792, in Hildburghausen und Weifsenfeld 1794, in Freiburg 1797 und a. a. O.[1]) An all diesen Anstalten war das Rechnen selbstverständlich Lehrgegenstand. Aufserdem standen Männer aller Berufsklassen, Professoren, Geistliche, adelige Gutsbesitzer, Lehrer zusammen, um eine Verbesserung des Volksschulunterrichts herbeizuführen. An der Münchener Akademie der Wissenschaften verging kaum ein Jahr, in welchem nicht eine pädagogische Rede gehalten wurde,

[1]) Wolfenbüttel hatte 1563 schon ein Schullehrerseminar.

und es haben sich namentlich Braun, Steringer, v. Ickstatt, v. Wolter, Osterwald, Leveling, Häffelein u. a. in dieser Hinsicht rühmlichst hervorgethan. Bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts waren die Schriften über den Unterricht und Schuleinrichtungen ziemlich selten. Aufser den Werken von Comenius und Locke werden z. B. erwähnt: Der gute Schulmann 1695; Der wohleingerichtete Schulbau 1711; Krause, Kurze und deutliche Anweisung zur Auferziehung und Unterrichtung der Jugend 1718; Friedel, Gründliche Anweisung zur Kinderzucht 1723; Rambach-Neubauer, Wohlunterrichteter Informator 1737; Bock, Wohlunterrichteter Dorff- und Landschulmeister 1744. Dagegen werden von der Mitte des 18. Jahrhunderts ab die Schriften über die Methode des Volksschulunterrichts, welche auch das Rechnen mehr oder minder eingehend von pädagogischen Gesichtspunkten aus besprechen, immer zahlreicher. Solche sind z. B. Villaume, Prediger zu Halberstadt, Professor in Berlin, Praktisches Handbuch für Lehrer an Bürger- und Landschulen, 1780; Seiler, Kirchen- und Konsistorialrat in Erlangen, Schulmethodenbuch 1789; Rist, Anweisung für Schulmeister niederer Schulen 1788; Thienemann, Anweisung für Schullehrer auf dem Lande 1798; Praktische Regeln der Unterrichtskunst von einem Anhalt-Bernburgischen Schullehrer 1797; Fischer, Anweisung für Landschullehrer; Stresow, Handbuch für deutsche Schulmeister; Weifs, Superintendent zu Sulz, Anleitung für Schullehrer; Moser, Taschenbuch für deutsche Schulmeister 1786—1797; Der bayerische Landgeistliche in der Schule, Landshut 1804; Vierthaler, Elemente der Methodik und Pädagogik 1804. Es sind das nur einzelne, zum teil in Vergessenheit geratene Schriften aus der grofsartigen Litteratur, welche während der pädagogischen Sturm- und Drangperiode am Ausgange des 18. und zu Beginn des 19. Jahrhunderts sich über das Volksschulwesen verbreiteten. In diesen und ähnlichen Schriften leben die von Bacon, Comenius, Locke, Wolf u. a. gegebenen Anregungen wieder auf, und zwar im Gebiete des Volksschulwesens. Beeinflufst vom Geiste des Josephinismus tritt nun die Richtung auf die bürgerliche Wohlfahrt, die Erziehung für praktische Interessen des Lebens immer stärker und einflufsreicher hervor, das mechanische Lernen wird zurückgewiesen und das Verständnis der Sache und Verstandesbildung gefordert. Das Rechnen, welches zu anfang des 18. Jahrhunderts da und dort noch vor der Thüre stehen mufste, für dessen Erlernung nicht selten noch eigenes »Zifferschulgeld« zu bezahlen war, wurde nun vollberechtigter Lehrgegenstand. Bisher hatte man nur Schriften über das Rechnen; nun erschienen auch Schriften über den Rechenunterricht.

Es ist nicht möglich, all der Bestrebungen im einzelnen zu gedenken, welche die neue Richtung ankündigten. Einer der hervorragendsten Vertreter derselben, ein Edelmann im doppelten Sinne des Wortes, ein echter Philanthrop, war Eberhard Freiherr von Rochow, Erbherr zu Reckan, Gettin und Krahne. In der Erkenntnis, dafs Elend und Not unter dem Landvolke zumeist durch Aberglauben und Unwissenheit verursacht seien, gründete er auf seinen Gütern Schulen (1773—1779), baute Schulhäuser, stellte gut honorierte Lehrer auf, erteilte selbst Unterricht, schrieb Schulbücher und verfafste eine Instruktion für Landschulmeister mit detaillierten Anweisungen über Schulführung, Lehrstoffe und Methode. Seinen pädagogischen Standpunkt kennzeichnet Rochow in seinem »Handbuche« durch den Beisatz: für Lehrer, die aufklären wollen und aufklären dürfen. Darüber angegriffen, erklärt er in der 2. Auflage dieses Buches 1789: . . . »Nach langem Kampfe mit der Inkonsequenz ihrer Gegner scheint endlich die Partei derer zu siegen, die den Nutzen der allgemeinen Aufklärung behaupten . . . Und wie wäre es möglich gewesen, dafs sie nicht hätte siegen sollen? Denn so wie erfahrungsmäfsig darin kein Fehlschlufs liegt, dafs aus unrichtigen Begriffen unrichtige Grundsätze, und aus diesen unrechtmäfsige Handlungen entstehen, dafs aus Mifsverständnissen Zank und Streit, Selbstsucht, Menschenverachtung und Hafs entspringen, dafs böse Gewohnheiten entweder die Glückseligkeit hindern oder positiv elend machen; dieses alles aber meistenteils Folgen fehlerhafter Leitung und mangelhaften Unterrichts oder des Mangels an genugsamer Aufklärung bei alten und jungen sind: So mufs die Veranstaltung des entgegengesetzten Verfahrens notwendig mehr Glückseligkeit hervorbringen. Nämlich, aus früh genug und zweckmäfsig geleiteter Denkkraft entspringen gute Grundsätze; aus diesen gute Handlungen; Erkenntnis gibt Tüchtigkeit; wer deutlich und verständig redet, wird leichter verstanden; wer früh weifs, dafs die Menschen durch ihre Verbindungen zu gegenseitiger Liebe verpflichtet sind und nur insoferne Glückseligkeit geniefsen als sie Gott und sich lieben, der wird kein Gottes- und kein Menschenfeind sein wollen, und wer den Schaden böser Gewohnheiten früh genug anschauen lernte, wird geneigt sein können, über sich zu wachen, und geschickt, sich davor zu hüten. Dieses alles aber veranstalten und bewirken, heifst aufklären und Aufklärung befördern. Ich bekenne, dafs ich den Fall für unwahrscheinlich hielt, dafs jemals diese Wörter öffentliche Schimpfwörter würden . . . Immer aber dachte ich und denke mir noch die herrliche Gradation des göttlichen Aufklärers Christi: Ich bin das Licht, die Wahrheit und das Leben, im Gegensatz von Finsternis, Aberglauben und Elend, und bin daher zur Beibehaltung des Wortes aufklären auf dem Titelblatte durch meine Überzeugung gebunden.«

Aus dieser allgemeinen Anschauung leitete Rochow seine pädagogischen und methodischen Grundsätze ab. Die wichtigsten derselben sind: »Suche die Kinder erst mit gemeinen, in die Sinne fallenden Dingen bekannt zu machen und sie darüber auf eine angenehme Art zu unterhalten; lehre sie vieles anschauen und darauf merken, das sich ihnen Darbietende richtig wahrzunehmen und richtig anzugeben. Verbessere dabei ihre Sprache. Teile ihnen so viele Kenntnisse mit, als sie jetzt brauchen.« Rochow wollte die Kinder zu guten Menschen erziehen und trachtete daher, auf die Gesinnung der Jugend Einflufs zu gewinnen. Zu diesem Zwecke mufste dieselbe geistig angeregt, denk- und sprachfähig gemacht werden, und deshalb mufste der Unterricht bei dem Anschauungs- und Erfahrungskreise der Kinder, bei sinnlichen Erscheinungen anheben und mit einem Anschauungs- und Sprachkursus beginnen. Dadurch wurde das Fundament des Unterrichts ein anderes. Buchstabieren und Numerieren konnten nicht mehr den Anfang machen.

Betrachten wir nach diesen allgemeinen Erörterungen Rochows Rechenunterricht. Zuerst wurden die Schüler im Zählen sichtbarer Dinge geübt. Weiterhin schrieb man ihnen Striche an die Tafel, welche gleichfalls zu zählen waren. Konnten sie die Einer bis 100 zählen, lernten sie die Zehner auffasssen. Hierauf folgte das Zurückzählen von 100 auf 1, weil dies der erste und einfachste Grund des Subtrahierens ist. Die Schüler fingen dabei aber erst von 10 an: 10, 9, 8 . . ., dann von 20, 30 etc., zuletzt von 100. Hierauf wurden Rechenübungen im Addieren und Subtrahieren vorgenommen: 2, 4, 6, 8 . . .; 1, 3, 5, 7 und zurück. War das Zu- und Abzählen der 2 erlernt, wurde die Übung auf das Zu- und Abzählen der 3, 4 etc. ausgedehnt, alles ohne Ziffern, aber mit Veranschaulichung. Die Einübung der Ziffern war dem Schreibunterrichte zugewiesen. Hierauf folgte das Addieren und Subtrahieren zweistelliger Zahlen. Gröfsere Zahlen wurden erst gelesen, nach ihrem Werte verglichen und dann geschrieben. Beim Addieren und Subtrahieren gröfserer Zahlen wurden die Kinder mit dem geltenden Münz-, Mafs- und Gewichtssysteme bekannt gemacht. Daran reihten sich die freien Vorübungen für das Multiplizieren und Dividieren. Die 4 Spezies wurden in sachgemäfser Verbindung geübt; das Kopfrechnen, welches Kantor Bruns, ein von Rochow angestellter Lehrer, lebhaft empfohlen hatte, ging dem schriftlichen Rechnen voraus. Das Einmaleins wurde vor dem Memorieren erklärt, stückweise eingeprägt und zu diesem Zwecke vor- und rückwärts und aufser der Reihe abgefragt. Der Lehrer rechnete auf der grofsen Schultafel vor, die Schüler hatten zur Selbstübung Schiefertafeln. Die Addition wurde durch die Subtraktion, die Multiplikation durch die Division geprüft und umgekehrt. Als schriftliche Divisionsform wurde das Untersichdividieren, genau in der nunmehr gebräuchlichen Form, gelehrt. Angewandte Aufgaben wurden nach der Regeldetri gelöst. »Und da alles dieses in lauter angewandten Aufgaben gemeinnütziger Berechnungen geschehen mufs, so verliert dieses Geschäft seine gewöhnliche Trockenheit und wird, als Übung der jungen Seelenkräfte, dem Kinde so freudenvoll, als den jungen Vögeln des Waldes der erste Flug sein mag. Denn jedes gelingende Geschäft schafft Freude, und dieses unfehlbare Gelingen gewährt in dem Grade nur die Rechenkunst.« Rochows Schulen wurden zum Sammelpunkte deutscher Lehrer. Auch stand Rochow mit den mafsgebenden Persönlichkeiten des preufsischen Unterrichtsministeriums in freundschaftlichem Verkehr, so dafs man in der Annahme, die i. J. 1794 für Preufsen erlassene Volksschulordnung sei unter dem Einflusse dieses thatkräftigen und verdienstvollen Mannes entworfen worden, wohl nicht irre geht. So ging reicher Segen von den Landgütern dieses Edelmannes aus über das deutsche Vaterland, das in ihm einen hervorragenden Begründer nicht blofs des modernen Rechenunterrichts, sondern auch der deutschen Landschule verehrt.

Gleichzeitig mit Rochow traten für Verbesserung des Schulunterrichts ein: Villaume, Overberg, Niemeyer.

Peter Villaume, geb. 1746 in Berlin, war Prediger der französischen Kolonie in Halberstadt, errichtete daselbst 1777 eine Töchterschule für Adelige und machte sich durch eine Reihe philosophischer Schriften bekannt (1780—1800). In den litterarischen Arbeiten Villaumes finden sich recht vernünftige Ansichten über den Rechenunterricht. »Unsere Schüler,« bemerkt Villaume, »bedürfen den pedantischen und charlatanischen Apparat der gewöhnlichen Rechenbücher nicht: Falsi, Alligation, Interesse etc. Alle die ungeheueren Aufgaben und Regeln sind ihnen völlig unnütz, und sie werden das Zeug bald vergessen. Sie müssen nicht eine Rechenkunst oder eine Rechenwissenschaft, sondern eine Rechenfertigkeit haben, die sie zeitlebens behalten und anwenden können. Wir haben zu Spielereien keine Zeit. Die Schüler brauchen am besten eine simple, anschauliche Rechenmethode, die nicht über das gemeine Leben hinausgeht; der Bauer berechnet, wie viel ein Zentner Heu kostet, wie viel seine Tiere verzehren werden, und, wenn er freie Hand hat, welche Kultur seiner Äcker ihm vorteilhafter erscheint. Der Weber und die Hausmutter müssen berechnen, wie viel Garn solcher Gattung zu einer Elle Leinwand gehet. Auf dem Markte, im Kramladen können die Leute nicht Tafel und Griffel nehmen, sie müssen die Rechnung im Kopfe expedieren; also mufs man sie vornehmlich darin üben und ihnen die leichtesten Methoden an die Hand geben. Um den Kindern das Rechnen sinnlich zu machen, können die ersten Rechenübungen auf Dinge, Äpfel, Nüsse etc. sich beziehen. Allemal müssen die Rechnungen aus dem Zirkel der Kinder genommen werden: die Gröfse der Felder, die Länge eines Weges, die Menge des Futters fürs Vieh, die Maschen in einem Strumpfe, die Menge der Kohlköpfe auf einem Felde können die Rechnungen grofs genug machen, um Übung darin zu geben. Lasset die Numerationen von 10 bis 20 Zahlen, die grofsen Multiplikationen und Divisionen weg.« Als besondere Mittel der Veranschaulichung empfiehlt Villaume Zahlpfennige, Bohnen oder Stöckchen wie »Schwefelstöckchen«. Beim Zählen müssen die Kinder Dinge, ihre Stöckchen, Bohnen u. s. w. vor

Augen haben und die Zahl damit realisieren, und zwar immer in Reihen von 10, damit sie von den Zahlengröfsen und von dem Mechanismus der Zahlen einen anschaulichen Begriff bekommen. An den Stäbchen, von denen je 10 zu einem Päckchen zusammengebunden wurden, sollte aber nicht blofs das Numerieren, sondern auch das Rechnen mit den 4 Grundrechnungsarten gelehrt und gelernt werden, wozu Villaume die erforderlichen Anweisungen gibt.

Der um das Schulwesen hochverdiente Overberg behandelt das Rechnen in der »Anweisung zum zweckmäfsigen Schulunterricht für die Schullehrer im Fürstentum Münster 1793«. Er fordert, dafs die Landjugend das Rechnen lerne; »denn es gewöhnt die Kinder an Aufmerksamkeit und Nachdenken, es lehrt sie auf ihren Vorteil und Schaden sehen, es macht sie vorsichtig in ihren Unternehmungen und setzt sie in den Stand, sich leicht und geschwind bei vorfallenden Rechnungen selbst zu helfen. Auf eine gute Methode kommt dabei alles an.« Overberg gibt für den Rechenunterricht nachstehende Regeln: Haltet euere Schüler nicht mit der Erklärung der Rechenkunst, nicht mit Einteilungen und Erklärungen der verschiedenen Rechnungsarten auf, sondern fanget gleich mit der Übung an, lehret sie zählen, die Ziffern kennen, schreiben, lesen. Lasset die Schüler über das Exempel nachsinnen. Seid nicht zufrieden, wenn sie die Manier wissen, sondern lafst sie auch den Grund derselben einsehen. Übet sie weniger in unbenannten als in benannten Zahlen, lasset es Nüsse, Schafe, Thaler sein, was sie addieren und subtrahieren sollen. Beim Rechnen mit mehrsortigen Zahlen macht die Kinder mit den gangbaren Münzsorten, mit dem Preise der Waren, dem Jahr- und Taglohn bekannt. Übet sie in solchen Exempeln, die in ihre eigenen oder ihrer Eltern Umstände einschlagen. Plaget sie nicht mit grofsen Exempeln, verschonet sie daher mit Millionen und Billionen, die das Rechnen schwer machen, ihnen aber selten oder nie vorkommen. Gehet nicht eher weiter, als bis alles verstanden und geübt ist. Lafst das Kopfrechnen dem Tafelrechnen vorausgehen. Um das Rechnen zu versinnlichen, sorgt dafür, dafs ihr zählbare Dinge bei der Hand habt. Hierzu dienen Stöckchen, Bündchen und Bunde. Man nimmt nämlich 10 Stöckchen von der Dicke einer Federspule und etwa 1/2 Fufs lang, nebst diesen einzelnen Stöckchen nimmt man 10 andere dergleichen und bindet sie mit einem Faden zusammen. Diese Stöckchen werden ein Bündchen genannt; 10 solcher Bündchen zusammengebunden geben einen Bund. Auf diese Weise versinnbildet man Zehner, Hunderter, Tausender; auch begreifen die Kinder daran sehr leicht das Addieren und Subtrahieren. Für den gröfsten Haufen euerer Schüler ist es genug, wenn sie die 4 Spezies und die Regeldetri kennen. Overberg hielt nachstehenden Stufengang ein: 1. *Auf- und Abzählen* an sinnlichen Gegenständen, erst bis 10, dann 15, dann 20, endlich innerhalb 100. — 2. *Die 4 Rechnungsarten im Kopfe* an Aufgaben aus dem Gesichtskreise der Schüler. (Du hast 2 Bohnen, du 3; wie viel habt ihr zusammen? Dein Vater hat 9 Schafe; er verkauft 4 davon, wie viel hat er noch?) Herleitung des Einmaleins aus der Addition, Memorieren desselben. Reihenrechnen. — 3. *Numerieren*, d. h. Zahlen *lesen* und mit Ziffern schreiben, wobei die Stäbchen als Versinnlichungsmittel dienen. — 4. *Die 4 Spezies an der Tafel*. *Addieren*, erst mit Exempeln ohne Zehner, dann mit Zehnern und Hundertern, wo höhere Einheiten noch nicht im Sinne zu behalten sind. Um zu wissen, dafs die Einer unter die Einer, Zehner unter Zehner geschrieben werden müssen, leget man ihnen 1 Bund, 1 Bündchen, 1 Stäbchen dahin, wo die Hunderter, Zehner, Einer zu stehen kommen. Dann werden die Zahlen so geschrieben, wie sie dieselben gelegt haben. Nun folgen Exempel, wobei etwas im Sinne zu behalten ist. Das Verfahren wird wieder an Stäbchen veranschaulicht. Den Schlufs bilden Exempel mit ungleich benannten Zahlen. In gleicher Weise wird das *Subtrahieren* behandelt. Beim *Multiplizieren* werden erst Beispiele mit einstelligen Faktoren vorgenommen; dann ist der Multiplikand mehrstellig ohne und mit Übergängen. Endlich wird der Multiplikator mehrstellig genommen.

$$
\begin{array}{rr}
\text{Form:} & 23 \\
 & 12 \\
\hline
23 \cdot 2 = & 46 \\
23 \quad 10 = & 230 \\
\hline
 & 276
\end{array}
$$

Dividieren: a) Der Divisor und Dividend sind einstellig. b) Der Dividend ist mehrstellig α) der Quotient ist eine ganze Zahl (die Rechnung geht auf), β) der Quotient ist ein Bruch oder eine gemischte Zahl.

$$\text{Form: }\begin{array}{r|l} 736 & 3 \\ \cline{2-2} \underline{6::} & 245\,^{1}/_{3} \\ \cline{1-1} 13: & \\ \underline{12:} & \\ 16 & \\ \underline{15} & \\ 1 & \end{array}$$

Das Dividieren ist anfangs nur ein Teilen oder Verteilen. — 5. Regeldetri: a) die gerade, b) die umgekehrte. — 6. Rechnen in gebrochenen Zahlen. Was ein Bruch ist. Nehmt einen Apfel oder eine Rübe, zerschneidet diese Dinge in 2 gleiche Teile etc. Wie die Brüche geschrieben werden. Wert der Brüche. Einteilung. Kürzen und Auflösen derselben. Die 4 Spezies in Brüchen. Brüche zu addieren, a) die gleiche Nenner haben; b) die verschiedene Nenner haben. Mittel hiezu: Das Gleichnamigmachen. Das Subtrahieren der Brüche. Multiplikation: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ heifst, man soll die Hälfte von $\frac{1}{2}$ suchen. Die Multiplikation ist also in eine Division zu verwandeln. Bruchdivision und Regeldetri in Brüchen. Die Rechnungsproben erfolgen durch Umkehrungen, damit eine Rechnungsart durch die andere geübt wird. Die Neunerprobe bleibt unberücksichtigt.

Niemeyer spricht sich in seinem Leitfaden zur Pädagogik und Didaktik (1802) also aus: 1. Beim Rechnen ist das Abstrakte so viel als möglich konkret zu machen und auf wirkliche Fälle zurückzubringen. 2. Die Schüler müssen die Regeln selbst erfinden. 3. Mit Beförderung der technischen Rechenfertigkeit ist auf die Einsicht in den Grund des Verfahrens hinzuwirken. 4. Die Schüler sollen das erkennen, wovon sich der sicherste Gebrauch im Leben erwarten läfst.

Das Kopfrechnen.

Um die Mitte des 18. Jahrhunderts wird das Kopfrechnen empfohlen. Ternen verlangt 1742, dafs die Knaben, nachdem sie die Spezies und Regeldetri begriffen, anzugewöhnen seien, auswendig, ohne Kreide und Feder zu rechnen. Man gebe dabei kleine Exempel, z. B. Gottlieb hat mir 4 Thaler, zu einer andern Zeit wieder 4 Thaler geborgt, was machts in der Summa? Unser Knecht Hanfs bekommt jährlich zum Lohne 10 fl.; neulich hat er 3 fl. voraus zum Jahrmarkt genommen, wieviel hat er noch stehen? Hübsch sagt darüber in der Arithmetika Portensis 1748: Das Kopfrechnen ist das geschwindeste und bequemste Rechnen, da es ohne allen Apparat, allerwegen und zu allen Zeiten geschehen könne. Erforderlich sei, dafs man das Unentbehrlichste auswendig könne: das Einmaleins, die geläufigsten Resolvierungen der Mafse, Münzen, Gewichte, die passendsten Zerlegungen der Zahlen in Summanden und Faktoren. Bei gröfseren Zahlen könne man sich das Geschäft durch einzelne Aufzeichnungen erleichtern; auch soll man nach Umständen die Finger dazu brauchen. Man gehe gradatim von ganz kleinen und leichten Exempeln zu gröfseren und schwereren Exempeln vor; übrigens hüte man sich, »das Kopfrechnen in ein Kopfzerbrechen umzuwandeln, denn dieses ist der Gesundheit nachteilig und schwächt die Lebensgeister«. Hübsch glaubt, dafs das Kopfrechnen dem schriftlichen nachfolgen müsse; denn »wenn man viel mit der Feder elaboriert hat und fix ist, entsteht nach und nach das Kopfrechnen daraus von selbst; sonst spannt man die Pferde hinter den Wagen«. Auch Busse behandelt das Kopfrechnen (1786) nach dem schriftlichen Rechnen, jedoch sehr knapp und nur für das Addieren und Subtrahieren. Das Bussesche Kopfrechnen ist teilweise ein in die Phantasie versetztes Zifferrechnen, d. h. die schriftlichen Formen sind hier auf das Kopfrechnen übertragen, z. B.: Wenn man 4 Einheiten zu 11zig addieren soll, so stelle man sich 4 sogleich zur rechten und 11 zur linken vor, oder wenn man 8 von 63 abzuziehen hat, so denke man sich: 8 von 13 bleibt 5, von 63 also 55. Doch wird das Kopfrechnen unabhängig vom schriftlichen auch mit Zerlegung der Zahlen ausgeführt, z. B.: 56 und 38; 6 und 5zig und 3zig sind 6 und 8zig, und 8 dazu sind 4 und 9zig. —

Das Reglement für das Schullehrerseminar in Breslau fordert 1787: Das Rechnen wird als Übung des Verstandes betrieben, und das Rechnen im Kopfe, welches für das gemeine Leben unentbehrlich ist, soll dabei nicht versäumt werden. — Der Entwurf über die zweckmäfsige Einrichtung der Landschulen in Halberstadt v. J. 1789 enthält die Stelle: Das Rechnen im Kopfe ist deshalb nötig, weil die Landleute nicht immer Zeit und Gelegenheit haben, viele Zahlen zu schreiben, wenn sie etwas ausrechnen sollen. Es ist ein gutes Hilfsmittel, dabei die Finger zu gebrauchen. Alle Exempel müssen aus dem Landleben hergenommen sein. — Als selbständiger Unterrichtsgegenstand und zusammenhängend wurde das Kopfrechnen behandelt von Georg Heinrich Biermann. Er gab 1790 eine »Anleitung zum Kopfrechnen in Verbindung mit dem schriftlichen Rechnen« heraus, welche für das Schullehrerseminar in Hannover bestimmt war. 1792 erschien von demselben der »Leitfaden zu einem auf den Verstand der Kinder wirkenden Unterricht im Rechnen für sich bildende Lehrer des Rechnens«. 1795 folgte eine »Anleitung zum Rechnen im Kopfe ohne allen Gebrauch von Schreibmaterialien, und 1798 das ABC des Kopf- und schriftlichen Rechnens«. Biermann hebt den formalen Nutzen des Kopfrechnens hervor: »Der Kopfrechner ist gewohnt, nur an das zu denken, worüber er zu denken sich vorgenommen hat; er ist nicht wie ein Schmetterling, der von einer Blume zur andern fliegt«. — 1797 erschien zu Leipzig eine weitere »Anweisung zum Kopfrechnen in Verbindung mit der dazu erforderlichen Methode zum Gebrauche für Lehrer von Joh. Fried. Köhler«. Köhler läfst das Kopfrechnen dem schriftlichen Rechnen vorausgehen. Er sagt hierüber: Eine vieljährige Erfahrung hat mich hinlänglich belehrt, dafs das Kopfrechnen dem Zifferrechnen das rechte Verständnis eröffne, denn immer waren meine besten Kopfrechner auch meine fertigsten und geschicktesten Tafelrechner. Den Nutzen des Kopfrechnens sucht Köhler, abgesehen von seiner Bedeutung für den gemeinen Verkehr, in der Vervollkommnung der Seelenkräfte: »Der Kopfrechner kann schlechterdings, so lange er rechnet, sich keine fremden Gedanken erlauben; gibt das nicht der Seele des Jünglings ein schönes Übergewicht über die Sinnlichkeit?« Köhler verlangt, dafs der Unterricht fafslich, gründlich, abgestuft, freudig sei. Der Lehrer soll ein heiterer, gelassener und sanftmütiger Mann sein. Die Aufgaben soll er nicht unnötig erschweren und die Rechenbeispiele in kleine Erzählungen einkleiden.

Magenau, Pfarrer in Niederstotzingen, veröffentlichte eine »Kleine Handbibliothek für deutsche Landschulmeister und ihre jüngeren Gehülfen. Oder: Belehrende Auszüge aus den besten neueren Schriften, den deutschen Landschulunterricht betreffend, Stuttgart.« Der Jahrgang 1800 enthält eine Abhandlung über das Kopfrechnen, welche die bisher über diesen Gegenstand erschienenen Schriften zusammenfassend verwertet und den Stand des Kopfrechnens an der Wende des Jahrhunderts repräsentiert. Es seien im nachfolgenden einige Sätze aus dieser Arbeit hervorgehoben:

»Das Rechnen ist ein vortreffliches Mittel zur Bildung des Verstandes. Alles kommt dabei auf die Leitung des Lehrers an. Das gewöhnliche mechanische Rechnen führt zwar zu einer nützlichen Fertigkeit, aber es bildet nicht. Es ist daher ein grofser Nutzen für die Jugend, wenn das Kopfrechnen zur ersten arithmetischen Übung gemacht und das schriftliche Rechnen damit in Verbindung gesetzt wird. (Niemeyer, Köhler.) Das Kopfrechnen mufs a) fafslich sein; der Lehrer hat daher die Sache von verschiedenen Seiten zu beleuchten. Regeln und Rechenvorteile müssen die Schüler selbst finden. b) Es sei gründlich. Der Lehrer mufs nicht blofs zeigen, wie ein Exempel berechnet wird, sondern auch warum es so berechnet wird. (Köhler, Biermann.) c) Es ist ein vom Leichten zum Schweren fortschreitender Stufengang notwendig. Dabei ist das Frühere zu wiederholen. Man nehme die Aufgaben aus dem täglichen Leben und der jugendlichen Gedankensphäre; verbinde sie mit Sinnlichem (d. h. mit Erzählungen); erschwere den Schülern das Ausrechnen nicht; bringe Mannigfaltigkeit in den Unterricht; rege den Wetteifer an; leite die Schüler auf Kunstgriffe, aber nicht bei den ersten Übungen; diktiere langsam, höchstbestimmt und genau, und überschreite die Grenzen nicht, welche dem Kopfrechnen hinsichtlich der Gröfse und Menge der Zahlen gesetzt sind.

Die erste Übung ist das Zählen. Zuerst müssen die Kinder zum Zählen wirklicher Dinge angehalten werden. Dadurch erhalten sie einen deutlichen Begriff von jeder Zahl. (Niemann, Horstig.) Dazu dienen Finger, Fensterscheiben etc.

Von augenscheinlichem Nutzen ist es, wenn die Kinder reihenweise zählen, davon jede Reihe nicht mehr als 10 Stück enthält und sich jedesmal durch einen Strich bemerken, wenn sie 10 gezählt haben. (Die russische Zählmaschine war demnach noch nicht bekannt.) Wissen die Kinder bis 10 zu zählen, zählen sie 10 und 1, 10 und 2, zweimal 10 statt 20, 10 mal 10 statt hundert, dann erst erhalten die Kinder den Namen. Dem schliefst sich das Rückwärtszählen und Zahlenzerlegen an, z. B. wie viele Zehner und Einer hat 47? Welche Zahl besteht aus 2 Einern, 5 Zehnern, 3 Hundertern? Darauf werden die Kinder mit den gangbarsten Münzsorten, Mafsen und Gewichten bekannt gemacht. Sodann wird (nach Köhler) das Eins und Eins innerhalb 20 in Reihenform gelernt: 1 und 1 = 2; 2 und 1 ist 3; 1 und 3 ist 4 . . . 2 + 2 = 4; 2 + 3 = 5 etc.«

Biermann teilt die Einmaleinstabelle in 2 Teile. Der erste Teil enthält Zahlen, deren Summe nicht über 9 reicht; bei den Übungen des 2. Teils ist erst der Zehner voll zu machen, z. B. 9 + 6; 9 + 1 = 10; 10 + 5 = 15. Biermann stuft die Übungen nach ihrer Schwierigkeit ab: Er läfst a) Zehner zu Zehnern, b) Zehner und gemischte Zahlen, c) gemischte Zahlen und Einer, d) gemischte Zahlen zu gemischten zählen. Der Lehrer soll dabei höhere Zahlen auf ihre Grundlagen zurückführen, denn wer weifs, dafs 4 und 5 gleich 9 ist, weifs auch dafs 40 + 50 = 90 ist. Dem Zählen in Reihen wird ausgiebige Berücksichtigung zu teil, z. B. 1 und 5 ist 6 und 5 ist 11 und 5 ist 16; 2 und 5 ist 7 und 5 ist 12 und 5 ist 17; 3 und 5 ist 8 und 5 ist 13 etc. Unterhaltender wird diese Übung, wenn sie in eine Erzählung gebracht wird, z. B.: Es wurde eine Herde Schafe in einen Stall getrieben, zuerst gingen 2, dann immer 4 hinein. Zählt fört, ich sage euch, wenn sie alle darin sind! Der Schüler soll erkennen, dafs man nur Dinge gleicher Art addieren kann. Der Lehrer verlasse einen Gegenstand nicht früher, als bis er ihn mit seinen Schülern genau betrachtet hat. Es führt namentlich das Umkehren zu neuen Untersuchungen, z. B.: Was erhält man, wenn man von der Summe zweier Zahlen eine wegnimmt? Solche Fragen sollen aber versinnlicht werden, z. B.: Karl hat in seinen beiden Rocktaschen 8 Äpfel, in der einen drei, in der andern 5. Er verschenkt nun 3; wie viel behält er übrig? Die Schüler sollen die Tabellen selbst entwerfen und dann auswendig lernen; denn das, worüber man selbst nachgedacht hat, läfst sich leichter memorieren. Die schriftliche Beschäftigung wird beim Kopfrechnen nicht durchaus von der Hand gewiesen. In ähnlicher Weise wird das Subtrahieren behandelt. Das Einmaleins sollen die Schüler selbst aufsetzen und dann erst auswendig lernen, aber nicht auf einmal. Man sorge dabei für Abwechslung und Veränderung, verbinde das früher Gelernte mit dem Neuen, und wende die Einmaleinssätze in Aufgaben aus dem Leben an. Die Aufgaben werden nach bestimmten Gesichtspunkten abgestuft und durch Zerlegung der Zahlen in ihre dekadischen Bestandteile ausgeführt. Um die Kinder auf den neuen Gegenstand des Nachdenkens, das Dividieren, hinzuleiten, gebe man ihnen weitere Aufgaben des Multiplizierens, in welchen der Begriff einer Teilung in gleiche Teile enthalten ist. Nachdem die Kinder den Begriff des Teilens erfafst haben, mache man sie auf anschauliche Weise mit den Ausdrücken: die Hälfte, ein Drittel etc. bekannt. Die Fragen: Wie oft steckt eine Zahl in einer andern, und wie grofs ist die Hälfte, das Drittel etc. einer Zahl, also Enthaltensein und Teilen, müssen strenge aus einander gehalten und nach ihrer Eigenart entweder durch wiederholtes Subtrahieren oder mit Hilfe des Einmaleins gelöst werden. Beim Teilen sollen allgemeine Sätze verstanden werden, z. B.: 1 Ganzes läfst sich in viele Teile teilen, wenn man die Teile klein nimmt, in wenige, wenn man sie grofs nimmt. Nach Erlernung der selbst aufgesuchten Einsineinssätze wird die Anwendung auf gröfsere Zahlen gemacht; denn wenn man weifs, wie oft 2 in 4, 6, 8 steckt, weifs man auch, wie oft 2 in 40, 60, 80, in 400, 600, 800 enthalten ist. An die Aufgaben mit Resten schliefst sich unmittelbar die Bruchrechnung mit der Anwendung auf Guldenteile an. Die Grundrechnungsarten mit Brüchen werden mit reinen, benannten und sortierten (mehrfach benannten) Zahlen unter Benutzung von Rechenvorteilen ($49 + 52 = 2 \cdot 50 - 1$; $187 - 69 = 170 - 70 + 1$ etc.) durchgeführt, wobei der Entwurf von Tabellen oder das Reihenrechnen zur stillen Arbeit eine grofse Rolle spielt. Jedem Lehrer ist anzuraten, den Schülern das Verständnis durch Veranschaulichung zu erleichtern. Es folgt noch die Kopfrechnung bei Zinsrechnungen etc., und erst der III. Kursus bringt das schriftliche Rechnen mit einer Art Zweisatz, welcher durch die »Verhältnisse« erklärt wird.

Bei H. W. Arendts »Praktischer Anleitung« 1806 begegnen wir den methodisch bedeutsamen Sätzen: Beim Kopfrechnen müssen sich die Schüler der Vorstellung des schriftlichen Rechnens und der schriftlichen Aufzeichnungen gänzlich enthalten; denn je mehr man letzteres den Kindern erlaubt, desto zaghafter werden sie. Kopf- und schriftliches Rechnen sollen stufenweise mit einander verbunden werden. Schon bei den ersten elementarischen Übungen können gar wohl alle Spezien wenigstens paarweise mit einander verbunden werden. Arendt erscheint hierin als Vorläufer Grubes.

»Die Nachrichten über das deutsche Schulwesen in Bayern« enthalten zahlreiche Mitteilungen, dafs das Kopfrechnen im 1. Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts mit Erfolg, sogar in Landschulen geübt wurde. Man bezeichnet es als einen glücklichen Einfall, dafs man das Kopfrechnen, welches selbst im fernsten Altertume bekannt war, in den deutschen Schulen als Lehrgegenstand gewürdigt hat. Doch will man das schriftliche Rechnen nicht vernachlässigen, weil das Kopfrechnen als Gedächtnisrechnen seine Grenzen hat. Schulinspektor Trauner in Reichenhall berichtet 1805: Die ausgezeichneten Fortschritte der Knaben in der Kopfrechnung, im Zeichnen und in den Industriearbeiten hatten den glücklichen Erfolg, dafs sie allenthalben gerne als Lehrjungen angenommen wurden.

Von den in dieser Zeit erschienenen Schriften über das Kopfrechnen seien noch erwähnt: Praktisch katechetischer Unterricht im Kopfrechnen, Schleswig 1799; Rechenbuch für das weibliche Geschlecht nebst einer Anweisung zum Kopfrechnen von A. J. Schramm, Professor zu Leobschütz, Halle 1804; Beiträge zum Kopfrechnen für Kinder und Schulfreunde von Joh. Nep. Holzapfel, Lehrer an der Stiftsschule in München, 1806. Die leichteste Methode des Kopfrechnens in fafslichen, Unterredungen mit Kindern der untersten Klasse, von J. M. Gneiting, Stuttgart 1804.

Im Kopfrechnen feiert die Entwicklung der Rechenkunst einen ihrer schönsten Triumphe; denn hier ist das Rechnen frei von allen äufserlichen Hilfen. Erst rechnete man mit den Dingen selbst, dann mit ihren sichtbaren Stellvertretern, die später auch in Rechenbrettern und Zählmaschinen zusammengestellt wurden; dann zeichnete man die Rechenbretter und setzte Zahlpfennige in dieselben ein, dann rechnete man mit Schriftzeichen auf graphischen Schematen, endlich mit freien Zeichen; das Kopfrechnen läfst auch diese Hilfe noch fallen, es ist freie Denkthätigkeit. Darum würde es dem Zifferrechnen gegenüber vielleicht auch besser freies Rechnen heifsen. Nicht darin, dafs es im Kopfe vollzogen wird, liegt sein Charakteristikum; denn wer wollte behaupten, dafs das schriftliche Rechnen ohne Kopf geschieht? Auch nicht darin, dafs es mündlich erfolgt, denn das Schriftrechnen kann ja zugleich auch mündlich bethätigt werden, sondern darin, dafs es sich aller Hilfsmittel entäufsert. In dieser Freiheit erschien das Rechnen zweckmäfsig für den alltäglichen Gebrauch, weil es das Schreiben entbehrlich macht, zugleich aber auch als Mittel der geistigen Zucht, weil es fordert, dafs der Schüler sich zusammennehme und alle fremdartigen Gedanken abweise.

Mit der Einführung des Kopfrechnens wurde die alte Methode verlassen. Man fing nicht mehr mit dem Numerieren an, sondern mit Zahlen; man rechnete nicht mehr wie ehemals schon gleich anfangs in weitausgedehnten Zahlengebieten, sondern verweilte bei den Zahlen von 1—10 und 10—20. Zunächst wird das freie Rechnen noch ausgeführt, indem man sich Ziffern und die schriftlichen Rechnungsformen vorstellt, z. B.: 3×24; 3 mal 4 ist 12 bleibt 1; 3 mal 2 ist 6 und 1 ist 7; zusammen 72; alsbald aber werden die Zahlen nach ihrer dekadischen Zusammensetzung zerfällt, hier 24 in 20 und 4; überhaupt ist eine grofse Freiheit in der Denkbewegung erlaubt, um die Rechenoperationen möglichst zu vereinfachen und dadurch zu erleichtern. Als Hilfsmittel dienen anfangs noch die Finger (eine Art Daktylonomia?), man gestattet auch noch schriftliche Aufzeichnungen, später lehnt man alle äufserlichen Hilfsmittel ab. Die Veranschaulichung in den Anfängen des Rechnens wird Prinzip, und dieses soll seinen Ausdruck finden, indem man bei der Lehrart sinnenfällige Dinge benutzt, oder indem man in den Gedankenkreis des Schülers eingreift, ihn an bereits Bekanntes erinnert, die Rechensätze in Erzählungen einkleidet. Erst läfst man das Kopfrechnen dem schriftlichen Rechnen nachfolgen, dann in eigenen Kursen vorausgehen, endlich verbindet man beides von Stufe zu Stufe, von Übung zu Übung. Die Aufgaben werden strenge abgestuft, Grund- und abgeleitete Aufgaben unterschieden, die herkömmliche Anordnung derselben nach der Reihenfolge der Spezies wird durchbrochen, diese selbst werden paarweise verbunden. Die Selbstthätigkeit der Schüler wird auf mannigfaltige Weise angeregt, für gründliche Übung des Gelernten wird gesorgt. Die harte Zucht früherer Jahrhunderte wird vermieden; ja selbst der Gesundheit der Schüler wird Rechnung getragen, indem man vor Überanstrengung derselben warnt.

Die Rechenkunst im 19. Jahrhunderte.

Die Entwicklung des modernen Rechenunterrichts. Fortsetzung.

Die Regelmethode des 16. und 17. Jahrhunderts war ein notwendiges Glied in der Entwickelung der Lehrart des Rechnens. Sie repräsentiert die Stufe der Rezeptivität. Der römische Bezifferungsmodus lastete ehemals wie ein Alp auf der Arithmetik und hielt sie am Boden. In der Freude über die herrliche Erfindung der Positionsarithmetik machten unsere Ahnen von ihr Gebrauch, ohne sich viel um das innere Triebwerk dieser Erfindung zu kümmern, wie heute noch Tausende sich von der Dampfmaschine durch Weltteile tragen lassen, ohne viel mehr von ihrer sinnreichen Konstruktion zu wissen, als dafs — die Maschine durch Dampf getrieben wird. Früher wollte man das Rechnen leicht und geschwind lehren; nun setzt man allmählich dem Rechenunterricht ein höheres Ziel; er sollte ein Mittel zur Förderung der Denkthätigkeit sein. Dieser Gedanke gewann im 18. Jahrhunderte immer weitere Verbreitung; denn das pädagogische Jahrhundert hoffte von einem wirksamen Unterrichte in den Schulen auch eine allgemeine Förderung der Aufklärung und des Volkswohlstandes. Darum machten die Schriften pädagogischer Koryphäen, wie z. B. von Basedow, Wolke, Trapp, Olivier, Campe, Salzmann, Braun, Villaume, Overberg, Felbiger, Kindermann u. a. einen überraschenden Eindruck, noch mehr aber die thatsächliche Aufstellung musterhafter Schuleinrichtungen. So steigerte sich die Teilnahme an den Bestrebungen zur Verbesserung der Schulen mit Anfang des 19. Jahrhunderts zu einem so allgemeinen und ernsten Interesse, dafs sich alsbald die besten Männer der deutschen

Nation mit dem neu eröffneten Kulturgebiete beschäftigten. Es wurden Schulhäuser gebaut, Schulstellen dotiert, Schulen und Kinder mit Lehrmitteln versehen und geprüfte Lehrer angestellt. Die Modisten starben mit der Neige des Jahrhunderts aus[1]). Eine reichhaltige Litteratur, auf dem Boden der Volksschule entstanden, wirkte hinwieder förderlich auf das Volksschulwesen zurück. Ja, es fehlte nicht an Forderungen, die gesamte öffentliche Erziehung als einen wichtigen Zweig der öffentlichen Staatsverwaltung zu

Fig. 44. Joh. Heinrich Pestalozzi.

behandeln, und die Regierungen zeigten sich diesem Gedanken zugänglich. Die Zeitverhältnisse waren aufserordentlich günstig, um die Volksschulen einer relativen Verbesserung entgegenzuführen. Unter diesen Umständen konnte ein Mann, welcher das Wesen des Volksschulunterrichts mit wissenschaftlicher Gründlichkeit zu erfassen und ein fruchtbares Lehrverfahren zu organisieren vermochte, auf Teilnahme und Zustimmung in den weitesten Kreisen rechnen. Dieser Mann erstand in dem Schweizer Joh. Heinrich Pestalozzi (1746—1827).

[1]) 1799 war der Titel Modist an einzelnen Orten noch gebräuchlich. Wittich sagt darüber: Den Namen Modisten führen nur etliche deutsche Schullehrer im Württembergischen, z. B. einer in Tübingen und einer in Urach. Es ist diese Benennung blofs lokal.

Pestalozzi erkannte in der geistigen und sittlichen Vervollkommnung des Kindes, in der Ausbildung seiner Seelenkräfte, in der Darstellung der Menschenwürde im Kinde das nächste Ziel des Unterrichts. Die Lehrgegenstände wollte er nur als Mittel zur Erreichung dieses Ziels benutzt wissen. Weil ihm das Rechnen als reine und zuverlässige Vernunftwissenschaft zur Bildung der Geisteskräfte am geeignetsten erschien, erhob er es zu einem Universalbildungsmittel, zum Mittelpunkte des gesamten Unterrichts. Hören wir Pestalozzi selbst[1]:

»Das dritte Elementarmittel unserer Erkenntnis ist die Zahl. Indessen aber Schall und Form (die beiden ersten Elementarmittel) durch mehrere ihrer Elementarumfassung untergeordnete Unterrichtsmittel uns zu deutlichen Begriffen und der Geistesselbständigkeit, die durch sie erzielt wird, hinführen, ist auch die Rechenkunst das einzige Unterrichtsmittel, das keine untergeordneten Mittel an sich anschliefst, sondern bis auf die äufsersten Wirkungen seines Einflusses immer nur als einfache Folge seiner Elementarkraft erscheint, durch welche wir das Verhältnis des Mehrs und des Minders in allen Anschauungen uns selbst zum klaren Bewufstsein zu bringen und uns dieses Verhältnis ins Unermefsliche bis zur deutlichsten Bestimmung vorzustellen imstande sind. Schall und Form führen den Keim des Irrtums und der Täuschung sehr oft und auf verschiedene Weise in sich selbst. Die Zahl niemals; sie allein führt zu untrüglichen Resultaten; und wenn die Mefskunst den nämlichen Anspruch macht, so kann sie denselben nur durch die Handbietung der Rechenkunst und durch ihre Vereinigung mit ihr behaupten, d. h. sie ist darum untrüglich, weil sie rechnet.«

Von dieser uralten, pythagoreischen Auffassung des Bildungswertes der Rechenkunst ausgehend, sucht Pestalozzi den Rechenunterricht psychologisch zu begründen, wie aus nachstehenden Ausführungen ersichtlich ist: Sowie nun dasjenige Unterrichtsmittel (die Zahl), das den Zweck des Unterrichts — die deutlichen Begriffe — am sichersten erzielt, als das wichtigste dieser Mittel angesehen werden mufs, so ist offenbar, dafs dieses

[1] Wie Gertrud ihre Kinder lehrt. 1801. Lindner (Riedel) III. Band S. 104ff.

Unterrichtsmittel auch allgemein und mit der vorzüglichsten Sorgfalt und Kunst zu betreiben, und dafs es für die Erreichung des letzten Zweckes des Unterrichts höchst wichtig ist, dafs auch dieses Unterrichtsmittel in Formen gebracht werde, welche alle Vorteile benutzen, die eine tiefe Psychologie und die umfassendste Kenntnis der unwandelbaren Gesetze des physischen Mechanismus dem Unterrichte allgemein gewähren können. Ich habe mich daher äufserst bemüht, die Rechenkunst in der Anschauung des Kindes zum hellsten Resultat dieser Gesetze zu machen und nicht nur die Elemente derselben im menschlichen Geiste allgemein zu der Einfachheit zurückzudrängen, in der sie in der wirklichen Anschauung der Natur selbst erscheinen, sondern auch ihren Fortschritt in allen ihren Abwechslungen genau und lückenlos an diese Einfachheit der Anfangspunkte anzuketten — überzeugt, dafs selbst die äufsersten Grenzen dieser Kunst nur insoweit Mittel einer wahren Erleuchtung, d. i., Mittel, zu deutlichen Begriffen und reinen Einsichten zu gelangen, sein können, als dieselbe im menschlichen Geiste sich in eben der Stufenfolge entwickeln, in der sie in der Natur selbst von den ersten Anfangspunkten ausgehen. Die Rechenkunst entspringt aus der ganz einfachen Zusammensetzung und Trennung mehrerer Einheiten. Ihre Grundform ist wesentlich diese: Eins und Eins ist Zwei, und Eins von Zwei bleibt Eins. Auch ist jede Zahl, wie sie immer lautet, an sich selbst nichts anderes als ein Verkürzungsmittel dieser wesentlichen Urform alles Zählens. Es ist aber wichtig, dafs das Bewufstsein der Urform der Zahlverhältnisse durch die Verkürzungsmittel der Rechenkunst selbst im menschlichen Geiste nicht geschwächt, sondern durch die Formen, in welchen diese Kunst gelehrt wird, mit grofser Sorgfalt tief in denselben eingeprägt, und aller Fortschritt dieser Kunst auf den fest erzielten Zweck des im menschlichen Geiste tief erhaltenen Bewufstseins der Realverhältnisse, die allem Rechnen zugrunde liegen, gebaut werde. Würde dieses nicht geschehen, so würde selbst das erste Mittel, zu deutlichen Begriffen zu gelangen, zu einem Spielwerke unseres Gedächtnisses und unserer Einbildungskraft erniedrigt und dadurch in seinem wesentlichen Zwecke kraftlos gemacht werden. Es kann nicht anders sein; wenn wir z. B. blofs auswendig lernen: drei und vier ist sieben, und dann auf dieses Sieben bauen, als wenn wir wirklich wüfsten, dafs drei und vier sieben ist, so betrügen wir uns selbst; denn die innere Wahrheit dieses Sieben ist nicht in uns, indem wir uns des sinnlichen Hintergrundes, der ihr leeres Wort uns allein zur Wahrheit machen kann, nicht bewufst sind.

Die Ausführung seiner Grundsätze legt Pestalozzi in folgender Weise dar: »Ich fange in meinen Bemühungen, den Kindern den festen Eindruck der Zahlverhältnisse als wirkliche Realabwechselungen des Mehr und Mindern, das sich in Gegenständen, die vor Augen stehen, selbst vorfindet, auffallend zu machen, mit dem Buche der Mütter an. Die ersten Tabellen dieses Buches enthalten eine Reihe von Gegenständen, die dem Kinde den Begriff des Eins, Zwei, Drei u. s. w. bis auf Zehn in bestimmten Anschauungen vor Augen legen. Nun lasse ich die Kinder auf diesen Tafeln die Gegenstände, die als Einheit bezeichnet sind, aufsuchen, dann die gedoppelten, dann die dreifachen etc. Hernach mache ich sie an ihren Fingern, oder mit Erbsen, Steinchen und anderen Gegenständen, die bei der Hand sind, eben diese Verhältnisse wiederfinden, und das Bewufstsein derselben sich in ihnen täglich hundert und hundert mal dadurch wieder erneuern, dafs ich bei der auf der Buchstabiertafel leichten Verteilung der Wörter in Silben und Buchstaben dann allemal die Frage aufwerfe: wie viel Silben hat das Wort? — und — wie heifst die erste? zweite? dritte? u. s. w. Auf diese Weise wird die Urform alles Rechnens den Kindern tief eingeprägt, und so werden ihnen die Verkürzungsmittel derselben, die Zahlen, mit vollem Bewufstsein ihrer inneren Wahrheit, geläufig, ehe sie im Gebrauch derselben, ohne den Hintergrund der Anschauung vor Augen zu haben, fortschreiten. Unabhängend von dem Vorteile, dadurch das Rechnen zum Fundamente deutlicher Begriffe zu machen, ist es unglaublich, wie die Kunst, selbst den Kindern, durch diesen gesicherten Vorgrund der Anschauung leicht gemacht wird, und die Erfahrung zeigt nun, dafs ihre Anfänge blofs dadurch schwer vorkommen, weil diese psychologische Mafsregel nicht in der ganzen Ausdehnung benutzt wird, in der sie benutzt werden sollte. Aufser den angezeigten Mitteln, und nach ihnen, benutzen wir dann die Buchstabiertafel also zum Rechnen: wir stellen auf derselben jedes Täfelchen als eine Einheit auf und fangen mit den Kindern in eben dem Zeitpunkte an, in dem sie die Buchstaben kennen lernen, ihnen auch die Zahlverhältnisse zum Bewufstsein zu bringen. Wir stellen ein Täfelchen besonders und fragen das Kind: Sind das viele Täfelchen? Das Kind antwortet: Nein, nur eins. Dann setzen wir noch eines hinzu und fragen: — Eins und Eins — wie viel ist's? Das Kind antwortet: Eins und Eins ist Zwei. So fährt man fort, und setzt zuerst immer nur Eins hinzu; dann zwei, drei u. s. w. Wenn dann das Kind die Zusammensetzungen von Eins und Eins bis auf Zehn vollkommen begriffen und sein Aussprechen zur unbedingtesten Leichtigkeit gebracht hat, setzen wir ihm die Buchstabentäfelchen auf die nämliche Art auf die Tafel, aber verändern jetzt die Frage, und sagen, wenn du zwei Täfelchen hast, wie viel mal hast du ein Täfelchen? Das Kind sieht's, zählt's und antwortet richtig: wenn ich zwei Täfelchen habe, so habe ich zweimal ein Täfelchen. Wenn es dann nun durch das bestimmte und oft wiederholte Zählen der Abteilungen zum deutlichen Bewufstsein, wie viele Einheiten in den ersten Zahlen seien, gekommen ist, so verändert man die Frage von neuem, und fragt bei der nochmaligen gleichförmigen Aufstellung der Täfelchen: Wie vielmal eins ist zwei? Wie vielmal eins ist drei? etc. und dann wieder: Wie vielmal ist eins in zwei, eins in drei enthalten? Erst dann, wenn das Kind mit der einfachen Anfangsform des Addierens, des Multiplizierens und Dividierens bekannt ist und das Wesen dieser Rechnungsformen sich durch Anschauung vollkommen geläufig gemacht hat, sucht man ihm auch die Anfangsform des Subtrahierens auf die gleiche Art durch Anschauung bekannt und geläufig zu machen. Dieses geschieht auf folgende Weise: Man nimmt von den zusammengezählten zehn Täfelchen eins weg und fragt: Wenn du von zehn eins weggenommen hast, wie viel bleiben übrig? Das Kind zählt, findet neun und antwortet: Wenn ich eins von zehn weggenommen habe, so bleiben noch neun. Dann nimmt man das zweite Täfelchen weg u. s. w. Das Bewufstsein des Mehrs und Minders der Gegenstände, das beim Kinde durch Vorlegung wirklicher, beweglicher Realitäten erzeugt worden, wird dann hernach bei ihm durch Rechnungstafeln verstärkt, mit welchen ihm die gleichen Reihenfolgen der Verhältnisse in Strichen und Punkten noch einmal vor Augen gelegt werden. Diese Tafeln werden in der Manier, mit Realitäten zu rechnen, ebenso als Leitfaden gebraucht, wie das

Buchstabierbuch zur Aufstellung der Wörter an die Tafel; und wenn dann das Kind im Rechnen mit Realitäten und ihre Stelle vertretenden Punkten oder Strichen so weit geübt ist, als diese Tafeln, die ganz auf Anschauung gegründet sind, geben, so wird das Bewufstsein der wirklichen Zahlverhältnisse bei ihm so stark, dafs ihm nun die Verkürzungsmanieren durch gewöhnliche Zahlen, auch ohne Anschauung, nicht nur unglaublich leicht werden, weil seine Geisteskräfte jetzt von Verwirrung, Lückenhaftigkeit und spielendem Raten entfernt sind, so dafs man im eigentlichsten Verstande sagen kann, ein solches Rechnen sei nur Vernunftübung und kein Gedächtniswerk oder routinenmäfsiger Handwerksvorteil; es sei das Resultat der klarsten, bestimmtesten Anschauung und führe zu nichts als zu deutlichen Begriffen. Da aber die Vermehrung und Verminderung aller Gegenstände nicht blofs in mehr oder minder Einheiten, sondern in der Zerteilung der Einheiten in mehrere Teile besteht, so entsteht dadurch eine zweite Form des Rechnens, oder vielmehr, es öffnet sich die Bahn, in welcher jede einzelne Einheit zum Fundament einer unendlichen Abteilung ihrer selbst und einer unendlichen Verteilung der in ihr liegenden Einheiten gemacht werden kann. So wie nun bei der ersteren Rechnungsweise, d. i. bei der Mehrung und Minderung ganzer Einheiten, die Zahl Eins als der Anfangspunkt alles Rechnens und als das Fundament der Anschauungskunst aller seiner Abwechselungen mufs angesehen werden, also mufs bei der zweiten Form des Rechnens eine Figur gefunden werden, die in dieser Rechnungsweise eben das leistet, was die Zahl Eins in der ersten; es mufs eine Figur aufgefunden werden, die ins Unendliche teilbar ist, und die in allen ihren Abteilungen immer sich selbst gleicht; eine Figur, durch welche man die Teile der Bruchrechnung ins Unendliche, einer zugleich als Teil des Ganzen, und hinwieder als selbständige ungeteilte Einheiten auf eine Weise zur Anschauung bringen kann, dafs jedes Verhältnis eines Bruches dem Kinde im Verhältnis gegen das Ganze so bestimmt und abgemessen vor Augen steht, als bei unserer Methode in der einfachen Rechnungsform die Zahl Eins dem Kinde in der Zahl Drei bestimmt dreimal vor Augen steht. Es ist aber keine Figur möglich, die das leistet, als das gleichseitige Viereck. In diesem können wir das Verhältnis der Verteilungen der Einheit oder der Brüche, in ihrer progressiven Reihenfolge, von dem allgemeinen Anfangspunkte alles Mehr oder Minders, von der Zahl Eins an, dem Kinde ebenso sinnlich vor Augen stellen, als wir ihm die Vermehrung und Verminderung der ungeteilten Einheiten (an der Bruchtabelle) sinnlich dargestellt haben.«

Die hier in Umrissen gezeichnete Methode ist von Krüsi, einem Schüler und Gehilfen Pestalozzis, in der Anschauungslehre der Zahlverhältnisse in 3 Heften (Zürich 1803) ausgeführt worden. Das erste Heft behandelt auf 175 Seiten die geometrischen Verhältnisse der ganzen Zahlen von 1—100 in 8 Übungen, die auf der Einheitstabelle vorgenommen werden. Diese Tabelle ist ein Rechteck, welches durch Parallelen mit den Seiten in 100 gleiche Rechtecke geteilt ist. Die oberste Horizontalreihe enthält in jedem Rechtecke einen senkrechten Strich, im ganzen also 10 solcher Striche, die zweite Reihe enthält

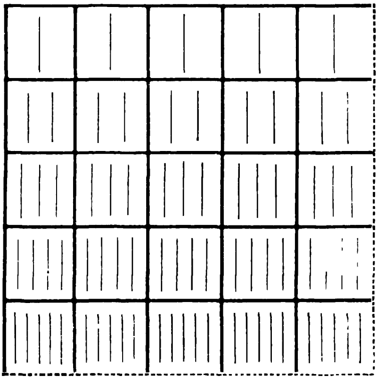


Fig. 45.

10 Zweier, die dritte 10 Dreier, die zehnte 10 Zehner. Zunächst mufste der Schüler an dieser Tabelle sich orientieren und Zählübungen vornehmen; es wurde auf einen Strich gezeigt mit der Benennung eins. Zu dieser Einheit wird eine zweite, dritte etc. gefügt, dann sagt das Kind: 3 mal 1 ist 3. Dadurch sollte ihm früh zum Bewufstsein kommen, wie viel mal eine Einheit in jeder gegebenen Zahl enthalten ist. Die folgende Übung beabsichtigt, das Kind erkennen zu lassen, dafs die Einheit einen bestimmten Teil eines Ganzen ausmache, z. B.: 1 ist die Hälfte von 2, ein Drittel von 3; dieser Teil sollte mit dem Ganzen verglichen werden. Die Vielfachen der Grundzahl jeder Reihe werden in eine gleichnamige Anzahl von Teilen geteilt, oder es wird das Verhältnis einer kleineren Zahl zu einer gröfseren bestimmt, z. B.: 1 mal 2 ist die Hälfte von 2 mal 2. Das Verhältnis ungleicher Zahlen (Produkte) wird aufgesucht,

z. B.: 1 mal 2 und der halbe Teil von 2 ist 3. Gleiche Verhältnisse werden zu einer Proportion zusammengestellt und das fehlende Glied hiezu gesucht. »Der Schüler bekommt durch diese Übungen eine feste Grundlage für alles Rechnen; er lernt allmählich das Einmaleins, die Zerlegung der Zahlen in Faktoren von ganzen und gemischten Zahlen, und bekommt damit auch den sichersten Anhalt für die Division, denn indem er sagt: 55 ist 6 mal 8 und 7 mal der 8. Teil von 8, begreift er auch, daſs 8 in 55 gerade $6^7/_8$ mal enthalten ist.« Alle Übungen bewegen sich in bestimmter Form, von den kleineren Zahlen zu den gröſseren aufsteigend; alles, was der Schüler spricht, schaut er zugleich auf der Tabelle an, so daſs insofern Pestalozzis Zweck, deutliche Begriffe zu erzeugen, eine wesentliche Förderung erhält; allerdings muſs der Schüler hiebei über 2000 Sätze durchsprechen. Bei diesen Übungen kommt weder das Addieren, auſser gelegentlich, noch das Subtrahieren, noch das eigentliche Dividieren vor, und schon hieraus ist ersichtlich, daſs Pestalozzi etwas Originelles und Neues in Vorschlag gebracht hat.

Im zweiten Hefte der Elementarbücher erinnert Pestalozzi daran, daſs vor dem Gebrauche der Einheitstabelle an beweglichen Gegenständen gelehrt werden soll, was die 1. und 2. Übung dieser Tabelle verlangt, um so das Aussprechen der Anzahl Gegenstände, die sie ihm als Anzahl ins Auge fallen macht, mit der Anschauung dieser Gegenstände und mit dem Aussprechen ihrer Namen aufs genaueste zu vereinigen. »Wenn die Mutter dem Kinde Erbsen, Blätter, Steinchen, Hölzchen, oder was es ist, auf den Tisch legt, so muſs sie, indem sie auf einen dieser Gegenstände hinweist, ihm nicht sagen, das ist Eins — sondern das ist ein Hölzchen, das ist ein Steinchen und hinwieder, wenn sie auf zwei solche Gegenstände hinweist, muſs sie nicht sagen, das ist zweimal eins oder zwei, sondern das ist zweimal ein Steinchen. Wenn nun die Mutter also das Kind verschiedene Gegenstände als ein, zwei, drei etc. erkennen und benennen lehrt, so bleiben bei der Art, wie sie selbige dem Kinde zeigt und vorspricht, die Wörter eins, zwei, drei etc. immer unverändert stehen, hingegen die Wörter Erbsen, Steinchen, Hölzchen etc. verwechseln sich allemal mit der Abwechselung des Gegenstandes, den sie ihrem Kinde als eins, zwei, drei etc. in die Augen fallen macht, und durch dieses fortdauernde Bleiben des einen, sowie durch das fortdauernde Abändern des andern sondert sich im Geiste des Kindes der Abstraktionsbegriff der Zahl, d. i. das bestimmte Bewufstsein der Verhältnisse von mehr oder minder, unabhängend von den Gegenständen, die als mehr oder minder dem Kinde vor Augen gestellt werden, und das Kind kommt durch diesen Schritt der Methode dahin, nunmehr die Striche der ersten Anschauungstabelle der Zahlverhältnisse nicht mehr blofs als ein Strich, als zweimal ein Strich, sondern bestimmt als eins, zweimal eins etc. zu erkennen und zu benennen und die Zahlverhältnisse selbst unabhängig vom Eindruck der Formen ins Auge zu fassen. Es lernt, die Einheit als solche und als Teil einer Summe von Einheiten, als Einheit und Teil einer andern Summe erkennen, und also die Einheit und jede Summe von Einheiten mit einer andern Summe von Einheiten zu vergleichen und ihr Verhältnis zu einander bestimmen.«

Im zweiten und dritten Hefte der Anschauungslehre sind die Brüche nach den gleichen Prinzipien behandelt. Hiezu gebraucht Pestalozzi zwei weitere Tabellen. Die erste derselben ist ein Quadrat, welches durch Parallelen zu den Seiten in 100 kleinere Quadrate geteilt ist. Die Quadrate der obersten Reihe sind ungeteilt, die der 2. Reihe durch eine Senkrechte halbiert, die der 3. Reihe sind durch 2 Senkrechte in 3, die der 10. Reihe durch 9 Senkrechte in 10 gleiche Teile geteilt.

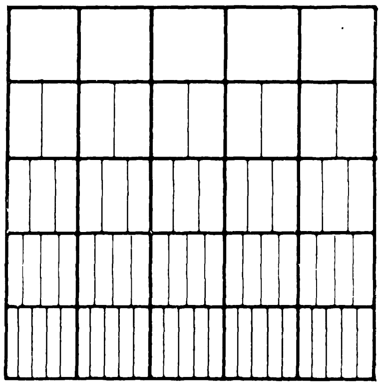


Fig. 46.

Pestalozzi nimmt an dieser Tabelle folgende Übungen vor (2. Heft der Anschauungslehre der Zahlverhältnisse): Zunächst wird das Quadrat als eine Einheit aufgefafst; dem folgt seine Abteilung in 2, 3, 4 ... 10 gleiche Teile, die Benennung dieser Teile als Halbe, Drittel, Sechstel, Zehntel, die Vergleichung derselben untereinander als gröfser und kleiner, die Bestimmung der Anzahl der Halben, Drittel, Viertel etc. Sodann werden die Ganzen aus Halben zusammengesetzt: 1 Halbes ist der halbe Teil von 1 Ganzen, 2 Halbe sind 1 Ganzes, 20 Halbe sind 10 Ganze — und die Ganzen in Halbe aufgelöst: 1 Ganzes und der halbe Teil von 1 Ganzen sind 3 Halbe, 6 Ganze und der halbe Teil von 1 Ganzen sind 13 Halbe. Ebenso werden unter Berücksichtigung aller Fälle, welche an der Tabelle veranschaulicht werden können, Ganze aus Vierteln, Fünfteln, ... Zehnteln zusammengesetzt und wieder aufgelöst. Die folgende Übung will erzielen, dafs die Kinder 1 Halbes nicht allein als den halben Teil von 1 Ganzen, sondern auch als den 3. 4. 5. 6. etc. Teil von irgend einer Anzahl Halben auffassen, ebenso dafs es 1/3 aus dem halben, 4., 5. Teil etc. von irgend einer Anzahl Drittel u. s. w. sei. Halbe, Drittel und Viertel werden in eine andere Anzahl von Halben, Dritteln etc. zusammengefafst und endlich in Beziehung zum Ganzen gesetzt, z. B.: 4 Ganze und der halbe Teil von 1 Ganzen sind 9 Halbe, 9 Halbe sind 3 mal 3 Halbe, der 3. Teil von 3 Halben ist ein Halbes, 2 mal der 3. Teil von 3 Halben sind 2 Halbe. Ebenso mit Dritteln bis Zehnteln. Frage und Antwort sind bei jeder Übung am Schlusse vorgezeichnet, z. B.: Wie viel Ganze kommen heraus, wenn der 7. Teil von 13 Ganzen 8 mal genommen wird? Antwort: Wenn der 7. Teil von 13 Ganzen 8 mal genommen wird, so kommen 14 Ganze und 6 Siebentel heraus. Auflösung: Der 7. Teil von 1 Ganzen ist 1 Siebentel; der 7. Teil von 13 Ganzen ist 13 Siebentel, 8 mal der 7. Teil von 13 Ganzen sind 8 mal 13 Siebentel; 8 mal 13 Siebentel sind 104 Siebentel; 104 Siebentel sind 14 Ganze und 6 Siebentel; folglich kommen 14 Ganze und 6 Siebentel heraus, wenn der 7. Teil von 13 Ganzen 8 mal genommen wird. Die 3. Übung dehnt sich auf 152 Seiten aus, enthält 9 Abteilungen, von denen jede wieder 32 Unterabteilungen hat, und zu ihrer vollständigen sprachlichen Darstellung sind 17280 Sätze erforderlich.

»Der einfach geteilten Tafel folgt eine Tabelle, in welcher die einfachen Anschauungsabteilungen nach folgender Progression weiter gehen. Die Vierecke, welche in der ersten Bruchtabelle in 2 gleiche Teile geteilt sind, werden jetzt in 2, 4, 6, 8, 10, 12 etc. Teile geteilt, die der folgenden Reihe in 3, 6, 9, 12 etc. Teile.« (Fig. 47.) (Die Quadrate der 1. Horizontalreihe sind durch wagrechte Striche in Halbe, Zehntel geteilt.) Dieselbe Teilung findet bei den Quadraten der ersten senkrechten Reihe durch lotrechte Linien statt. Die weiteren Vertikalreihen stellen die Teile 4, 8, 12, 16 . . .; 5, 10, 15, 20 . . .; 6, 12, 18, 24 etc. dar. Pestalozzi zeigt daran, dafs $^1/_2 = {}^2/_4$; $^2/_4 = {}^1/_2$; $^2/_2 = {}^4/_4$; $^4/_4$ gleich $^2/_2$ sind; wie viel Zwölftel $^3/_4$ enthalten etc. Das Elementarbuch verbreitet sich sodann über die Auflösung gröfserer Bruchteile in kleinere und die Zusammenfassung letzterer zu gröfseren Brüchen oder Ganzen, z. B. wie viele Viertel sind $^5/_9$ und 3mal der 4. Teil von $^1/_9$? Antwort: $^5/_9$ und 3mal der 4. Teil von $^1/_9$ sind $^2/_4$ und 5mal der 9. Teil von $^1/_4$. Warum? $^1/_9$ ist $^4/_{36}$; $^5/_9$ sind 5mal $^4/_{36}$ oder $^{20}/_{36}$; der 4. Teil von $^1/_9$ ist $^1/_{36}$; 3mal der 4. Teil von $^1/_9$ ist $^3/_{36}$; $^{20}/_{36}$ und $^3/_{36}$ sind $^{23}/_{36}$; $^1/_4$ ist $^9/_{36}$; $^{23}/_{36}$ sind 2mal $^9/_{36}$ und 5mal der 9. Teil von $^9/_{36}$; folglich auch 2mal $^1/_4$ und 5mal der 9. Teil von $^1/_4$ (9. Quadrat). — Von wie viel Ganzen sind $^1/_3$, $^1/_6$, $^1/_8$, $^1/_{12}$ und $^1/_{24}$ zusammen der 5. Teil? Drittel, Sechstel, Achtel etc. sind in demjenigen Quadrate zu finden, das in 3, 6, 8 Teile etc. geteilt ist. $^1/_3$ ist $^8/_{24}$; $^1/_6$ ist $^4/_{24}$; $^8/_{24}$ und $^4/_{24}$ sind $^{12}/_{24}$; $^1/_8$ ist $^3/_{24}$; $^{12}/_{24}$ und $^3/_{24}$ sind $^{15}/_{24}$; $^1/_{12}$ ist $^2/_{24}$; $^{15}/_{24}$ und $^2/_{24}$ sind $^{17}/_{24}$; $^{17}/_{24}$ und $^1/_{24}$ sind $^{18}/_{24}$; $^{18}/_{24}$ sind der 5. Teil von 5mal $^{18}/_{24}$; 5mal $^{18}/_{24}$ sind $^{90}/_{24}$; und $^{90}/_{24}$ sind 3 Ganze und $^{18}/_{24}$, oder 3 Ganze und $^3/_4$ (3. Reihe, 8. Quadrat).

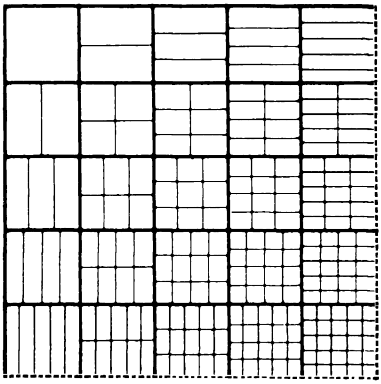


Fig. 47.

Im nachfolgenden wurde das Gelernte auf Verhältnisse angewendet, z. B.: Was ist für ein Verhältnis zwischen zwei Zahlen, von denen die erste 5mal der 7. Teil von 2 Ganzen und $^1/_3$ und die zweite 2mal der 3. Teil von 6 Ganzen und $^1/_2$ ist? — Das Verhältnis zu 1 Ganzen und $^1/_2$ ist gleich dem Verhältnis von 1 Ganzen und $^1/_4$ zu einer unbekannten Zahl. Es fragt sich, welches diese unbekannte Zahl sei? Auflösung: 1 Ganzes und $^1/_2$ sind $^3/_2$; $^3/_2$ sind $^6/_4$; $^6/_4$ sind 2mal $^3/_4$; das Verhältnis von $^3/_4$ zu 2mal $^3/_4$ ist gleich dem Verhältnis von 1 Ganzen und $^1/_4$ zu 2mal 1 Ganzen und $^1/_4$; 1 Ganzes und $^1/_4$ ist $^5/_4$; 2mal 1 Ganzes und $^1/_4$ sind 2mal $^5/_4$; 2mal $^5/_4$ sind $^{10}/_4$, und $^{10}/_4$ sind 2 Ganze und $^1/_2$;

folglich ist das Verhältnis von $^3/_4$ zu 1 Ganzen und $^1/_2$ gleich dem Verhältnis von 1 Ganzen und $^1/_4$ zu 2 Ganzen und $^1/_2$. Die letzte Aufgabe heifst: Zu welcher Anzahl von Ganzen verhält sich der Unterschied zwischen 3 Ganzen und $^1/_4$ und 2 Ganzen und $^1/_3$, wie sich 1 Ganzes und $^3/_7$ zu 1 Ganzen und $^2/_3$ verhält? Alles das wurde ohne schriftliche Aufzeichnungen lediglich unter Benutzung der Quadrattafeln mit sechs- bis zehnjährigen Kindern behandelt. Einzelne Aufgaben wurden auf mehrfache Weise gelöst, zu anderen wurde die Probe gemacht.

Pestalozzi hat also, von dem Gedanken ausgehend, dafs das Rechnen die Bestimmung der Zahlverhältnisse zum Gegenstande habe, dem Kinde vergleichbare Gegenstände zur Anschauung vorgeführt. Einheiten niederer Art wurden zu Einheiten höherer Art in Beziehung gesetzt und gegenseitig verglichen, gemessen, und zwar in systematischer Folge. So entstand notwendig die Anschauungslehre der Zahlverhältnisse. Auf der ersten Stufe werden die Verhältnisse zwischen einer gröfseren und kleineren Zahl vermittelt und umgekehrt; auf der zweiten Stufe wird der Begriff der Brechung der Einheit dargelegt, auf der dritten der Begriff der mehrfachen Brechung ihrer Teile, sowie des Verhältnisses einer kleineren Anzahl von Unterabteilungen der Einheit zu einer gröfseren und umgekehrt. Das leitende Prinzip besteht darin, jede Zahl aus Einheiten bestehend aufzufassen und jede auf Einer als ihre Elemente zurückzuführen.

Den psychologischen Gang des Unterrichts bezeichnet Pestalozzi also: Was durch die Anschauung gegeben wird, mufs die Einbildungskraft im ganzen und teilweise tief und fest auffassen; was die Einbildungskraft tief und fest auffafst, mufs durch alle Stufengänge der Übung zum klarsten und geläufigsten Bewufstsein des Gedächtnisses kommen; und dies mufs der Verstand nach bestimmten Merkmalen zergliedern und nach ebenso bestimmten Analogien wieder verbinden, um sich der ganzen Kettenfolge der Resultate zu bemächtigen.

Auffallend an den Elementarbüchern ist der gänzliche Mangel benannter und angewandter Aufgaben. Wer hier eingekleidete Aufgaben aus dem Leben des Kindes und den naheliegenden ökonomischen Verhältnissen des Haushaltes etc. finden möchte, sucht vergebens. Pestalozzi hatte aber die Anwendung dessen, was die Schüler an den Anschauungstafeln gelernt hatten, im Sinne, denn er bemerkt im dritten Elementarbuche: »So weit diese Übungen gehen, sind sie nur Übungen der Kraft in der Anschauung reiner Verhältnisse; als Anwendung dieser Kraft auf die Berechnung der Gröfse, der Schwere, der Dauer und des Wertes aller Gegenstände der Wissenschaft und des Berufs, sowie auf die Fertigkeit, das reine Bewufstsein der Zahlenverhältnisse mit Verkürzungsmitteln, Zahlzeichen, auszudrücken, dazu braucht es neue Übungen, die sich aber wesentlich an diese Fundamentalübungen anschliefsen müssen. Gegenwärtig werden auch diese Anwendungsübungen bei uns bearbeitet.« (Wie Türk in den Briefen aus Münchenbuchsee mitteilt, wurden im Pestalozzischen Institute auch angewandte Aufgaben geübt.) »Ich erwarte ruhig den Zeitpunkt, in welchem die Wirkung dieser Anwendung auf wissenschaftliche, noch mehr aber auf Berufsgegenstände sichtbar werden wird, und bin zum voraus überzeugt, dafs dann auch diejenigen, die jede Sache nur nach dem eingeschränkten Gesichtspunkte ihres Einflusses auf das, was sie selbst mehr oder minder können und treiben, beurteilen, der Methode Gerechtigkeit widerfahren lassen werden.« Auch aus anderweitigen Äufserungen Pestalozzis geht hervor, dafs er vor der Rechenkunst des bürgerlichen Lebens eine hohe Achtung hatte. In der Abhandlung: Inwiefern ist es schicklich, dem Aufwande der Bürger in einem kleinen Freistaate, dessen Wohlfahrt auf die Handelschaft gegründet ist, Schranken zu setzen? bemerkt Pestalozzi: »Alle Sicherheit der häuslichen Glückseligkeit der Landeseinwohner beruht auf einer dem Vermögen und den Erwerbskräften des Hausvaters angemessenen Ordnung und Einschränkung der häuslichen Ausgaben.« Und an einer andern Stelle sagt er: »Ich ehre den Mann im Grabe — er hätte als Finanzminister sterben sollen — der einem meiner Freunde den Rat gab, er sollte sich in seinen Ausgaben nie verwirren, sondern alle mit der möglichsten Genauigkeit absondern, soviel kann ich jährlich für meine Kleider, soviel für meinen Tisch etc. ausgeben, und dann unerbittlich auf dieser Ordnung bestehen.

Der Anschauungslehre der Zahlverhältnisse liefs Pestalozzi die Anschauungslehre der Mafsverhältnisse folgen (Zürich und Tübingen, 1803). In der Einleitung zu dieser Schrift sagt Pestalozzi: »So wie die Natur von dem Augenblick an, da das Kind seine Sinne braucht, nicht aufhört, ihm tausend Gegenstände, von denen der Mensch den Begriff der Einheit und Vielheit abstrahiert hat, vor Augen zu stellen, ebenso hört sie von diesem Augenblicke an nicht auf, dem Kinde tausend Gegenstände, von denen der Mensch den Begriff der Form und der Gröſse abstrahiert hat, vor Augen zu stellen, — und so wie das Buch der Mütter zum Zweck haben soll, die Kinder auf das Zählbare an den Gegenständen, die ihnen die Natur vor Augen stellt, aufmerksam zu machen, und sie den Unterschied dessen, was an einem Gegenstande zählbar ist, von demjenigen, was an einem andern Gegenstande zählbar ist, bemerken zu lehren, so muſs das Buch der Mütter auch dahin wirken, die Mutter in den Stand zu setzen, ihre Kinder auf die Form der Gegenstände, die ihnen die Natur vor Augen stellt, und auf das, was an ihnen meſsbar ist, aufmerksam zu machen, um sie auch den Unterschied der Form und des Verhältnisses eines andern Gegenstandes bemerken und benennen zu lehren. — Es muſs die Mutter dahin führen, ihr Kind zu lehren, daſs die Kugel, der Apfel, der Augapfel, ein Knaul Faden, der Teller, der Reif u. s. w. rund, das Ei länglichtrund, die Stubenthüre viereckig, — daſs der Mann gröſser als das Kind, — der Mannskopf gröſser als der Kindskopf, die Daumen dicker als die übrigen Finger seyen. Da aber die Wörter groſs und klein zum Gröſsten und Kleinsten und allen Mittelgröſsen gebraucht werden, so hat das Menschengeschlecht von jeher alles gethan, um sich zu deutlichen Begriffen hierüber zu erheben. Es hat Finger, Fingerglieder, Schuhe, Schritte und ausgestreckte Arme gebraucht, um das Maſs der verschiedenen Gröſsen zu unterscheiden und zu bestimmen. Da aber der Gebrauch dieser Mittel ohne Verbindung mit Zahlkenntnissen äuſserst beschränkt und gar nicht geschickt ist, das Menschengeschlecht in Rücksicht auf ihre Kraft, die Form und das Maſs der Gegenstände näher zu bestimmen, weder nach ihrer Anlage noch nach ihrem Bedürfnisse befriedigend zu entwickeln, indem alle diese Mittel ohne Kenntnis der Zahlverhältnisse uns nicht weiter führen als zu sagen: das ist einmal, und einmal und wieder einmal so groſs als das andre, so fühlte sich das Menschengeschlecht, ohne Kenntnis der Zahl in Rücksicht auf die in ihm liegende Kraft, die verschiedenen Gröſsen gegen einander bestimmen zu können, in eben der Lage, in der es sich ohne Kenntnis des Rechnens, in Rücksicht auf die in ihm liegende Kraft, die Zahlverhältnisse, oder das Mehr und Minder zu bestimmen, befand.« Und so wie es ihm in dieser letzten Rücksicht nicht genug war, zu sagen: das ist eins und eins und wieder eins, so konnte es ihm in Rücksicht auf das Maſs der Gegenstände nicht genug sein, zu sagen: das ist eine Hand breit, und eine Hand breit und wieder eine Hand breit. Es müssen daher zur Entwickelung des Begriffs der Maſsverhältnisse ebenso, wie es zur Entwickelung des Begriffs der Zahlverhältnisse notwendig war, Kunstmittel gefunden werden, welche die Naturkraft zur Verdeutlichung der Vorstellungen über diese Verhältnisse führen und die Anschauungslehre der Maſsverhältnisse kann von keinen anderen Formen ausgehen, als von denen, von welchen die Anschauungslehre der Zahlverhältnisse ausgeht. Diese Mittel der Anschauungslehre der Maſsverhältnisse sind die gerade Linie und das Quadrat. Die in ihrem Wesen ganz gleichen Kunstmittel des Zählens und des Messens unterstützen sich gegenseitig und entwickeln durch ihre Form, nach welcher sie an die Reihenfolgen der Zahlverhältnisse gekettet sind, das Verhältnis der verwickeltsten Gröſsen durch die Anschauung des Quadrates so weit, als sie das Bewuſstsein der Abteilungen der Zahlverhältnisse entwickelt. Daher beschränkt sich das ABC der Anschauung einzig auf Gröſsen, die durch die Anschauung des Quadrates und seiner Abteilungen können sichtbar gemacht und berechnet werden, entweder bloſs durchs Zählen oder durch Vergleichung ihrer Breite mit ihrer Höhe. Ihr Gebrauch ist folgender: Man sagt dem Kinde: das sind wagrechte Linien. Das ist die erste wagrechte Linie, indem man darauf hindeutet. Das Kind spricht nach, was man ihm vorsagt. Dann fragt man: Welche Linie ist dieses? Darauf sollen sie diese Übungen selbst machen. Das Gleiche mit den senkrechten Linien. Die erste wagrechte Linie ist kürzer als die zweite; die zweite länger als die erste. Ebenso bei den senkrechten. Sodann wird die Teilung der Linien behandelt: die zweite Linie ist durch einen Punkt in zwei gleiche Teile geteilt. Jeder von den zwei gleichen Teilen ist die Hälfte der zweiten Linie. Der Lehrer muſs genau zeigen, die Kinder müssen genau sehen u. s. w. Die Fragen müssen alle so eingerichtet sein, daſs die Antwort schon vollständig in dem Satze liegt. Um sich der beständigen Aufmerksamkeit der Kinder zu versichern, sage man ihnen zuweilen etwas unrichtig vor. Es macht den aufmerksamen Kindern eine Freude, entgegenzuschreien: Nein! Nein! Nein! Das kann ja nicht sein! — Haben die Kinder die Linien und Quadrate genau ins Auge gefafst und sich über ihre Zusammensetzung bestimmt ausgedrückt, folgt die Nachzeichnung der Linien des Vierecks in diesen Zusammensetzungen und Abteilungen. Das mufs ohne Zirkel und Lineal geschehen. Das Zeichnen hat sich unmittelbar an die Übung anzuschliefsen. Etwas anderes darf nicht gezeichnet werden; aber in den Zusammensetzungen des Vierecks und Rundes ist ihnen die gröfste Freiheit zu lassen, und man reize sie selber, ihre Einbildungskraft zur Erfindung solcher Zusammensetzungen anzustrengen. Es ist unglaublich, wie diese Freiheit in dieser Beschränkung in den Gebrauch ihrer Einbildungskraft im frühesten Alter Einfachheit, Ordnung und Geschmack hineinlegt, das Augenmafs schärft und frühe einen hohen Grad von Kunstkraft in ihre Hand legt. Die erste Übung bezieht sich auf die Begriffe: senkrecht und wagrecht und auf die Teile der Linien, z. B. vom Anfang dieser Linie, welche in 10 gleiche Teile geteilt ist, bis zum 5. Punkt sind 5 Zehntel etc.; die erste wagrechte Linie ist so lang als die Hälfte der zweiten. Die zweite Übung handelt von gleichlaufenden Linien, vom rechten Winkel, von Neben- und Scheitelwinkeln, vom rechtwinkeligen Viereck. Z. B. dieses Viereck ist durch 4 Linien gebildet. Jede dieser 4 Linien ist eine Seite vom Viereck. Zwei von diesen 4 Linien sind wagrecht, 2 senkrecht. Die wagrechten Linien sind die wagrechten Seiten dieses Vierecks etc. Diese 4 Linien gehen an ihren Enden zusammen und bilden ein Viereck mit 4 rechten Winkeln. Die obere wagrechte Linie und die senkrechte Linie auf der linken Seite bilden den ersten rechten Winkel. (So werden auch die übrigen Winkel benannt und gezeigt und in gleicher Weise die Ecken und Scheitel der Winkel.) Weil dieses Viereck 4 rechte Winkel hat, heifst es Rechteck. Nun werden die Seiten miteinander verglichen. Es ergibt sich: eine Seite ist so lang als die andere. Weil die 4 Linien dieses Rechtecks gleich lang sind, heifst es Quadrat. Die ganze Übung enthält 27 vollständige Sätze.

Die dritte Übung bezieht sich auf die Teile des Quadrats, welche entstehen, wenn man in gleicher Entfernung entweder horizontale oder vertikale Linien in demselben zieht. Daran knüpft sich eine lange Reihe von Anschauungs- und Sprech-

Übungen, z. B.: Fünf von den 6 gleichen Teilen des 5. Quadrats, oder ein Rechteck, das 5 Sechstel dieses Quadrats ist, ist gröfser als 5 von den 7 gleichen Teilen des 6. Quadrats, oder als ein Rechteck, das 5 Siebentel dieses Quadrats ist. Diese Übung erstreckt sich auf 18 Seiten des Büchleins. — Die vierte Übung fafst Quadrate ins Auge, welche durch horizontale und vertikale Parallellinien in eine bestimmte Anzahl kleinerer Quadrate geteilt werden, z. B.: Dieses Quadrat ist durch 4 wagrechte Linien in 5 gleiche Rechtecke, und diese 5 Rechtecke sind durch 4 senkrechte Linien in 25 kleinere Quadrate geteilt. — Acht von diesen 64 kleineren Quadraten, die wagrecht neben einander liegen, sind ein Achtel dieses Quadrats und bilden ein Rechteck, dessen Höhe dem 8. Teil seiner Länge gleich ist. Zweimal acht wagrecht neben einander liegende, kleinere Quadrate, senkrecht über einander, sind 2 Achtel dieses Quadrates und bilden ein Rechteck, dessen Höhe 2 Achtel seiner Länge ist. — Die fünfte Übung bezieht sich auf die Rechtecke und ihre Diagonalen: Die Höhe des 1. Rechteckes ist dem halben Teile seiner Länge gleich. Die Höhe des 2. Rechteckes ist dem 3. Teile seiner Länge gleich. — Eine Reihe gerader Linien, die weder wagrecht noch senkrecht sind, heifsen schiefe Linien. Jede schiefe Linie dieser Reihe liegt in einem punktierten Rechteck. Jede dieser Linien ist eine rechtssteigende Quer- oder Diagonallinie etc. Hierauf folgen Zeichenübungen. Bei der ersten Übung läfst man die Kinder von freier Hand blofs wagrechte Linien ziehen, ohne auf ihre bestimmte Länge, wohl aber auf ihre gerade Richtung zu sehen. Der Lehrer zieht seine Linie und spricht den Kindern vor: Ich ziehe eine wagrechte Linie. Die Kinder thun das gleiche und sprechen alle zugleich: ich ziehe eine wagrechte Linie. Der Lehrer: Habt ihr es gethan? Die Kinder antworten: Ja! Lehrer: Was habt ihr gethan? Kinder: Ich habe eine wagrechte Linie gezogen. Der Lehrer: Ich ziehe unter diese Linie eine zweite wagrechte Linie u. s. w. Dem ersten Hefte ist eine Tabelle beigegeben. Sie enthält 1. eine Reihe paralleler Linien, von denen die folgenden jede der nächst vorausgegangenen um die Gröfse der ersten Linie überragt; 2. rechte Winkel, Quadrat und Rechteck; 3. 27 Quadrate; die erste Reihe davon ist durch horizontale Linien geteilt, und zwar das erste Quadrat in 2, das zweite in 3, das neunte in 10 gleiche

Rechtecke; bei der zweiten Reihe wird die gleiche Teilung durch senkrechte Linien, bei der dritten durch Horizontal- und Vertikallinien zugleich ausgeführt, so dafs das erste Quadrat in vier, das zweite in 9 gleiche Quadrate zerlegt ist. Die übrigen Zeichnungen sind Rechtecke von gleicher Länge, aber ungleicher Breite und schiefe Linien.

Das zweite Heft der Anschauungslehre der Mafsverhältnisse enthält die Anleitung zum Gebrauch zweier Tabellen. Die Übungen zur ersten Tabelle sind wesentlich nichts anders, als eine Fortsetzung der im ersten Hefte behandelten Übungen.

Bruchtabelle:

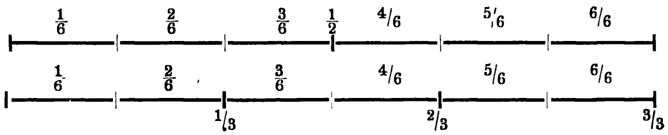


Fig. 48.

Die erste Tabelle, welche sich als Bruchtabelle das Bürgerrecht in unseren Volksschulen erworben hat, enthält 26 Linienpaare. (Vorstehende Figur zeigt nur das erste Linienpaar.) Die erste Linie ist halbiert, die Hälften sind wieder in je 3 Teile geteilt; die 2. Linie ist in drei Drittel zerlegt und jedes Drittel wieder halbiert, so dafs die gleichen Teile beider Linien Sechstel repräsentieren. Das 2. Linienpaar stellt Halbe, Viertel und Achtel, das dritte Halbe, Fünftel und Zehntel vor u. s. w.

In der Vorrede zum 2. Hefte sagt Pestalozzi über den Zweck und Gebrauch dieser Tabelle folgendes.

»Die Übungen dieser Tabelle beschäftigen das Kind im Vergleichen der abgemessenen Teile der geraden Linie und der Bestimmung ihrer Mafsverhältnisse gegen einander. Der Lehrer zeigt bei jedem Satze, den er den Kindern vorspricht, auf den Gegenstand hin, läfst laut und deutlich nachsprechen, dann soll jedes Kind selbst zeigen und sprechen. Erst dann, wenn er sich überzeugt hat, dafs alle Kinder die Sache erfafst haben, soll er zu einer neuen Figur übergehen. Die Form der Fragen mag diese sein: Wie verhält sich die Länge von $^2/_3$ der zweiten Linie zu der Länge einer Hälfte der ersten Linie? Antw.: Die Länge von $^2/_3$ der zweiten Linie ist 4 mal dem dritten Teile einer Hälfte der ersten Linie gleich, oder: Die Länge von $^2/_3$ der zweiten

Linie ist der Länge einer Hälfte der ersten Linie und dem dritten Teile der Länge einer Hälfte der ersten Linie gleich. Woher wifst ihr das? Zwei Drittel der zweiten Linie haben $^4/_6$, und eine Hälfte der ersten Linie hat $^3/_6$; $^4/_6$ sind 4 mal der dritte Teil von $^3/_6$, folglich ist die Länge von $^2/_3$ der zweiten Linie 4 mal dem dritten Teile einer Hälfte der ersten Linie gleich etc. Gleich darauf soll bei jeder vollendeten Reihe von Linien, ohne dafs auf die Tabelle gezeigt wird und ohne die Figuren von den Kindern betrachten zu lassen, die Antwort auswendig gegeben werden. — Die zweite Tabelle des zweiten Heftes enthält 100 Quadrate. Die erste Horizontalreihe dieser Quadrate ist durch wagrechte Linien in 2, 3, ... 10 gleiche Riemen geteilt; das 1 Quadrat dagegen ist ungeteilt. Die zweite Reihe enthält die gleiche Teilung; aber es findet noch eine weitere Teilung statt, indem sämtliche Quadrate der ersten Reihe, bezw. ihrer Riemen, durch eine Vertikallinie auch halbiert werden; es enthält also das erste Quadrat 2, das zweite 4, das dritte 6, das zehnte 20 gleiche Rechtecke. Bei der dritten Horizontalreihe ist die weitere Teilung durch 2, bei der vierten durch 3, bei der zehnten durch 9 Vertikallinien durchgeführt, so dafs z. B. das fünfte Quadrat der neunten Horizontalreihe 5 mal 9, d. i. 45 gleiche Rechtecke hat.

»In dieser Tabelle lernt das Kind die nämlichen Mafsverhältnisse, deren Kenntnis ihm bei der Linientabelle schon beigebracht worden ist, zur Beurteilung des Flächeninhaltes des Quadrates und seiner Abteilungen anwenden, indem es bei jeder Abteilung des Quadrates bestimmt, 1. was das Verhältnis ihrer Breite gegen ihre Höhe und umgekehrt ihrer Höhe gegen ihre Breite sei; 2. wie sich die also bestimmte Abteilung des Quadrats als Zahlteil zum ganzen Quadrat verhalte.« Die Behandlungsweise ist dieselbe wie bei der Linientabelle.

Was sich Pestalozzi von diesem Unterricht erwartet, sagt er in der Vorrede des zweiten Heftes: Der Gebrauch dieser Tabellen führt die Kraft des Kindes zum Rechnen durch die Bestimmung des Mafses der verschiedenen Abteilungen der geraden Linien und des Quadrates, und hinwieder die Kraft desselben zum Messen durch die Bestimmung der Zahlverhältnisse dieser Abteilungen beiderseits und gemeinsam bis an die Grenzen dieser Übungen immer mit gleichen Schritten weiter. Und auf diesem

Punkte — es ist Erfahrungssache — entwindet sich das Kind meiner Methode den Schranken der Elementarmittel, durch welche es auf diesen Punkt gebracht worden. Es mufs sich ihnen entwinden, denn seine so weit physisch-mechanisch gebildete Kraft ist jetzt in eine, bis auf den Punkt, auf dem sie steht, psychologisch entwickelte Vernunftkraft hinübergegangen, die dasselbe mit Sicherheit dahin erhebt, beides, das Bedürfnis eines freien Vorschrittes und das Bewufstsein der selbstständigen Kraft zu diesen Vorschritten in sich selber zu fühlen. Was ich in der Vorrede des ersten Heftes des Buches der Mütter sagte, das sage ich jetzt wieder: »Freunde und Feinde der Methode, prüfet sie an diesem Merkmale, und nehmt sie an, oder verwerfet sie, je nachdem sie sich in dieser Rücksicht probhältig zeigt oder nicht!«

Pestalozzi hat demnach eine Verbindung der Unterrichtsfächer, zunächst der Formenlehre und des Zeichnens mit dem Rechnen angestrebt, eine Idee, die in ihrer weiteren Ausdehnung einen Hauptpunkt der Herbartschen Pädagogik bildet und heute noch die Sorge der Schulmänner beansprucht. Pestalozzi spricht sich über diese Verbindung folgendermafsen aus:

»Da nun das ABC der Anschauung aus Ausmessungsformen besteht, welche allgemein die zehnfache Abteilung des gleichseitigen Vierecks zu ihrem Fundament haben, so ist offenbar, dafs wir die gemeinsame Quelle des Anschauungs-ABC gelegt, oder vielmehr, dafs wir die Elementarmittel der Form und Zahl in eine solche Harmonie gebracht haben, dafs unsere Ausmessungsformen als erste Fundamente der Zahlverhältnisse und die Fundamente der Zahlverhältnisse als erste Fundamente der Ausmessungsformen gegenseitig gebraucht werden.

Auf diesem Wege sind wir dahin gekommen, dafs wir die Kinder nach unserer Manier nicht anders rechnen lehren können, als durch den Gebrauch eben dieses ABC, das wir im Anfang nur das ABC der Anschauung im engeren Sinne, d. i. als Fundament des Messens, Schreibens und Zeichnens gebraucht haben. Das Bewufstsein der wirklichen Realverhältnisse aller Brüche wird dem Kinde durch den Gebrauch dieser Tafeln so stark, dafs ihm auch die Übung der Bruchrechnung in gewöhnlichen Zahlen, ebenso wie in der Rechnung mit ungeteilten Einheiten, unglaublich leicht wird. Die Erfahrung zeigt, dafs die Kinder bei dieser Methode vier bis fünf Jahre früher zu den Fertigkeiten dieser Übungen gelangen, als es ohne diese Mittel je möglich gemacht werden könnte. Der Geist des Kindes wird auch bei diesen Übungen ebenso wie in den vorigen von Verwirrung, Lückenhaftigkeit und spielendem Raten entfernt, und man kann auch hierin mit Bestimmtheit sagen: dieses Rechnen ist nur Vernunftübung; es ist das Resultat der klarsten, bestimmtesten Anschauung und führt leicht durch reine Deutlichkeit zur Wahrheit.« Später wiederholt Pestalozzi (3. Elementarbuch): »Der Zweck dieser Übungen ist durchaus kein anderer als derjenige, die Vernunftanlage des Menschen zur Vernunftkraft zu erheben; es ist unrichtig, sie in dem engen und einseitigen Gesichtspunkte eines neuen Mittels, die Kinder rechnen zu lehren, ins Auge zu fassen. Sie lernen freilich durch diese Übungen rechnen, aber mehr als rechnen lernen sie durch dieselben denken, und auch das Rechnen sollen sie durch dieselben nur denkend lernen.«

Was Pestalozzi mit seinem Rechenunterrichte praktisch erreichen wollte, ist schon angedeutet. Noch deutlicher spricht er sich in Linhard und Gertrud aus: Der Amtmann, der Untervogt, der Kaufmann, der Gutsherr, der Landeigentümer — alle rechnen ihnen falsch, und das Volk wird dadurch zuerst gedrückt, dann ahnt es den Betrug und wird mifstrauisch und boshaft; nun betrügt es wieder und stiehlt zur Vergeltung, wo es weifs und kann. Ich kann aber nicht im ganzen Lande lauter geübte Rechner zu Dorfschulmeistern machen; ich mufste also das ganze Rechnungswesen so vereinfachen, dafs die Mutter oder der Schullehrer nur nötig haben, mein Buch unermüdet vorzusprechen und von den Kindern ebenso oft nachsprechen zu lassen, um diese mit der Zeit zur hellsten und klarsten Einsicht in die schwierigsten Rechnungen zu bringen. Pestalozzi wollte sich der Armen im Volke annehmen, dem Volke zu der Kraft verhelfen, einen tiefen Blick in seinen Stand und seine Verhältnisse zu thun, um sich so seiner Armut zu entwinden. Das Volk soll zur klaren Anschauung der Zahlverhältnisse gelangen, damit es — wie Pestalozzi sich drastisch, mit Rücksicht auf die Zeitverhältnisse aber nicht unbillig ausdrückt — »von seinen Blutsaugern nicht mehr betrogen und von den Grofsgaunern nicht mehr verzählt und verrechnet würde«.

Suchen wir aus Pestalozzis Darlegungen die hauptsächlichsten Gedanken hervorzuheben.

1. Zweck des Unterrichts ist die Erzielung deutlicher Begriffe — die Verstandesbildung.

2. Hiezu ist das Rechnen am besten geeignet, denn es schliefst keine untergeordneten Mittel in sich und führt zu untrüglichen Resultaten.

3. Deshalb mufs das Rechnen in Formen gebracht werden, welche es zur Erreichung des letzten Unterrichtszweckes tauglich machen.

4. Die Methode empfängt ihre Direktiven von unwandelbaren psychischen Gesetzen.

5. Die Grundform des Rechnens ist das Zählen, die Zahl selbst ein Verkürzungsmittel dieser wesentlichen Urform.

6. Das Fundament aller menschlichen Erkenntnis, also auch des Rechnens, ist die Anschauung (sensuale Intuition).

7. Eben deshalb sind Versinnlichungsmittel notwendig.

8. Das beste Versinnlichungsmittel ist das Quadrat; es läfst sich auf Ganze und Bruchzahlen gleichmäfsig anwenden und ermöglicht auch eine Verbindung des Rechnens mit der Formenlehre und dem Zeichnen.

9. Aus der Anschauung wirklicher Realitäten sondert sich der Zahlbegriff ab, und hieraus ergeben sich die Rechnungsarten. Diese Fundamentalübungen erzeugen Vernunftkraft, welche sich an den arithmetischen Verhältnissen des Lebens zu erproben hat.

10. Die vorzüglichsten Unterrichtsfunktionen sind das Anschauen und das Vor- und Nachsprechen (im Chore).

11. Der Weg in sämtlichen Denkbewegungen des Rechnens führt immer über die Einheit, mag diese nun die elementare Eins oder ein Stammbruch sein.

Pestalozzi war damals, als er die Elementarbücher der Öffentlichkeit übergab, von dem hohen Werte seiner Methode tiefinnigst überzeugt, wie aus dem Schlusse der Vorrede des zweiten Elementarbuches hervorgeht. »Männer des Menschengeschlechts!« ruft er hier aus, »es ist gelungen, wir können und werden jetzt dahin kommen, in allen Verhältnissen und in allen Lagen den guten Weizen einmal mit Sicherheit von der schlechten Spreu zu sichten. Das Kind der Unschuld, das in den Hütten der Armut das Heiligtum grofser Kräfte rein erhalten und zum vielseitigsten und geschicktesten Gebrauch in allen Berufsarten und Gewerben erhalten sieht, wird sich meiner Methode freuen, ihr Licht wird, ihr Licht mufs in die Hütten der Menschen dringen, denen ein ungünstiges Schicksal, oder vielmehr der Irrtum und Hohn des Zeitgeistes jeden Lichtstrahl der an Wahn und Gold geketteten Erziehungskunst verschlofs. Die Methode ist die Methode der Mütter, sie ist nicht die Methode des Goldes (Seitenhieb auf die Philanthropine?), sie ist nicht einmal die Methode der Einsicht, sie ist die Methode des Willens und der Unschuld. Diese ist die einzige Gewährleisterin der Kraft, die das Kind zu ihrer leichten Erlernung braucht.« Und im dritten Hefte bemerkt er: »Meine Erfahrungen hierüber, die Erfahrungen meiner Freunde und aller derer, die dieses Lernen und Lehren nach der gegebenen Anleitung versucht haben, bestätigen und übertreffen meine Erwartungen auf eine Art, dafs ich hinzufügen darf: Wer immer die Reihenfolgen dieser Anschauungslehre nach ihrer Vorschrift zur Vollendung übt, der wird inne werden, dafs ihre Ordnung tief aus der Natur des menschlichen Geistes geschöpft ist und tief auf dieselbe wirkt«. Und an anderer Stelle erhebt er sich zu der fast überschwenglichen Äufserung: »Wenn mein Leben einen Wert hat, so besteht er darin, dafs ich das Quadrat zum Fundament einer Anschauung erhob, die das Volk nie hatte.«

Zeitgenössische Urteile über die Pestalozzische Methode.

Die weittragenden Ideen dieses genialen Mannes setzten die pädagogische Welt in grofse Erregung. Aus aller Herren Länder strömten Wifsbegierige zu den Arbeitsstätten desselben, um sich an Ort und Stelle von den thatsächlichen Erfolgen der neuen Lehrweise zu überzeugen, darunter Pädagogen von Namen, Könige und Kaiser. Pestalozzi fand seine begeisterten Verehrer, ebenso auch ausgesprochene Gegner, dazu das ungezählte Heer derjenigen, die, nicht im klaren über den Wert der Pestalozzischen Lehrart, eine vermittelnde Stellung zwischen dem Alten und Neuen innehielten oder Pestalozzianer waren, ohne dafs sie es wufsten, und wollten. Bemerkenswert ist zunächst, dafs Goethe über die neue Lehrweise ein abfälliges Urteil hatte. Die Bestimmtheit, mit welcher ein in einem Pestalozzischen Institute gebildetes

Mädchen die schwierigsten Rechenexempel löste, die Förmlichkeit, mit welcher es Dinge aussprach, die man sonst nur in Hörsälen für Mathematik vorträgt, die Art und Weise, wie es über den Begriff des Elementarunterrichts räsonnierte, machte ihn schwindelig und setzte ihn in Schrecken. »Ursprünglich,« meinte Goethe (als er 1815 in Wiesbaden zu Besuch war), »sei das vortrefflich nach seinem Zwecke gewesen, wo Pestalozzi nur die geringe Volksklasse im Sinne gehabt, die armen Menschen, die in einzelnen Hütten in der Schweiz wohnen und ihre Kinder nicht in die Schule schicken können. Indem es über die ersten Elemente hinausgehe, werde dieses Verfahren verderblich ... Und nun gar der Dünkel, den dieses verfluchte Erziehungswesen erzeugt; da sollte man nur einmal die Dreistigkeit der kleinen Buben hier in der Schule sehen, die vor keinem Menschen erschrecken, sondern ihn in Schrecken setzen und vor niemandem Respekt haben.« v. Raumer, der mit Pestalozzi in persönlichem Verkehr gestanden war, stimmt mit dem ungünstigen Urteile Goethes über die Pestalozzische Lehrart im wesentlichen überein. »Die methodischen Lehrtächer«, bemerkt v. Raumer, »glichen Dressiermaschinen, welche unglücklicherweise ihren Platz nicht ganz ausfüllten, wie etwa auch zur vollkommensten Druckerpresse ein Mensch gestellt werden mufs, der freilich nur den gewöhnlichen Menschenverstand nötig hat. Der Lehrer hatte nichts zu thun, als das Lehrbuch pedantisch mit seinen Schülern durchzusprechen. — Niemeyer versagt den Pestalozzischen Übungen die Anerkennung des Erfolges nicht, stellt aber in Zweifel, ob ein so weitschichtiger Gang und die unabsehbaren Reihen ermüdender Sätze notwendig seien, und er hat darin Recht, weil bei dem gesetzmäfsigen Bau der Zahlreihen dem Analogieschlufs ein weites Gebiet eröffnet ist. Nebstdem hat er das Bedenken, ob sich die erworbene Fertigkeit in den formalen Übungen auch auf die Dauer erhalte, und ob dieselben als allgemeines Bildungsmittel erachtet werden dürfen, weil Schüler, die an diesen Rechnungen besonderes Wohlgefallen erwiesen haben, leicht in anderen Dingen das schwächste Urteil zeigen. Letzteres Bedenken wird durch die Erfahrung als berechtigt bestätiget. In Hergangs Encyklopädie ist bemerkt, dafs die Schüler Pestalozzis die verwickeltsten Zahlenkombinationen mit einer staunenswerten Geläufigkeit im Kopfe zusammenbrachten, im praktischen Leben aber von einem naturalisierenden Hökerweibe übertroffen wurden. Man machte dem Pestalozzischen Rechnen den Vorwurf, dafs es zu einer beziehungslosen Fertigkeit ausgebildet werde, als ob der Schüler nicht auch Beziehungen hätte zum Hause, zur Schule, zur Kirche, zur Natur — ein Tadel, welcher insofern nicht berechtigt ist, als Pestalozzi die Anschauungslehre der Zahl- und Mafsverhältnisse lediglich als eine Vorschule betrachtet wissen wollte und die Anwendung dieser Übungen auf Lebensfälle in Aussicht genommen hatte. Praktische Schulmänner nannten die weit ausgesponnenen formalen Übungen »die grofse Ausgabe des Einmaleins, schweizerischen Mechanismus, neue Abrichtungsmethode«, ja, sie suchten in derselben sogar eine Gefahr für die Sittlichkeit. Joh. Jak. Hottinger (Ein Wort an Prof. Schulthefs über dessen genauere Einsicht der neuesten Versuche einer besseren Erziehung und Bildung der Jugend, Zürich 1810) fafst sein Urteil über Pestalozzi und seine Bestrebungen wie folgt zusammen: Wir lernen in Pestalozzi einen Mann kennen, der für Menschenwohl glühte der für Verbesserung des Volkszustandes begeistert war, dem es aber bei allem guten Willen an ruhiger Umsicht und Übersicht der Verhältnisse fehlte. Die Verachtung aller (?) Theorie und fremden Erfahrung zeigt sich als rohe Empirie und blindes Umhertappen in allerlei wunderlichen Experimenten und falschen Schlüssen, die daraus gezogen werden, was Pestalozzi das Pulsgreifen der Kunst nennt, die er suchte, und führt zu dem bemitleidenswerten Bemühen um allerlei neue Erfindungen, die schon längst erfunden sind. Das Schlimmste und Bedauerlichste ist, dafs er den Geist seiner Erfindungen durch den ihm selbst so sehr verhafsten Buchstaben getötet hat, dafs er, dem Freiheit und Selbständigkeit des Menschen über alles geht, seine Zöglinge zu allezeit fertigen Rechenknechten, steifen Schreibern und hölzernen Zeichnern bildet, die wie ewig Baugefangene die ganze unermefsliche und herrliche Natur wie durch das Gitter ihrer Quadrate beschauen und alle ihre Kräfte nur als Quantitäten berechnen können.« In Pfarrer Bachers Methodenbuch, 1806, lesen wir, »dafs die bayerische Regierung das Experimentieren mit neuen Methoden nicht undeutlich mifsbilligt habe,« und in der Schrift »Der bayerische Landgeistliche in der Schule« (1805), heifst es: Es scheint, Pestalozzi wolle versuchen, die Rechnungslehre auf die Einfachheit ihrer Grundform zurückzuführen, wo alle

Zahlen der Vielheit dem Kinde nur als Eins vor die Augen gerückt werden, um auf diese Art das Rechnen zur höchsten Vernunftübung zu erheben. Und in dieser Hinsicht erhält diese Methode eine aufserordentliche Bedeutung; nur darf es der bayerische Landgeistliche nicht wagen, mit dieser Rechnungs- oder Zählungsmethode in der Landschule aufzutreten und danach im Rechnen zu üben. Overberg bestreitet, dafs Pestalozzis Methode neu sei: »Da man allenthalben der Meinung ist,« bemerkt er in seiner Anweisung, »als wäre die Lehrmethode dieses mit Recht so sehr geschätzten Mannes nach allen ihren Teilen neu und in Deutschland bisher unbekannt gewesen, so kann ich mich nicht enthalten, zu zeigen, inwieweit nur ich, da ich mich keinem der berühmten Pädagogen zur Seite stelle, schon längst dieselben Grundsätze befolgte, auf welche die so berühmte Pestalozzische Methode sich stützet. Meine Schüler rechnen ebenso gut aus dem Kopfe, wie die des Pestalozzischen Instituts. Und so etwas ist in Deutschland gar nichts Seltenes; in der Schweiz aber scheint eine solche Erscheinung bisher ungewöhnlich gewesen zu sein.«

Die Anhänger Pestalozzis aber waren begeistert »von der Herrlichkeit der neuen Methode«. Gruner hebt ihre vorteilhaften Wirkungen auf die verschiedenen Seelenkräfte des Kindes hervor, er bewundert das Ineinandergreifen der Übungen und die Resultate, welche sich darin zeigen, dafs Kinder von 7—8 Jahren, geleitet von der Anschauung, sehr verwickelte Aufgaben ohne Anstofs mit einer Sicherheit lösen, welche in Erstaunen setzt. Iths amtlicher Bericht sagt: Der bisherige Unterricht war Buchstabenwerk; Pestalozzi hat eine Methode gefunden, welche der Natur nachgeht, und die sich durch ihre Leichtigkeit und allgemeine Anwendbarkeit und Kürze auszeichnet. Dafür spricht der Erfolg: Die Zöglinge des Instituts haben das Urteil des Auges durch eine immer wiederholte und unauslöschlich eingeprägte Anschauung der mathematischen Formen bis zur Untrüglichkeit gehoben. Sie schätzen auf den ersten Blick die Gröfse der Verhältnisse, die Mafse mit einer Richtigkeit, die in den meisten Fällen des gemeinen Lebens vollkommen ausreicht; ihre Hand ist so sicher wie ihr Auge; sie zeichnen ganz frei einen Kreis, ein Vieleck, einen Winkel, teilen das alles mit einer Genauigkeit ein, welche die Probe des Instruments zuversichtlich erwartet.

Ich sah einen Knaben, der seit 18 Monaten im Institut ist, die Karte von Skandinavien in einer Richtigkeit vollenden und zugleich auf einen andern Maſsstab reduzieren, welche jede Untersuchung aushielt. Mit einer aus dem innigsten Vergnügen und wahrer Bewunderung gemischten Empfindung bemerkte ich, wie Pestalozzi auf dem Pfade, den er nun einmal zu befolgen angefangen hat, und immer nur von Versuch und Erfahrung zu neuen Versuchen und Erfahrungen geleitet, endlich zu einer Höhe heranklimmte, zu welcher der erste der Philosophen unseres Zeitalters nicht anders als durch die tiefste Erforschung der Kritik gelangt war (Kant). — Man hat dieser Methode den Vorwurf des Mechanismus gemacht; besser ist das Bild des Organismus; denn es handelt sich hier nicht um ein mechanisches Triebwerk, sondern um eine von innen aus auf einen bestimmten Zweck nach bestimmten Gesetzen arbeitende Kraft. Das Institut hat mehrere Zöglinge auf den Stand gebracht, daſs sie unterrichten konnten. Es liegt im Wesen dieser Methode, daſs ein Kind das, was es gelernt hat, selbst als Lehrer verwerten kann. Das Kind gelangt durch das Pestalozzische Verfahren noch nicht zur wissenschaftlichen Rechenkunst, aber es wird so vorbereitet, daſs es die Regeln derselben mit Hilfe der entwickelten Kopfrechnungskraft nun selbst auffinden kann. Wir haben uns überzeugt, daſs diese Lehrart nicht bloſs eine Modifikation einer schon bekannten Unterrichtsweise, sondern ihrem Wesen nach neu, mithin eine wahre Entdeckung sei. Sie hat ihren Grund in der menschlichen Natur und schlieſst sich an ihre Entwickelung an. Sie setzt beim Lehrer wenig, beim Kinde keine andere Naturgabe und Anstrengung voraus, als diejenige, welche dem Menschen im wachenden Zustande habituell ist. Sie erhält das Bewuſstsein der eigenen Vervollkommnung, wirkt wohlthätig auf das Selbstgefühl und begünstigt die Sittlichkeit. Es ist der wahre Elementarunterricht, dessen Dasein man schon lange geahnt, bisher aber vergeblich gesucht hat. Das Institut sollte in ein Schullehrerseminarium umgewandelt werden.

Der preuſsische Schulrat Freiherr v. Türk war im Sommer 1804 drei Monate Pestalozzis Gast und lernte die Pestalozzische Lehrart aus eigener Anschauung kennen. v. Türk schreibt über seine diesbezüglichen Erfahrungen in den Briefen aus Münchenbuchsee, wie folgt: »Als ich das erste Mal das monotone: Vier mal eins ist einmal drei und einmal der dritte Teil von drei etc. von allen Knaben einer zahlreichen Klasse zugleich in dem harten Schweizerdialekte hörte, war der Eindruck nicht angenehm. Indessen kamen gerade diesen Tag Fremde — man führte die Knaben von einer Übung zur andern, und ich konnte nicht umhin, die Schnelligkeit, Sicherheit und Bestimmtheit, mit welcher die Schüler die schwierigsten Aufgaben auflösten und von der Art der Auflösung Rechenschaft ablegten, zu bewundern; zugleich drängte sich mir die Bemerkung auf, dafs bei den verwickeltsten Rechnungen genau derselbe Weg eingeschlagen wurde, wie bei den allereinfachsten: 1 ist der halbe Teil von 2, 2 Halbe ist ein Ganzes liegt allen nachherigen Übungen zu Grunde. Diese hohe Konsequenz der Methode, diese Sicherheit und Bestimmtheit, mit der die jungen Leute rechneten, ihr munteres, offenes Wesen, der Umstand, dafs sie bei ihrem Rechnen nie sich irrten, oder wenigstens ihre Fehler sogleich selbst bemerkten und verbesserten, sowie dafs keine äufseren Umgebungen sie zu zerstreuen vermochten, waren mir Bürge dafür, dafs der Weg, auf dem sie so gebildet waren, Aufmerksamkeit verdiene.« — Einen Hauptvorzug der Pestalozzischen Methode erblickt v. Türk in der strengen, lückenlosen Abstufung der Übungen: »Sie gestattet keinen Sprung, ganz unmerklich führt sie ihren Lehrling von den Anfangspunkten zur sichersten Vollendung. Ferner ist sich das Kind dessen, was es thut, und der Gründe dafür genau bewufst, sowie seines allmählichen Fortschreitens. Dieses Bewufstsein, diese Bestimmtheit sind es, die ihm die Munterkeit und Ausdauer geben, welche ich bisher bei allen Kindern, die mit Auswendiglernen von Dingen, die sie nicht begreifen und verstehen, gepeinigt werden, vermifst habe. — Das Ganze der Bemühungen, das Kind rechnen zu lehren, beruht nach Pestalozzischen Grundsätzen auf folgenden drei Hauptpunkten:

1. Das Kind zur Kraft zu erheben, die Zahlverhältnisse in grofsem Umfange deutlich zu erkennen und richtig zu bestimmen.

2. Es zu lehren, diese Kraft auf Berechnung von Gröfse, Anzahl, Dauer, Schwere und Wert der ihm vorkommenden Gegenstände anzuwenden.

3. Seine desfallsigen Intuitionen durch Zeichen (Ziffern) dem Auge darzustellen.

Welche andere Methode hat bisher die Hauptmomente so scharfsinnig bestimmt, so psychologisch gerecht und in so konsequenten Formen aufgestellt? Betrachtet man die Pestalozzische Lehrart aus dem Standpunkte der Erziehung, von welchem sie durchaus nicht als Mittel, um schneller rechnen zu lehren, anzusehen ist, sondern blofs als Mittel, die Verstandeskräfte der Kinder zu entwickeln, so mufs sie uns doppelt willkommen sein; denn stellt man eine Vergleichung an zwischen dem Einflusse, den die Pestalozzische Methode, das Rechnen zu lehren, auf den Geist der Kinder hat, mit demjenigen der gewöhnlichen Unterrichtsmethode, so wird jeder offene, vorurteilsfreie, eines reinen Eindrucks fähige Sinn bei dieser Vergleichung durchaus Sache und Zeichen, lebendige Anschauung und totes Räsonnement entgegengesetzt finden; folglich ihre Einführung aus vollem Herzen wünschen und mit ganzer Kraft befördern. Bedenkt man ferner, wie sehr sie die Kinder durch das Gefühl der Zunahme ihrer Kraft heitern Sinnes macht, und doch aut der andern Seite Bescheidenheit mit Selbständigkeit zu vereinigen mag, so mufs die Pestalozzische Methode noch ehrwürdiger erscheinen, und nur Selbstsucht und Beschränktheit können ihr diese Würde absprechen.«

Nehmen wir noch Kenntnis von dem Urteile eines Privatmannes, das uns Blochmann, ein Mitarbeiter Pestalozzis[1]), in seiner Schrift: »Heinrich Pestalozzi, Züge aus dem Bilde seines Lebens« (Dresden 1846), mitteilt. »Eines Tages kam ein reicher Nürnberger Kaufmann in die Anstalt, der viel von der aufserordentlichen Gewandtheit ihrer Zöglinge im Rechnen gehört hatte, liefs sich in die erste Klasse führen und fragte u. a., ob es ihm auch gestattet sei, den Zöglingen eine Aufgabe zu erteilen. Als der Lehrer dies bewilligt und der Kaufmann eine sehr komplizierte viergliederige Gesellschaftsrechnung mit Brüchen gegeben hatte, fragten ihn die Knaben, ob sie die Aufgabe auf der Tafel oder im Kopfe rechnen sollten; der erstaunte Kaufmann erwiderte, sie möchten an die Lösung mit Kopfrechnen gehen, wenn sie es wagen dürften. Darauf rechnete er selbst die Aufgabe schriftlich. Kaum ist er zur Hälfte fertig, als ein Zögling nach dem andern ruft: Ich hab's. Er bemerkt sich die Ergebnisse, und als dieselben mit seinen viel später ermittelten Lösungen vollkommen übereinstimmen, kehrt er sich mit den Worten zu Pestalozzi: Ich

---

[1]) Vergl. den Artikel von Dr. Paldamus in Schmids Encyclopädie, Bd. I, Seite 758 u. f.

habe drei Jungen, die schicke ich Ihnen alle her, sobald ich nach Hause komme.« — Zur Beurteilung der gegensätzlichen Anschauungen über den Wert der Pestalozzischen Lehrart im Rechnen gibt Pestalozzi selbst noch Aufschlüsse, die der Offenheit und Ehrlichkeit seines Charakters das schönste Zeugnis ausstellen. Schon vor Vollendung seiner Lehranweisung gab er zu verstehen, dafs er mit dem Erfolge seiner Arbeit nicht vollständig zufrieden sei; er sucht aber den Grund für den Mindererfolg noch nicht in der Ausführung seiner Grundsätze, sondern in den Schülern. »Mitten im Drange der vielseitigen Versuche«, sagt er im dritten Hefte der Anschauungslehre, »reifte eine grofse Erfahrung, die uns mit der Allmacht vor Augen liegender Thatsachen zeigte, dafs das Ineinandergreifen der Kräfte der Menschennatur einen viel gröfseren Spielraum hat, als die einseitig ins Auge gefafsten Schranken der intellektuellen Bildung zu erheischen scheinen, dafs dieses Ineinandergreifen der menschlichen Kräfte von dem Übergewicht der Sinnlichkeit und der daraus entkeimenden bösen Neigungen und Gewohnheiten bald mehr, bald weniger zerstört, zerrüttet und gehemmt werde; sie zeigte uns, dafs besonders die Anschauungslehre der Zahlverhältnisse, welche die kraftvolle Unschuld des unverdorbenen Kindes mit einer Erstaunen erregenden Leichtigkeit fafst, vom verdorbenen und sittlich erschlafften (schwach begabten?) Kinde schwer gefafst wird und sich in seinem Geiste wieder auslöscht — ein aufserordentlich interessantes Zugeständnis. Später kommt er der wahren Quelle des Mifserfolgs bei einem Teile der Schüler näher; denn »Einseitig und mangelhaft sind die ausgedehnten Reihenfolgen von Zahlverhältnissen, die in diesen früher erschienenen Elementarbüchern schon für die ersten Anfangsübungen aufgestellt wurden. Dieser Gang führt unstreitig dahin, dafs an Stelle der Entwickelung der Geisteskräfte Mechanismus tritt. Die Wiederkehr dieser Übungen bis zur Ermüdung oder bis auf den Punkt, auf dem sich aller Reiz verliert, mufs sorgfältig vermieden werden. Eine genugthuende und wahre Anschauung ruht auf der Totalthätigkeit aller Sinne und diese mangelt in den ersten Elementarbüchern ganz.« Abgesehen von diesem männlich ehrenhaften Bekenntnisse dürfen wir Pestalozzi über die breite, mit peinlicher Erschöpfung der Einzelfälle ausgeführten Übungsgruppen in den Elementarbüchern nicht den Vorwurf einer Inkonsequenz machen, denn die Frage, warum diese Mittel auf den menschlichen Geist ihre Wirkung haben, gehört — nach seiner Meinung — nicht in das Gebiet des einfach anwendenden Lehrers, noch viel weniger der sie einfach anwendenden Mutter. Wenn man Ternens Exspektorationen über die Qualität des Lehrpersonals der damaligen Zite liest und überhaupt die Klagen über den traurigen Verfall des Unterrichts zumal in den Landschulen würdigt, ist man in der That geneigt, Pestalozzi beizustimmen; denn die Mutter oder eine ältere Schwester waren den Kleinen doch noch bessere Lehrer als die fratres ignorantiæ. Selbst die übermäfsige Ausführlichkeit in Behandlung der Tabellen hat für den denkenden Lehrer etwas Anregendes; denn sie zeigt ihm die gröfste Mannigfaltigkeit der Gesichtspunkte, von welchen ein und dieselbe Sache der methodischen Behandlung unterstellt zu werden vermag. Pestalozzi überschätzt die formale Bedeutung des Rechnenlernens und ist nicht glücklich in der Ausführung seiner Ideen; er irrt in der Annahme, dafs seine Anweisungen dem Lehrer die Kenntnis der Gründe für seine methodischen Mafsnahmen entbehrlich machen; er gibt in der Anschauungslehre der Zahlverhältnisse nur ein Bruchstück des Rechnens; läfst das Zifferrechnen, diese geniale Erfindung, das Resultat viertausendjähriger Denkarbeit, nicht zu seinem Rechte kommen; er dehnt die Veranschaulichung zu weit aus und ignoriert bedauerlicherweise die bereits vorliegenden Vorarbeiten. Was hätte Pestalozzi leisten können, wenn er die trefflichen Schriften des Michael Stifel, Ramus, Comenius, Tartaglia, Wolf und hervorragender Zeitgenossen in Betracht gezogen hätte! Allerdings läfst dieser Mangel seine Originalität nur um so reiner erscheinen. Trotz der vorerwähnten Aussetzungen zeitgenössischer Schulmänner ist Pestalozzi der Begründer des modernen Rechenunterrichts, denn er war der erste, der den psychischen Funktionen beim Rechnen nachging und das Lehrverfahren darauf zurückführte. Nach Pestalozzi müsse der Rechenunterricht die Sinnesthätigkeit zum Ausgangspunkte nehmen und deutliche Begriffe erzeugen, die einzelnen Lehrthätigkeiten müssen organisch ineinandergreifen, dem geistigen Standpunkte der Schüler sich anpassend lückenlos fortschreiten, das Kopfrechnen müsse besonders betont werden, das Rechnen sei als Bildungsmittel zu verwerten — das sind Forderungen, die so eindringlich wie von Pestalozzi niemals erhoben und mit Erfolg nirgends bestritten worden sind.

Pestalozzi hat das Anschauungsprinzip, welches vor ihm von Bacon v. Verulam, Comenius, Montaigne, Rousseau, Rochow, Overberg u. a. schon aufgestellt und angewendet worden war, als eine psychologische Notwendigkeit nachgewiesen, als Konsequenz hievon die Orientierung des Kindes in allmählich sich erweiternden Zahlreihen verlangt, die inneren Beziehungen der Spezies zu einander klargelegt, das Verhältnis der Brüche zu den Ganzen in ein helleres Licht gesetzt, die mechanischen Ansätze beseitigt, die Verbindung der Lehrfächer auf gemeinschaftlicher anschaulicher Grundlage angestrebt, und trotz der sonderbaren Idee, dafs zur Ausführung seiner Pläne ein willenloser, blind arbeitender Lehrer genüge, der weiter nichts zu thun habe, als die Elementarbücher zu recitieren, hat er die Notwendigkeit eines technisch und methodisch gut geschulten Lehrerstandes zur allgemeinen Anerkennung gebracht, und das ist nicht sein geringstes Verdienst. Die Elementarbücher, die doch so viel Neues und manches Brauchbare enthalten, sind vom Büchertische des praktisch thätigen Lehrers längst verschwunden oder, vielleicht besser gesagt, sie konnten sich das Bürgerrecht in den deutschen Schulen nicht erwerben. Aber die diesen Schriften zu Grunde liegenden Ideen repräsentieren den kunstvollen Plan eines genialen Baumeisters, dessen Ausführung der Mit- und Nachwelt hinterblieb. Um es zu vollenden, wird man auf Pestalozzis Schriften zurückkommen, und dafs es geschieht, darüber fehlt es nicht an Anzeichen. Durch die ideale Auffassung des Gegenstandes und durch die Wärme, die von Pestalozzis Bestrebungen auf die Schulmänner grofs und klein ausstrahlte, hat Pestalozzi eine Anregung gegeben, welche noch manches der kommenden Geschlechter überdauern wird.

Die weitere Entwickelung der Rechenmethode nach Pestalozzischen Grundsätzen.

Die formalistische Richtung.

Pestalozzis Mafsnahmen zur Verbesserung des Rechenunterrichts beziehen sich 1. auf das Ziel, 2. den Lehrstoff und dessen

Ordnung, 3. auf die Lehrweise. In diesen drei Punkten ist überhaupt alles enthalten, was zu jedem Unterrichte gehört. Wenn in der Folge der Rechenunterricht einer weiteren Entwicklung entgegengehen sollte, mufste man das Pestalozzische Lehrverfahren überhaupt oder in irgend einer dieser Richtungen weiter ausbauen oder umstofsen und etwas anderes an seine Stelle setzen. Die eigentümliche Unterrichtsweise Pestalozzis (Vor- und Nachsagen) liefs man bald fallen, da sie sich als unzweckmäfsig erwies. Die idealen Prinzipien des Altmeisters der Methodik, der anschauliche Unterricht und das erhabene Bildungsziel dagegen wurden festgehalten und letzteres erweitert, indem man auch dem Bedürfnisse des Lebens durch Vermittlung wertvoller Rechenkenntnisse entsprach und dadurch die alte und neue Richtung miteinander versöhnte. Man unterrichtete nicht nach Pestalozzischer Lehrart, sondern nach Pestalozzischen Grundsätzen. So wurde das Gute erhalten, das die vorhergegangene Schule Rochow-Overberg und die früheren Jahrhunderte zu Tage gefördert hatten.

Der bedeutendste der unmittelbaren Pestalozzianer, d. i. derjenigen Männer, welche mit Pestalozzi in persönlichem Verkehr standen, und zugleich der gröfste Rechenmethodiker der älteren Pestalozzischen Schule, ist Dr. Ernst Tillich, Vorsteher einer Erziehungs- und Lehranstalt zu Dessau. Tillich, von Pestalozzi angeregt, aber mit seinen Elementarbüchern nicht zufrieden, übergab dem Büchermarkte i. J. 1806 sein: »Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik oder Anleitung zur Rechenkunst für jedermann«. Dieses Handbuch hat sich zum Ziele gesetzt, denkend rechnen und rechnend denken zu lehren. Tillich hält an dem Grundsatze Pestalozzis: Der Rechenunterricht sei zunächst Denkübung, fest, setzt aber bei, dafs die bürgerlichen Verhältnisse Berücksichtigung verdienen. Aufserdem korrigiert er die Ansichten Pestalozzis in mehreren wesentlichen Punkten. Pestalozzi vertritt ausschliefslich den pädagogischen Standpunkt; Tillich zugleich den wissenschaftlichen. Bei Pestalozzi spielt der Lehrstoff eine ganz untergeordnete Rolle; nicht einmal das Zehnersystem kommt zur berechtigten Geltung; Tillich dagegen untersucht, wie ein Künstler den Stein, aus welchem er ein plastisches Gebilde formen will, erst den Lehrstoff, ehe er denselben methodisch bearbeitet. »Pestalozzis Elementarbücher stellen die Zahl als Folge empirischer Wahrnehmungen dar, während sie in Tillichs Arithmetik als Akte rein innerer Anschauung aufgefafst werden. Dort ist überall von Zahlengröfse die Rede; hier ist alles auf die Zahlenordnung gebaut. Die Zahlen von 1—10 werden Normen für Ordnung, für Rubriken, keineswegs für die äufsere Darstellung der wahrgenommenen Vielheit, die nur durch Ordnung in uns entsteht und nur darauf sich stützt. Indem wir z. B. 85 aussprechen, so schwebt uns keineswegs jede Einheit vor, sondern vielmehr die Zahl der Zig (Zehner) und der Einer; noch auffallender ist dies bei Hundertern und Tausendern der Fall, die nur insofern Sinn für uns haben, als wir die Rubriken uns mit Klarheit vorstellen; der Einheiten sich bewufst zu werden, ist schlechterdings unmöglich.« — »Meine Methode«, sagt Tillich, »lehrt von der ersten Ordnung (1—10) alle möglichen Verhältnisse kennen und dadurch eine Norm bilden, nach welcher alle übrigen Zahlen behandelt werden.« Hiernach ist die Grundlage alles Rechnens die allseitige Behandlung des ersten Zehners — ein Satz, welcher hier zum ersten Male mit solcher Bestimmtheit und Klarheit ausgesprochen wird. »Der methodische Gang wird sich daher nicht an die Spezies halten, und der Lehrer der Arithmetik wird nicht glauben, dafs erst eine Spezies in gewöhnlicher Vollständigkeit vollendet sein müsse, ehe man eine neue beginnen dürfe, vielmehr wird er sich an die natürliche Zahlenordnung halten und nicht eher die Einer verlassen, bis sie nach allen ihren Verhältnissen verstanden sind.« Die Brüche führt Tillich auf die Verhältnisse mit ganzen Zahlen zurück. Halbe bestehen nur insofern, als die Zahl 2 besteht. Die Übertragung der Brüche mit gröfseren Zahlen ist ein Akt innerer Anschauung und freier geistiger Thätigkeit, nicht Sache empirischer Wahrnehmungen, denn das Auge gibt uns keine Gewährleistung dafür, dafs ein kleinerer Raum ein aliquoter Teil eines gröfseren sei. Tillich engt hiernach das Gebiet der Veranschaulichung bedeutend ein.

Tillichs Arithmetik behandelt im I. Teile das Kopfrechnen. Die Grundübung ist das Zählen gleichartiger Dinge: a) 1, 2; 2, 1; 1, 2, 3; 3, 2, 1; bis 10. b) 2, 4; 4, 2; 2, 4, 6; 6, 4, 2. Es ist gleichgültig, was für Gegenstände gezählt werden; besser sind solche, die nicht durch besondere Eigenschaften zerstreuen. Wir zählen nur bis 10. Die 10 ist aber der Inbegriff von 10 Einheiten, womit man wieder ebenso verfahren kann, als wenn man mit den Einheiten selbst von vorn zu zählen anfängt. So ist 13 nichts anderes als 10 und 3, wie es der Name gibt. Damit aber diese 10 als eine aus mehreren verbundene Einheit recht versinnlicht werde, nennen wir sie sogleich ein Zig und lassen fortfahren zwei Zig, drei Zig etc. Es ist nur eine Ausnahme von der Regel, dafs der Inbegriff von 10 Einheiten, wenn sie allein betrachtet werden, zehn heifst. Tillich hat also der Nachsilbe zig die frühere selbständige Bedeutung wiedergegeben.

Dem Zählen folgt das Addieren, diesem das Zerlegen und Vergleichen innerhalb 10, welche Übungen hier das erste Mal selbständig auftreten. Tillich betrachtet das Zerlegen und Vergleichen als Reflexion über das Gelernte und als Wiederholung desselben. Er erachtet den Nutzen dieser Übungen für unermefslich, weil dadurch die einfachen Zahlen zu einem so deutlichen Bewufstsein gebracht werden, dafs nichts Bemerkenswertes mehr übrig bleibt. Das Dividieren, welches sich doch an die Multiplikation anschliefst, wie die Subtraktion an die Addition, war ihm für die erste Stufe wohl zu schwer; er bringt es deshalb später. Im übrigen behandelt Tillich auf 224 Seiten die Zahlverhältnisse mit gröfster Ausführlichkeit. — Der II. Teil gibt die Anleitung zum schriftlichen Rechnen. »Die Ziffer verhält sich zur Zahl, wie das Zeichen zur Sache. Mit Ziffern kann man nicht rechnen, sondern lediglich Zahlen ausdrücken. Sie werden erst dann verstanden, wenn der Schüler Zahlbegriffe hat, können also erst gebraucht werden, wenn der Schüler mit Zahlen umzugehen weifs. Wir sind in Aussprechung der Zahlen inkonsequent; 34685 sollte gesprochen werden: dreifsig- und viertausend, 6 hundert achtzig und fünf. Die Division mit einstelligem Divisor behandelt Tillich in eigentümlicher Weise; das Beispiel 56789 : 3 löst er also:

$\frac{1}{3}$	5	6	7	8	9	12223
	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	$6706\frac{2}{3}$
		6	7	0	$6\frac{2}{3}$	$18929\frac{2}{3}$

»Gehen wir dieses Beispiel durch, so enthielt es auf der ersten Stelle $^2/_3$, das waren $^2/_3$ Zig in Beziehung auf die zweite, $^2/_3$ Zig sind aber $6^2/_3$. Diese $^2/_3$ sind wieder $^2/_3$ Zig in Beziehung auf die dritte Stelle, oder $6^2/_3$. Da sich hier oben schon $\frac{1}{3}$

befindet, so sind es $6^2/_3$, mithin ist der Quotient dieser Stelle $6 + 1 = 7$; die dritte Stelle blieb ohne Rest, man kann daher dem zur vierten Stelle gehörigen Quotienten nichts beifügen. Wohl aber bleiben von der vierten Stelle $^2/_3$ übrig zur fünften, und diese werden wieder $6^2/_3$.«

Wird der Divisor gröfser, so kann man in der Teilung gleich zwei Zahlen zusammenfassen:

$\frac{1}{4}$	33	97	65	82416
	$^1/_4$	$^1/_4$	$^1/_4$	2525
		25	25	84941

Das Dividieren mit mehrstelligem Divisor ist bei Tillich eine Modifikation des Übersichdividierens, das im ersten Jahrzehnt des 19. Jahrhunderts noch gebräuchlich war. Beispiel:

34	78	6	9	5	4 | 23145
	$\cancel{1}0$	4	5	9	
	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	3	4	
			$\cancel{1}$	2	

Tillich bemerkt dazu: Für die Übersicht des Ganzen ist es ein Vorteil, dafs man hier nicht nötig hat, Ziffern auszustreichen. Die untersten oder letzten Zahlen, welche nach der Operation übrig bleiben, machen allezeit den jedesmaligen Dividenden aus. Man streicht daher nur diejenigen Ziffern, welche Verwirrung machen könnten. — Der III. Teil enthält die Methodenlehre, eine in ihrer Art völlig neue Arbeit.

Tillich sagt hier: Es ist ein Unterschied zwischen der kahlen Darstellung einer Wissenschaft und der Art und Weise, wie sie gelernt wird. Die Wissenschaft beruht auf sich selbst, die Methodik auf richtigen psychologischen Schlüssen. Die Methode hat es nicht mit dem Stoffe an sich zu thun; dieser liegt als etwas Fertiges vor. Sie hat sich blofs zu fragen, wie fange ich es an, dafs ich mir diesen oder jenen Begriff aneigne? Man suchte in den vorausgegangenen Jahrhunderten eine Verständigung der gebräuchlichen Formeln und war zufrieden, wenn man eine allgemeine Regel begreiflich gemacht hatte. Man schickte die Regeln voraus. Damit war nichts gewonnen; denn jede Regel ergibt sich erst aus einer Reihe konkreter Fälle. Wenn gesagt wird, numerieren heifst zählen, so mufs der Schüler, um den Satz zu verstehen, eben das Zählen und Numerieren schon kennen.

Man hat daher das Zählen mit Dingen begonnen. Weil aber die Zahl nicht Prädikat eines Subjekts, nicht die Eigenschaft eines bestimmten Gegenstandes ist, so kommt es beim Zählen nicht auf die Gegenstände an, sondern auf das Mehr oder Minder. Eine Eins ist wie die andere und als Eins von der andern nicht unterschieden. Diese Eigenschaft sollte auch an den Versinnlichungsmitteln hervortreten. Weil aber kein Gegenstand ohne Eigenschaften gedacht oder gemacht werden kann, so soll er wenigstens so beschaffen sein, daſs er die Aufmerksamkeit nicht ablenke; also so wenig Eigenschaften als möglich. Die Zahl ist der Veränderung unterworfen, insofern sie als sich vermehrend oder vermindernd auftritt. Die innere Veränderlichkeit derselben muſs äuſserlich dargestellt werden. Die innere Veränderlichkeit oder die Verwandlung der Zeit, äuſserlich dargestellt, erscheint als Beweglichkeit im Raume. Diese kann nur durch Veränderung des Lokals in Erscheinung treten, und die Veränderung des Ortes ist Bewegung. Es werden alle einfachen Zahlen vielfach zusammengesetzt werden müssen, und die Beweglichkeit ist ein notwendiges Erfordernis des Versinnlichungsmittels der arithmetischen Anschauung. Endlich ist die konkrete Zahl nur das Bild der abstrakten. (Nach Tillich ist jede Zahl konkret, die sich noch an Dingen nachweisen läſst, auch wenn sie unbenannt ist; abstrakt ist die Zahl, wenn sie auf die Gröſse angewendet wird, so daſs nichts darauf ankommt, ob eine Zahl mehr oder weniger gelte.) An der konkreten Zahl muſs man die Regeln des Verfahrens lernen, um zur Abstraktion zu gelangen. Es können keine Verhältnisse der Zahlen vorkommen, die nicht in den einfachen Zusammensetzungen derselben gegründet sind. Das Versinnlichungsmittel kann daher streng genommen nur für die konkrete Zahl stattfinden. Da aber in der konkreten Zahl der sinnliche Hintergrund aller Verhältnisse liegt, da Halbe und Viertel sich nicht anders verhalten können als 2 und 4, so folgt, daſs alle Verhältnisse in einfachen Konstruktionen der konkreten Zahlen ihren Grund haben. Das letzte und wichtigste Erfordernis eines Versinnlichungsmittels ist demnach, daſs alle Zahlen so dargestellt werden, daſs man in denselben die Verhältnisse versinnlicht finde, welche die abstrakten Zahlen haben. Tillich fordert also von den Versinnlichungsmitteln: eine mögliche Entfernung aller Qualitäten (hervorstechender Eigenschaften), Symmetrie, Beweglichkeit und Kombinationsfähigkeit. Auf Grund dieser Forderungen konstruierte er einen Rechenapparat, den er also beschreibt: »Diese einfache Rechenmaschine besteht aus 100 verschiedenen Stäben für alle einfachen Zahlen von 1—10. Jeder einfachen Zahl gehören 10 Stäbe. Die Einer, von denen des öfteren Gebrauchs wegen gewöhnlich 20 bis 30 vorhanden sind, sind Würfel von der Gröfse eines Zolls. Alle übrigen Zahlen sind nach dem Verhältnisse der Mehrheit länger. Die Zwei hat also die Länge von 2, die Drei von 3 Zollen; die Breite und Dicke bleibt aber nur 1 Zoll. All diese Stäbe befinden sich in einem Kasten mit 10 Fächern, wovon ein jedes die 10 Stäbe enthält, welche zu einer Zahl gehören. Natürlich richtet sich die Gröfse eines Faches nach der Länge der Stäbe.« Über die Anwendung dieses Apparates gibt Tillich folgende Anleitung: Zuerst ist daran die Zahlordnung, nicht die Zahlgröfse darzustellen, denn die Gröfse wird erst erkannt, wenn man eine Zahl nach der andern aufstellt und die folgende als eine solche ansieht, welche alle vorhergehenden in sich begreift. Dadurch entsteht eben die Zahl, die Ordnung und Folge macht sie allein. Erst werden die Einer aufgestellt und ohne weiteres gezählt. Man stellt erst nur Eins auf und benennt dieses. Dazu gesellt man ein anderes und benennt dieses abermals als Eins, schiebt beide zusammen und spricht zwei. Man trennt dann beide und bezeichnet jedes für sich als eins. Beide werden wieder zusammengethan, dann nimmt man den 3. Würfel und läfst ihn auch als Eins bezeichnen, verbindet denselben mit den beiden ersteren und spricht drei, so fort bis 10. Allemal, wenn eine Eins dazugethan ist, zählt man die vorhergehenden wieder mit. (Ein bedeutsamer Satz, weil hier verlangt wird, dafs man beim Denken einer Zahl die vorausgegangenen Zahlen in intellektueller Intuition sich gegenwärtig halte, bezw. die Zahlreihe mit Blitzesschnelle überfliege.) Es wird allemal so weit zurückgezählt, als man vorwärts zählte, und eine jede Summe um so viel vermindert, als man sie vermehrte. Man lasse die Copula »ist« noch weg, denn es soll hier die Zahl noch nicht konstruiert, sondern nur geordnet werden. In dieser Copula liegt schon ein Schlufs. Man mufs aber das Einzelne erst vollständig begriffen haben, ehe man ihn fassen kann. Das Kind mufs hier schon wissen, was drei ist, wie es wurde, ehe es die Aufmerksamkeit auf drei Dinge zugleich richten kann, nämlich auf 2 gegebene, vielleicht schon zusammengesetzte Zahlen, die für sich bestehen, auf die Art, wie diese verbunden werden, und auf das Produkt, welches daraus entsteht. Vor allem ist die zehn häufig zu überzählen, weil sie alle übrigen Einheiten in sich begreift und die Ordnung beschlieſst. Nachdem man die Zahlen von 1—10 aufgestellt hat, bedient man sich der zusammengesetzten auf folgende Weise: Man setzt die 1 oben an, darunter die 2, darunter die 3 bis 10 (s. die nebenstehende Figur).

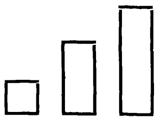


Fig. 49.

Durch diese Zusammensetzung ist auch für das Auge eine Stufenleiter entstanden, und man muſs das Kind üben, allemal eine bestimmte Zahl an der Rechenmaschine zu suchen, daſs es 7, 9 etc. sofort zeige. Auf 5 folgt 6, vor 3 steht 2. Zuerst setzt man zu einer jeden dieser Zahlen eins und zeigt, daſs eins zu eins gesetzt, gleich 2 und 1 mit 2 verbunden der Zahl 3 gleicht. So bis 10. Dazu spricht der Schüler 1 und 1 ist 2 etc. Damit dies auch unabhängig werde von der Maschine, läſst man von dieser absehen. Wie zusammengesetzt wird, nimmt man wieder weg. Darauf folgt das Zuzählen der 2, also 1 und 2, 3 und 2 etc. Nachdem eine ganze Übersicht der einfachen Zahlen und ihrer Zusammensetzung gegeben ist, ist nötig, daſs man auch jede Zahl einzeln auffasse, um zu zeigen, wie viele Zusammensetzungen möglich sind. Diese Übung ist im Grunde die Wiederholung aller übrigen.

$$2 = 1 + 1; \quad 3 = 1 + 1 + 1 = 2 + 1 \text{ etc.}$$

Der II. Gang führt die Zig vor. Man stellt die Zehner auf und behandelt sie wie die Einer (bis 100). Man setzt einen Zehner und daneben einen Einer und zählt 11, Zig und 2 = 12. Ist dies bis auf 100 geschehen, nennt man irgend eine bestimmte Zahl und fragt, wie viel Einer und Zehner sie enthalte u. s. w. Die Decimalbrüche sind von Tillich nicht behandelt; in späteren Ausgaben seiner Schrift wurden sie vermutlich von Dr. Lindner erst eingefügt.

Tillich spricht mit gröſster Achtung von Pestalozzi: »Der Zeitpunkt ist vorüber, wo man die Pestalozzische Anschauungslehre spöttelnd die groſse Ausgabe des Einmaleins nannte. Die Erfahrung hat gelehrt, daſs die kompendiösen Übungen Wahrheit und Fertigkeit bewirken. Man staunt über die Resultate, zu welchen diese Foliobehandlung der Arithmetik führt.« Tillich hat aber die Methode Pestalozzis nicht blofs verbessert, sondern, von ihm angeregt, sich eigene Wege gebahnt. Tillichs Werk ist eine im grofsen Stile angelegte Methodik des Rechenunterrichts, wie sie die Vorzeit nicht aufzuweisen hat. Pestalozzi will in den Elementarbüchern keine tieferen Untersuchungen geben, weil sie nicht in das Gebiet des anwendenden Lehrers fallen; Tillich dagegen will dem denkenden Lehrer etwas übrig lassen. Der von Tillich konstruierte Apparat übertrifft an pädagogischer Berechtigung und praktischer Anwendbarkeit weit die stereotypen Tabellen Pestalozzis. Prof. Dr. Stoy nennt (im Vorworte zu Göpferts Schrift) die Arbeit Tillichs »das Muster eines mit psychologischer Gewissenhaftigkeit und Feinheit angelegten Lehrganges. Sein Rechenkasten mit den Einheitswürfeln und den die mehrmalige Wiederholung der Einheit darstellenden und so die geordnete Bildung der Zahlreihen erzeugenden Zahlenstäben entwickeln in der Hand eines pünktlichen Lehrers eine solche Gewalt, dafs selbst zurückgebliebene und durch die Schuld eines mangelhaften Elementarunterrichts unklar und unsicher gewordene Schüler geheilt und in ein gesundes Wachstum versetzt werden können«. Dr. Dittes ist hierüber anderer Ansicht. Er sagt: Dieser Apparat kann offenbar gute Dienste leisten, hat aber den Fehler, dafs er die Zahl durch die Gröfse darstellt, was offenbar der reinen Zahlanschauung Eintrag thut; denn wenn auch ein Körper z. B. 6mal so grofs ist, wie der als Einheit angenommene Würfel, so ist dennoch jener Körper nur einer, also kein unmittelbares Bild jener Sechs.

An Tillichs Arbeit lehnt sich eine Schrift von Joseph Schmid an, welcher Pestalozzis Mitarbeiter in Ifferten war. Sie führt den Titel: Die Elemente der Zahl als Fundament der Algebra nach Pestalozzischen Grundsätzen (Heidelberg 1810). Schmid empfiehlt seine Elemente mit geheimnisvollen, hochtrabenden Redensarten. »Ich gebe«, sagt er, »für diesmal nur so viel, als in der Zahl vollendet da ist, um der Menschheit auch das geben zu können, was in algebraischer Beziehung vollendet ist. Die Wahrheit, das Bessermachen undkönnen gehört der Menschheit!« In der Hauptsache enthält das Buch Übungen zum Kopfrechnen nach der im Pestalozzischen

Institut üblichen Manier innerhalb der kurzen Zahlreihen von 1—20 und von 20—100. Die Veranschaulichung, welche vorzugsweise an Strichen geschieht, gebraucht Schmid nur so lange, »bis die Zahl und ihre Verhältnisse sich zur geistigen Anschauung und durch diese zu Gedanken erheben«. Er liefs aber die Striche von den Kindern machen, weil die Kritik an den Pestalozzischen Tabellen getadelt hatte, dafs sie zu viel auf einmal bringen, dafs die Menge der Striche störend wirke, dafs die Zahl, mit welcher gerechnet werden soll, erst umkreist werden müsse, dafs diese Tabellen keine Veränderung zulassen u. s. w. Das eigentliche Zifferrechnen fehlt in den »Elementen« wie in den »Elementarbüchern«; dagegen werden arithmetische Reihen und negative Zahlen in den Unterricht einbezogen. Professor Dr. Lindner in Leipzig, ein Mitarbeiter Tillichs, meint, dafs die Bearbeitung von Schmids Elementen überflüssig gewesen sei, weil diese Schrift neues nicht enthalte und Tillichs Lehrbuch in wissenschaftlicher und pädagogischer Hinsicht nicht erreiche. Dieses harte Urteil erscheint begründet, wenn man berücksichtigt, dafs Schmid Fragen solcher Art stellte: Auf wie vielerlei Art kann man Eins bekommen? Auf wie vielerlei Art kann man 6 durch das malige Wegthun aufheben? Welche Zahlen bis 20 kann man in zwei gleiche Teile teilen, so dafs jeder Teil eine Einheit enthält? $^4/_3$ von welchen Zahlen sind $^3/_7$ von einer andern? Welche Zahlen sind in 10 einmal weniger enthalten, als sie wirklich darin enthalten sind? — Wenn man Rochows schlichten Rechenunterricht betrachtet, der so recht auf die Denkweise und Lebensverhältnisse der Kinder eingeht, ist man wohl aufser allem Zweifel, dafs durch die Zumutungen, welche Schmid den Rechenschülern stellt, der Rechenunterricht verdorben worden sei. Wenn gleichwohl Schmids Buch gröfseres Aufsehen machte, als Tillichs gediegenes Originalwerk, so hat dies, wie Wildermuth bemerkt, seinen Grund darin, dafs Ifferten damals als eine Art Prophetenschule angesehen wurde, von wo aus jedes geschriebene oder gesprochene Wort als ein Orakel in die Schulwelt hinausdrang. Schmids Elemente und eine weitere Schrift desselben: Die Anwendung der Zahl auf Raum, Zeit, Wert und Ziffer, welche schon im Titel einen logischen Fehler enthält, könnten hier übergangen werden. Es ist aber lehrreich, zu beobachten, dafs Pestalozzis Institut nicht imstande war, die Gedanken des Meisters mit gutem Erfolge weiterzuführen, und dafs man hier den Unterricht nach Schmids Elementen einstellte, um wieder zu den Elementarbüchern zurückzukehren. Der gute Kern der Pestalozzischen Ideen wurde auf der Scholle, wo er entstanden, nicht triebkräftig; er mufste in anderes Gelände verpflanzt und hier von neuen Kräften gepflegt werden — eine stetig sich wiederholende Erscheinung.

Unter den Männern, welche zunächst an dieser Aufgabe sich beteiligten, sind zu nennen: Rebs, v. Türk und Kawerau.

M. C. G. Rebs, Kantor in Zeitz, hat durch eine Praktische Anleitung zum Rechnen nach Pestalozzischen Grundsätzen (mit einem Kommentar) für Lehrer, Seminaristen und alle, welche die neue Methode näher kennen lernen wollen, viel zur Verbreitung Pestalozzischer Ideen beigetragen; denn die kleine Schrift hat sich in vielen Auflagen bis zum Ende der dreifsiger Jahre auf dem Büchermarkte erhalten. Schon aus dem Titel geht hervor, dafs Rebs im Sinne Pestalozzis schrieb, und der Inhalt des Buches wahrt diesen Standpunkt. Das Rechnen ist das beste Mittel zur Übung des Denkvermögens. Zur Veranschaulichung dienen die Tabellen der Elementarbücher. Addieren und Subtrahieren erscheinen nur wie zufällig auf dem Plane. Die ersten Übungen konzentrieren sich um die einzelne Zahl, die in mannigfacher Weise betrachtet und behandelt wird. Der Schüler hat sie bald als Kollektiveinheit, bald als Teil aufzufassen und in ihre Bestandteile zu zerlegen. Es machen sich also schon bei Rebs, wie nachmals bei Grube, die Konsequenzen des Pestalozzischen Gedankens geltend, dafs Zahlanschauungen die Grundlage alles Rechnens seien, und dafs Zahlanschauungen durch Betrachtung des Zahlinhaltes oder durch die Kenntnis der mannigfachen Veränderungen, welche mit ein und derselben Zahl möglich sind, gewonnen werden. Ein Fortschritt zu gunsten praktischer Verwertung des Rechenunterrichts, eigentlich ein Rückschritt zur älteren Methode, besteht in der beigefügten Sammlung von Textaufgaben, welche, wenigstens äufserlich, auf die Bedürfnisse des bürgerlichen Lebens eingehen. In der That aber sind sie meist Pestalozzische Formeln, z. B.: Ein Kaufmann verliert an 7 Pfund Zucker 17 Groschen, wie viel an 1 Pfd.? Man fragt: 17, wievielmal 7? Antwort: 2 mal 7 und $^3/_7$ von 7; also 2 und $^3/_7$ Groschen. — Hermann trägt über ein gewisses Kapital jährliche Zinsen ab. Sie betragen aber zweimal den siebenten Teil von siebenmal dem 8. Teile von $^4/_9$ von 36 Thlr. Auflösung: $^1/_9$ von 36 ist 4; $^4/_9$ also 4 mal 4; 4 mal 4 ist 16; $\frac{1}{8}$ von 16 ist 2; $^7/_8$ von 16 ist 7 mal 2 oder 14; $^1/_7$ von 14 ist 2; $^2/_7$ von 14 ist 2 mal 2 oder 4. Folglich betragen die Interessen 4 Thlr. — Hinsichtlich des schriftlichen Rechnens liefert Rebs den Beweis, dafs zur Verbesserung der Lehrmethode innerhalb der Pestalozzischen Schule noch nichts geschehen war, was übrigens bei der geringen Achtung, die hier das Schriftrechnen genofs, erklärlich ist. Rebs löst die schriftlichen Aufgaben in althergebrachter Weise durch die Regeldetri, z. B.: $^1/_5$ Ztr. kostet 3 Thaler, was kosten 7 Ztr.? Man setzt die 7 unter die 3 und multipliziert: 3 mal 7 ist 21; nun trägt man die 5 des Bruches auf die rechte Seite und sagt: 5 mal 1 ist 5; 5 mal 2 ist 10; also 105 Thaler. Merkt euch also: Wenn im ersten Satze ein Bruch vorkommt, so wird der Nenner hievon auf die andere Seite getragen und damit multipliziert — genau wie vor 300 Jahren.

1816 erschien ein »Leitfaden für den Rechenunterricht« von dem preufsischen Regierungs- und Schulrat v. Türk. Dieser Methodiker charakterisiert seinen Standpunkt mit der Bemerkung: Mir erscheint die Fertigkeit im Rechnen durchaus nur als Nebensache, die überdem nie fehlen wird, wenn die Hauptsache gehörig besorgt worden ist; Hauptsache aber ist die Übung im Denken. (Vgl. Seite 420.) Gleichwohl nimmt v. Türk, sich widersprechend, einen Anlauf zur Verwirklichung des Grundsatzes: Aus der Schule für das Leben! Denn er bemerkt, die jungen Leute sollen rechnen lernen, weil sie im gemeinen Leben der Rechenfertigkeit bedürfen. Türks Leitfaden ist in vielem einfacher, klarer und nüchterner als die Pestalozzischen Elementarbücher. Er lehrt in katechetischer Form im ersten Abschnitte das Rechnen von 1—10, von 1—20 und von 1—100 durch alle Spezies mit Ausnahme der Division. Der 2. Abschnitt bringt das Zifferrechnen, der 3. Abschnitt die 4 Spezies mit benannten Zahlen, der 4. Abschnitt enthält die Bruchlehre, der fünfte die Lehre von den Verhältnissen. Der II. Teil behandelt Gleichungen, welche auf arithmetischem Wege durch einfache Schlüsse aufgelöst werden — die Rätselrechnungen der Inder und des früheren deutschen Mittelalters. Als Veranschaulichungsmittel benutzt Türk Linien, Flächen und Würfel. Die schriftlichen Aufgaben werden mit Hilfe der Proportionen und des Reesischen Ansatzes berechnet.

P. F. Th. Kawerau, ein Schüler Pestalozzis in Ifferten, Oberlehrer am Bunzlauer Schullehrerseminar, Seminardirektor in Zenkau und Königsberg, später Regierungs- und Schulrat in Cöslin († 1844), verfafste einen »Leitfaden für den Unterricht im Rechnen nach Pestalozzischen Grundsätzen« (Bunzlau 1818), den er seinem Lehrer, Herrn Heinrich Pestalozzi, widmete. Dieser Seminarlehrer wollte seinen Zöglingen ein Buch an die Hand geben, welches ihnen einen zuverlässigen und erprobten Stufengang mit richtigen Aufgaben und Ausrechnungen bietet, um sie in der Schulpraxis vor Mifsgriffen zu bewahren. Kawerau zeigt sich als ein getreuer Schüler seines Lehrmeisters. Das Rechnen ist ihm praktische Logik und ein vorzügliches Bildungsmittel des Verstandes. Nicht blofs Aufgaben seien zu lösen, sondern auch die Zahlengesetze zum Bewufstsein zu bringen. Auch den Tabellenapparat Pestalozzis führt Kawerau wieder ein und erweitert denselben nach dem Vorgange Busses durch eine Punkttabelle. Kopf- und Zifferrechnen, sowie das Rechnen mit unbenannten und angewandten Zahlen sind noch getrennt, die Zehnerrechnung kommt nicht völlig zu ihrem Rechte, die Form der Darlegung ist weniger elementar als wissenschaftlich. Das Buch unterscheidet sich aber wesentlich von den Elementarbüchern. Es behandelt nicht blofs ein Bruchstück des Rechnens, sondern sämtliche Übungen des Elementarunterrichts und geht über das Bedürfnis der einfachen Volksschule hinaus. Innerhalb der ersten Dekaden werden (anscheinend nach dem von Tillich gegebenen Muster) das Addieren, Subtrahieren und Vergleichen geübt, z. B.: $2 = 2$, $3 = 3$; $6 < 7$, $7 > 6$; 4 ist um 3 mehr als 1, geschrieben: $4 \overset{3}{>} 1$; der Unterschied zwischen 8 und 3 ist 5, geschrieben $8 \div 3 = 5$. Hieran schliefst sich das Zerfällen der Zahlen in mehrere Elemente, z. B.: $6 = 4 + 1 + 1 = 3 + 2 + 1$. Die Umkehrung dieser Übungen ist nicht vergessen, wodurch die Aufgaben algebraische Formen annehmen, z. B.: Zu welcher Zahl mufs ich 4 setzen, um 9 zu bekommen? Von welcher Zahl mufs ich 5 nehmen, um 3 zu erhalten? Auch an Zusammensetzungen aus diesen Übungsformen fehlt es nicht, z. B.: Um wie viel sind 7 und 5 mehr als 9? $8 + 5 \overset{3}{>} 10$; $8 \div 5 + 4 = 7$; $11 \div (8 \div 5) = 8$; $8 \div 3 + 11 \div 5 = 11$; $(12 \div 4) \div (9 \div 6) = 5$ etc.

In gleicher Ausführlichkeit sind die Verhältnisse und Proportionen durchgegangen. Das Rechnen findet seine Anwendung im Resolvieren und Reduzieren, in Umrechnungen von Maſs, Gewicht, Raum, Wert, Zeit, Kraft, in der Diskonto-, Agio-, Zins-, Gesellschafts- und Mischungsrechnung. Als schriftliche Ansätze dienen die Proportionen und der Kettensatz. — Mit Kawerau schlieſst die Reihe der unmittelbaren Pestalozzianer und zugleich derjenigen Schulmänner, welche die strengere Pestalozzische Schule repräsentieren, ihren Formalismus vertraten und die Methode Pestalozzis auch in Äuſserlichkeiten festhielten. Als eine selbständig forschende, originale Persönlichkeit erscheint in ihrer Reihe Tillich, welcher sie alle an gründlicher, scharfer und wissenschaftlicher Auffassung unseres Gegenstandes überragt.

Die realistische Richtung.

Von nun an tritt eine entschiedene Reaktion ein, nicht gegen den Geist und das Prinzip der Pestalozzischen Methode, sondern gegen ihr einseitiges Ziel und das unzweckmäſsige Lehrverfahren.

Diese Wendung macht sich bemerklich in dem »Lehrbuche der Arithmetik für Schüler zum Selbstunterrichte von Ferd. Ch. Hoffmann«, Pfarrer in Weilimdorf bei Stuttgart (1815).

Hoffmann war ein gründlicher Kenner der Pestalozzischen Lehrweise und zugleich ein recht tüchtiger Mathematiker. Er verläſst den einseitig formalen Standpunkt Pestalozzis; denn das Rechnen soll nicht bloſs Denkübung sein, sondern auch etwas Brauchbares für das Leben erzielen. Hoffmann behandelt den Rechenunterricht im wesentlichen nach seinem dermaligen Umfange, er beschränkt den Gebrauch der Veranschaulichungsmittel und läſst dem mündlichen Rechnen das Zifferrechnen in gründlicher Auseinandersetzung folgen. Als schriftliche Lösungsformen wählt er die Schluſsrechnung, die Proportionen und den Reesischen Ansatz — ein Beweis, daſs der Einfluſs der alten Schule noch nicht gebrochen ist.

Der Direktor des Weiſsenfelser Schullehrerseminars, Dr. Wilhelm Harnisch, nimmt, obgleich von den Pestalozzischen Ideen begeistert, in dem von ihm verfaſsten Leitfaden zum Rechenunterricht (1814) gleichfalls eine stark reaktionäre Haltung ein.

Er verlangt zwar, dafs das Rechnen im Dienste der Geistesbildung verwendet werde, fordert aber ebenso bestimmt, dafs der Rechenunterricht Geschicklichkeit und Fertigkeit im Rechnen des bürgerlichen Lebens vermittle. Auch seine übrigen Forderungen stimmen mehr mit denen Overbergs überein, z. B.: Die Anschauungsmittel, welche für den ersten Unterricht unentbehrlich sind, müssen später zurücktreten. Gewisse Stoffe des Rechenunterrichts, die einfachen Divisions- und Bruchverhältnisse, die Reduktionszahlen, das Einmaleins müssen dem Gedächtnisse zuverlässig eingeprägt werden. Tafel- und Kopfrechnen sind in gegenseitiger Verbindung zu lehren. Die Brüche sollen möglichst früh auftreten, und alle Spielereien sind in ihrer Behandlung zu vermeiden. Der Stufengang im Rechnen hat sich nach der Zehnerordnung zu richten. Reines und angewandtes Rechnen dürfen nicht getrennt werden. Im Ausmafse des Stoffes ist die Leistungsfähigkeit der Volksschule zu berücksichtigen. Harnisch stand auf den Schultern Tillichs, denn er selbst sagt, dafs er schon als Student mit Tillichs Rechenbuch bekannt geworden sei.

Von Harnisch angeregt, traten Mücke und Scholz als Rechenmethodiker auf. Auch Scholz hat nach Diesterwegs Meinung in der »Fafslichen Anweisung zum Kopf- und Zifferrechnen« (1824) dem guten Alten eine zu weit gehende Berücksichtigung angedeihen lassen.

Einen ähnlichen Standpunkt wie die letztgenannten Schulmänner nehmen die bayerischen Kreisschulräte Dr. Heinrich Stephani und Dr. Graser ein. Der Kirchen- und Schulrat Stephani schrieb eine »Ausführliche Anweisung zum Rechenunterricht in Volksschulen nach der bildenden Methode«, in 3 Kursen (Nürnberg 1815—1817). Das Buch ist dem Kanzler Dr. Niemeyer in Halle und dem Hofrat Gutsmuths zu Schnepfenthal als Beförderern der Lautmethode gewidmet. In selbstbewufster Weise wendet sich Stephani an die edlen Männer der deutschen Nation, denen er die freundliche Aufnahme seiner (?) Lesemethode verdankt, mit der Bitte, seine Rechenmethode mit gleichem Zutrauen zu empfangen, da sie von demselben höchsten Prinzip der Unterrichtskunst ausgeht und ihres Stoffes wegen für Befähigung der menschlichen Selbstkraft mehr noch als jene frühere Methode des Lesens leisten wird. Stephani erachtet das Rechnen gleichfalls als das wichtigste und beste Mittel zur Ausbildung der Denkkraft; aber es ist nach seiner Anschauung kein Gegenstand schlechter behandelt als der Rechenunterricht. Man hat ihn zu einer toten Gedächtnisübung herabgewürdigt, oder revolutionsmäfsig das Alte über den Haufen geworfen und ein neues Unterrichtssystem geschaffen, das, viel zu gelehrt für Volksschulen, nur ein gesteigerter Mechanismus ist. Nach den Vorarbeiten so vieler Jahrhunderte sei es eine Thorheit, neues aufstellen zu wollen; wir können nur das Vorhandene verbessern und vollenden. Stephani gilt als höchstes Prinzip der Unterrichtskunst: Behandle jeden Lehrgegenstand als einen Stoff, an welchem sich die Kräfte deiner Schüler selbstthätig für den Zweck ihres Daseins entwickeln müssen. Darum gibt es für seine Rechenschüler noch keine Rechenkunst, sondern sie müssen solche selbst auf gleiche Weise finden, wie sie vor uns vom menschlichen Geiste gefunden wurde. Zugleich will er den Lehrern Mittel an die Hand geben, sich dessen, was sie zu leisten haben, deutlich bewufst zu werden. Endlich bemerkt Stephani, dafs er das Ponderieren (die Zerlegung der Zahlen in Summanden und Faktoren) als eigene Spezies eingeführt und das Rechnen richtiger abgestuft habe. Der erste Kursus enthält das Zahlrechnen. Hier läfst Stephani dem Addieren das Multiplizieren und dann dem Subtrahieren das Dividieren folgen; denn es sei leichter, dieselbe Operationsweise mit einer geringen Veränderung vorzunehmen, als dazwischen zu einer andern überzuspringen. (Stephani bedenkt nicht die grofse gedächtnismäfsige Arbeit, welche das Merken der Einmaleinsprodukte erfordert.) Beim Zählen macht Stephani darauf aufmerksam, dafs die Kinder nicht in der gewöhnlichen Weise von Finger zu Finger übergehen dürfen, sondern dafs sie zum ersten Finger den zweiten hinzufügen müssen; erst diese durch die Vereinigung der zwei Einheiten entstandene Gröfse dürfen sie zwei nennen. Der Konstruktion oder dem Erbauen der Zahlreihe mufs die Destruktion oder das Zerlegen derselben sich anschliefsen. Auch bei Erbauung der 2. Zahlordnung bedient sich Stephani der Finger, indem hier 10 Schüler zusammenhelfen. Der Überblick der Ordnung 10, 20, 30 . . . 100 geht dem Einzelzählen 11, 12, 13 . . . voraus. Nach einem Ausblick auf die unendliche Zahlreihe kehrt Stephani wieder zum Endpunkte des 1. Zehners zurück, d. i. zur

Übung 1 + 10, 2 + 10 etc. Dann folgen die geraden und ungeraden Zahlen, das Zerlegen der Zahlen von 1—100 in höchstens 3 Elemente. Die Übung 1 + 0, 2 + 0 etc. kommt nicht vor, weil die Null nur beim Schreiben ein Zeichen der fehlenden Zahl ist. »Wenn wir die Kinder fragen wollten, wie viel ist Eins und Keins, würden sie das für Spaſs halten.« Den Zählübungen folgt das Addieren mit Zahlen der ersten Ordnung in Reihen: 1 + 3 = 4; + 3 = 7 etc. Die Schüler sollen auf die Frage nur das Fazit der Reihenglieder sprechen: 4, 7 etc. Beim Übergange zur 2. Ordnung sollen die Zahlen zerlegt werden: 6 + 8 = ? 6 + 4 = 10; 10 + 4 = 14. »Durch Reihenübungen wird eine vollendete Fertigkeit erzeugt, welche einem Lauffeuer gleicht.« (Sehr gut!) Das Multiplizieren ist aus der Addition zu entwickeln. Das Einmaleins soll nicht auswendig gelernt werden. Auch das groſse Einmaleins ist zu üben. Beim Subtrahieren wird derselbe Stufengang wie bei der Addition eingehalten. Der Division gehen Vorübungen mit verschiedenen Divisionsfragen voraus: Suche die Hälfte von 6! Teile 20 in 4 gleiche Teile! Welche Zahl ist die Hälfte von 32? In welcher Zahl ist 4 zweimal enthalten? etc.

Beim Bruchrechnen benutzt Stephani als Veranschaulichungsmittel die gerade Linie oder Pestalozzis Quadrattafel. Die Schwierigkeit beim Bruchrechnen liegt in der Zusammenfassung des Ungleichartigen, d. i. im Gleichnamigmachen. Die Vorübungen zur Bruchrechnung sollen an benannten Zahlen vorgenommen werden. — Der II. Kursus beschäftigt sich mit dem Stellvertreter der Zahl, der Ziffer, »um die Herrschaft der Zahl im innern Reiche der Anschauung fester zu gründen und ihr Gebiet durch Herbeiziehung gröſserer Zahlen und schwierigerer Aufgaben zu erweitern«. Der Stufengang reproduziert hier im wesentlichen die Übungen des I. Teils. Dem Zahlenschreiben gehe eine Wiederholung über die Bauordnung der Zahlreihe voraus. Das Decimalsystem ist durch ein Schema zu versinnlichen. Höhere Zahlen werden durch Rechnung erklärt, z. B.: Eine Billion Pfennig, nebeneinander gelegt, umfassen 300000 Meilen oder 60 mal den Erdumkreis. Um eine Billion Gulden einzeln zu zählen, braucht man 1056 Jahre, wenn 6 Stück in einer Sekunde gezählt werden. Wenn die ganze Erde aus Ackerland bestünde und durchaus mit Gerste besät würde, könnte sie in einem Jahre doch keine Trillion Gerstenkörner tragen. Auch beim schriftlichen Rechnen geht die Multiplikation der Subtraktion voraus. Die Multiplikation gibt erst das längere Verfahren (a), dann das abgekürzte (b) und den Beweis durch Addition (c).

$$
\text{a)}\quad \begin{array}{r} 456 \\ 3 \\ \hline 18 \\ 15 \\ 12 \\ \hline 1368 \end{array}
\qquad
\text{b)}\quad \begin{array}{r} 456 \\ 3 \\ \hline 1368 \end{array}
\qquad
\text{c)}\quad \begin{array}{r} 456 \\ 456 \\ 456 \\ \hline 1368 \end{array}
$$

Die Neunerprobe wird als Mechanismus verworfen. Beim Subtrahieren läſst Stephani nach Rieses Weise immer erst vom entlehnten Zehner abziehen und dann die rechtsstehenden Einer zur Differenz addieren. Der schriftliche Multiplikations- und Divisionsmodus bewegt sich in den dermals gebräuchlichen Formen. — Der III. *Kursus* enthält das bürgerliche oder angewandte Rechnen. Die welsche Praxis und die Schluſsrechnung finden hier ausgedehnte Berücksichtigung. Letztere ist noch mit den Proportionen verquickt. »Man unterscheidet einen Haupt- und einen Schluſssatz. Der Mittelsatz wird nur gedacht. Jeder Satz enthält 2 Glieder. Wie sich das erste zum zweiten verhält, so verhält sich das dritte zum unbekannten vierten.« Das Beispiel: Eine Köchin erhielt jährlich 39 fl. Lohn, wie viel hat sie bei ihrer Entlassung nach 17 Wochen zu fordern? wird so angesetzt: $52 : 39\ (^3/_4 \times 17) =$ etc. Das Beispiel 1600 fl. tragen in 6 Jahren 384 fl.; w. v. 100 fl. in 1 Jahr? wird wie folgt berechnet. Abkürzung: $1600 : 100 = 16 : 1$;

$$16 \times 6 = 96 : 384 = 1\,?$$
$$96 : 384 = \tfrac{384}{96} = 4 \text{ fl.}$$

Der Reesische Ansatz sollte von Bildungsstätten ausgeschlossen werden; er eignet sich nur für Kaufleute. Stephani gebraucht manche neue Termini. Er redet von Teilganzen und Teilzahlen, »denn diese Ausdrücke sind viel verständlicher und erinnern nicht an einen Leibesschaden. Wollen wir künftig die Behandlung der Brüche den Chirurgen überlassen.« Er spricht von *genannten* und *ungenannten* Zahlen, vom *Zahlen-* und *Zifferrechnen*;

die Null heifst er Keiner. — Stephanis Anweisung erreicht Tillichs Arithmetik an mathematischem Gehalt und Schärfe des Denkens nicht. Diese ist ihm bekannt, denn er gedenkt »des zu früh Entschlafenen«. Stephani berücksichtigt aber die thatsächlichen Verhältnisse seiner Schulen und die Bedürfnisse des bürgerlichen Lebens. Er fafst das Rechnen als einen Teil des Elementarunterrichts auf, das über den Rahmen der möglichen Stundenzahl nicht hinaustreten dürfe, zugleich aber auch die anderen Unterrichtsgegenstände berücksichtigen müsse. Deshalb ist Stephanis Anweisung weniger originell als praktisch brauchbar; namentlich ist der dritte Teil eine wahre Fundgrube zweckmäfsiger angewandter Aufgaben, insbesondere aus der Geographie und Geschichte. Die Behandlungsweise des Ganzen kennzeichnet den praktischen Schulmann, welcher zu einer erfolgreichen Schularbeit die Hand bietet. Hiernach erscheint das anderwärts über Stephanis Arbeit gefällte ungünstige Urteil mindestens als zu hart.

Weit schärfer und nachhaltiger als Stephani, welcher mit einem Fufse noch auf Schweizer Boden stand, betonte sein bayerischer Kollege Dr. Graser die Bildung des Kindes fürs Leben. Die von Graser ausgehende, den Pestalozzischen Formalismus bekämpfende Gegenwirkung war deshalb so mächtig, weil dieser hochgebildete Philosoph (von dem bekanntlich der gefeierte Professor und Schulmann Tuiskon Ziller viel gelernt hat) an Wissen, Klarheit des Urteils und gewandter Diktion den Empiriker Pestalozzi weit überragte. Schon die drei Bildungszentren, Natur, Mensch und Gott, welche er den Pestalozzischen Elementarmitteln, Zahl, Form und Sprache, gegenüberstellt, lassen die höheren Gesichtspunkte Grasers erkennen. Graser hat kein Rechenbuch geschrieben; aber er stellt eigenartige Prinzipien auf, wie für den Unterricht überhaupt, so auch für das Lehrverfahren im Rechnen: Aller Unterricht mufs vom Leben aus und auf dasselbe zurückgehen. Die ganze Lebenskenntnis mufs der Mensch aus und durch sich selbst erhalten. Der Unterricht gleicht nach dieser Methode einer Wanderung, auf welcher der Schüler alles, was sich ihm im Leben darbietet, betrachtet und kennen lernt. Im Gegensatze zu Pestalozzi weist Graser energisch darauf hin, dafs die Aneignung von Namen, Zahlen und Formen wohl ein Wissen erzeuge, dafs aber nur die

Auffassung der Dinge in ihren vielgestaltigen Verhältnissen zum Leben wahrhaft bildend sei, und dafs jedenfalls die Kenntnis des Inhaltes der Auffassung von Formen vorangehen müsse.

Über den Rechenunterricht selbst schreibt Dr. Graser in der »Elementarschule fürs Leben«, 1817, S. 347, folgendes: Nach dem allgemeinen Grundsatze des Lebensunterrichts mufs das Rechnen auch für das Leben gelehrt werden. Eine blofse formale Übung des Denkvermögens ist von bedeutendem, eine blofse formale Übung im Rechnen ist für die Elementarschüler von sehr geringem Nutzen. Der Beweis liegt schon in der Erfahrung. Kinder, welche im Rechnen (mit unbenannten Zahlen nach Pestalozzischer Weise) die fertigsten Rechenmeister geworden sind, finden sich bei etwas verwickelten Aufgaben in den herkömmlichen Lebensverhältnissen in Verlegenheit, und ihre Freiheit tritt erst dann wieder hervor, wenn ihnen die anwendbaren Rechenformen vorgezeichnet und angedeutet werden. Ja, solche Rechenmeister dürfen blofs ein Jahr aufser Übung sein, und sie vermögen nicht mehr ein schweres Problem zu lösen, wenn es auch innerhalb des blofsen Mechanismus aufgegeben wird.

Durch fortgesetzte Übung kann man schon bei Kindern eine wunderbare Fertigkeit erzielen; der oberflächliche Beobachter staunt, wenn er solche mathematische Wunder sieht; allein der tiefer Denkende kann nur trauern über die Vergeudung der jugendlichen Kräfte und der Zeit, wenn man die Kinder in mathematischen Formen übt, wo bald die Hälfte, ein Drittel einer Zahl zugesetzt, bald wieder $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ weggenommen wird. Aber eben hier ist es vorzüglich, wo der Lehrer sich mit der Freude täuscht, den Verstand zu üben.... Zwar mufs das Rechnen mit dem Zusammensetzen der Einheiten begonnen werden, aber die Übung ist stets an einem Stoffe im Leben vorzunehmen oder auf dieses zu beziehen, und der Stoff ist auf dem Gesamtgebiete des Unterrichts aufzusuchen. Bohnen, Marken, Striche sind unnütze Mittel des ersten Unterrichts (wird hier zum ersten Male behauptet). Das Kopfrechnen ist bildender als das Tafelrechnen. Man mufs das Kind alsbald von der äufseren Anschauung abkehren und dafür sorgen, dafs diese durch die innere Anschauung ersetzt werde. Das Schriftrechnen hat erst dann einzutreten, wenn mit Operationen in gröfseren Zahlen das Bedürfnis zum Schreiben sich geltend macht. Eine Konsequenz des Graserschen Lebensunterrichts ist die Verbindung des Rechnens mit dem ersten Sach- und Sprachunterrichte. Graser machte das Wohnhaus zur Grundlage seines Unterrichts. An dem Modell desselben sollen die Kinder auch die ersten Zahlbegriffe gewinnen. Um das bestimmte und feste Zählen von 1—10 zu erlernen, werden die Linien an der Zeichnung des Hauses gezählt. Dem Schüler mufs auch durch ein passendes Symbol anschaulich gemacht werden, dafs eine Gesamtheit wieder ein Ganzes bilde, z. B.: 2 einen Zweier, 3 einen Dreier, 10 einen Zehner. Dadurch nähert sich Graser dem Standpunkte Tillichs. Als Kollektiveinheit, welche 10 Einer umfafst, wählte Graser konsequenterweise das Fenster. »Nichts ist gleichartiger«, bemerkt er in der Elementarschule, »als eine Fensterscheibe von gleichem Glase und gleicher Gröfse, als ihre Vielheit, durch Zwischenräume abgeteilt, und nichts anschaulicher, als das Gebundene der gleichartigen Vielen, z. B. das Zwei durch das Paar Scheiben links und rechts, das Drei in der einen Seite des unteren Flügels, das Vier in dem ganzen oberen Flügel, das Fünf an der ganzen einen Seite, das Sechs an dem ganzen unteren Flügel u. s. w.« Das Gesuchte dieser Veranschaulichung liegt auf der Hand; denn gewöhnlich hat ein Fenster nicht 10, sondern nur 6 Scheiben; wird es mit 10 Scheiben gezeichnet, teilt diese Zeichnung die Mängel der stereotypen Tabellen. Überhaupt hat das Rechnen bis jetzt den Versuchen, es einer falsch verstandenen Konzentration zu beugen, mit Erfolg widerstanden, und selbst den eifrigsten Schülern Herbarts ist die Verwirklichung dieser Lieblingsidee bis auf den heutigen Tag nicht gelungen.

Um den Umschwung der Ansichten vollends zu zeichnen, lassen wir noch Dr. Eisenloher sprechen: Eins ist und bleibt mir auch auf dem Gebiete des Rechenunterrichts gewifs: Die Zeit der formalen, abstrakten Methode ist vorüber, und die Herrschaft der praktischen Lebensbedürfnisse beginnt. Die erlangte Rechenfertigkeit geht nicht so, wie es sein sollte, ins Leben über. Bei allem Kraftaufwande für Gewinnung eines Resultats bleiben wir unmittelbar vor dem Ziele stehen und werden der Früchte unserer Arbeit verlustig. Das Kind lernt wohl rechnen, aber das Volk rechnet nicht, weil das Kind das gelernte Rechnen abstreift, wenn es die Schulbank verläfst. Gewifs trägt daran die Schule ihre Schuld durch die einseitige Richtung und den unrichtigen Betrieb des Rechenunterrichts selbst. Die Mängel desselben bestehen darin, dafs wir unsere Kinder wohl rechnen, aber nicht berechnen lehren. (Ist wohl auch zu viel verlangt.)

Fortschritte aufserhalb der Pestalozzischen Schule.

Während auf der einen Seite in beschränktem Kreise der durch Pestalozzi angeregte Gegensatz zwischen Formalismus und Realismus einen Ausgleich suchte, vollzog sich aut der breiten Heerstrasse der andern Seite gleichfalls ein Kampf gegen die alte Lehrweise. welche in den Pescheckschen Rechenbüchern noch immer ihre vorzüglichsten Vertreter hatte. Merkwürdigerweise hat man bis auf den heutigen Tag die grofse Zahl jener Rechenmethodiker übersehen, welche im Sinne Rochows und Overbergs weiter arbeiteten und dadurch viel früher zu einem erspriefslichen Rechenunterrichte gelangten, als die Pestalozzianer und ihre Antipoden. Ein typisches Beispiel gibt das »Theoretisch-praktische Hand- und Methodenbuch für Volks-SchulLehrer im KönigReiche Baiern von Pfarrer Bartholomäus Bacher zu Ruhpolding im SalzachKreise«. Es erschien in 1. Auflage i. J. 1806 im K. Zentral-Schulbücherverlage zu München, in 2. Auflage i. J. 1814. Seinen Standpunkt zur Pestalozzischen Methode kennzeichnet der Verfasser in der Vorrede zu der 2. Auflage wie folgt: »Denen, welche es an diesem Buche etwa tadelnswert finden möchten, dafs ich in dasselbe nichts von der in den neuesten Zeiten bekannt gewordenen Pestalozzischen Lehrmethode aufgenommen habe, diene zur Antwort: Ich hielt dies für unnötig, weil dieselbe zu vieles Eigentümliche an sich hat, als dafs ich etwas allgemein Belehrendes und für unsere Volksschulen Anwendbares darüber hätte sagen können.« Dieses Buch war zu Beginn des gegenwärtigen Jahrhunderts in allen bayerischen Schulen zu Hause, und ist geeignet, den Stand und Betrieb des Rechenunterrichts in weiten Kreisen Süddeutschlands in den ersten Dezennien unseres Säculums zu schildern. Wir gehen daher auf seinen Inhalt näher ein. »Das Rechnen ist eine für jeden Menschen aus jedem Stande und von jedem Geschlechte sehr wichtige und nötige Sache und von einem so unverkennbar grofsen Nutzen, dafs man es mit Recht auch in den gemeinen Volksschulen zu den Hauptgegenständen des Unterrichts zählt und unter die Übungen setzt, woran alle teilnehmen sollen. Es gehört schon deswegen unter die nützlichsten Beschäftigungen, weil es die Geisteskräfte in eine sehr heilsame Thätigkeit versetzt. Es dienet nicht allein dazu, das Gedächtnis zu üben und zu stärken; noch weit mehr wird dabei der Verstand beschäftigt, und das Nachdenken geschärft. Es ist aber auch an sich Bedürfnis für jeden. Im häuslichen und bürgerlichen Leben wird täglich gemessen, gewogen, gezählt und überschlagen, oder, mit einem Worte, gerechnet. Der Bauer mufs rechnen, wenn er einkauft, wenn er verkauft, wenn er seine Abgaben bezahlt, zur Zeit der Saat und der Ernte. Der Handwerksmann berechnet den Betrag der Materialien, die er verarbeiten will, die Art und Weise, den Wert seiner Arbeit und den Preis seiner Waren. Bei dem Kaufmanne ist das Rechnen gleichsam die Seele seines Geschäfts. Jede ordentliche Haushaltung mufs aber über Einnahme und Ausgabe Rechnung führen; die Hausfrau und selbst das Dienstmädchen mufs täglich rechnen. (Diese Sätze sind nachmals fast wörtlich in Kehrs Methodik der Volksschule übergegangen.) Mehrere Wissenschaften setzen die Rechenkunst voraus und können ohne sie gar nicht erlernt werden.

So wichtig aber auch die Rechenkunst ist, so grofs ist der Umfang derselben, und der Mensch kann es sehr weit darin bringen. Allein die Kinder in den Volksschulen brauchen keine grofse und gelehrte Rechenkunst zu lernen. Denn ihr Beruf ist es nicht, grofse Rechnungsführer zu werden, die sich mit dieser Kunst ihr Brot verdienen müssen; sondern sie werden meistens Bürger, Handwerker, Bauern, Taglöhner u. dgl., und als solche bedürfen sie von derselben nicht mehr, als nötig ist, um ihre Einnahmen und Ausgaben berechnen, in Ordnung bringen und sich im täglichen Leben behelfen zu können. Es wird daher genug sein, wenn Kinder in Volksschulen 1. mit den vier sog. kleinen Rechnungsarten, 2. mit der Behandlung der Brüche, und 3. mit der Regeldetri bekannt gemacht werden. Wenn sie dieses Wenige gründlich lernen, so wird es ihnen mit der Zeit ein Leichtes sein, in dieser Kunst weiter zu kommen.«

In dieser Einleitung ist die Bedeutung, Stellung und der Umfang des Rechenunterrichts in heute noch gültiger Weise bestimmt; nur das Lehrziel ist einer redaktionellen Änderung bedürftig, die sich aus den weiteren Darlegungen von selbst ergibt. Im I. Kapitel, Allgemeine Erinnerungen, stellt Bacher folgende Sätze auf: Man halte die Kinder, wenn man sie zum Rechnen anführen will, nicht mit der Erklärung der Rechenkunst, mit den Einteilungen und Erklärungen der verschiedenen Zahlen und Rechnungsarten auf; sondern fange gleich mit der Übung an, d. h. man lehre sie zählen, die Zahlen aussprechen, zusammenzählen u. s. f. (cfr. Overberg). Man vermeide anfangs alle langen und grofsen Beispiele. Kinder werden selten etwas zu berechnen haben, was über die Tausende kommt. Beim schriftlichen Rechnen schreibe man den Kindern das Beispiel nicht vor, sondern sage ihnen die Aufgabe mündlich und lasse sie dieselbe selbst aufschreiben, damit man sieht, ob sie die Sache verstehen und nicht blofs mechanisch arbeiten. Man lasse die Kinder über die Lösung eines Beispiels nachsinnen; vielleicht verfallen sie selbst auf die eine oder die andere Weise. Geschieht dies, so lasse man sie das Beispiel auf die erfundene Art machen und zeige ihnen hernach, wie sie es leichter machen können. (Selbsterfindung des Normalverfahrens.) Man sei nicht zufrieden, dafs sie die Art und Weise kennen, wie etwas zu machen ist, sondern man suche sie auch dahin zu bringen, dafs sie den Grund einsehen. Die aufgegebenen Beispiele sind am besten wirkliche oder mögliche Fälle. Man wähle daher immer solche Aufgaben, welche aus dem Gesichts- und Erfahrungskreise der Kinder genommen sind und Bezug auf jene Verhältnisse haben, worin die Kinder einst werden Gebrauch machen können. Man gehe von einer Rechnungsart nicht eher zur andern über, als bis sie völlig verstanden ist. In keiner Wissenschaft gründen sich die nachfolgenden Regeln so sehr auf die vorhergehenden wie im Rechnen. Man übe die Kinder nicht immer in blofsen unbenannten, sondern meistenteils auf einen sinnlichen Gegenstand angewandten Zahlen, z. B. lasse man es Birnen, Äpfel, Nüsse, Pferde, Schafe etc. sein, was sie berechnen sollen. Man mache die Kinder auch mit dem gewöhnlichen Preise der Dinge bekannt und vergesse nicht, ihnen das beizubringen, was billig jeder gebildete Mensch von Mafs, Gewicht, Geld und Einteilung der Zeit wissen soll. Das Rechnen aus dem Kopfe werde selbst auch bei dem Rechnen mit Ziffern noch immer fortgesetzt. Man bringe daher auch in die Aufgaben eine gewisse Stufenfolge. Bei der Durchsicht der auf der Schiefertafel ausgerechneten Aufgaben begnüge sich der Lehrer nicht, blofs zu sagen, dafs sie richtig oder unrichtig seien; sondern man lasse sich oft die gewählte Methode zeigen oder die gemachten Fehler selbst entdecken u. s. w.

A. Das Kopfrechnen. Der Anfang des Kopf- oder mündlichen Rechnens ist das Zählen oder die Zahlenkenntnis.

I. Zählen. Man lehre die Kinder die Zahlen von Eins bis Zehn als bestimmte Mengen von Einheiten auffassen und jede dieser bestimmten Mengen von Einheiten mit dem bestimmten Zahlennamen bezeichnen. Die Kinder können zwar meistens, wenn sie zur Schule kommen, schon von 1—20 oder noch weiter mechanisch zählen, aber seltener ist es, dafs sie mit jeder Zahl einen bestimmten Zahlenbegriff verbinden. Sie sprechen z. B. 8 und denken ebensowenig dabei als der Blindgeborne von einer noch nie gesehenen Figur. Das erste Ziel, wohin der Lehrer in unseren Schulen zu streben hat, sei also, diese Zahlenbegriffe in dem Kinde zu beleben und bestimmter zu machen. Dazu kann er sich der Finger oder der Striche an der Wandtafel als sehr zweckmäfsiger Hilfsmittel bedienen. Z. B.: Der Lehrer hebt einen Finger und sagt: ein Finger, er hebt einen zweiten auf und sagt: ein Finger, so macht er es mit dem dritten, vierten, fünften bis zehnten Finger etc. Daraus sollen die Kinder den Begriff Einheit auffassen lernen. Indem der Lehrer einen Finger wieder aufhebt und von den Kindern wieder sagen läfst: ein Finger, hebt er den zweiten dicht neben den ersten und fährt fort: ein Finger und noch ein Finger sind zwei Finger etc. Auf gleiche Weise läfst er die Kinder etwa die Buchstaben an der Tafel, die Knöpfe an ihren Kleidern, die Kinder, die in einer Bank sitzen, die Scheiben an den Fenstern, die Blätter eines Buches zählen. Ebenso mache er Striche an die Gestelltafel, die er bald bis 30 vermehrt oder vermindert und immer wieder von den Kindern nachzählen läfst. — Haben die Kinder die Zahlen von 1—30 zur Fertigkeit gebracht, so werden ihnen nach und nach die sinnlichen Gegenstände aus den Augen gerückt. Die Schüler werden nun angehalten, ganz auswendig zu zählen, indem man sie 1, 2, 3, 4 etc. zählen läfst, wobei man sich nur in Anstandsfällen auf die Gegenstände der ersten Übung beruft. Dann fahre man fort, ebenso langsam von 10—20 aufwärts zu zählen, erklärt aber hier schon, dafs wir eigentlich nicht weiter als bis zehn zählen können, und dafs man also nach jeder Zehn immer wieder von vorne bei 1 anfange und nur den genannten Zehner dazu zähle. Somit sei 11 so viel als 10 und 1. Sobald man im Zählen bis 20 gekommen, so zeigt man dem Kinde, dafs das Wörtlein Zig nun die Stelle der Zehner bedeute und so viel als 10mal 1 heifse. Weil man aber bis dahin zwei Zehner gezählt habe, so sage man nun zwei-zig oder zwanzig. — Zählen die Kinder mit dem richtigen Ausdrucke und ohne Anstofs auswendig von 1—100 aufwärts, dann fängt man an, sie auch im Rückwärtszählen zu üben. Das Kind sagt: 1, 2, 3, 4, 5 . . ., dann kehrt es um: 5, 4, 3, 2, 1; dann 1, 2, 3 . . . 10; dann rückwärts: 10, 9 . . . 1; 11, 12 . . . 20; 20, 19 . . . 11. Man übe nur eine Dekade in einer Stunde. Es geht zwar langsam, aber desto sicherer. — Hierauf zählen die Kinder mit Auslassung aller geraden Zahlen: 1, 3, 5, 7, 9, 11; 11, 9, 7 . . . 1. 11, 13, 15, 17, 19; 19, 17 . . . 11 etc. — Sodann zählen sie mit Auslassung aller ungeraden Zahlen: 2, 4, 6, 8, 10 etc. Nun versucht man es, jede dritte, dann jede vierte, fünfte Zahl etc. auf- und rückwärts zählen zu lassen u. s. w.

II. Addieren im Kopfe. Die Kinder werden im Zusammenzählen einfacher oder einteiliger Zahlen geübt. Die Versuche werden wieder an den Händen gemacht. Um zur Fertigkeit zu gelangen, mufs das Eins und Eins mit den Kindern auf anschauliche Weise öfters vorgenommen werden. Dabei wird z. B. gefragt: Welche Zahl gibt soviel als 3 und 4 zusammen? Welche Paare von Zahlen geben 12? Hierauf folgt das Zusammenzählen zweiteiliger Zahlen: $10 + 10 = 20$; $10 + 20$; $10 + 11$; $12 + 18$ etc. Daran reihen sich Übungen im Zusammenzählen, bei welchen die Summe auf 100 steigt und darüber: $52 + 51$; $52 + 53$ etc., das Zusammenzählen mehrerer Hunderte, z. B.: $100 + 200$; $300 + 550$ etc. Endlich folgen Übungen mit drei verschiedenen Zahlen: $1 + 2 + 3$; $6 + 9 + 18$ etc. und Rechenvorteile, z. B.: $40 + 50 = 4$ Zehner $+ 5$ Zehner $= 9$ Zehner. $98 + 96 = 100 + 100 - 2 - 4 = 200 - 6 = 194$ etc. $31 + 8 = 30 + 8 + 1$ etc.

III. Subtrahieren im Kopfe. Einfache Zahlen werden von einfachen, zweiteilige von zweiteiligen, dreiteilige von dreiteiligen abgezogen. Erleichterungsmittel: Sind beim Subtrahieren die Zahlen nicht gar zu weit auseinander, so behalte ich die, welche ich abziehen will, und zähle darauf. So viel ich darauf zähle, bleibt mir übrig, z. B.: 66 von 78; 66 und 10 ist 76 und 2 ist 78; bleiben 12. Sind die Zahlen nicht rund, so nehme ich sie in Gedanken für rund an, z. B.: 39 von 84; 40 von $84 = 44$; $44 + 1 = 45$.

IV. Das Multiplizieren im Kopfe. Es ist nichts andres als ein geschwindes und kurzes Addieren mittels des Einmaleins. Wer multiplizieren will, mufs das Einmaleins ganz vollkommen wissen, vorwärts und rückwärts, in und aufser der Reihe. Kinder, welche ein gutes Gedächtnis haben, mögen das grofse Einmaleins auswendig lernen. Es ist aber nicht durchaus notwendig, denn man kann sich auf eine andere Art helfen. Man multipliziert nämlich zuerst die Zehner, dann die Einer und zählt zuletzt beides zusammen, z. B. $8 \times 16 = 8 \times 10 + 8 \times 6$ etc. Auf dieselbe Art kann man jede gröfsere Zahl im Kopfe multiplizieren (soweit das Gedächtnis reicht). Hierauf folgen Rechenvorteile.

V. Dividieren im Kopfe. Durch das Dividieren erfährt man, wie viel gröfsere Portionen in einer Menge gleicher Teile stecken; oder wenn ich die Portionen schon weifs, so erfahre ich, wie stark eine Portion sein mufs. Grundlage ist das Eins in Eins. Läuft die Summe, die geteilt werden soll, in die Hundert oder Tausend, so nehme man portionsweise hinweg, entweder nach Zehnern oder Viertelshundertern, z. B.: 32 Schüler sollen 480 Bogen teilen. Gebt jedem Schüler 10 Bogen, so habt ihr weg 320 etc. Oder, nach einzelnen Haufen: Ihr Schüler stellt euch in 8 gleiche Haufen, allemal 4 beisammen, wie viel bekommt jeder Haufen? 8 in 48 Zehner habe ich 6 Zehner oder 60. Danach teilt euch! Oder mit gleichmäfsiger Verkleinerung: Ich will euch 32 Schüler erst halbieren und das Papier auch. Bleibt bei der Teilung etwas übrig, so zerschneidet oder zerbricht man es in kleinere Teile. So entstehen Brüche. Wenn 4 einen Apfel teilen, so bekömmt jeder ein Viertel, dies wird geschrieben $1/4$. Die obere Zahl heifst der Zähler, die untere der Nenner. Soll ich also in Brüchen zusammenzählen, oder abziehen, oder einteilen, so mufs ich wissen 1. wie viel Bruchteile ein

Ganzes ausmachen, 2. wie viel ich nehmen mufs, um einen Bruch voll zu machen, 3. wie ich zwei Brüche gegeneinander schätzen und gleich machen kann. a) Der Lehrer sagt etwa zum Kinde: Stelle dir vor, du hättest 6 Körbe mit Äpfelschnitzen dastehen. Im ersten Korbe wären die Äpfel in 2 Teile geschnitten, im zweiten Korbe wären aus 1 Apfel 3 Stücke gemacht, im dritten wären sie in 4 Stücke geteilt, im folgenden in 5, dann im sechsten in 8 Teile zerschnitten. Jetzt führe ich dich vor die Körbe hin und sage dir: Nimm aus dem ersten Korbe so viel, als einen ganzen Apfel ausmacht; so mufst du nehmen 2 halbe. Nun mache es mit den übrigen Körben auch so, wie viele Teile wirst du überall nehmen? Da siehst du, dafs $\frac{2}{2}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{4}$ etc. jedesmal einen ganzen Apfel ausmachen. Kurz, wenn der Zähler und Nenner gleich sind, so ist es jedesmal ein Ganzes, z. B. $^{18}/_{18}$ fl. ist ein ganzer Gulden. Ist der Zähler gröfser als der Nenner, so ist es mehr als ein Ganzes, z. B.: $^{9}/_{8}$ Äpfel ist ein ganzer und $^{1}/_{8}$ mehr. Wenn ich z. B. von Fünftelschnitzen 4 herausnehme, wie viele mufs ich noch haben, dafs der Apfel ganz werde? Antwort: noch $^{1}/_{5}$. Wenn ich von Achtelschnitzen 5 herausnehme, so habe ich $^{5}/_{8}$ Äpfel; wieviel mufs ich nehmen, um den Apfel voll zu machen? — Was ist mehr $^{3}/_{4}$ oder $^{3}/_{5}$? Denkt an die Körbe mit den Äpfelschnitzen! Wenn ich aus einem Apfel 5 Teile mache, so werden die Teile kleiner, als wenn ich deren 4 daraus mache, also sind $^{3}/_{4}$ mehr als $^{3}/_{5}$. Kommt ein Bruch von einer Sache vor, die man wägen, messen oder wechseln kann, so zerschneidet man sie nicht wie einen Apfel, sondern mifst oder wechselt sie in so viele kleine Teile, wie man nötig hat. Z. B. 8 Personen teilen 9 Pfund Wolle. Jede Person bekommt 1 Pfund, und das neunte Pfund teilen sie in 8 gleiche Teile, das gibt für jede Person noch $^{1}/_{8}$ Pfund. Wie viele Lot sind das? Das Pfund hat 32 Lot; $^{1}/_{8}$ Pfund ist also der 8. Teil von 32 Lot oder 4 Lot. Es ist nicht schwer, gleichnamige Brüche zusammenzuzählen und von einander abzuziehen. Z. B.: $^{2}/_{7}$ und $^{3}/_{7}$ geben $^{5}/_{7}$; $^{3}/_{4}$ und $^{2}/_{4}$ Ellen machen $^{5}/_{4}$ Ellen. Sind die Brüche nicht gleichnamig, so werden sie gleichnamig gemacht. Man kann leicht im Kopfe gleichnamig machen, z. B. $^{1}/_{4}$ gibt $^{2}/_{8}$, und $^{1}/_{8}$ gibt $^{2}/_{16}$. $^{1}/_{3}$ gibt $^{2}/_{6}$, diese geben $^{4}/_{12}$, diese geben $^{8}/_{24}$ und so umgekehrt. Soll ich also zusammenzählen $^{1}/_{2}$ Elle, $^{1}/_{4}$ Elle, $^{1}/_{8}$ Elle, so mache ich aus $^{1}/_{4}$ und $^{1}/_{2}$ Elle erst lauter Achtel u. s. w.

B. Rechnen mit Ziffern. Die Erlernung des schriftlichen Rechnens ist notwendig; dies mufs jedem einleuchten, der bedenkt, dafs viele Aufgaben von der Art sind, dafs sie nicht anders als in einem weitläufigen Gange aufgelöst werden können, der für das Kopfrechnen, wobei alles vom Gedächtnisse behalten werden mufs, viel zu umfassend und zu schwer ist. Vor allem ist nötig, dafs man, ehe man das eigentliche Rechnen mit Ziffern anfängt, die Kinder im Aussprechen und Anschreiben der Zahlen gehörig übe, und sie besonders mit dem Werte der einzelnen Ziffern recht bekannt mache. Zu dem Ende zeige man ihnen, dafs an der ersten Stelle zur Rechten die Einer, an der zweiten Stelle zur Linken die Zehner, an der dritten Stelle zur Linken die Hunderter etc. stehen müssen. Dabei mache man sie auch aufmerksam auf die Stellen, welche mit Nullen und warum sie damit ausgefüllt werden müssen, sowie auch darauf, dafs ein Einer, den man aus einer Stelle zur Linken in die dabei stehende zur Rechten leihet, in der letzteren zehnmal soviel und warum er soviel bedeutet. Beim Addieren nehme man zuerst Beispiele, ohne sich der Zahl 10 zu bedienen (d. h. einstellige Zahlen), dann Beispiele mit Zehnern und Hundertern, da man noch nicht nötig hat, etwas im Sinne zu behalten (d. h. solche, wobei die Teilsummen nicht über zehn gehen, ein Überzählen also nicht stattfindet); zuletzt folgen Beispiele mit Zahlen von verschiedener Benennung. Den Grund, warum bei dem Untereinanderschreiben der Posten immer Einer, Zehner, Hunderte, Tausende etc. gerade untereinander stehen müssen, hat man sehr anschaulich zu machen. Die kürzeste Probe, welche beim Addieren anzuwenden ist, ist die, wenn man das von unten hinauf zusammengezählte Beispiel nun wieder von oben herunter zählt. Beim Subtrahieren fange man wieder an mit Beispielen ohne zehn; dann gebe man Beispiele mit Zehnern, Hundertern, da noch kein Leihen notwendig ist, und endlich auch Beispiele mit Leihen, in der Folge auch so, dafs es sich über mehrere Nullen erstreckt. Der Grund, warum die Nullen, zu welchen geborgt wird, in Neuner verwandelt werden, mufs den Kindern sehr begreiflich gemacht werden. Beim Multiplizieren fange man ebenfalls wieder mit Beispielen ohne Zehner an, lasse darauf andere folgen, in denen die Zahl, welche multipliziert werden soll, aus mehreren, diejenige, welche multipliziert, nur aus einer Ziffer besteht und da man noch nichts im Sinne behalten darf; dann solche, in denen etwas behalten wird; darauf Beispiele, in denen die Zahl, welche multipliziert, Zehner in sich fafst, dann mit dreien, höchstens vier Ziffern. Haben die Kinder hierin Fertigkeit erlangt, so lasse man wieder Beispiele machen, in denen Zahlen von verschiedener Benennung vorkommen. Beim Dividieren, welches den Kindern immer am meisten zu schaffen macht, suche man darauf zu sehen, dafs es ihnen sehr anschaulich und leicht gemacht werde. Der beste Ansatz ist das sog. Untersichdividieren, weil man dabei einen gemachten Fehler leicht entdecken und weil man nicht im Sinne abzuziehen braucht, sondern jedesmal das Produkt aus der Vervielfältigung des Divisors mit dem Quotienten hingeschrieben wird (eben die Art, wie sie jetzt noch in den Volksschulen üblich ist). »Schliefslich gibt Bacher noch Anweisungen über die Behandlung der Regeldetri und einige Andeutungen über die methodische Behandlung der Bruchlehre. Wir finden in der Methodik des bayerischen Landpfarrers die Grundsätze der Anschaulichkeit, Stufenmäfsigkeit und Gründlichkeit in schlichten Worten ausgedrückt und mit ansehnlichem Geschick praktisch bethätigt. Überall wird das verständige und sichere Lernen, die Berücksichtigung der kindlichen Natur überhaupt und der Altersstufen, die Anregung zur Selbstthätigkeit, nicht minder auch weises Mafshalten im Lehrstoffe betont und das Gelernte auf das bürgerliche Leben bezogen. Methodisch bedeutsam ist die Wahl des Ausgangspunktes, der Gegensatz zwischen Einheit und Mehrheit. Die Rechnungen bewegen sich zuerst in kleinen Zahlbezirken. Der sinnlichen Anschauung folgt die Abstraktion. Mündliches und schriftliches Rechnen werden getrennt behandelt, korrespondieren aber mitsammen: hier Zählen, dort Numerieren etc. Beim Kopfrechnen wird das Zahlenzerlegen angewendet. Die Übung des Zehnersystems als Grundlage aller Rechenkenntnis findet vollste Berücksichtigung. Die Stufenfolge der Übungen entspricht dem Grundsatze vom Leichten zum Schweren — in der That eine Rechenmethode, welche alles Wesentliche des modernen Rechenunterrichts bereits vorgebildet hat, und die sich durch ihre Sicherheit und schlichte Einfachheit von den vielfach überspannten Forderungen und der nicht selten pompösen Schreibart der Pestalozzischen Schule wohlthuend abhebt.

Im Sinne Bachers wirken Windorf, Schellenberg, Prändel, Schön, Weinich u. a.

Windorf, Diakonus zu Saalfeld, bemerkt in der »Anleitung zum praktischen Rechnen für den Gebrauch der Jugend«, Saalfeld und Leipzig 1810: Ich habe mich gewundert, woher es doch komme, dafs man jetzt in Sachen der Methode mit der Zeit fortschreitet, im Rechnen aber bei einer alten Methode bleibt. Man gebe dem Pescheckischen Schüler auf, eine gewisse Summe Geldes in verschiedene Teile zu teilen. Er wird vor der Teilung resolvieren und nach ihr reduzieren. Das natürliche Verfahren, sogleich zu teilen, bleibt ihm verborgen. Man beschäftigt die Kinder mit vielen Millionen, aber nicht mit Zahlen, die das gewöhnliche Leben bringt, so dafs sie sich den Kopf wüste rechnen. Man kann sich beim Vortrag der Elementarkenntnisse nicht oft genug fragen: verstehen mich die Kinder? Haben sie die nötigen Vorbegriffe, die Erfahrung, um das, was ich ihnen jetzt sagen will, daran knüpfen zu können? (Apperception.) Je deutlicher das Kind die Vorkommnisse gefafst hat, je geläufiger sie ihm sind, desto mehr haben Lehrer und Schüler für das Folgende gewonnen. Definitionen machen die Begriffe nicht deutlicher, sie sollen erst gegeben werden, wenn der Abschnitt behandelt ist. (Synthese.) Windorf verlangt, dafs sich der Schüler eine deutliche Vorstellung von Entstehung einer Zahl aus der Einheit verschaffe, und dafs er sich darin übe bis zur Fertigkeit. Er gibt erst nur Aufgaben innerhalb 12, dann läfst er Zehner und Einer, Zehner und Zehner, Zehner und gemischte Zahlen etc. addieren. Solche Aufgaben sollen die Kinder auch aus dem Kopfe rechnen. Bei der Subtraktion bedient er sich des Rieseschen Verfahrens, d. h. er subtrahiert vom entlehnten Zehner und zählt zur Differenz die rechtsstehenden Einer. Bei der Multiplikation redet er den Rechenvorteilen das Wort; denn »wenn alle Exempel über einen Leisten geschlagen werden, bleibt der Verstand in Ruhe.« Der Grund zur Division liegt im Einmaleins, weil $12 = 3 \cdot 4$, so ist auch $\frac{12}{3} = \frac{3 \cdot 4}{3} = 4$. Gegenüber den Proportionen hebt er die Vorteile der Kettenrechnung hervor, deren Ansatz er als Quotienten auffassen läfst. Die Decimalbrüche fehlen; des metrischen Systems wird bei den Mafs- und Gewichtstabellen gedacht.

Schellenbergs »Fleifsiger Rechenschüler« (1810) ist für Kinder von 7—10 Jahren bestimmt. Der Inhalt ist auf 30 Stunden (methodische Einheiten) verteilt. Er umfafst: 1. Zählen und Zahlzeichen. 2. Die Spezies mit unbenannten Zahlen. 3. Die Spezies mit ungleich benannten Zahlen. 4. Die Bruchrechnung: a) die Vorübungen, b) die 4 Spezies. 5. Die Decimalbrüche. 6. Regeldetri. Zu dieser geht er von der Schlufsrechnung: Wenn man sagt 4 lb. kosten 3 Thaler, was kosten 9 lb.? so liegen die drei gegebenen Zahlen vor Augen. Wenn 4 lb. 3 Thaler kosten, so kostet 1 lb. den 4. Teil von 3 Thlr. oder $^3/_4$ Thlr. = 18 Gr. 9 lb. kosten dann 9 × 18 Gr., d. i. 6 Thlr. 18 Gr. Hieraus sieht man zugleich, wie die unbekannte 4. Zahl gefunden wird, nämlich, indem man die mittleren Glieder multipliziert und ihr Produkt durch das erste dividiert. — Bei der Subtraktion läfst er im Subtrahenden borgen, also:

$$\begin{array}{r} 35241 \\ 2.8.6.7.6 \\ \hline 6565 \end{array}$$

Sprechweise: 6 von 1 kann ich nicht und borge es bei der untenfolgenden 7, also: 6 von 11 bleibt 5; 8 von 14 bleibt 6; 7 von 12 bleibt 5. Es werden also, statt die Stellen des Minuenden um je eine Einheit zu verringern, dieselben Stellen im Subtrahenden um eine Einheit vermehrt. Es ist das alte Verfahren, bei dem der »Punct abwärts geschlahen wird«.

»Die Rechenkunst« von Joh. Gg. Prändel, Professor der Mathematik und Physik an der kgl. Pagerie und Ehrenmitglied der Akademie der Wissenschaften in München, Amberg 1812«, enthält: das Lesen und Schreiben der Zahlen, die vier Spezies in ganzen Zahlen und gemeinen Brüchen, die Reesische Regel und den Kettensatz (vgl. S. 353), die Decimalbrüche und die Anfangsgründe der Algebra. Weil dieses Buch nicht für Anfänger bestimmt ist, verfährt es analytisch. Überall findet man im Geiste Wolfs die Hinwirkung auf verständige Auffassung; Lehre und Übung sind innig verbunden, theoretische Sätze werden an Beispielen erläutert, Regeln aus Beispielen hergeleitet. Beispiel: 5028 × 314.« Weil der Multiplikator 314 nichts anderes ist als 4 + 10 + 300, so mufs der Multiplikand 5028 sowohl durch 4, als durch 10, als durch 300 multipliziert werden. Am Ende sind die drei Produkte in eine Zahl zu bringen. Um ihnen aber einen 10-, bezw. einen 100fachen Wert zu erteilen, mufs man sie immer um eine Stelle nach links rücken.« Durch zahlreiche Exempel aus dem bürgerlichen Leben, der Geographie und Geschichte hat Prändel dem Schulrat Stephani vorgearbeitet.

Der »Kurze und fafsliche Unterricht in der Rechenkunst« von Prof. Dr. Schön, Würzburg 1812, schliefst, wie neuerdings Pleibel, das Schreiben der Decimalbrüche an das Numerieren also an: »Wir haben gesehen, wie irgend eine Zahl, deren Generalwert man um das zehn- oder 100fache erhöhen will, dadurch richtig bezeichnet wird, dafs man den die Zahl ausdrückenden Ziffern eine oder mehrere Nullen zur Rechten anhängt, wodurch die Ziffer um einige oder mehrere Stellen zur Linken geschoben wird. Wir wollen nun zeigen, wie man Zahlen, deren Generalwert man um das Zehn- oder Hundertfache vermindert denkt, durch eine richtige Stellung der die Zahlen ausdrückenden Ziffern bezeichnen könne. Gleichwie das Vermindern um das Zehnfache das Umgekehrte ist von dem Erhöhen einer Zahl um das Zehnfache, so hat man zur Bezeichnung jener Verminderung auch die umgekehrte Verfahrungsart der Bezeichnung gewählt. Man schiebt nämlich die Ziffer, welche die um das Zehnfache zu vermindernde Zahl ausdrückt, durch Vorsetzung einer Null, um eine Stelle zur rechten hin; demnach bezeichnet 0,1 einen 10mal geringeren Wert als 1 u. s. w. Solche um das Zehn-, Hundertfache in ihrem Generalwerte verminderte Zahlen heifsen Decimalbrüche, Decimalzahlen. Übrigens haben dieselben ganz die dermalige Behandlungsweise.

Die von den Schulmännern ausgegangenen methodischen Direktiven blieben nicht ohne Einflufs auf die legislatorischen Bestimmungen. Sie treten in den Schulordnungen, welche zu Ende des vorigen und im Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts erlassen wurden, klar zu Tage. Als Beispiel möge der auf das Rechnen bezügliche Abschnitt des Churpfalz-bayerischen Lehrplans dienen, welcher i. J. 1804 unter Max Joseph IV., dem hochverdienten Begründer und eifrigen Förderer des bayerischen Volksschulwesens, erlassen und 1811 revidiert wurde. Dieser Lehrplan ist zwar durch Kreislehrpläne ersetzt, aber förmlich nicht aufgehoben. Derselbe schreibt im 4. Abschnitt, welcher von den Mafs- und Gewichtsverhältnissen handelt, folgendes vor:

Erste Klasse.

Rechnen aus dem Kopfe.

1. Anschauliche Entwickelung der Begriffe Einheit und Mehrheit. 2. Zahlübungen von 1—10, und dann von 10—100 vor- und rückwärts. 3. Leichte Beispiele vom Vermehren und Vermindern der Zahlen, als Grund eines anschaulichen Einmaleins.

Rechnen an der Tafel.

1. Kenntnis der Zeichen für Einheit und Mehrheit. 2. Schreib- und Leseübungen der Zahlzeichen von 1—100. 3. Kleine Rechnungsaufgaben vom Zusammenzählen und Abziehen mit benannten Gegenständen, z. B. Gulden, Kreuzer, Heller; Pfund, Lot, Ellen etc. in Erzählungen aus der Kinderwelt eingekleidet.

Vorübung zum Messen mit Hand und Auge.

1. Kenntnis der Grundlinien. 2. Zeichnung der Grundlinien und Beurteilung derselben. 3. Leichte Umrifszeichnung verschiedener Natur- und Kunstgegenstände zur Übung der Hand und des Auges im Beobachten der Verhältnisse derselben.

Messen mit Mafsen.

1. Kenntnis der gewöhnlichen Längen- und Zeitmafse, der Gewichte, der Mafse der festen und flüssigen Körper etc. 2. Übung im Messen und Wägen verschiedener Körper mit den bekannten Mafsen und Gewichten.

Zweite Klasse.

Rechnen aus dem Kopfe.

1. Übung im Zählen mit Einheiten und Mehrheiten von 100—1000 vor- und rückwärts. 2. Übung der zwei vermehrenden und der zwei vermindernden Rechnungsarten. 3. Anleitung zu leichten Rechnungsvorteilen.

Rechnen an der Tafel.

1. Anschreiben vorgesprochener Zahlen und Übung im Lesen geschriebener Zahlen. 2. Einfache Rechnungsaufgaben nach den vier Rechnungsarten mit genannten und ungenannten Zahlen.

Messen mit Mafsen.

1. Fortgesetzte Kenntnis der Längen-, Schwere-, Inhalts-, Zeit- und anderer Mafse. 2. Fortgesetzte Übung im wirklichen Gebrauch derselben.

Messen mit Hand und Auge.

1. Fortsetzung der freien Handzeichnungen. 2. Leichte Umrisse und Zeichnungen verschiedener Gegenstände aus der Natur und Kunst nach Musterbildern.

Dritte Klasse.

Rechnen aus dem Kopfe.

1. Fortsetzung in gröſseren Zahlübungen. 2. Fortsetzung der vier Rechnungsarten in einfachen und zusammengesetzten Beispielen. 3. Ordentliche Zusammenstellung der wichtigsten Rechnungsvorteile aus dem Kopfe mit Angebung des Grundes.

Rechnen an der Tafel.

1. Übung im Lesen und Anschreiben der Zahlen bis zu Millionen. 2. Zusammengesetzte Rechnungsaufgaben aus den vier Rechnungsarten, so wie sie im bürgerlichen Leben vorkommen. 3. Anleitung und Übung in der Regeldetri, in der Reesischen Regel und in den leichtesten Brüchen, nebst ihrer Auflösung.

Messen mit Maſsen.

1. Wiederholung und Erweiterung der so notwendigen Kenntnisse von Maſsen, Gewichten und geometrischen Körpern. 2. Praktische Anweisung zum Gebrauche des Zirkels, des verjüngten Maſsstabes, des Winkelmaſses bei Verfertigung geometrischer Figuren u. dgl.

Messen mit dem Auge.

Fortsetzung der freien Handzeichnung verschiedener Gegenstände nach der Natur mit Beobachtung ihrer Figurverhältnisse nach dem Augenmaſse.

Dem Churpfalz-bayerischen Lehrplane vom 3. Mai 1804 ist eine Instruktion für die Lehrer beigegeben. Dieselbe handelt im VI. Abschnitte von den »Zahl- und Maſsverhältnissen« und zwar lauten die wichtigeren Paragraphen wie folgt: Wenn Leichtsinn und Unaufmerksamkeit auf irgend eine Weise leicht und sicher gefesselt werden können, so geschieht es durch das Rechnen, besonders durch das Rechnen aus dem Kopfe. Zu diesem Vorteil des Rechnens kommt der Einfluſs desselben auf die Entwickelung der Seelenkräfte, auf häuslichen Wohlstand, auf bürgerliche Treue und Glauben in Geschäften des täglichen Handels und Wandels u. s. w. Ökonomische Beispiele aus dem Kreise der elterlichen Gewerbe und Beschäftigungen hergeholt, haben für die Kinder besonderes Interesse und verschaffen zugleich dem Lehrer Gelegenheit, die Schüler mit dem Prüfen der Dinge und mit den im täglichen Verkehre am öftesten vorkommenden Handelsartikeln bekannt zu machen, vor Bevorteilungen und Schaden, Betrogenwerden und Betrügen mittels der nötigen Vorsichts-, Klugheits- und Sittlichkeitsregeln zu warnen u. s. w. Der Lehrer soll sich auf die nötigsten und die allgemeinsten Regeln beschränken, welche vom Schüler durch eigenes Nachdenken auf einzelne Fälle anzuwenden sind. Zeit und Mühe sparende, praktische Vorteile dienen dem Gewerbsmanne, Bürger und Bauern weit mehr, als eine Menge halbverstandener und halbvergessener Regeln. Einen besonderen Vorteil beim Rechnungsunterrichte gewähren die hierbei zu benutzenden stillen Beschäftigungen der Schüler. Beim Tafelrechnen sollen immer mehrere Schüler zugleich beschäftigt sein. Der Lehrer schreibt die Aufgabe auf die Tafel, ein Schüler liest sie, ein anderer gibt die Rechnungsweise an, ein dritter beginnt die Berechnung selbst, ein vierter fährt fort, ein fünfter vollendet sie u. s. w. Zugleich kann die Aufgabe von allen übrigen Schülern auf Schiefertafeln oder Papier bearbeitet werden. Lehrer und Schüler freuen sich dann über die gelungene Lösung der Aufgabe, die sich durch die Probe bewährt hat, und an der alle Anteil genommen haben. Bei der Lehre von Mafsen, Gewichten, Münzen u. dgl. geht die Kenntnis der inländischen allen ausländischen vor. Bei diesen werde vorzüglich das Verhältnis zu jenen angegeben, bei dem Zeitmafse insbesondere das Kalenderwesen erklärt und die Vorurteile über den Einflufs der Gestirne auf verschiedene menschliche Handlungen als oft sehr schädlicher Aberglauben entkräftet. Eine kritische Betrachtung wird an diesen Normen wenig aussetzen können. Sie enthalten alles, was in der Volksschule vom Rechenunterrichte verlangt werden kann. Jeder Altersstufe sind die ihr homogenen Lehrstoffe zugewiesen, der Ausgangspunkt des Rechenunterrichts ist in der »anschaulichen Entwickelung der Begriffe Einheit und Mehrheit« richtig bezeichnet. Der Stufengang schliefst sich an die Baugesetze des Zahlensystems an; das Vermehren der Zahlen durch Addition soll die Grundlage eines anschaulichen Einmaleins sein. Multiplizieren und

Dividieren treten als höhere Denkformen erst bei der II. Unterrichtsstufe auf. Das Numerieren tritt erst ein, wenn sich das Bedürfnis dazu beim Rechnen mit gröfseren Zahlen ergibt. Mündliches und schriftliches Rechnen korrespondieren, und letzteres folgt dem Kopfrechnen nach. Das angewandte Rechnen schliefst sich dem Rechnen mit reinen Zahlen an. Die Aufgaben sollen aus dem Kinderleben und den bürgerlichen Geschäftsverhältnissen genommen werden. Die Formenlehre und das Zeichnen werden nach Pestalozzischer Weise mit dem Rechnen verbunden. Rechenvorteile sollen gelehrt werden, aber mit Angabe des Grundes. Die auf das notwendigste beschränkten Regeln sollen von den Schülern durch Selbstthätigkeit gefunden, das Verstandene gehörig geübt werden. Unterricht und Selbstübung sollen wechseln. Alle Schüler sind beim Unterrichte möglichst gleichmäfsig zu fördern. (Massenunterricht.) Der formale und materiale Unterrichtszweck finden gleichmäfsige Berücksichtigung. Das Bachersche Methodenbuch erscheint als Kommentar zu diesen Vorschriften.

Um diese Zeit rückte das ostasiatische Rechenbrett weiter nach Westen vor. Der französische Offizier Poncelet, welcher in Saratow interniert war, brachte den russischen Tschotü, der offenbar ein Nachkomme des Suanpan ist, nach dem russischen Feldzuge in die Schulen von Metz, wo er mit dem Namen boullier (Kugelbrett) belegt wurde. Indessen scheint die russische Zählmaschine nach den »Schulnachrichten aus Bayern« nur langsam sich verbreitet zu haben. Im Lehrplan für die Skt. Petersschule in München v. J. 1815 sind an Lehrmitteln für das Rechnen aufgeführt: Griffeln, Steintafeln, Punkttabellen (Busse?), bewegliche arabische und römische Ziffern und die Gestelltafeln. Die i. J. 1838 zum dreizehnten Male im Zentral-Schulbücher-Verlag in München ausgegebene »Kurze Anleitung zur Rechenkunst für Schulen im Königreich Bayern« erwähnt Spielpfennige (Raumer?), Punkte, Linien, Federkiele, Bohnen etc. als Anschauungsmittel. Die russische Zählmaschine wird nicht genannt, was doch geschehen sein würde, wenn sie hier schon bekannt gewesen wäre. Und wenn man sie in der Hauptstadt, welche in den dreifsiger Jahren ein hochentwickeltes Schulwesen hatte, nicht kannte, dann dürfen wir wohl annehmen, dafs der Gebrauch der russischen Zählmaschine in Bayern nicht über 50 Jahre sich erstreckt.

Bestrebungen zur Ausgleichung der Gegensätze.

Immer zahlreicher werden nun die Rechenmethodiker, welche eine Verbindung des guten Alten mit dem bessern Neuen herbeizuführen suchten. Diese Richtung beginnt um 1820 und wird vertreten von Kopf (1822), Krancke (1822), Denzel (1828), Diesterweg und Heuser (1829), Schäffle (1830), Stern (1832), Heer (1836), Unger (1841), Hentschel (1842), Stubba (1846) u. a.

Seminarlehrer Kopf in Neuzelle, später Erziehungsinspektor in Berlin, beabsichtigt in seiner »Anweisung zum Rechnen nach naturgemäfsen Grundsätzen; ein Leitfaden für jedermann, der das Rechnen mit Bewufstsein (Verständnis?) lernen und lehren will«, solchen Lehrern Handbietung zu leisten, welche von der Haltlosigkeit der alten Methode überzeugt, etwas Besseres suchen, aber sich in den Schriften der Neuerer nicht zurechtfinden können. Der erste Teil des Buches behandelt reines Kopf- und Zifferrechnen. Der Verfasser stellt sich hier schon in einen Gegensatz zu den pestalozzianischen Bestrebungen, denn »Birnen, Nüsse und Thaler sind die Waken (harten Steine), durch welche die Kinder gehindert werden, die Zahlen und ihre Verhältnisse zu einander aufzufassen.« Kopf übt erst das Zählen, dann die vier Spezies, dann die gemeinen und Decimalbrüche, deren Einführung er mit dem Hinweise auf den zehnteiligen Bau des Zahlensystems rechtfertigt. Der zweite Teil enthält die Lehre von den Verhältnissen und Proportionen und die Rechnungsarten mit mehrfach benannten Gröfsen, der dritte die angewandte Proportionsrechnung, die Flächen- und Körperberechnung einschliefslich der Wurzelextraktionen. Zahlreiche Aufgaben aus allen Gebieten des bürgerlichen Rechnens und der Algebra sorgen für eine ausgiebige Anwendung und Übung. Die in diesem Rechenbuche hervortretende Neigung zum Moralisieren erscheint als ein Exzefs, und seine gesamte Richtung ist reaktionär, woraus der Verfasser kein Hehl macht. »Das unselige Umstofsen und Wiederumstofsen«, klagt er, »hat unsern Schulen grofsen Schaden gebracht«. »Das Stürmen der Neuerer hat die älteren Schullehrer erschreckt; die unverständlichen Floskeln, mit welchen manche Bücher prunken, hat vielen Lehrern, die fortschreiten möchten, die neue Methode abscheulich gemacht.«

Bedeutender als das Buch von Kopf sind die Rechenbücher von dem Schulinspektor Friedrich Krancke in Hannover, welche seit 1823 sich in zahlreichen Auflagen bis in die Gegenwart erhalten haben. Sie bestehen aus Anleitungen (Lehrbuch des gemeinen Rechnens, 2 Teile, 1819 und 1821; Ausführliche Anleitung zu einem zweckmäfsigen Unterricht im Rechnen, 1824; Theoretisch-praktische Anleitung zum Kopfrechnen, 1828) und aus Exempelbüchern (Rechenfibel, Arithmetisches Exempelbuch Rechenbuch für Landschulen, Lehrbuch der bürgerlichen und kaufmännischen Arithmetik), welchen die Resultate in eigenen Heften beigegeben sind. Krancke geht zur Begründung seiner Methode vom Zwecke des Rechenunterrichts aus. Sich auf Niemeyers Grundsätze der Erziehung und des Unterrichts berufend, sagt er: Jeder Unterricht hat einen doppelten Zweck. Es soll 1. der Schüler durch denselben gewisse Kenntnisse oder Fertigkeiten, die entweder jedem Menschen oder doch dem Lernenden in seinen Verhältnissen nötig, nützlich oder angenehm sind, erlangen; und es sollen 2. durch den Unterricht die Kräfte des Schülers angeregt, geübt und so entwickelt werden, dafs er dieselben in seinem künftigen Berufe auch zu anderen Absichten zu gebrauchen vermöge. Sehr häufig wird nur der erste Zweck ins Auge gefafst, und man glaubt daher alles erreicht zu haben, was gefordert werden kann, wenn man eine bedeutende Summe von Kenntnissen dem Gedächtnisse des Schülers übergeben hat. Gleichwohl ist für alle Verhältnisse des Lebens eine wohlgeübte Kraft, insbesondere eine Gewandtheit im gesunden Urteile mehr wert, als ein mit einer Menge von Kenntnissen überladenes Gedächtnis, zumal, da ohne Gewandtheit im Denken, sich von gesammelten Kenntnissen schwerlich ein nützlicher Gebrauch im Leben machen lässt. Wird dies auf den Rechenunterricht angewendet, so ergibt sich: Es soll der Lernende durch diesen Unterricht in den Stand gesetzt werden, die in seinem künftigen Berufe vorkommenden arithmetischen Aufgaben richtig aufzulösen, mit Sicherheit und schnell zu rechnen und die begriffenen und eingeübten Regeln auf wirkliche in seinem Berufskreise vorkommenden Fälle anzuwenden wissen. Es soll aber der Rechenunterricht auch als wirksames Mittel zur Entwicklung der Geisteskräfte dienen; denn gründliches Rechnen gewöhnt an ernste Arbeit und nimmt die Aufmerksamkeit in

Zucht; indem es den Schüler zwingt, aus einer Aufgabe das Wesentliche auszuscheiden und von den Nebensachen zu trennen, übt es ihn im planmäfsigen und klaren Denken; endlich gibt es Veranlassung zu einem bestimmten und deutlichen Ausdruck der Gedanken. Hierauf stellt Krancke die Bedingungen fest, unter welchen diese Ziele zu erreichen sind: Der Lehrer mufs die Rechenkunst selbst wohl inne haben; er mufs seine Kenntnisse in methodischer Weise mitzuteilen verstehen; auch mufs er von regem Eifer beseelt sein, sich dem Lehrlinge so nützlich als möglich zu machen; endlich darf er sich durch Hindernisse und Schwierigkeiten nicht im treuen Streben nach dem erkannten Ziele ermüden lassen. Sodann bestimmt er die Methode der Volksschule: Die Methode des Rechenunterrichts ist ein absichtlich nach festen Regeln eingerichtetes Verfahren, durch welches man einem bestimmten Lehrlinge gewisse Kenntnisse und Fertigkeiten mitteilt. Sie begreift dreierlei in sich: 1. dafs der Lehrer das Ziel deutlich vor sich sehe, zu welchem er den Zögling überhaupt und gerade jetzt führen möchte; 2. dafs er feste Grundsätze habe und sich daraus bestimmte Regeln ableite, wie das Kind zu diesem Ziele zu führen sei; 3. dafs er diese allgemeinen Regeln auf den Schüler, den er gerade jetzt vor sich hat, anzuwenden wisse.

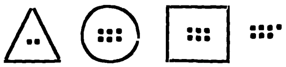
Die Methode der Volksschule mufs überhaupt zweckmäfsig und gerade in der Volksschule anwendbar sein. Sie darf also keine ausgezeichnete Fähigkeit weder zum Rechnen noch zum Lehren, sondern nur gesunden Menschenverstand und so viel Geistesbildung voraussetzen, als man von jedem Lehrer verlangen kann. Sie darf nicht zu viel Kraftaufwand erfordern; denn auch der treue Lehrer mufs auf Kraftersparung denken, soweit diese mit seiner Pflichterfüllung vereinbar ist, weil er zu anderen Arbeiten Kraft übrig behalten, sich seiner Familie erhalten mufs etc. Diese treffliche Bemerkung Kranckes ist sehr zu beherzigen; denn ein energischer und intensiver Unterricht läfst sich mit relativer Schonung recht wohl vereinigen, und die Berufstreue ist durchaus nicht gleichbedeutend mit rücksichtsloser Ab- und Ausnutzung der geistigen und körperlichen Kräfte. Weises Mafshalten im Sprechen wird beim Unterricht als Gebot der Selbsterhaltung lange noch nicht genug beachtet. Manche Lehrer stellen drei, vier Fragen; der Schüler antwortet mit ja oder nein. Viele Lehrer sprechen täglich drei-, viermal so viel als alle ihre Schüler zusammen. So kostet die falsch verstandene Heuristik Hunderten der eifrigsten Lehrer Gesundheit und Leben. Leider gibt es keine Statistik, welche diese Verluste ziffernmäfsig nachweist; wenn es aber eine solche gäbe, würde man mitleidig staunen. Man gebe deshalb Hauptfragen und Direktiven, welche von den Schülern eine möglichst ausgiebige, zusammenhängende Leistung fordern. — Lassen wir nach dieser beiläufigen Bemerkung Krancke weiter sprechen: Die Methode darf nicht zu viel Zeit zur Vorbereitung auf die Lehrstunden fordern, weil ja der Lehrer sich auf mehrere Stunden vorzubereiten hat. Sie mufs ferner für jeden Schüler passend sein, also ebenso wenig ausgezeichnete Anlagen als besondere Lust zum Lernen voraussetzen. Sie darf endlich mit der gewöhnlichen Einrichtung der meisten Volksschulen, welche es mit sich bringt, dafs in ihnen Kinder von verschiedenem Alter und von verschiedenen Vorkenntnissen vereinigt sind, und dafs die Zeit, in welcher diese Kinder alle ihnen nötige Kenntnisse erwerben müssen, kurz ist, nicht im Widerspruch stehen.

Es gibt mechanische und gründliche Unterrichtsmethoden. Jene haben die Erlernung der Regeln zum Ziele, ohne sich um die Gründe zu bekümmern, auf welchen sie beruhen. Bei den gründlichen Methoden ist der Lehrer nicht zufrieden damit, dafs der Schüler weifs, wie er eine Aufgabe auflöst; er soll auch völlig deutlich und gewifs einsehen, warum dieses Verfahren das verlangte Resultat geben mufs. Durch die mechanischen Unterrichtsmethoden wird der Zweck des Rechenunterrichts nicht erreicht; sie dürfen also nicht angewendet werden. Die gründlichen Methoden teilen sich in zwei Hauptklassen.

Die erste Hauptklasse setzt sich zum Ziele, dafs der Schüler die allgemeinen arithmetischen Wahrheiten (Lehrsätze) und die allgemeinen Regeln für die Auflösung der arithmetischen Aufgaben einsehen und auf bestimmte Fälle anwenden lerne. Zu diesem Zwecke werden die Lehrsätze und Regeln vorgetragen und hinterher bewiesen. Es findet also ein Herabsteigen von der Wahrheit zu ihren Gründen statt — oder der Schüler wird angeleitet, die Sätze selbst zu erfinden durch zusammenhängenden Vortrag oder geschickt gestellte Fragen. (Die Methode Wolfs.) Die andere Hauptklasse der Methoden hat nicht zur Absicht, den Schüler zur Kenntnis allgemeiner Sätze und Regeln zu leiten, sondern ihn dahin zu bringen, dafs er über jedes besondere arithmetische Exempel vernünftig nachdenken und dessen Auflösung finden könne. Deshalb werden entweder alle Verbindungen der Zahlen, welche im gemeinen Leben vorkommen können, so vollständig als möglich aufgesucht, dann wird das Kind durch Vormachen, sinnliche Anschauung und zweckmäfsige Stufenfolge dahin gebracht, diese mit Einsicht zu vollziehen. Die analytische (Euklidische) Methode, wie sie in den Hörsälen der Mathematik angewendet wird, wobei der Lehrer vorträgt, der Schüler zuhört, eignet sich für Jünglinge, aber nicht für Kinder in den Volksschulen; denn eine Methode, bei welcher der Lehrer immer spricht, der Schüler nur zuhört, erzielt beim Volksschulunterrichte erfahrungsmäfsig nicht den gewünschten Erfolg; man mufs deshalb die Schüler durch geschickte Aufgaben und Fragen veranlassen, aus dem Bekannten Schlüsse zu ziehen, bis man zu dem als Ziel vorgesetzten Resultate gelangt.

Die Aufgaben, welche das Leben stellt, sind eben in Fälle des Lebens, gleichsam in kleine Erzählungen, eingekleidet. (Krancke zeigt sich hier als Schüler Biermanns). Der Rechner hat dann das Reinarithmetische daraus abzuleiten, d. h. zu untersuchen, welche Rechnungsarten, und wie er sie anzuwenden habe, um zum Resultate zu gelangen. Diese Absonderung des Reinarithmetischen hat die meiste Schwierigkeit. Es mufs deshalb von den gründlichen Methoden jene am zweckmäfsigsten sich erweisen, welche den Schüler anleitet, sich in jedem einzelnen Falle die Verfahrungsweise selbst zu erfinden. Krancke deduciert nun die allgemeinen Grundsätze und Regeln der Methode, Kinder auf dem Wege der Selbsterfindung rechnen zu lehren. Der Schüler soll rechnen lernen, nicht aber Arithmetik als Wissenschaft. Um dieses zu erreichen, ist zu erforschen, auf welchem Wege das Menschengeschlecht im Laufe der Zeit zu dem Ziele gelangte, zu welchem der Schüler geführt werden soll. (Stephani.) Nun aber sind alle menschlichen Erkenntnisse entweder in der Erfahrung gegeben und werden durch die Sinne vermittelt, oder es sind Vernunfterkenntnisse, und werden diesfalls, als in der Einrichtung unseres Vorstellungsvermögens gegründet, durch Nachdenken gefunden. Zu letzteren gehört das Rechnen. Hieraus ergibt sich, dafs das Rechnen nicht als etwas willkürlich Angenommenes oder als Erfahrungssache dargestellt und mitgeteilt werden dürfe; sondern der Lehrer mufs beim Rechenunterrichte immer von dem Grundsatze ausgehen, dafs das Rechnen schon im Kinde liege und aus seinem Geiste hervorgehoben, d. h. zum Bewufstsein gebracht werden soll. Wie leitet nun der Lehrer den Schüler zur Erfindung der arithmetischen Wahrheiten? Die Menschen kamen entweder absichtlich oder zufällig, veranlafst durch eine vorgegebene Aufgabe, auf Rechensätze (die Ägypter z. B. durch die Nilüberschwemmungen). In der Schule aber darf man nichts dem Zufalle überlassen; daher mufs der Schüler absichtlich geführt werden. Der Lehrer schafft das Bedürfnis der Erfindung, der Schüler erfindet. Weil der Schüler das nicht allein kann, so mufs ihm der Lehrer dazu behilflich sein. Das geschieht, indem er dem Schüler Aufgaben stellt, welche so zu ordnen und einzurichten sind, dafs sie allmählich schwerer werden, und dafs keine eine Einsicht oder Fertigkeit voraussetzt, die nicht schon in der vorhergehenden erworben worden ist. Das Gefundene darf nicht verloren gehen, sondern ist durch Wiederholung und Übung zu befestigen.

Die ganze Rechenlehre hat 2 Hauptteile: Die Lehre von den Grundrechnungen und die Lehre von den Anwendungen derselben auf zusammengesetztere Fälle. Der erste Teil mufs dem letzteren vorausgehen. Ehe der Schüler zu der Lehre von den Grundrechnungen geführt wird, mufs er deutliche Vorstellungen von den Zahlen haben. Da die gröfseren Zahlen aus kleineren gebildet werden, so kann der Unterricht nicht mit einer vollständigen Belehrung über das dekadische System beginnen, auch nicht mit dem Zahlenlesen und -schreiben. Es mufs deshalb dem Unterrichte ein Kursus vorangehen, in dem das Kind zählen und rechnen zugleich lernt. Der Unterricht zerfällt also in 3 Kurse: I. Elementarkurs: Allmähliche Entwicklung des dekadischen Systems (ohne Ziffern). II. Hauptunterricht: Vollständiger Unterricht über die vier Grundrechnungen. III. Anwendungsunterricht: Anwendung der 4 Grundrechnungen auf zusammengesetztere Fälle im wirklichen Leben. Für den Elementarunterricht hält Krancke die dekadische Zahlenordnung fest: 1—10; 1—100; 1—1000; 1—10000, und zwar wird auf jeder Stufe das Zählen und Rechnen mit diesen Zahlen betrieben. Hierauf läfst er die ausführliche Darstellung des Ganges beim Elementarunterricht folgen. Zur Versinnlichung bedient er sich der in neuerer Zeit so viel gebrauchten Zahlbilder der alten Peruaner und der Zahlfiguren von Trapp und Busse. Die Einer werden durch freie Punkte dargestellt, die Zehner in ein Quadrat, die Hunderter in einen Kreis, die Tausender in ein Dreieck eingeschlossen, z. B.:

 = 2667.

Den Schlufs des Elementarkurses bildet die erste Übung im Zifferrechnen. — Der II. Kursus führt in methodischer Abstufung die 4 Grundrechnungsarten mit ganzen, unbenannten, sowie mit ein- und mehrsortigen Zahlen vor. Hierauf folgt die Rechnung mit gemeinen Brüchen. — Der III. Kursus enthält die Regeldetri, Warenberechnungen, Decimalbrüche, Rechnen mit Ursachen, Wirkungen und Zeiten, Berechnung der Zinsen und verwandter Gegenstände, Teilungs- und Mischungsrechnungen, Berechnungen über den Feingehalt des Goldes und Silbers, über spezifisches Gewicht, Wechselrechnungen, Rechnungen über Staatspapiere, Flächen- und Körperberechnungen.

Krancke gehört zu den wenigen Rechenmethodikern der Neuzeit, welche ihr Lehrverfahren eingehend begründen. Sein Hauptverdienst besteht darin, dafs er das Rechnen als einen Teil des Lehrplansystems der Volksschule auffafst, und dafs er dasselbe den thatsächlichen Verhältnissen der Volksschule und ihrer beschränkten Leistungsfähigkeit anpafst. Dieser nüchterne und gleichwohl ideale Gesichtspunkt erklärt die Freude der Lehrerwelt an Kranckes Schulbüchern und die zähe Lebenskraft dieser Schriften.

Im 3. Decennium des 19. Jahrhunderts tritt in Efslingen, jener schwäbischen Stadt, in welcher vor 400 Jahren (1514) der Algorithmiker Johann Böschenstein und 40 Jahre später der geniale Mathematiker und Zahlenmystiker Michael Stifel ihre Thätigkeit entfalteten, ein Rechenmethodiker in der Person des dortigen Seminarvorstandes Denzel auf.

Denzel behandelt den Zahlunterricht in seiner »Erziehungs- und Unterrichtslehre (1820).« Er geht von folgenden Sätzen aus: Beim Rechnen ist der formale Gesichtspunkt dem materialen voranzustellen. Alles Rechnen besteht in dem Bilden der Zahl-summen aus einzelnen Zahlen, in dem Zerlegen der ersteren in die letzteren und endlich in dem Vergleichen der Zahlen und Zahlverhältnisse, besonders durch Gleichsetzung, worin sich das Urteil und der Schlufs ausprägen. Der Unterschied zwischen dem schriftlichen und mündlichen Rechnen besteht allein in der Form der Darstellung. Es ist nötig, dafs wir dem Schriftrechnen diejenige Seite abzugewinnen suchen, von welcher aus dasselbe auf geistbildende Weise im Einklange mit dem Kopfrechnen behandelt werden kann. Der Rechenunterricht mufs im Anschauungsunterricht seine Basis haben. (Graser.) Auf der Elementarstufe sind alle Übungen, welche in der Folge vorkommen können, zu begründen. (Konzentrische Stufengänge.) Denzel behandelt die 4 Rechnungsarten innerhalb der Zahlenreihen von 1—10, 1—20, 10—100, 100—1000 und bringt als Übungen: Zählen, gerade und ungerade Zahlen, Bilden und Aufheben der Zahlen durch Hinzusetzen und Hinwegnehmen, Vervielfachen, Verwandeln der Einheiten in Kollektivzahlen, Teilen, Teilen von Flächen und Linien, Zifferschreiben und -lesen, die Bruchlehre. Nach dem Satze: Es ist wesentlich, dafs der Lehrer seine Beispiele nicht da und dort aufgreife, wie sie sich ihm etwa zufällig darbieten, sondern solche Beispiele wähle, die sich auf das in andern Fächern Vorgekommene beziehen (Konzentration) oder doch eine entschieden praktische Bedeutung haben, bringt Denzel neben Arbeits-, Zins-, Gesellschafts-, Mischungsrechnungen auch Aufgaben aus der Physik und Geographie. Als schriftliche Auflösungsform empfiehlt er die Schlufsrechnung oder das Zurückgehen auf die Einheit, die Proportionen und zuletzt den Reesischen Ansatz. Denzel verläfst zum erstenmale die Ordnung der angewandten Aufgaben nach sachlichen Gesichtspunkten und ordnet dieselben nach ihrer Schwierigkeit in stufenmäfsiger Folge, wie sie durch die Zahl und Form der Schlüsse bestimmt ist. Zugleich vertritt er den Gedanken, dafs das Rechnen eine psychische Reihenbewegung sei. »Das Eins steht im Mittelpunkt einer unendlichen aufsteigenden Reihe von immer gröfser werdenden Zahlen und einer unendlichen Reihe von absteigenden, gerade entgegengesetzten Teilen der Einheit, welche im gleichen Verhältnisse, wie jene steigen, immer kleiner werden.« Er benutzte deshalb als Veranschaulichungsmittel das Bild einer Leiter, welche unter dem Namen Denzelsche Leiter als Inventarstück älterer Versinnlichungsmittel bekannt ist. Die Brauchbarkeit dieses Recheninstrumentes begründet Denzel in der Einleitung zu seiner Erziehungs- und Unterrichtslehre (1820) wie folgt: »Wenn das Kind der Zahl mächtig werden soll, so ist vorerst nötig, dafs es dieselbe in ihrem Aufsteigen erkenne. Da die Reihe eine unendliche ist, so bedürfen wir im Unterrichte nicht nur eines dekadischen Mafses, in welchem die Zahlen klassifiziert erscheinen, sondern auch eines Bildes, an welchem die Einbildungskraft herauf- und herabgeht und ihre Zielpunkte örtlich nachweist. Ein natürlicheres Bild kann es gar nicht geben als die Leiter mit ihren Stufen, Sprossen und Absätzen. Wir bedürfen im Anfang nur der Leiter von 10 Sprossen. Hiezu kommt später die Zehnerleiter, die in 10 Absätzen 100 Stufen enthält. Zehn Zehnerleitern versinnlichen den Tausender.« In der Anwendung dieses Hilfsmittels stimmt Denzel mit Tillichs Anschauung, dafs die Zahlordnung der Ausgangspunkt des Rechnens sei, überein. Denzel läfst nämlich die Schüler sich vorstellen, wie ein Mann die Leiter hinaufsteigt und fragt: Auf welche Stufe tritt er zuerst? Auf die oberste oder die unterste? Wir wollen daher die unterste Stufe die erste nennen und so aufwärts zählen. Wieviele Stufen hat er nun überschritten? — Er geht weiter. Auf welche Stufe tritt er dann? So bis zur 10. Stufe und ebenso rückwärts, endlich mit Überspringung der Sprossen. Zur anschaulichen Übung des Zählens in kleineren und gröfseren Absätzen ist die Denzelsche Leiter wohl heute noch ein brauchbares Unterrichtsmittel, und in der That ist sie 1876 durch eine Breslauer Firma wieder in Erinnerung gebracht worden.

Als Rechenmethodiker grofsen Stils, welcher an der Entwickelung der neueren elementaren Unterrichtslehre hervorragenden Anteil hat, gilt Dr. F. A. W. Diesterweg. Diesterwegs Ansichten über den Rechenunterricht sind teils in seinem »Methodischen Handbuche« (1829 u. 1830), das er mit dem Lehrer Heuser bearbeitete, teils im »Wegweiser« enthalten. Sie folgen hier in den Hauptzügen: »Fassen wir die Merkmale, welche mehreren Gegenständen der äufseren oder inneren Welt gemeinsam sind, zu einer Gesamtvorstellung zusammen, so bilden wir selbstthätig die denselben zukommende höhere oder übergeordnete, allgemeine Vorstellung, einen Begriff. Nehmen wir aber an einem Gegenstande ein Merkmal auf, welches auch im Begriff sein kann, und beobachten, ob dasselbe mehreren und wie vielen Gegenständen zukomme, so bilden wir die Vorstellung von der Zahl dieser Dinge. Diese Thätigkeit unseres Geistes heifst zählen. Bei der Begriffsbildung suchen wir daher die Einheit, unter welche die Gegenstände zu fassen sind; bei der Zahlbildung dagegen setzen wir eine Einheit und suchen die Mehrheit. Dort steigen wir von der gegebenen Vielheit zur Einheit auf; hier bestimmen wir die Mehrheit der Einheiten, welchen dasselbe Merkmal, das als Grundeinheit gilt, zukommt. Das Zählen der Dinge besteht daher in der Angabe, wieviele Dinge einer Art vorhanden sind, oder in gewöhnlichem Sprachausdrucke: Zählen heifst die Menge der gleichartigen Dinge einer Art angeben. Ein jedes Ding bildet für sich eine Einheit. Diese Vorstellung der Einheit entsteht aber nur im Verhältnis zu einer Mehrheit oder Vielheit. Einheit und Mehrheit werden immer zusammengedacht, oder stehen in notwendiger Beziehung zu einander. Die eine Vorstellung ist nicht ohne die andere; mit der einen ist die andere gesetzt oder gegeben. Weil die Zahl die Vorstellung von der Mehrheit gleichartiger oder als gleichartig gedachter Dinge ist und durch die Wiederholung der Einheit entsteht, so setzt jede Zahlvorstellung die Vorstellung der Einheit voraus. So mannigfach die Merkmale der Dinge sind, so mannigfach sind die Einheiten, unter die sie gestellt werden. Diese Einheiten sind konkrete Merkmale, weil sie an den einzelnen Dingen haften, oder von ihnen abstrahierte Merkmale, also immer doch konkret-abstrakt, niemals rein-abstrakt. Diese Merkmale geben den Namen der Zahl her, z. B. zehn Bäume = zehnmal ein Baum. Abstrahiert man aber auch von diesem Namen, so bleibt die abstrakte Vorstellung der Eins übrig. Die Eins ist daher die abstrakte Einheit. Rechnen heifst: aus gegebenen Zahlgröfsen — durch dieselben und ihr Verhältnis — andere finden. Beim Rechnen hat man es mit den Vorstellungen von der Menge gleichartiger Dinge zu thun; es ist daher ein geistiger Akt, und zwar die Erzeugung neuer Zahlvorstellungen aus gegebenen. Es geschieht nicht durch Einfälle, sondern durch gewolltes, absichtliches Denken. Dieses Rechnen in der blofsen Vorstellung, ohne den Gebrauch äufserer Mittel oder Zeichen, ist das Kopfrechnen. Gebraucht man zugleich Ziffern, so nennt man das Rechnen Zifferrechnen. Beides soll Denkrechnen sein. Es gibt also dem Wesen nach nur eine Art des Rechnens. Das Zifferrechnen geschieht der bequemen schriftlichen Darstellung willen und zur Unterstützung des Gedächtnisses. Wie der Buchstabe nichts ist, ohne das Wort, das Wort nichts ohne den Begriff, so ist die Ziffer nichts ohne das Zahlwort und die Zahlvorstellung. Alle Aufgaben werden durch Denken, nicht durch Ziffern gelöst. Ein materieller Unterschied zwischen Kopf- und Zifferrechnen findet also nicht statt. Der Kopfrechner denkt an gar keine Zeichen, sondern an Zahlen; der Zifferrechner denkt auch an die Zahlen, die er mit den Zeichen darstellt. Es gibt nur eine Rechenmethode, welches diejenige ist, die zugleich der Natur des zu entwickelnden Geistes, namentlich der durch den Rechenstoff zu bildenden Anlagen und dem Wesen des Materials entspricht. Ganz verwerflich ist daher die Meinung derer, welche nur subjektive Unterschiede in den Methoden anerkennen wollen und behaupten, dafs sich die eine Methode für diese, die andere für jene Lehrer- oder Schülerindividualität eigne, von einer, als der besten und darum allein guten nicht die Rede sein könne. Wäre diese Anschauung begründet, so würde sich jede Methodologie in ein Nichts auflösen und jeder einzelne das Recht haben, auf seine Weise sich eine Ansicht von der Individualität des Schülers zu bilden und eine Methode nach Belieben zu wählen. Das kann aber die Meinung derer, welche die Menschennatur und ihre Entwicklungsgesetze erkannt haben, nicht sein. Deshalb darf die Methode nicht dem Belieben überlassen werden. (Dieser Dogmatismus Diesterwegs ist nicht recht verständlich, um so weniger, als er selbst zugibt, dafs eben die Erkenntnis der psychischen Entwicklung des Kindes noch mangelhaft sei. Sollte wirklich die Bestimmung der Methode das Vorrecht einzelner gottbegnadeter Pädagogen sein?) Hauptgrundsatz für den elementaren Rechenunterricht, wie für jeden Zweig des Elementarunterrichts ist die Anschaulichkeit. Er besagt nicht nur, dafs die ersten Zahlvorstellungen aus sinnlicher (innerer, durch äufsere Mittel veranlafster) Anschauung gewonnen, sondern dafs alle Operationen auf ursprünglich rein anschauliche Erkenntnis zurückgeführt werden sollen, und er verwirft alle an die Spitze gestellten allgemeinen Begriffe, alles Regelwerk, jede positive Vorschrift, alles Gegebene und Positive. Der Schüler soll zuerst nur Einzelheiten, Spezielles, kennen, beurteilen und behandeln lernen; er soll die Operationen unter Leitung selbst finden und sich zum allgemeinen, wo und wie es not thut, hinaufschwingen, damit er im Gebiete der Regeln und Begriffe überall auf dem festen Boden der Anschauung stehe. Denn die Einsicht in die Gesetze der Zahl hängt, wie alle wahre Bildung, nicht von den Gedanken und Einsichten ab, die andere in sich erzeugt haben, sondern von denen, die in uns entstanden sind. — Wir verbinden überall mit der Einsicht die Übung, die Praxis mit der Theorie; beide sind nicht von einander getrennt, sondern gehen in einander auf; der mündlichen Übung folgt überall die schriftliche, oder das Zifferrechnen dem Kopfrechnen; beides bewegt sich in unzertrennlicher Einheit vorwärts. Ferner ist bei den Elementen jeder Übung am längsten zu verweilen und nicht eher weiter zu gehen, bis die Grundlage, auf welcher weiter gebaut werden soll, nicht nur durchaus begriffen, sondern auch zur Fertigkeit gebracht ist, damit bei dem darauf Gebauten die Unterlage als ein völlig freies Eigentum des Geistes in dem unteren Gedankenlaufe behandelt werden könne. Jeder Sprung, jede Übereilung bei den Elementen verdirbt und verzerrt den nachfolgenden Unterricht und bringt Schwanken und Unlust hervor. Mit der Vorstellung wird das Wort geboren; solange daher der Schüler die Operationen nicht mündlich darlegen kann, sind die Nebel des Geistes nicht verschwunden. Aus der bisherigen Darstellung erhellt auf unzweideutige Weise, welche Zwecke durch den Unterricht in der Zahlenlehre angestrebt werden: a) Geistesbildung, b) Bildung fürs praktische Leben. Die Geistesbildung hat ihren selbständigen Wert in sich. Sich auszubilden, ist der höhere Zweck des Lebens. Die Art der Ausbildung durch die Zahlenlehre geht aus der Natur des Gegenstandes hervor. Zuerst wird durch sie das innere Anschauungsvermögen bethätigt und durch dasselbe die wiederholende Einbildungskraft, dann das Gedächtnis, endlich das Kombinationsvermögen, der Verstand. Der Unterricht in der Zahlenlehre soll gleich mit dem Eintritte des Kindes in die Schule beginnen und durch alle Stufen und Klassen einer vollständig organisierten Elementarschule fortgesetzt werden. Jedes Kind soll im Rechnen soweit kommen, dafs es mit Leichtigkeit mündlich und schriftlich Aufgaben löst, wie sie das gewöhnliche Leben bringt. Die formale Bildung kann ebensogut an kleinen Zahlen und einfachen Verhältnissen wie an grofsen Zahlen und verwickelten Aufgaben erreicht werden. Die Regeln für den methodischen Gang und die Hauptstufen des Rechenunterrichts werden gefunden durch Anwendung der allgemeinen Unterrichtsgesetze auf den im Rechenunterrichte zu behandelnden Stoff, d. h. auf die Zahl und unser Zahlensystem. Mit anerkennenswerter Offenheit sagt Diesterweg in seinem »Methodischen Handbuch für den Gesamtunterricht im Rechnen«[1]) (Vorrede zur 4. Auflage 1844): Noch sind wir bekanntlich nicht so weit gekommen, dafs wir für die Pädagogik und Methodik allgemein anerkannte Prinzipien aufzustellen vermöchten. Aber wir finden beim Kinde die Empfänglichkeit (Receptivität), in dem Manne die Selbstthätigkeit (Spontaneität) vorherrschend, folglich soll jene in diese umgebildet werden[2]). Daraus ergibt sich unser Prinzip für die Methodik: Unterrichte so, dafs überall die Selbstthätigkeit des Schülers möglichst ausgebildet werde! Dieses Verfahren verlangt Einsicht und Erkenntnis, das Ausgehen vom Einzelnen, Konkreten, Anschaulichen. Aus den Sätzen der Vorrede sind hervorzuheben: Wie man eine Aufgabe rechnen mufs, ergibt sich aus ihrem Verständnis; dieses setzt die Kenntnis der Sach- und Zahlverhältnisse voraus. Der Ausrechnung einer Aufgabe mufs ihre Lösung (Darstellung der Schlufsfolge) vorausgehen. Den Nachweis für die Richtigkeit des Verfahrens hat die mündliche Darstellung zu liefern, nicht die Übereinstimmung des Resultates mit der Angabe im Facitbuch. Fertigkeit in Behandlung der Zahlen (Sicherheit in den 4 Rechenoperationen) ist ein Augpunkt bei dem Unterrichte in der Zahlenlehre; aber man halte das gehörige Mafs. Die Volksschule hat nur die allgemeinen Bedürfnisse zu berücksichtigen und diesen in vollstem Mafse zu genügen. Das Kopfrechnen mufs auf Zahlenzerlegung beruhen, es darf nicht ein in die Phantasie versetztes Zifferrechnen sein. Die Benutzung von Rechenvorteilen ist zulässig. Man wähle also leichtere und bequemere Zahlen etc. Diesterweg läfst auf der 1. Stufe die Grundzahlen von 1—10 auffassen und bedient sich zu ihrer Veranschaulichung der senkrechten Striche. Die Kinder zählen vor- und rückwärts, geben die Stelle an, welche

[1]) Erste Auflage 1829, neu von Langenberg 1864 und 1870.

[2]) S. S. 375.

eine Zahl (ein Strich) einnimmt und schreiben die Ziffern. Hierauf folgt das Addieren, Zerlegen, Subtrahieren, erst mündlich, dann schriftlich. Dem schliefst sich an das Zu- und Abzählen der Grundzahlen von 10—20 und von 20—100, ebenfalls erst mündlich, dann schriftlich (2. Stufe). Die 3. Stufe bildet die Behandlung gröfserer Zahlen, das Zählen von 100—1000 und darüber, das Zusammenzählen und Abziehen gröfserer Zahlen. Die 4. Stufe bringt das Vervielfachen auf Grundlage der Pestalozzischen Einertabelle, das Vervielfachen aller Grundzahlen mit allen Grundzahlen (kleines Einmaleins) und das Vervielfachen gröfserer Zahlen. Die 5. Stufe beschäftigt sich mit der Division und zwar mit dem Enthaltensein der Grundzahlen, dem Teilen der Grundzahlen, dem Teilen mit gröfseren Zahlen. Die 6. Stufe behandelt das Resolvieren und Reduzieren, die 7. und 8. Stufe das Rechnen mit benannten und unbenannten Zahlen, ausgeschieden nach den 4 Spezies, woran sich die Anwendung der Regeldetri schliefst. Die 9. Stufe enthält die Bruchlehre, den Begriff des Bruches, die Benennung, Verwandlung, die 4 Rechnungsarten, die Anwendung der Brüche in den Rechnungsarten mit angewandten Zahlen und in der Multiplikations- und Divisionsregeldetri. Den Schlufs bilden die Kennzeichen der Teilbarkeit der Zahlen und die Berechnung der Raumgröfsen. Der II. Teil des Rechenbuches, von Heuser bearbeitet, behandelt die Lehre von den Proportionen, die bürgerlichen Rechnungsarten und Rechnungsformen (Ansätze), die Decimalbrüche. Was diese Schrift noch sonst bietet, liegt aufserhalb des Gebietes der Volksschule. Bemerkenswert ist noch die Einleitung zu dem II. Teile des Buches, wo sich Heuser über den Gegensatz des formalen und materialen Unterrichtszieles ausspricht: Der Schüler ist zum Menschen und zum Bürger zu bilden. Nimmt er bei seinem Unterrichte blofs den Menschen zum Ausgangspunkte, so fehlt er; ebenso, wenn er blofs den Bürger ins Auge fafst und den Menschen dabei vergifst. Die Erreichung beider Zwecke strebt Heuser an, indem er den Schüler so leitet, dafs er die für das Leben notwendige Geschicklichkeit im Rechnen sich d e n k e n d erwirbt.

Anfangs der dreifsiger Jahre übertrug man die im 18. Jahrhunderte schon vor Pestalozzi von Biermann, Köhler u. a. angewendete Methode des mündlichen Rechnens, von einer Mehrheit auf die Einheit und von dieser auf eine andere Vielheit zu schliefsen, auf das schriftliche Rechnen. Man nannte diese Lösungsweise Schlufsrechnung und wegen der vorhergehenden Ansatzform den Zweisatz. Andeutungsweise tritt diese Rechnungsform, welche nunmehr die Proportionen und den Reesischen Ansatz aus der Volksschule so ziemlich verdrängt hat, schon in den ersten Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts auf, z. B. bei Schellenberg 1810, bei Hoffmann 1815, bei Stephani 1817, bei Denzel 1820. Zusammenhängend und systematisch entwickelt findet sich dieser Berechnungsmodus das erstemal in einer kleinen Schrift von dem Nürtinger Reallehrer Schäffle: Beitrag zur Methodik des Rechnens, Stuttgart und Tübingen. Da diese Schrift 1830 erschien, Stern aber, welchem die Erfindung des Zweisatzes bisher zugeschrieben wurde, seinen Lehrgang des Rechenunterrichts erst 1832 veröffentlichte, so müssen wir bis auf weiteres die Priorität der Erfindung des gebräuchlichen Zweisatzes dem genannten Reallehrer zuschreiben. Schäffle ordnet die Aufgaben nicht nach den Objekten, auf welche sich die Zahlen beziehen, sondern wie Denzel nach rechnerischen Funktionen. Er bringt zunächst Aufgaben mit einfachen Vor- und Darstellungsformen und zwar

I. Stufe. A) solche Aufgaben, welche als einfache Multiplikationen zu konstruieren sind. Beispiel: Ein Mann verdient täglich 18 Fr., was verdienen nach diesem Mafsstabe 3 Männer? Ausrechnung:

$$\begin{array}{|l} 3 \\ 18 \\ \hline 54 \end{array}$$

B) Aufgaben, welche durch einfache Divisionen a) im Sinne des Teilens, b) des Enthaltenseins konstruiert werden.

II. Stufe, mit zwei Vor- und Darstellungsformen. 1. Kombination der Multiplikation und Teilung. Beispiel: 3 Personen teilen 91 Kronenthaler; wie viele Gulden bekommt eine? Ausrechnung:

$$\begin{array}{r|l} \text{b) } 3 & 91 \text{ a)} \\ & 2\,{}^{7}/_{10} \text{ c.)} \end{array}$$

Für den jährlichen Zins aus 500 fl. Kapital, à $4\,{}^{1}/_{2}\,\%$, bekommt man 10 Schäffel Frucht; wie hoch ist ein Schäffel gerechnet?

$$\begin{array}{r|l} 100 & 4\,{}^{1}/_{2} \\ 10 & 500. \end{array}$$

Der Ansatz sieht äufserlich der Reesischen Formel gleich, ist aber unser Zweisatz in Divisionsform, wie die von Schäffle gegebene Konstruktion beweist. Diese lautet nämlich: $4\frac{1}{2}$ fl. sind der jährliche Zins aus 100 fl.; mit 100 dividiert geben sie den Jahreszins aus 1 fl. Kapital an. Diesen hat man für 500 fl. Kapital 500 mal zu fordern.

2. Aufgaben, worin die zwei einfachen Formen, Teilen und Enthaltensein, mehrmals verbunden sind. Beispiel: Man zahlt 3 Arbeiter, die in 4 Tagen 11 fl. verdient haben, mit Brot, das Pfund zu 3 Kreuzer; wie viel Pfund hat ein Arbeiter im Tag verdient?

Schliefslich bringt Schäffle zusammengesetzte Aufgaben, z. B. Jemand hat 690 fl. nach 3 Jahren ohne Zins zu bezahlen; wenn er selbige jetzt berichtigt, so werden ihm als Abzug 5% fürs Jahr zugestanden. Wie viel Louisdor à 11 fl. hat er gleich zu erlegen? Räsonnierende Konstruktion: Wer 100 fl. bar erlegt, der hat dasselbe geleistet, als ob er 105 fl. nach einem Jahr bezahlt, 110 fl. nach 2, 115 fl. nach 3 Jahren. So oft nun 115 fl. in 690 fl. enthalten sind, so viele Hunderte mufs er sofort bar erlegen. Da aber nach Louisdor gefragt ist, so sucht man noch, wie oft 11 in der Summe der dargestellten Gulden enthalten ist. Hiernach ergibt sich als Ansatz:

$$\begin{array}{rr|ll} \text{a)} & \text{fl. } 115 & 690\,\text{fl.} & \text{b)} \\ \text{d)} & \text{fl. } 11 & 100\,\text{fl.} & \text{c)} \end{array}$$

Die von Schäffle vertretene Ordnung der Aufgaben nach den Schlufsformen wird neuerdings von Scherer motiviert befürwortet.

Pfarrer Jakob Heer in Matt, Kanton Glarus, bezeichnet sich in seinem »Methodischen Lehrbuche des Denkrechnens für Volksschulen« als einen Schüler Pestalozzis. »Pestalozzi«, sagt er, »gab die jetzt noch allein gültige Idee und brach die Bahn. Er ist der Kolumbus auf dem Gebiete der Pädagogik. Damit ist jedoch nicht gesagt, dafs sich seine Nachfolger des gleichen unvollkommenen Fahrzeuges wie er bedienen müssen. Heer hielt sich anfangs (1802—1807) an die Elementarbücher, ging aber, damit nicht befriedigt, seinen eigenen Weg, auf welchem das Studium der wissenschaftlichen Arithmetik und die empirische Beobachtung der geistigen Entwicklung der Kinder seine Wegweiser waren. So entstanden 1807—1811 die Grundzüge des Heerschen Rechenbuches, welches aus Anlafs einer i. J. 1834 erlassenen Preisausschreibung des schweizerischen Erziehungsrates 1836 in Zürich erschien. Heers Rechenbuch besteht aus 3 Teilen. Der 1. Teil enthält die reine Zahlenlehre, der II. Teil das angewandte Rechnen; der dritte Teil ist das Exempelbuch. Die 7 Bogen starke Einleitung verbreitet sich eingehend über das Wesen und die Methode des Rechenunterichts, den Stufengang, die Entstehung und Entwicklung der Zahlbegriffe, das gegenseitige Verhältnis zwischen Kopf- und Zifferrechnen u. s. w. Die Zahlenlehre entwickelt, von der Anschauung zum Begriffe fortschreitend, die Gesetze der Arithmetik, welche im II. Teile angewendet werden. Nach den gemeinen Brüchen sind auch die Decimalbrüche behandelt. Die Proportionen finden eine ausgiebige Berücksichtigung.

Heer empfiehlt in seinem Lehrbuche des Denkrechnens den Würfel als Anschauungsmittel. Er setzt denselben zusammen, 1. aus 10 gleichen Würfeln, von welchen jeder die Einheit darstellt; 2. aus 9 quadratischen Säulen, jede 10 Würfelkanten lang und eine Würfelkante breit und hoch, zur Veranschaulichung der Zehner; 3. aus 9 quadratischen Platten, an welchen durch eingeritzte dunkle Linien 100 Würfel ausgezeichnet sind, um den Hunderter zu repräsentieren. Sämtliche Einheiten vereinigt bilden den Tausender. Dieser Apparat wurde 1844 von Otto Krämer als Originalerfindung wieder empfohlen, merkwürdigerweise mit Anklängen an die Zahlenmystik, denn »an den Begriff der Zahl schliefst sich die Vorstellung des göttlichen Wesens als der Ureinheit. Nach dem ersten Zählen folgt das erste Gebet des Kindes.« Als zerlegbarer Decimeterwürfel ist Heers Apparat durch Prof. Popp, Salberg u. a. neuerdings wieder zu Ehren und sachgemäfser Verwendung gekommen.

Zu den bedeutenderen Rechenmethodikern der Neuzeit gehören Prof. Dr. E. S. Unger und der Seminarlehrer Hentschel.

Unger gab i. J. 1836 eine Schrift heraus: Arithmetische Unterhaltungen, bestehend in einer systematisch geordneten Sammlung von 900 algebraischen Aufgaben, verbunden mit einer Anleitung, diese Aufgaben mittels der einfachsten Arithmetik zu lösen. 1841 folgte Ungers Leitfaden für den Unterricht im Kopfrechnen als Grundlage eines zweckmäfsigen Unterrichts im Rechnen überhaupt (Erfurt) und 1852 eine Sammlung arithmetischer Aufgaben (Leipzig). In den arithmetischen Unterhaltungen hat Unger, nach Türks Vorgange, die Rätselrechnungen Alkuins und der Inder wieder aufgefrischt. Diese Aufgaben gehören der wissenschaftlichen Arithmetik an und können, selbst unter günstigen Verhältnissen, in der Elementarschule nur beschränkte Verwendung finden. — Dagegen bringt Ungers Leitfaden für das Kopfrechnen nach einer eigentümlichen Methode (neu von Krusche 1881) eine Fülle fruchtbarer Gedanken, welche Beachtung verdienen. Unger stellt die Frage: In welcher Weise mufs der Unterricht erteilt wernen, da wir einesteils der Regeln nicht entbehren können, und andernteils es ein jeder im Rechnen zu einer praktischen Fertigkeit bringen mufs, die nur erlangt werden kann, wenn man daran gewöhnt wird, das Resultat in allen Fällen auf dem kürzesten Wege zu ermitteln? Antwort: Man bestrebe sich zunächst, die Schüler innigst vertraut zu machen mit dem Wesen der Zahl, und verweise dieselben später, nachdem sie bereits die erforderlichen Fortschritte gemacht haben, um es gehörig würdigen zu können, bei jeder Gelegenheit auf den obersten Grundsatz alles Rechnens: Man rechne stets mit den kleinsten oder bequemsten Zahlen, und man wird der besonderen Rechenvorteile nicht bedürfen; der Schüler wird keine anwendbare Kürzung übersehen, ohne dafs ihm hierzu besondere Vorschriften gegeben zu werden brauchen, oder dafs man auf eine Regel zu verweisen nötig hätte, die für den vorliegenden Fall und für die insbesondere vorkommenden Zahlen einer Vereinfachung fähig ist.« Diese Regel ist zwar nicht neu, denn die Regeldetri und welsche Praxis strebten das gleiche Ziel an, und Seite 336 ist sie auch wörtlich ausgesprochen; aber in dieser Bestimmtheit wurde sie bisher nicht vernommen, und in ihrer Anwendung auf das Kopfrechnen erscheint sie hier wohl zum erstenmale. — Weiterhin gibt Unger den Rat: Man leite den Unterricht so, dafs der Schüler so wenig als möglich nach gegebenen Regeln zu rechnen veranlafst wird, sondern sich stets selbst aus den vorliegenden Bedingungen die entsprechende Regel suchen mufs, und man mache nicht das Einüben der gefundenen Regel, sondern das Suchen derselben zur Hauptbeschäftigung. Überhaupt soll man nicht das Allgemeine geben und das Gegebene auf besondere Fälle anwenden lassen, sondern vom Besonderen zum Allgemeinen gehen und das Selbstgefundene unter besonderen Bedingungen benutzen; auf diese Weise wird man gewandte und gründliche Rechner bilden und die Denkkraft der Schüler in fortwährender Thätigkeit erhalten. So wird das Rechnen zur Mathematik der Volksschule, und es ist gleichgültig, inwieweit dabei Zahlen geschrieben werden. Im Hinblicke auf diese Prinzipien behandelt Unger die Faktorenlehre, also das Mafs der Zahlen, den Unterschied zwischen Grund- und zusammengesetzten Zahlen, die Auflösung der Zahlen bis 100 in ihre Grundfaktoren, die Klassifikation der Zahlen nach der Anzahl ihrer Grundfaktoren, Begriff und Bezeichnung der Potenz, die allgemeine Form des Produkts, verwandte Zahlen und das kleinste gemeinschaftliche Vielfache zweier oder mehrerer Zahlen etc. Der 2. Abschnitt handelt von den Nichtfaktoren oder Resten; der 3. Abschnitt läfst Zahlen aus gegebenen Elementen bilden. Hierbei werden berücksichtigt: Die Grundeigenschaft der Brüche, die Multiplikation und Division, die Addition und Subtraktion der Brüche, ungleich benannte Zahlen in Bruchform ausgedrückt, Entstehung der Quadrate, Quadratwurzel, Decimalbrüche, kurz und klar berechnete Aufgaben der praktischen Arithmetik. — Die hier gegebene Zahlenlehre erinnert an Pythagoras und Euklid. Die Aufgabensammlung Ungers wendet die in dieser Zahlenlehre gewonnenen Kenntnisse auf das bürgerliche und kaufmännische Rechnen an. Unger sagt: Eins recht wissen und ausüben, gibt höhere Bildung als Halbheit im Hundertfältigen, und diesem Wahlspruche ist er gerecht geworden. Die von Unger empfohlene Methode, algebraische Aufgaben auf arithmetischem Wege zu lösen, fand weitere Vertreter in Stubba, Lettau, Schütze, Prenner u. a. Stubba hat übrigens eine ausgebreitete Thätigkeit auf dem Gebiete der Rechenmethodik entfaltet, wie durch seine Anweisung zum Rechenunterricht in Schulen und Schullehrerseminarien, durch die Anweisung zur Bruchrechnung, einem Rechenbuch für Volksschulen nebst Aufgabensammlungen erwiesen ist.

Mit dem Weifsenfelser Seminarlehrer Hentschel erreicht die empirische Rechenmethodik die höchste Stufe ihrer Entwicklung, und in den Schriften dieses Mannes stehen wir völlig auf dem Boden der Gegenwart. Die Erstlingsschrift desselben v. J. 1837 brachte 100 Rechenaufgaben, elementarisch gelöst; 1842 erschien Hentschels Lehrbuch des Rechenunterrichts, welches denkend rechnen und rechnend denken lehren will. All die guten Grundsätze und Ratschläge welche die Rechenlitteratur seit Pestalozzi zu Tage gefördert hat, finden sich in Hentschels Arbeiten geschickt und gewissenhaft verwertet, und es ist nicht möglich, der grofsen Zahl von Hilfsarbeitern zu gedenken, welche Hentschels Methode in weitere Kreise trugen, so dafs sie in den Volksschulen die Herrschaft gewann. Hentschels Rechenbücher haben sich in neuer Bearbeitung von Költzsch und von Jänicke bis zum heutigen Tag auf dem Büchermarkte erhalten.

Das Andenken an Tillich ist in der Neuzeit von Angehörigen der Herbartschen Schule aufgefrischt und seine Methode gebührend gewürdigt worden. Auf ihr beruhen nämlich einige kleinere Schriften der letztvergangenen Jahrzehnte: Schneyer, Der erste Rechenunterricht mit Benutzung des Baukastens(?) und der Netztafel, Koburg 1879; Bräutigam, Methodik des Rechenunterrichts auf der ersten Stufe mit Hilfe von Tillichs Rechenkasten, Wien 1878; Göpfert, Der Rechenunterricht in den ersten drei Schuljahren, Eisenach 1877. Göpfert hält folgenden Stufengang ein:

1. Jahr: Zahlenraum 1—10. Auffassen und Abschätzen der Zahlenstäbe — mündlich und schriftlich (Zeichnen). Einüben der Reihenfolge der Zahlen. Vergleichen, Zerlegen der Zahlenstäbe, dann Addition und Subtraktion, Multiplikation und Division, Verbindung der 4 Spezies. — 2. Jahr: 1—100. 1. Aufbau des Zehnersystems (10—20; 20—100). 2. Zusammenzählen und Abziehen der reinen Zehner und reinen Einer: a) reine Zehner zu und von reinen Zehnern; b) reine Einer zu und von reinen Einern. 3. Zusammenzählen und Abziehen der reinen und gemischten Zehner: a) gemischte Zehner zu und von reinen Zehnern; b) reine Zehner zu und von gemischten Zehnern. 4. Addition und Subtraktion der gemischten Zehner: a) gemischte Zehner zu und von gemischten Zehnern, ohne dafs die Einer in einen neuen Zehner übergehen; b) gemischte Zehner und reine Einer mit Übergang; c) gemischte Zehner zu und von gemischten Zehnern mit Übergang. — 3. Jahr: Bildung der kleinen Einmaleins. Einführung in das Mafs-, Münz- und Gewichtssystem. — Das Vergleichen, Unterscheiden und Zerlegen gehen der Addition

und Subtraktion voraus. Schon im ersten Jahre kommen die Aufgaben: Wie viel ist 2mal der dritte Teil von 6? Wie viel ist $^2/_3$ von 9? Das dritte Jahr bringt Aufgaben folgender Art: $9 \times 5 + 45 - 36 : 9 \times 7 - 7 + 35 + 30 : 10 \times 5$; $^7/_8$ v. $56 + + 13 + 18 - 8 : 8 \times 4 - 18$ weniger die Hälfte durch 3. Solche Aufgaben sind wohl für die bezeichneten Stufen zu schwer. Angewandte Aufgaben aus dem Lebens- und Erfahrungkreise der Schüler sind nicht berücksichtigt.

Das Rechnen im Dienste der sittlichen Bildung.

Durch die Geschichte der Arithmetik zieht sich von der frühesten Zeit seiner Entwicklung bis auf die Gegenwart wie ein roter Faden der Gedanke, dafs das Rechnen nicht blofs den Verstand schärfe, sondern auch auf die sittliche Veredlung des Menschen Einflufs habe, und wohl bei keinem Kulturvolke alter oder neuer Zeit wird man diese Idee völlig vermissen. In den religiösen Gebräuchen der Ägypter und Israeliten finden sich vielfach arithmetische Beziehungen; das Pythagoreische Weltensystem geht in der Arithmetik auf; die indischen und arabischen Rechenbücher gedenken vor allem des Vaters der Dinge, der die Rechenkunst dem Menschen von oben herabgegeben hat. Selbst bei den materialistisch gesinnten Römern finden sich Andeutungen, dafs sie die Rechenkunst als Erziehungsmittel achteten; denn wenn dem Menschen die Zahl genommen wird, geht er der höheren Einsicht und Tugend verlustig (Platon). Durch das ganze Mittelalter prägt sich die ethische Bedeutung des Rechnens in der Zahlenmystik aus. Jakobus Köbel bringt die moralische Wirkung der Rechenkunst 1514 mit den Worten in Erinnerung: Sich soll kain Mensch nit vndersten, Kein Götlich Weltlich kunst begen On rechens art durch ware zal Bewert ist das in manichem val Ain Mensch dem zal verborgen ist Leüchtlich verfürt der wirt mit list etc. (SS. 176 u. 177). So auch bei Dannberger (1742) in dem Tugend- und Laster-ABC (SS. 320 u. 321), bei Rochow u. a. Stern sagt im Vorworte zu seinem Rechenbuche über den sittlichen Einflufs des Rechnens: Begleitet den Schüler beim Rechnen noch das Bewufstsein, dafs er sich bei dieser geistigen Thätigkeit frei zu bewegen vermöge; wird er des Vermögens gewahr, Verborgenes durch Anwendung richtiger Schlüsse zu enthüllen, so wird in ihm ein erhebendes Gefühl erregt, welches sein Selbstvertrauen kräftigt, ihn in seinen Entschliefsungen besonnen macht und auf seine sittliche Haltung zurückwirkt, wenn es auch für sich allein ihn vor Thorheiten nicht zu bewahren vermag.

Denselben Standpunkt vertreten Goltzsch und Theel: Der Rechenunterricht in der Volksschule, 1854. Die Verfasser kündigen sich in der Vorrede des II. Teils in gewissem Sinne als Gegner Pestalozzis an mit den Worten: Die Erwägung, dafs gerade der Rechenunterricht dasjenige Gebiet des Schulunterrichts sei, auf dem die formalistische Pädagogik und Didaktik ihren freiesten Tummelplatz gefunden, auf dem sie angeblich Unübertreffliches geleistet und vorzugsweise ihre Triumphe gefeiert habe, mufste befürchten lassen, dafs ein ernster Versuch, ihr die Berechtigung abzustreiten, nur unnützen und schädlichen Anstofs geben und seines Zweckes, auch diesen Unterricht der sittlichen Lebensbildung dienstbar zu machen und ihn in den nötigen organischen Zusammenhang mit allem übrigen Unterrichtsmaterial der Schule zu bringen, verfehlen dürfte. In dieser Ankündigung treten zwei bedeutsame Sätze hervor, welche bisher nicht oder doch nicht mit dieser Bestimmtheit und Schärfe ausgesprochen wurden: 1. Das Rechnen mufs der sittlichen Lebensbildung dienen und 2. es mufs in Zusammenhang mit den übrigen Unterrichtsstoffen der Volksschule gebracht werden. Weiterhin wendet sich das Buch gegen die Zerstückelung des Rechenstoffes und die bruchstückweise Mitteilung, wie sie von Pestalozzi angewendet wurde, mit den Worten: »Die Überzeugung von der unbedingten Notwendigkeit völliger Ausscheidung aller Bruchstücke der Wissenschaft aus dem Volkschulunterrichte beruht in keiner Weise in einer Mifskennung oder Geringschätzung des Wertes wissenschaftlicher Erkenntnis, sondern auf der Überzeugung, dafs vereinzelte Bruchstücke derselben nimmermehr Bildungselemente für das Volksleben abgeben können und im glücklichsten Falle nur zu einer Bildung verhelfen, von der, weit entfernt, dafs sich daraus neues entwickeln sollte, fort und fort immer mehr verloren geht.« Eine formale Bildung, sagen die Verfasser an anderer Stelle, die nicht im wirklichen Leben des Volkes, nicht in wirklichen Anschauungen und Erfahrungen, sondern in zugeführten abstrakten Begriffen, der Wissenschaft entlehnten Gedanken, ihre Basis hat, ist ein der Volksschule äufserlich angepafstes Kleid, das nach Stoff und Schnitt seine Entstehung aus abgelegten und abgetragenen Kleidungsstücken vornehmer und gelehrter Leute nicht verkennen läfst. Die Volksschule hat es nicht nötig, sich mit fremden Federn zu schmücken, sie darf sich ohne Scheu in ihrem eigenen schlichten Kleide sehen lassen. Sie hängt ebenso innig wie die gelehrte Schule mit dem Volks- und Staatsleben zusammen, und ist in gleicher Weise wie diese ein lebendiges Produkt desselben. Es bezeichnet aber gerade das Unterscheidende ihrer Bildungsaufgabe, dafs sie in keiner Weise der Wissenschaft Dienste zu leisten hat und dafs in ihr, abgesehen von Fertigkeiten, kein Unterrichtsgegenstand eine Berechtigung hat, der des sittlichen Gehalts sowie der unmittelbaren Anwendung auf die wirklichen Lebensverhältnisse der Schüler ermangelt.

»Der Unterricht wird vorzugsweise ein Sachunterricht sein, aber ein solcher Sachunterricht, der immerwährend zu Übungen im Zahlbilden veranlafst und auffordert, und eben wiederum mittels dieser Übungen dem Kinde allmählich zu sehr wichtigen sachlichen Kenntnissen verhilft, also namentlich zur Kenntnis des Wertes der verschiedenen Dinge der Aufsenwelt, des Gebrauchs, der von ihnen im Leben gemacht wird, der davon abhängigen Wertbestimmungen derselben, wie sie im Kauf und Verkauf am fafslichsten entgegentreten, sonach zu Kenntnissen über Mafse aller Art und Gewichte, über den allgemeinen Wertmafsstab des Geldes, die verschiedenen Sorten der gemünzten Metalle, über den Wert der Arbeit jeder Art und ihre Wertbestimmung durch Geld nach einem gewissen Mafse, das an die aufgewendete Kraft, Geschicklichkeit und Zeit gelegt wird, über Tage-, Wochen- und Jahreslohn der verschiedensten Arbeiter etc., worüber dem Kinde wenigstens eine vorbereitende Kenntnis verschafft werden mufs, um sich in den vielfachen Verhältnissen des gesellschaftlichen Lebens zurechtzufinden. Der Rechenunterricht in der Volksschule hat sich nur insoweit um die Zahl zu kümmern, als dies erforderlich ist, um den Kindern zu einer vollständigen Kenntnis von Welt und Leben zu verhelfen, als deren künftige Lebensstellung es fordern kann, und darf daher die abstrakte Zahlenlehre oder die Arithmetik auch nicht einmal nach ihren

Anfängen als ein Objekt des Volksschulunterrichts anerkannt werden. Ebensowenig ist es statthaft, sich auf einen angeblichen formalen Bildungszweck der Volksschule zu berufen, um der abstrakten Zahlenlehre einen Platz in der Volksschule zu verschaffen. Solange noch formale Bildung irgendwie selbständig neben materialer als Zweck und Ziel der Lehrthätigkeit hingestellt wird, wird immer mehr oder weniger Verkehrtes geschehen und weder das eine noch das andere Ziel gehörig erreicht, da Form und Materie auf allen Punkten unablöslich zusammenhängen. Es ist daher auch beim Rechenunterricht lediglich die Erweiterung und Vervollständigung der Sachkenntnisse mittels Übungen im Zahlbilden als Ziel und Zweck des Unterrichts im Auge zu behalten. Der I. Teil des Buches schafft die Grundlagen des Rechenunterrichts, der II. Teil bringt die bürgerlichen Rechnungsarten in origineller Einkleidung. Er handelt von Zeit-, Wert- und Stoffmafsen, vom Erwerb und Gebrauch des Eigentums, von Verpflichtungen gegen den Staat, von der Benutzung fremden Eigentums, von gemeinschaftlichen, auf Erwerb gerichteten Unternehmungen, von Gemeinde- und Kommunallasten etc. Die sachlichen Belehrungen vermitteln den Zusammenhang des Rechnens mit den übrigen Unterrichtsstoffen, namentlich den Realien. Der II. Teil erscheint als eine populäre Propädeutik der Volkswirtschaft und enthält eine Fülle ethischer Momente. (Sparsamkeit — Segen der Arbeit — Sorge für die Hinterbliebenen, für das Alter etc.)

An methodisch bedeutsamen Sätzen sind hervorzuheben: 1. Der Rechenunterricht hat an den Erfahrungskreis des Kindes und an die Verhältnisse des Heimatsortes anzuknüpfen und beides beständig zu berücksichtigen. 2. Das Kind mufs das Rechnen selbst sich lehren (Salberg). Also mufs der Schüler selbst messen, schätzen etc., die Lehrweise zum Denken anregen. 3. Alle Aufgaben, welche den Bedürfnissen des bürgerlichen Lebens nicht entsprechen, sondern vielmehr als »Erfindung des Schulwitzes der Rechenmeister« sich darstellen, sind auszuscheiden. Die Lehrweise ist instruktiv und läfst sofort die gewiegten Praktiker erkennen, die nicht blofs mit den Gesetzen der Methodik, sondern auch mit der Denkweise des Kindes vertraut sind. Die schwierigsten Partien des Rechnens werden den Kindern mit überraschender Geschicklichkeit vermittelt. Das Buch ist jetzt mehrfach veraltet, in seinen Prinzipien aber vielfach noch neu. Durch die starke Betonung der sachlichen Gesichtspunkte ziehen aber die Verfasser die äufsersten Konsequenzen des realistischen Prinzips, und hierin liegt zugleich eine Gefahr für den Erfolg des Rechenunterrichts selbst; denn die hier vortretenden volkswirtschaftlichen Gesichtspunkte übersteigen nicht selten die Fassungskraft der Kinder und lassen das Rechnen an sich nicht immer zur berechtigten Geltung kommen. Einen gröfseren Wert hat das Buch für den Unterricht in Fortbildungsschulen, wo es sich darum handelt, die bereits erlernte Rechenkunst in ausgedehnterem Mafse auf gewerbliche oder landwirtschaftliche Verhältnisse anzuwenden und diese selbst durch Rechenexempel in ein helleres Licht zu setzen.

An das Rechenbuch von Goltzsch und Theel schliefst sich der Idee nach Salbergs Sachrechnen (1874) an, das aber, weil es die weitläufige monographische Zahlbetrachtung im Sinne Grubes zur Grundlage hat und deshalb zu kompliziert im Lehrgange ist, trotz mancher beachtenswerter Vorzüge den Beifall der praktisch thätigen Lehrer nicht finden konnte.

Ein eigenartiger Lehrgang im Rechnen, welcher seinerzeit viel Aufsehen erregte, liegt vor in dem »Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule nach den Grundsätzen einer heuristischen Methode von A. W. Grube. Dieses Schriftchen, von 1842 bis 1880 sechsmal aufgelegt, bringt die von Krancke schon angedeuteten Konsequenzen, zu welchen das Pestalozzische Anschauungsprinzip führen mufste, zur vollen Durchführung. In der Vorrede zur ersten Auflage sagt Grube: Pestalozzi hat uns wohl von der schlechten objektiven (der abstrakt-wissenschaftlichen) Methode im Elementarunterrichte befreit und zu der naturgemäfs-subjektiven (psychologischen) hinübergeführt; ob wir aber nicht bei dem andauernden Rufe nach Anschaulichkeit das eigentliche Anschauen allgemach verloren und statt des objektiven einen subjektiven Formalismus gewonnen haben? Es ist zwar viel von Anschauen und anschaulichem Unterrichte gesprochen, aber von dem wesentlichen psychologischen Prozesse der Anschauung sehr wenig gesagt worden, wie denn nach der andern Seite hin bei Aufstellung einer Methode alle Grundsätze befolgt wurden, nur der eine nicht: Der Gegenstand ist zugleich seine Methode. Grube beklagt sodann, dafs die Elementarmethodiker ihre Lehrgänge nicht aus einem Prinzip hergeleitet, sondern empirisch gearbeitet und so eine wilde Praxis geschaffen haben, welche auf allgemeine Geltung keinen Anspruch machen kann. Wir haben, sagt Grube, die blofs subjektive Methode verlassen und dem Objekte eine einfachere, durch seine eigene Natur bedingte Gliederung gegeben, dabei aber durch Zusammenfassen des Extensiven jede einzelne Stufe reicher und intensiv gehaltvoller gemacht. Nur so können wir der immer mehr zunehmenden, an jede Schule ohne Ausnahme herandrängenden Masse des Wissens Herr werden, dafs wir die Teile desselben zu möglichster Einfachheit organisieren und durch Intensität im Einzelnen die Extensität des Vielen zu ersetzen streben ... Mit dieser intensiven Bildung zur Anschauung hängt die Bildung zur Sittlichkeit auf das innigste zusammen. Nur aus der Vertiefung in das Lehrobjekt kann die Liebe zu demselben entstehen, und nur das, was der Mensch liebt, will er auch. Nur der Unterricht wirkt lebendig auf das Gemüt des Schülers, welcher mit dem Verstande zugleich den Willen erobert. Wir haben deshalb das Prinzip der Sittlichkeit als das allein mafsgebende für die Erziehung, wie für ihren wesentlichen Teil, den Unterricht, an die Spitze unserer Entwicklung gestellt. Wie Grube dieses Ziel zu erreichen sucht, sagt er mit folgenden Worten: »Ich bin den fafslichen Anweisungen, welche das Rechnen in eine Unzahl von Übungen zersplittert haben, dadurch entgegengetreten, dafs ich jede Zahl ganz einfach als Individuum anschauen liefs, dafs nicht mehr die Operation den Einteilungsgrund bildete, sondern aus der allseitigen Anschauung jeder einzelnen Zahl sich die Operationen von selbst ergaben. Indem sich so die Stufenfolge der Übungen unendlich vereinfacht, gewinnt der Schüler Zeit und Lust, sich in das Zahlenindividuum zu vertiefen, mit seinem Gesetz und Wesen vertraut zu werden. Er braucht die Regel nicht mehr von der Zahl zu abstrahieren, sondern hat sie bereits in der Art und Weise seiner Anschauung; er rechnet die Exempel nicht nach allgemeinen Regeln, sondern entwickelt selbst die Regel aus dem allgemeinen Falle. Nicht die subjektive Willkür des Lehrers ist der Lehrgang, sondern dieser ist mit der Anschauung des Zahlobjektes gegeben. Das Verständnis des Exempels geht über zur produktiven Anschauung, welche das Exempel selber macht; und weil der Schüler überall die freie

Überschau seiner Thätigkeit hat, geniefst er sich selber an seiner Arbeit. Bis zu diesem ästhetischen Punkte hat der Rechenunterricht trotz aller Methodik bisher nicht geführt; denn vor lauter Virtuosität in den einzelnen Operationen konnte sich die Kraft des Schülers nicht im individuellen Ganzen konzentrieren. Das elementare Rechnen nach den Spezies auseinanderfallen zu lassen, ist dasselbe, als im Anschauungsunterrichte dem Kinde die Gegenstände nach den Rubriken von Gröfse, Gestalt, Farbe u. s. w. vorzuführen, oder die Botanik mit dem Linnéschen System zu beginnen. Wie aber das Kind den Gegenstand nicht kennen lernt, wenn es nach einem Merkmale verschiedene Gegenstände anschaut, sondern wenn es den einen Gegenstand nach seinen verschiedenen Merkmalen betrachtet — und wie es falsch ist, dem Anfänger in der Botanik die Pflanzen so vorzuführen, dafs er erst die Wurzel, dann den Stengel etc. anschaue, dafs er vielmehr die Pflanze ganz sieht und sehen soll: so lernt der Schüler z. B. auch die Zahl 4 nicht kennen, nämlich mit wahrer Durchdringung des Objekts, wenn er heute $2 + 2 = 4$ lernt, nach einigen Wochen, wenn das Subtrahieren an die Reihe kommt, $4 - 2 = 2$ u. s. w. Vielmehr hat er ja, wenn er weifs, dafs $2 + 2 = 4$ ist, damit zugleich auch die Anschauungen: $2 \times 2 = 4$; $4 - 2 = 2$; $4 : 2 = 2$, und die Methodik hat unrecht, wenn sie diesen objektiven Zusammenhang nach den Operationen zerreifst. Eine solche Teilung stärkt nicht, sondern schwächt die Kraft der Anschauung, weil sie deren Konzentration auf einen Punkt, und somit das Beobachten im Anschauen hindert. Der Elementarschüler lerne die Zahlen nicht vereinzelt und abgerissen nach den Operationen des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens, sondern jede Zahl im Raume (?) von 1—100 allseitig nach jenen Operationen in ihrer organischen Einheit kennen und behandeln.« Darum schreitet der Unterricht von Zahl zu Zahl fort, vergleicht und mifst jede folgende mit der vorangegangenen nach dem Stufengange: 1) die reine Zahl, a) Messen und Vergleichen nach dem Gesichtspunkte der 4 Spezies, b) Schnellrechnen, c) Kombinieren. 2. Die angewandte Zahl.

Die Übungen für die 4. Stufe,

die Zahl Vier,

stellen sich wie folgt dar:

I. Die reine Zahl.

a) Messen und Vergleichen.

1. Messen mit 1.

$$
|\,|\,|\,|\;\; 4
$$

$$
\begin{array}{l}
|\;\;1\\
|\;\;1\\
|\;\;1\\
|\;\;1
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
1+1+1+1=4\,(1+1=2;\ 2+1=3 \text{ etc.})\\
4\times 1=4\\
4-1-1-1-1=0\\
1\times 4=4.
\end{array}\right.
$$

2. Messen mit 2.

$$
\begin{array}{l}
|\,|\;\;2\\
\\
|\,|\;\;2\\
\\
\end{array}
\left\{
\begin{array}{l}
2+2=4\\
2\times 2=4\\
4-2-2\\
2:4=2.
\end{array}\right.
$$

3. Messen mit 3.

$$
\begin{array}{ll}
|\,|\,| & 3+1=4;\ 1+3=4\\
| & 1\times 3+1=4\\
 & 4-3=1;\ 4-1=3\\
 & 3:4=1\ (1);\ (3 \text{ in } 4 \text{ 1mal, Rest } 1).
\end{array}
$$

Tiere mit 4 Beinen und 2 Beinen — Fahrzeuge mit 1 Rade, 2 und 4 Rädern.

4 ist um 1 mehr als 3, um 2 mehr als 2, um 3 mehr als 1..

3 ist um 1 weniger als 4, und um 1 mehr als 2, um 2 mehr als 1 . . .

4 ist das Vierfache von 1, das Zweifache von 2. 1 ist der 4. Teil von 4, 2 die Hälfte von 4.

b) Schnellrechnen: $2 \times 2 - 3 + 2 \times 1 + 1 - 2$ verdoppelt etc.

c) Kombinieren: Welche Zahl mufs ich zweimal nehmen, um 4 zu bekommen? Von welcher Zahl ist 4 das Doppelte? Von welcher Zahl ist 2 die Hälfte? Von welcher Zahl ist 1 der 4. Teil? Welche Zahl läfst sich von 4 2mal wegnehmen? etc.

II. Angewandte Aufgaben.

Karolina hatte in ihrem Blumentopfe 4 Tulpen, die sie aber schlecht begofs. Da verwelkte ihr erst eine, dann noch eine, dann noch eine, dann noch eine. Wie viel behielt sie noch? Wie viel Pfennig sind 2 Zweier? Eine Semmel kostet 2 Pfennig, was kosten 2 Semmeln? u. s. w.

Die 10. Stufe, Zahl Zehn, beginnt mit dem Satze: Nun haben wir die erste Zahl gewonnen, die man wiederum als Einheit betrachtet (als eins setzt); darum schreibt man auch wieder die Ziffer 1; aber zum Zeichen, dafs in dieser Zahl Eins zehnmal steckt, rückt man sie eine Stelle weiter links und will damit sagen: Diese Einheit bedeutet einen Zehner. — In den angewandten Aufgaben bei 10 finden sich die metrischen Mafse und Gewichte berücksichtigt. Das Neue soll aber nur nach und nach eingeführt werden. Anschauungsmittel sind Finger und Striche, andere Rechendinge werden jedoch nicht ausgeschlossen. — Im 2. Jahre folgt: Die allseitige Anschauung der Zahlen von 10—100. Das Verfahren (der Lehrgang) ist dem bisherigen gleich. Anschauungsmittel bleiben Striche und Finger, da die Natur dem Menschen das dekadische System an die Hand gegeben hat. Das kleine Einmaleins ergibt sich im Verlaufe dieser Übungen von selbst und wird am Schlusse des 1. Hunderters am Einmaleinstäfelchen (pythagoreischen Einmaleins) repetiert. — Im 3. Jahre folgt das Rechnen von 100—1000. Da alles folgende Rechnen nur Anwendung von der Anschauung der Zahlen des ersten Hunderters ist, so kann auch dieser nun folgende Kursus keinen andern Zweck haben, als die Zahlen von 100—1000 auf die des ersten Hunderters zurückzuführen, d. h. sie in ihre Elemente zu zerlegen; damit erhält der Schüler das Geheimnis alles schnellen und sichern Kopfrechnens, nämlich stets mit den möglichst kleinsten Zahlen zu operieren, und es bedarf jener sog. Rechenvorteile oder Kunstgriffe nicht (Unger); um aber zu der allseitigen Vorstellung der Zahl zu führen, kann hier anfangs noch von keinem Rechnen der Spezies die Rede sein. Diese treten als solche erst im 2. Semester auf. Ebenso ist Kopf- und Zifferrechnen auf jeder Stufe vereinigt. Da die Notwendigkeit wegfällt, jede Zahl zu isolieren, und nach den einzelnen Rubriken zu behandeln, wie dies im I. Kursus wegen der allseitigen Durchdringung der Zahl geschehen mufste, so teilt Grube den Stoff blofs in die 2 Teile: A. die reine Zahl, B. die angewandte Zahl. Im 1. Teile wird behandelt: 1. Messen der Zahlen nach den dekadischen Einheiten der Einer, Zehner und Hunderter, Herauf- und Herunterzählen von 100—1000, veranschaulicht; Zerlegen der Zahlen in ihre dekadischen Bestandteile, z. B. 768 = 7 Hunderter 6 Zehner, 8 Einer.

2. Reine Hunderte, gemessen mit Hundertern nach dem Schema des I. Kurses:

2:	200:
$1 + 1 = 2$	$100 + 100 = 200$
$2 \times 1 = 2$	$2 \times 100 = 200$
$2 - 1 = 1$	$200 - 100 = 100$
$1 : (\text{in})\ 2 = 2$	$100 : (\text{in})\ 200 = 2.$

3. Gemischte Hunderte mit gemischten Hunderten, 4. Messen der Hunderter mit dem Zehner. Zerlegung der Zahlen in Faktoren. 5. Allseitiges Messen der Zahlen durch ihre Faktoren etc. Dem Rechnen mit der angewandten Zahl folgen die 4 Spezies mit benannten und unbenannten Zahlen im erweiterten Zahlenraume, endlich das Rechnen mit Brüchen, zuerst die Halben, dann die Drittel, dann die Viertel etc. Das Rechnen mit Decimalbrüchen schliefst Grube vom Elementarunterrichte aus. Das Ganze soll in den ersten 4 Schuljahren bei 4 Wochenstunden durchgearbeitet werden.

Nach Vollendung dieses Elementarkurses, fährt Grube fort, möge der Lehrer, der durch diesen Lehrgang selbst zur Selbstständigkeit gelangen soll, ein gutes Exempelbuch zur Hand nehmen und danach, mit Auswahl der Aufgaben, die Schüler weiter üben. Wo ein beobachtendes Anschauen gewonnen ist, bedarf es selbst für die Fertigkeit nicht einer grofsen Masse von Aufgaben: Nicht vielerlei, sondern viel!

Die Vorteile, welche sich aus diesem Verfahren ergeben sollen, schildert Grube selbst wie folgt: »Aus dieser durch die Natur des Objekts selbst bedingten Anordnung geht hervor, dafs der Schüler auf jeder Stufe ein selbständiges Ganzes habe. Wenn er auch schon nach dem 1. Kursus die Schule verliefse, so hätte er doch schon das ganze Rechnen in nuce kennen gelernt und damit die Fähigkeit empfangen, diesen Kern weiter zu entwickeln. Was nun aber die intensive Bildung betrifft, so meinen wir, mit der entwickelteren, einfacheren Methode das elementarische Rechnen sowohl den Anforderungen an dasselbe als Bildungsmittel für die formelle Seite der Anschauung, wie auch damit zugleich als wirksames Mittel für die sittliche Bildung des Schülers einen Schritt näher gebracht zu haben. Denn I. mit der organischen Entwicklung unseres Lehrobjekts wird der Schüler zu einer in sich streng zusammenhängenden, kontinuierlichen Aufmerksamkeit angeleitet, und seinem Geiste die Richtung gegeben, sich in sich festzuhalten; 2. da der Schüler die Mannigfaltigkeit der Rechenoperationen überall in der Anschauung des einzelnen Zahlenobjekts konzentrieren lernt, so wird er zum Beobachten (denkenden Anschauen) der Zahl angeleitet; 3. der Schüler arbeitet mit Lust und Liebe zur Sache. Wo aber die Liebe zur Arbeit nicht durch Arbeit selbst hervorgerufen wird, da bleiben alle Zuchtmittel und Ermahnungen vergebens. Nur mit dem Bewufstsein der in stetiger Einheit sich entwickelnden Kraft kann in dem jungen Geiste der Trieb entstehen, diese selbstthätig weiter zu entwickeln. Jedenfalls, sagt Grube im Vorwort zur 6. Auflage 1880, hat mein Lehrgang die Wirkung gehabt, »dafs sein oppositioneller Geist wie ein frischer scharfer Nordost hineinwehte in die lau und matt gewordene Luft der endlos sich ausbreitenden methodischen Handbücher der dreifsiger und vierziger Jahre, dafs man sich zur Aufstellung eines einfacheren Lehrganges entschlofs, sich dabei die Zahlenräume bestimmter absteckte und gründlicher durcharbeitete. Doch gesteht Grube, dafs er jetzt das Buch nicht mehr in gleicher Weise verfassen, sondern manche Einseitigkeiten vermeiden und manche Härten mildern würde. Hiermit ist gesagt, dafs bei Beurteilung des Grubeschen Lehrgangs das Prinzip desselben beachtet werden wolle, worauf billigerweise Rücksicht zu nehmen ist.

Grubes Lehrgang fand eifrige Anhänger, aber auch zahlreiche Gegner. Die Freunde des Grubeschen Lehrverfahrens behaupteten von demselben, dafs es den Forderungen eines lückenlosen Unterrichts vollkommen entspreche, allen Mechanismus ausschliefse, dem Schüler eine gründliche Bekanntschaft mit jeder einzelnen Zahl und ihrer operationsgemäfsen Bildung vermittle, wodurch derselbe feste Leitpunkte für schnelle und fertige Rechenkombinationen erhalte; es führe endlich den Schüler in konzentrischen Kreisen weiter und biete dadurch Gelegenheit, die durch mangelhaften Schulbesuch entstandenen Lücken wenigstens notdürftig auszufüllen.

Zu gunsten des Grubeschen Lehrganges hebt z. B. Hösch in dem Methodischen Leitfaden zum Unterrichte in den Elementen des Rechnens 1852 hervor: Wie gerade durch die Aufstellung der Gegensätze eine Wahrheit recht ermittelt und ans Licht gezogen wird, so stehen auch jene entgegengesetzten Operationen stets erklärend und begründend einander gegenüber. Wird der Schüler angeleitet, die durch die Addition und Multiplikation gebildeten Summen und Produkte bei der zunächst folgenden Übung durch die Subtraktion und Division wieder in ihre Summanden und Multiplikanden aufzulösen, also die betreffenden Zahlen wieder auf ihren Ursprung zurückzuführen, so verschafft man ihm ein klares Bewufstsein aller vollzogenen Operationen und verbreitet ein wohlthätiges Licht über seine ganze Thätigkeit.

Dr. Rein, einer der hervorragendsten Methodiker der Gegenwart, sagt »im ersten Schuljahre« (Eisenach 1882): »Die Rechenübungen des ersten Schuljahres zur Gewinnung der fundamentalen Zahlvorstellungen bewegen sich in der ersten grundlegenden Zahlenreihe von 1—10. Innerhalb dieser Reihe (also nicht von 1—100) sind in der Form allseitiger Zahlbetrachtung die 4 Grundrechnungsarten an jeder einzelnen Zahl zu lehren und zu üben. Man hat in neuerer Zeit da und dort Einwendungen gegen das Grubesche Verfahren erhoben. Mit wenig Glück. Es ist hier nicht der Ort, auf die Sache einzugehen (in einer Methodik des Volksschulunterrichts?); so viel steht aber unseres Erachtens fest: die allseitige Betrachtung der Zahlen innerhalb des 1. Zehners ist eine Errungenschaft, die als bleibender Erwerb wird angesehen werden dürfen.« Doch will Dr. Rein das Bruchrechnen und die schwierigeren kombinatorischen Übungen wegen der damit verbundenen übermäfsigen Anstrengung des Kindes von der ersten Stufe ausgeschlossen wissen.

Unter den mehr oder minder schroffen Gegnern des Grubeschen Lehrganges sind zu nennen Sobolewsky, Egger, Hug, Ruegg, Kaselitz, Harms, Kentenich u. a.

Ludwig Sobolewsky, Seminarhauptlehrer in Steinau a. d. O., urteilt in seinen »Rechenstudien« (Glogau 1862) über die monographische Zahlbehandlung wie folgt: Man ist auf den Gedanken gekommen, die einzelnen Zahlen von 1 ab bis 100 selbst zur Grundlage eines Rechenganges zu machen und jede Zahl einer allseitigen Betrachtung zu unterwerfen. Es ist nicht zu leugnen, dafs ein solcher Rechengang den Charakter eines stufenmäfsigen, anregenden und bildenden Unterrichts hat. Indes bestehen gegen denselben doch mancherlei Bedenken: So vielerlei verschiedene Rechenoperationen auf einmal vorzunehmen, mufs verwirren. Die Grundlage des Rechnens ist das Zusammenzählen.

Aus dem Addieren entwickelt sich das Vervielfältigen und aus diesem das Teilen. Ist das Zusammenzählen und das Einmaleins auf der Stufe des Rechnens von 1—100 tüchtig geübt, so macht sich das Teilen dann von selbst, und alle verfrühte Behandlung desselben ist unnötig aufgewandte Zeit und Mühe. Es ist ferner schwierig, die Kinder nach diesem Gange schriftlich zu beschäftigen, was beim Schulunterricht durchaus notwendig ist; denn wie soll das Vielerlei, das bei einer Zahl zur Behandlung kommt, zu einer schriftlichen Beschäftigung zurechtgelegt werden? Die Übungen des Zusammenzählens, worauf doch das meiste ankommt, können gerade bei diesem Gange nur in sehr verkümmerter Weise getrieben werden. Denn will ich beispielsweise bei der Zahl 6 die hier möglichen Aufgaben stellen, so hat der Schüler immer nur mechanisch »sechs« zu antworten, z. B. $1 + 5 = ?$ $3 + 3 = ?$ $4 + 2 = ?$ etc. Fragt man: Welche 2 Zahlen sind 6? so sind das wichtige Übungen, allein es sind doch nicht jene Aufgaben des Zusammenzählens. Es ist doch etwas ganz anderes, ob ich eine bestimmte Summe erhalte und diese auf alle mögliche Weise in 2 Teile zerlegen soll, oder ob ich 2 Zahlen erhalte und die unbekannte Summe derselben suche.

Professor Harms hat 1859 über den Rechenunterricht auf der I. Stufe unter steter Bezugnahme auf den Grubeschen Lehrgang eine Abhandlung geschrieben in der Absicht, die alte, bewährte Methode des Elementarunterrichts im Rechnen gegen Grubes Angriffe zu verteidigen und vor seinem Lehrgange zu warnen. Die Argumente dieses Methodikers lassen sich wie folgt zusammenfassen; 1. Der Vergleich, den Grube mit dem Anschauungsunterrichte anstellt, hinkt; denn das hier vorzuführende Objekt entspricht nicht einer Zahl, sondern einer Zahlengruppe. 2. Die allseitige Behandlung der Zahlen kann Gegenstand eines späteren Unterrichts sein; für den Anfang ist sie zu schwer; dadurch werden die zarten Kräfte nicht für das Folgende gestärkt, sondern vielmehr stumpf und lahm gehetzt. 3. Zum Rechnen nötigt nicht die Vorführung einer einzelnen Zahl, sondern nur die einer Zahlengruppe. 4. Nicht bei und gleich nach der Auffassung einer Zahl kann und soll sich ihr ganzer Reichtum entfalten; dazu ist im Verlaufe des gesamten Rechenunterrichts Zeit geboten, und vor allem mufs man warten, bis die langsam wachsende Kraft des Schülers der Sache mächtig ist. 5. Die Hälfte der Zahlen von 1—10 gehört zu den Primzahlen, die für sich kaum eine Bedeutung haben, die vielmehr erst da eine Bedeutung gewinnen, wo sie als Faktoren anderer Zahlen auftreten. Von 1 bis 5 gibt es aber nur eine zusammengesetzte Zahl, die Vier. Wer nun, wie Grube, von Anfang an messen, d. h. in Faktoren zerlegen will, gerät immer wieder auf die Eins, quält also die Kinder mit Dingen, die ein Spiel für sie sind, sobald ihr Sprach- und Denkvermögen weiter ausgebildet ist. Wenn Grube sagt, dafs die Schüler, sobald die Zahlen von 1—5 so durchgearbeitet sind, schon hinter die Methode gekommen seien, so kann das doch nur heifsen, hinter das Schema, nach welchem Grube die Rechensätze vorführt, nicht aber hinter die Methode, nach welcher Aufgaben, wie sie das Leben bringt, berechnet werden. Diese Methode gründet sich auf das Bildungsgesetz des Zahlensystems, kann daher erst auftreten, wenn dieses in Erscheinung tritt, also nach dem Übergange vom 1. zum 2. Zehner. 6. Der Grubesche Lehrgang läfst sich in der einfachen Landschule schon mit Rücksicht auf die erforderliche Zeit nicht durchführen.

Viele Gegner fand Grubes Lehrverfahren in der Schweiz. Schulinspektor Egger (Ausführliches Rechenbuch für schweizerische Volksschulen und Seminarien 1874) sagt: Wenn auch diese Methode manches Gute für sich hat, so ist doch nicht zu verkennen, dafs das Weiterschreiten von Zahl zu Zahl sehr ermüdend ist, und dafs dasselbe der geistigen Entwicklung des Kindes nicht entspricht, wenn es an die eben eintretenden Kinder die hohe Forderung stellt, sogleich zu multiplizieren und zu dividieren. Der Zahlenumfang ist freilich ein wichtiges Moment für den Methodiker und mufs namentlich anfangs sehr berücksichtigt werden; später jedoch kann derselbe mehr in den Hintergrund treten, während dafür die neuen Zahlgesetze den Vordergrund erfüllen. Jener neue Stufengang legt zu viel Gewicht auf den Fortschritt nach der neuen Zahl und zu wenig auf den Fortschritt nach den neuen Zahlgesetzen und wird daher kaum die Feuerprobe der Erfahrung aushalten können.

J. C. Hug erklärt in seiner »Mathematik der Volksschule 1854«: Es scheint, dafs Grube, indem er den Pestalozzischen Formalismus vermeiden wollte, unvermerkt auf einen eben so gefährlichen Schematismus gelangte, und zwar ohne dafs er in den obersten Prinzipien des Rechnens lag, wie er dieselben in der sonst vortrefflichen Einleitung zu seinem Werke entwickelte. Diese Prinzipien ziehen durchaus nicht das formgebende, methodische Gesetz nach sich, dafs jede Zahl sogleich den 4 Operationen zu unterwerfen sei, so dafs also der Fortschritt nicht in einer neuen Operation liegt, die das Kind lernt, sondern in einer neuen Zahl, zu der es gelangt. Der Zweck, der erreicht werden will, Beherrschung des ganzen Zahlengebietes, ist ein äufserst wichtiger; aber der Weg hierzu ist pädagogisch unzulässig, denn er steht sowohl mit der historischen als auch mit der psychologischen Entwicklung in Widerspruch. Nach diesem Verfahren werden nämlich gleich beim Beginn des Rechenunterrichts die Operationen als die Mittel vorausgesetzt und angewendet, um die Zahlen 2, 3 etc. auffassen zu lassen. Nun sind aber die Operationen nicht etwas in erster Linie Gegebenes, sondern etwas Abgeleitetes. Wer also zugleich beim ersten Rechenunterrichte alle Operationsformen einführt, der handelt gegen die historische Entwicklung. Wer aber den Schülern von Anfang an alle Operationen lehrt, um sie die Zahlen erwerben und allseitig auffassen zu lassen, der verlangt, dafs sie die Mittel benutzen sollen, die noch gar nicht vorhanden sind, d. h. er handelt gegen die psychologische Entwicklung, denn nicht aus der Zahl ergeben sich die Operationen, sondern die Zahl mufs erst durch die Operation geschaffen werden. Erst ist die Grundthätigkeit des arithmetischen Denkens, das Zählen, wachzurufen; damit fafst das Kind die Zahlen auf, ohne eine höhere Thätigkeit nur zu ahnen. Wie kann man diese historische Entwicklungsstufe überspringen und auf einmal mit viel späteren potenzierten Denkformen vermengen wollen?

Professor Ruegg spricht sich in seiner »Pädagogik 1878« und in dem Schriftchen »Das Rechnen in der Elementarschule 1876« in gleichem Sinne also aus: »Weil das arithmetische Objekt, die Zahl, nicht urspünglich gegeben ist, sondern erst durch den Denkakt des Zählens entsteht, so kann auch die Zahlbegriffsbildung nur nach und nach mit der zunehmenden Erweiterung des Zahlumfangs erzielt werden. Das elementare Rechnen hat mithin in Bezug auf den Zahlumfang einen stetigen Fortschritt zu entfalten. Diese Thatsache hat mehreren neueren Methodikern, wie A. W. Grube, H. Zähringer u. a., Anlafs gegeben, den methodischen Fortschritt einzig und allein im Zahlumfang zu suchen. Nach dieser Ansicht mufs jede neue Zahl sogleich allen vier Operationen unterworfen werden, und es liegt demnach die Steigerung der jugendlichen Kraft nicht etwa in einer neuen Operation, die das Kind lernt, sondern ausschliefslich in einer neuen Zahl, zu der es gelangt. Diese Methodiker lassen sich von dem richtigen Gedanken leiten, dafs nur derjenige ein selbständiger und gewandter Rechner ist, welcher die Zahlen seines Rechnungsgebietes nach allen Eigenschaften ihrer operationsgemäfsen Bildung kennt. Sie irren sich aber darin, dafs sie die verschiedenen Operationen, die nichts anderes als sich allmählich entwickelnde Denkformen sind, im Geiste des Kindes voraussetzen, ohne sie im naturgemäfsen Gange der Denkformen erzeugt zu haben. Die Operationen sind eben nicht etwas in erster Linie Gegebenes, sondern etwas durch die Entwicklung des arithmetischen Denkens Bedingtes. Sie können darum nicht von Anfang an neben einander, sondern müssen nur allmählich nach einander auftreten. Die Addition und Subtraktion setzen auch im kleinsten Zahlumfange eine gewisse Geübtheit im Einheitenzählen voraus und sind somit eine spätere Entwicklungsform des Zählens. Ebenso wird niemand leugnen können, dafs die Multiplikation eine spätere Entwicklungsstufe darstellt als die Addition. Es bedarf vielfältiger Übung im Addieren, ehe der Geist durch eigene Abstraktion zum Multiplizieren gelangt Die Addition kann an wirklichen Gegenständen geübt werden, ohne dafs sie reine Zahlbegriffe voraussetzte; bei der Multiplikation verhält es sich ganz anders, indem der Multiplikator stets eine reine Zahl, d. h. ein abstrakter Zahlbegriff ist. Das Kind mufs also zu Zahlbegriffen gelangt sein, ehe die Multiplikation auftreten darf. Ähnlich verhält es sich mit der Division, welche zur Subtraktion dieselbe Stellung einnimmt, wie die Multiplikation zur Addition, und zur Multiplikation die gleiche Stellung, wie das Subtrahieren zum Addieren. Es gibt also zwei Operationsstufen, von denen sich die zweite aus der ersten entwickelt hat und bei jedem Kinde wieder neu entwickelt werden mufs.«

Rektor Kaselitz, der Verfasser mehrerer Rechenwerke, kritisiert das Grubesche Verfahren also: Grubes Verfahren ist nicht ein Rechnen mit der Zahl, die er gerade behandelt, sondern ein Betrachten derselben in ihrer Eigentümlichkeit.

Für das Gewinnen der Zahlvorstellungen und das Auffassen der Zahlbegriffe ist das von unzweifelhaftem und unschätzbarem Wert; für das eigentliche Rechnen fast nutzlos. Denn ein Kind, das z. B. die 8. Stufe nach Grube absolviert hat, hat gewifs ein klares Bild und eine richtige Vorstellung von der Zahl 8, aber rechnen kann es nicht mit 8, denn die Acht tritt nur ein einziges Mal als operative Zahl auf, nämlich in dem Satze 8 mal 1.

Knilling bemerkt in seiner Schrift »Zur Reform des Rechenunterrichts«: Grube geht von der Voraussetzung aus, dafs die Zahlen genau auf dieselbe Weise wie die Sinnendinge aus der Anschauung erfafst nnd erkannt werden. Die Zahlanschauung bietet aber keine Analogie zur Anschauung und Vorstellung der Sinnendinge. Grubes Methode setzt im Menschengeiste ein Vermögen voraus, von dem er keine Spur besitzt. Weil die Grubeschen Prämissen falsch sind, sind es auch die hieraus gezogenen Folgerungen. Es ist vergebliche Mühe, dem Kinde die Zahlen zur klaren Anschauung bringen zu wollen. Das Zerlegen einer Zahl in ihre möglichen Bestandteile ist nutzlose Spielerei; denn das Zerlegen (und Vergleichen) deckt die Beschaffenheit der Mengen nicht auf. Die Mannigfaltigkeit der Rechenoperationen bei der allseitigen Zahlbehandlung verwirrt den Anfänger, die allseitige erschöpfende Betrachtung einer jeden Zahl bis 100 ist langweilig, ermüdend, resultatlos. Es gibt nichts Mühevolleres, Aufreibenderes und Undankbareres als den ersten Rechenunterricht nach Grubes Manier.

Sobolewsky, Stubba, Gies, Weiland u. a. warnen vor der Einführung der Brüche auf der ersten Stufe, wie Grube es verlangt. Sobolewsky sagt in seinen Rechenstudien: Ganz besonders möchten wir uns aber gegen eine Einführung der Bruchrechnung oder doch der Bruchform schon auf der untersten Stufe erklären, wiewohl einer zeitigeren Anwendung derselben das Wort geredet werden mufs. Die Formen $^1/_3$ von 6, $^2/_3$ von 9 haben für Anfänger immer etwas Verfängliches. Es ist doch am Ende gleichgültig, ob ein Schüler derlei Aufgaben ein Jahr früher oder später rechnen lernt. Wenn ein Unterschied in der früheren oder späteren Erlernung dieser Bruchrechenpartien besteht, so ist es der, dafs im letzteren Falle das mit leichter Mühe und in kurzer Zeit erlernt wird, womit sich Lehrer und Schüler im ersten Jahre haben lange plagen müssen.

Stellen wir die beiderseitigen Ansichten einander gegenüber so ergibt sich: Der Grubesche Lehrgang steht im Widerspruche mit der historischen Entwicklung des Gegenstandes und der psychischen Entwicklung des Kindes; er ist keineswegs die notwendige Konsequenz der in Grubes Einleitung gegebenen theoretischen Betrachtungen und hat in der Schulpraxis nicht die erwarteten Früchte gezeitigt.

Die Operationen der Multiplikation und Division entstehen aus der Addition und Subtraktion, als deren Abkürzung sie sich darstellen, sie bezeichnen eine spätere Denkform, können sohin nicht im unmittelbaren Anschlusse an die Betrachtung jeder einzelnen Zahl angeschlossen werden. Die Grundübungen der Addition und Subtraktion kommen nicht genügend zur Geltung; die Rechensätze folgen nicht so aufeinander, dafs sie leicht eingeprägt werden können. Wenn der Schüler auch alle Zahlen innerhalb 100 nach dem Grubeschen Schema betrachtet, so lernt er doch nicht rechnen. Die immer gleichen Übungen und endlosen Wiederholungen wirken ermüdend und schwächen das Interesse. Dieser Lehrgang macht zu hohe Ansprüche an die Kräfte des Schülers; auch der Lehrer wird hinsichtlich der verfügbaren Zeit und Kraft allzusehr in Anspruch genommen. Endlich kann dieser Lehrgang mit Rücksicht auf die der Volksschule zur Verfügung stehende Zeit nicht durchgeführt werden. Thatsächlich ist man von der allseitigen Behandlung aller Zahlen von 1—100 zurückgekommen und hat den Grubeschen Lehrgang auf die Zahlenreihe von 1—10, oder doch von 1—20 eingeschränkt.

Zu gunsten dieses Lehrganges ergibt sich: Die Abstufung des Rechenstoffes in die dekadischen Zahlenkreise ist durch denselben entschiedener betont worden; das Zerfällen der Zahlen in ihre Bestandteile wird beim Rechnen auf Schritt und Tritt erfordert. Wer aber die Zahlen geschickt zerfällen will, mufs ihre Bestandteile kennen. Die monographische Zahlbehandlung leistet dieser Kenntnis entschieden Vorschub. Der Grubesche Lehrgang hat den Lehrern die Abhängigkeit der Rechenoperationen mit allem Nachdruck klargelegt und dadurch eine grofse Mannigfaltigkeit von Übungen schon innerhalb des Zahlenraums von 1—10 erschlossen.

Hiernach überwiegen die Nachteile die Vorteile, welche dieser Lehrgang bietet. Ob und inwieweit derselbe gleichwohl berechtigt ist, kann in einer historischen Abhandlung nicht nachgewiesen werden.

Kaselitz, Rektor in Berlin, folgt Grube zwar nicht im Lehrgange, aber im Ziele des Rechenunterrichts. Im Jahre 1867 veröffentlichte er eine kleine Schrift, in welcher die Frage ventiliert ist: Wie mufs sich die Methode des Rechenunterrichts gestalten, damit sie sittliche Bildung wirkt? Antwort: So, dafs der Unterricht 1. Fertigkeit, 2. Einsicht, 3. Harmonie des Erkennens, Wollens und Handelns bezw. eine richtige Wertschätzung der Dinge und dadurch die richtige Auffassung des Verhältnisses erzeugt, in welchem das Individuum zur Gesamtheit steht. Von diesen Gesichtspunkten ausgehend, hat Kaselitz einen Wegweiser für den Rechenunterricht an den deutschen Schulen entworfen. In dieser Schrift läfst der Verfasser die Grundzahlen innerhalb der Dekaden des 1. Hunderters als operative Zahlen auftreten, wodurch sein Verfahren als Synthese in Gegensatz tritt zu der Grubeschen Analyse. Sein Lehrgang erweitert mit der gröfseren Zahl auch den Zahlenkreis und berücksichtigt die der Altersstufe homogenen Sachverhältnisse. Auf der Vorstufe läfst er jede Zahl und jede Aufgabe veranschaulichen, auf der 2. Stufe werden die Veranschaulichungsmittel nur mehr bei der Entwicklung benutzt. Als eigentliche Arbeit in den Rechenstunden bezeichnet Kaselitz das Üben mit der Mahnung: Sprich nicht mehr, als unbedingt notwendig ist (Krancke), lasse dafür aber deine Schüler viel (und gut) sprechen. Auch mahnt Kaselitz zur Gründlichkeit, insbesondere bei den ersten Zehnern, in welchen die Praeexistenz aller Zahlveränderungen liegt. Zugleich redet er dem Memorieren der Rechensätze das Wort: »Das Rechnen erfordert wie jeder Unterricht seine Memorierstoffe, ein gewisses Mafs positiven Wissens und unverlierbaren Eigentums, ein immer parates Handwerkszeug. In der völligen Beherrschung der »vier Einsen«, in der Geläufigkeit der elementaren Operationen mit den Grundzahlen, in dem gedächtnismäfsigen Angeben aller Summen, Differenzen, Produkte und Quotienten liegt das ganze Geheimnis aller Rechensicherheit und Rechenfertigkeit in den Operationen mit gröfseren Zahlen.

Die von Grube angedeutete Richtung hat neuerdings einen geschickten Vertreter gefunden in K. O. Beetz, Lehrer an den Franckeschen Stiftungen: zugleich behandelt der Verfasser das Typenrechnen auf psychologischer Grundlage. »Es ist merkwürdig«, sagt O. Beetz zutreffend, »dafs der Kern der Grubeschen Theorie, die bezweckte sittliche Bildung, vor der Form, der monographischen Zahlbetrachtung, zunächst vollständig zurücktrat, und dafs sich alle Kämpfe nur um die Methode drehten. Demgemäfs stellt sich Beetz die Aufgabe nachzuweisen, ob mit dem Typenrechnen eine vertiefende Begründung oder etwaige Berichtigung des Grubeschen Bildungsziels oder des Grubeschen Bildungsweges gegeben ist. Die Erziehung hat nach Beetz eine doppelte Aufgabe; sie mufs 1. den Zögling mit sittlichen Gütern bekannt machen, 2. die ethische Einsicht zu einem solchen Grade von Schärfe und Kraft erheben, dafs sie in der einzelnen Wahl den Sieg davonträgt. Kann der Rechenunterricht solche Wertgefühle erzeugen? Ja, denn 1. die Mathematik ist die einzige Wissenschaft, welche der menschlichen Erkenntnis offen liegt, deren Resultate eine unumstöfsliche Wahrheit haben. Die richtige Lösung der einfachsten Rechenaufgabe führt zur unbedingten Wahrheit, die von dem Kinde unmittelbar gefühlt wird. Wahrheit aber ist das erste und gröfste sittliche Gut. 2. Mit der Erkenntnis der unerbittlichen Regelmäfsigkeit der merkwürdigen Verhältnisse wächst das Interesse, die Freude an neuen Errungenschaften, welche zur weiteren Ausbildung führt. 3. Unübersehbar ist der mittelbare ethische Einflufs des Rechnens. Auf die Zahl stützen sich alle exakten Wissenschaften, sie erschliefst uns die unendlichen Räume und Zeiten (Paricius), dies gilt auch für das Kind, dem zum ersten Male der Begriff der Einheit und Vielheit, des unendlichen Fortschrittes aufgeht. — Kann der Rechenunterricht den ethischen Entschlufs, die sittliche Wahl erleichtern oder den guten Willen zur Bethätigung reizen? Der Erziehung liegt nur an demjenigen Willen etwas, welcher sich den Gesetzen unterwirft und sich selbst im Interesse der Allgemeinheit vergifst. Das kostet Selbstüberwindung. Im Rechnen ist aber subjektive Willkür ausgeschlossen. Beetz verläfst aber das Grubesche Lehrverfahren, denn Grube verwechselt Sachanschauung und Zahlanschauung. Was nützen dem Kinde die Kugelreihen, die Stäbchenbündel, Steinhäufchen! Sobald die Drei übrschritten ist, erblickt das Kind unübersehbare Mengen von Dingen, keine bestimmten Zahlen. Beetz sucht nun durch künstliche Gruppierung von Rechenkörpern die Grundzahlen von 1—12 zur Anschauung zu bringen. Zur weiteren Orientierung müssen wir auf die diesbezügliche Schrift selbst verweisen.

Wir schliefsen unsere Betrachtungen über die Rechenlitteratur der Neuzeit mit dem Hinweise auf eine kleine, von der historisch-philologischen Fakultät der Universität in Dorpat ausgezeichnete Schrift: Die Methodik des elementaren Rechenunterrichts, principiell-systematisch dargestellt von R. G. Kallas, Mitau 1889, und geben zur vorläufigen Orientierung einige Citate aus derselben:

Die vorhandene Rechenlitteratur legt Zeugnis dafür ab, dafs die elementare Rechenmethodik nun zu einer einheitlichen empirischen Abrundung gelangt und auf dem eingeschlagenen Wege nicht mehr bedeutsam weiter zu fördern ist. Es ist daher wegen der Reife der Erfahrungsarbeit auf diesem Gebiete an der Zeit und nützlich, dasselbe Objekt spekulativ und deduzierend zu bearbeiten; denn auf empirisch-deskriptivem Wege kommt man nicht zur freudig schaffenden Gewifsheit, die Wahrheit wirklich erkannt zu haben, noch zur Möglichkeit, die einzig notwendigen Teile eines Ganzen erschöpfend zu entdecken, noch auch zu der Fähigkeit, die zufällig gefundenen Gedanken organisch zu ordnen. Damit ist die Notwendigkeit einer prinzipiellen, systematischen Bearbeitung des Faches nachgewiesen. Da es sich hier nicht um die Entdeckung mathematischer Wahrheiten handelt, sondern blofs um die systematische Methode ihrer Vermittlung an die Psyche des Lernenden, so ist die Arbeit eine pädagogische und müssen sich daher ihre Initiativen und tragenden Gedanken von einer ganz bestimmten Weltanschauung erwecken lassen. Diese ist weder der Idealismus, noch der Materialismus etc., sondern es wird (nach Prof. Teichmüller) eine Weltanschauung stipuliert, welche die Welt der Substanzen oder Wesen als differente Elementarprinzipien statuiert, die in einem organischen Koordinatensystem lebendig sind. Um das Rechnen zu erfassen, mufs man stets dreierlei unterscheiden: das rechnende Subjekt, die Funktion des Rechnens und die Zahl, die als Resultat der zusammenfassenden Thätigkeit beim Rechnen erscheint. Das Elementarprinzip tritt daher in dreifacher Wendung auf: 1. als Personal-, 2. als Operations-, 3. als Stoff- oder Material-prinzip. Das Personalprinzip heifst in seiner allgemeinsten Form: Berücksichtige den Entwicklungsstand der lernenden Person. Das Operationsprinzip ist in dem Satz enthalten: Das Wesen des elementaren Rechnens besteht in der Zusammenfassung der aus der Zahlenreihe gegebenen Beziehungspunkte unter dem Gesichtspunkt des Addierens, Subtrahierens, Multiplizierens und Dividierens. Das Stoffprinzip lautet: Die mit der Ureins als ihrem Element beginnende natürliche Zahlenreihe entsteht so, dafs jede folgende Zahl im Bewufstsein durch den Hinblick auf die vorhergehende Zahl und die Ureins als höhere zusammenfassende Einheit beider entspringt. Diese drei Prinzipien lassen sich so zusammenfassen: Das Wesen des elementaren Rechnens ist die durch die Person des Rechners erfolgende Zusammenfassung der aus der Zahlenreihe herausgehobenen Beziehungspunkte unter einen gegebenen Gesichtspunkt (der Elementarspezies) mit bewufstem Hinblick auf die Zahlenreihe, die beim Denken jeder Einzelzahl in steter intellektualer Intuition gehalten wird. Hiernach wird verlangt, dafs der Rechner keine Zahl isoliert denke, sondern jedesmal die Zahlreihe überschaue, dafs alle Rechengesetze, Erklärungen, Auflösungsweisen nur im Hinblick auf die Baugesetze der Zahlenreihe entspringen, und dafs eben deshalb bei Ableitung der methodischen Grundsätze die Baugesetze der Zahlreihe dominieren. Kallas wendet das Fundamentalprinzip nun an auf das individuelle Koordinatensystem der (kahlen) Zahl, dann auf das individuelle Koordinatensystem der Zahl in dem Koordinatensystem der Welt. (Angewandtes Rechnen.) Die natürliche Zahlreihe hat zwei gesonderte Bestandteile: die natürliche Zahlreihe der Ganzen und die Bruchzahlenreihe. Deshalb ist eine dreifache Rechenbewegung denkbar: 1. in der natürlichen Zahlreihe, 2. in der Bruchreihe, 3. von einer dieser Reihen in die andere. Es ist unmöglich, langweilig und zeitraubend, den ganzen Aufgabenstoff, wie Grube angestrebt hat, um die Einerordnung zu gruppieren. Die Gesichtspunkte der Stoffgruppierung ergeben sich vielmehr aus der Decimalordnung, der Decimalproduktenordnung und aus der allgemeinen Produktenordnnng (dem Einmaleins). Die konzentrischen Kreise im Unterricht sind bezeichnet durch 10, 100, 1000 etc. Im ersten Zahlenkreis mufs jede Zahl für sich behandelt werden, da ja der folgende Gesamtbestand der Reihe durch die ersten 10 Zahlen existiert. Damit ist (wie von Dr. Rein) Grubes System in bestimmter Begrenzung anerkannt. Der zweite Zahlenraum verlangt als der komplizierteste die sorgfältigste Gruppierung des Stoffes um Repräsentantenaufgaben, ohne und mit Durchgang. Als Spezies gelten: die Addition, Subtraktion, Messung, Multiplikation und Teilung. Addieren und Subtrahieren, Subtrahieren und Messen, Addieren und Multiplizieren, Multiplizieren und Teilen, Teilen und Messen, endlich Multiplizieren und Dividieren gehören zusammen. Es gibt 4 normale Auflösungsweisen: 1. durch die Einerbewegung, 2. durch die Decimalbewegung, 3. durch die Decimalproduktenbewegung, 4. durch die Produktenbewegung. Der Grund dieser Norm liegt darin, dafs sich die Auflöseweisen zu den Stoffen verhalten, wie das reale Sein zum ideellen. Danach mufs beim Addieren und Subtrahieren das Augenmerk auf den Zehner- und Hunderterdurchgang gerichtet werden, die Zerlegung der Zahlen in dekadische Bestandteile erfolgen. Aus dem Wesen der Multiplikation geht hervor, dafs sich diese auf den Wegen der Additionsauflösungsweisen bewegen mufs etc. Das Ziel der Rechenbewegungen ist das Können nebst der Einsicht in die Gesetze. Zur Einsicht führt die Erklärung, zum Können die Übung. Gesetze werden durch Vergleichung erkannt, und mechanische Schwierigkeiten durch Bearbeitung analoger Fälle überwunden. Beim Grundstock alles Rechnens (den 4 Einsen) ist unter Benutzung der Anschauung das Memorieren notwendig. Da die Reihe von 10—20 nach denselben Gesetzen sich bildet wie die Reihe von 20—30, so mufs dasselbe Gesetz auftreten bei der Addition $14 + 9$, $24 + 9$, $34 + 9$ etc. Sollen die Übungen nicht isoliert werden, so müssen sie nach den Repräsentanten gruppiert in R e i h e n so lange weitergeführt werden, bis eine deutliche Einsicht erzeugt und das Können ein rasches geworden ist. Weil hier eine unberechenbare Zahl von Variationen möglich ist — Auf- und Abzählen ohne Überspringungen, mit Überspringungen in kleineren oder gröfseren Intervallen, Übungsreihen der Multiplikation und Division — so ist jeder Mechanik vorgebeugt. — Ein s c h r i f t l i c h e s R e c h n e n gibt es ebenso wenig wie ein schriftliches Denken, denn beides kann nicht räumlich vor sich gehen; aber die Zusammenfassungen des realen Rechnens können räumlich-semiotisch bezeichnet werden. Die Ursache der schriftlichen Übungen ist die Beschränktheit des Gedächtnisses. Daher ist das Dirigierende überall das Mündliche, dieses liefert die Gründe, bestimmt in der Hauptsache die Reihenfolge der Aufgaben. Der Hauptunterschied zwischen dem mündlichen und schriftlichen Rechnen liegt im Anfangspunkte der realen Funktion, denn das schriftliche Rechnen beginnt, abgesehen von der Division, immer mit den Einern, das mündliche mit der höchsten dekadischen Einheit. — Der Bruch kann nicht durch räumliche Funktionen entstehen; denn die Ureins als Idee ist unteilbar. Der Bruch ist ein Quotientverhältnis, der Nenner nicht etwa der bloſse Name des Bruches. Das Element der Interpolations- oder Bruchreihen ist der Stammbruch. Da es unendlich viele Stammbrüche gibt, gibt es auch unendlich viele Interpolationsreihen, welche genau nach demselben Gesetze gebildet werden, wie die natürliche Zahlreihe gebildet wird. ($1 + 1 = 2$; $2 + 1 = 3$; $3 + 1 = 4 \ldots$ $^1/_4 + {}^1/_4 = {}^2/_4$; $^2/_4 + {}^1/_4 = {}^3/_4$; $^3/_4 + {}^1/_4 = {}^4/_4$ etc.). Daraus ergibt sich, daſs es keinen gröſseren Unterschied zwischen den einzelnen Bruchreihen gibt, als zwischen einer beliebigen Bruchreihe und der natürlichen Zahlreihe. (Darum ist das Rechnen mit gleichnamigen Brüchen von dem Rechnen mit Ganzen kaum unterschieden.) Es ist daher auch nicht notwendig, eine Scheidewand zwischen Brüchen und Ganzen aufzurichten. Bei den ungleichnamigen Brüchen sind die Vorübungen die Hauptsache. Hierbei kann die rechnende Bewegung so gedacht werden, daſs sie von der natürlichen Zahlenreihe aus zu irgend einer Interpolationsreihe oder von einer solchen zur natürlichen Zahlreihe fortschreitet; jedesmal kann die Kommunikationsbewegung allein ($4 =$ w. v. Achtel?) oder mit einer Zusatzbewegung ($4\,^3/_8 =$ w. v. Achtel?) gefordert sein. Auſserdem finden Kommunikationsbewegungen zwischen je zwei Interpolationsreihen statt. (Erweitern und Heben.) Die Auflösung vollzieht sich durch direkte und vermittelte Schlüsse. Ein direkter Schluſs kann stattfinden in jeder isoliert gedachten Reihe zwischen dem Element der Reihe und irgend einer Zusammenfassung, zwischen der Ureinheit und jedem beliebigen Stammbruch. Ein vermittelter Schluſs dagegen ist indiziert zwischen der Ureinheit und jedem abgeleiteten Bruch (1 Pfd. kostet 64 ₰, w. k. $^3/_4$ Pfd.?), ebenso zwischen je zwei Reihen, d. h. zwischen der natürlichen Zahlreihe und einer beliebigen Interpolationsreihe, oder zwischen je zwei Interpolationsreihen. Letzterenfalls geht der Weg des Schlusses zum Stammbruch der gegebenen Reihe, von da zur Ureinheit, dann zum Stammbruch der

Kommunikationsreihe, von diesem zum abgeleiteten Bruch. Beisp. $^1/_4$ Pfd. kostet 3 ℳ, was kosten $^5/_6$ Pfd.? $^1/_4$ Pfd. kostet 3 ℳ; 1 Pfd. kostet $4 \cdot 3$ ℳ = 12 ℳ; $^1/_6$ Pfd. kostet $^{12}/_6$ ℳ = 2 ℳ; $^5/_6$ Pfd. kosten 5×2 ℳ = 10 ℳ. Jede Zahl kann in unendlich vielen Formen ausgedrückt werden. Je weiter sich die Zahlen in ihrer Ordnungsfolge von der Ureins entfernen, desto schwerer sind sie zu überschauen. Die Seele hat aber die gröfste Freude an der Einfachheit und Überschaulichkeit. Man bringt daher Brüche auf die kleinste Form. Dies ist das Gesetz des Resultates

Der II. Teil behandelt die Methodik des Rechnens mit an gewandten Zahlen. Es soll hier die Anwendung der 4 Funktionsarten des realen Rechnens gelernt werden, d. h. es soll hier die Beurteilungskraft geübt werden in der Erkenntnis des Wann? der anzuwendenden Spezies. Diejenige Stufe der Anwendung wird die höchste sein, welche die Aufgaben in solcher Einkleidung bringt, dafs die anzuwendende Spezies in keiner Weise in der Aufgabe unmittelbar aufgedeckt vorliegt, sondern, weil verdeckt, erst erschlossen werden mufs; die unterste Stufe mufs die anzuwendende Spezies geradezu angeben. In der Mitte aber fallen Aufgaben, welche die zu vollziehende Species teilweise angeben, teilweise verstecken. Die Einkleidungen müssen aus allen Gebieten des Lebens hergenommen werden.

Der Rechenunterricht in seiner gegenwärtigen Form.

Übereinstimmende Gesichtspunkte.

Das Rechnen selbst hat seit 100 Jahren sachlich keine Fortschritte aufzuweisen. Die Numeration ist zwar zur Ruhe gelangt, aber deshalb nichts weniger als vollkommen. Die Zahlbezeichnung steigt von rechts nach links, wir lesen aber von links nach rechts, und das nicht einmal konsequent, sondern die Einer vor den Zehnern. Eine Änderung zum Bessern ist hier nicht so bald zu erwarten, da man es mit einem uralten, allgemeinen Gebrauche zu thun hat, dessen Inkonseqnenz höchstens im Schulunterrichte lästig auffällt. Die Punktation beim Zahlenschreiben ist nach dem Bundesratsbeschlusse vom 8. Oktober 1877 ganz fortgefallen; es sollen nunmehr alle Trennungszeichen beim Schreiben gröfserer Zahlen wegbleiben, und die dreistelligen

Gruppen durch Zusammenrückung der einzelnen Stellen und das Spatium kenntlich gemacht werden, z. B. 364 721 624. Die Praxis ist jedoch noch weit entfernt von dieser Norm, wie ein Blick in die Tagesblätter lehrt. Die alte Division und Neunerprobe sind von den Massen total vergessen. Proportionen und Reesischer Ansatz sind dem Zwei- oder Schlufssatze gewichen. Als Operationszeichen gelten nun allgemein $+$ (plus), — (minus), $\times$ oder $\cdot$ (mal) und : (geteilt durch) oder | für das Enthaltensein. Die Zeichen $<$ $>$ werden im Elementarunterrichte selten gebraucht, neuerdings in den Pfälzer Rechenheften.

Der Rechenstoff ist bei einer bewunderungswürdigen Vereinfachung angelangt. Progressionen, Regula falsi und virginum, Holz-, Schin- und Fischrechnungen, ja sogar die eigentlich kaufmännischen Rechnungsarten sind aus den elementaren Rechenbüchern entweder ganz verschwunden oder doch auf ein bescheidenes Plätzchen gedrängt. Durch die Einführung des zehnteiligen Systems in den Raum- und Wertmafsen wurden Hunderte von Reduktionszahlen und die durch dieselben bedingten Rechnungen entbehrlich. Wer rechnet heute noch mit Kronen- oder Konventionsthalern? Das sog. Resolvieren und Reduzieren benannter Zahlen ist nun sehr einfach. Das Rechnen mit gemeinen Brüchen erträgt eine wesentliche Einschränkung; dagegen sind die Decimalbrüche in den Vordergrund getreten.

Das Rechnen ist nun allgemein als ein *Hauptgegenstand des deutschen Elementarunterrichts anerkannt*; wohl in allen deutschen Volksschulen wird es im Sinne der neueren Rechenmethodiker, wenn auch in tausendfältigen Variationen betrieben. Allgemein setzt man als *Zweck des Rechenunterrichts* die Erwerbung einer für das bürgerliche Leben notwendigen Fertigkeit, und alle Methodiker verlangen, dafs diese Fertigkeit *vollständig* erreicht werde. Auch in der methodischen Grundsätzen herrscht bei aller Verschiedenheit doch eine Übereinstimmung, wie sie sich in gleichem Mafse bei keinem andern Gegenstande des Volksschulunterrichts findet. Das Rechnen sei bildend; es schliefse sich an die Auffassungsweise und Bedürfnisse des Kindes an; das Kind soll unter angemessener Leitung die Rechenfertigkeit sich selbst erwerben; wenige Regeln, viele Übung u. s. w. — das sind Grundsätze, welche nirgends bestritten werden. Das zu Lernende wird aus dem Wesen der Sache erklärt. Das Kopfrechnen hat seine Stellung behauptet: es geht dem schriftlichen Rechnen gleichsam als eine die Einsicht ermittelnde Übung auf allen Stufen und Zwischenstufen voraus; es übt in kleinen Zahlen, während dem Schriftrechnen Aufgaben mit gröfseren und mehreren Zahlen vorbehalten sind. Das angewandte Rechnen tritt meist von allem Anfang an auf, es findet auf allen Stufen die ihm gebührende Berücksichtigung, bildet aber nach Erlernung der 4 Grundoperationen auf den höheren Stufen das einzige Objekt des Rechenunterrichts. Die angewandten Aufgaben dehnen sich insbesondere auf das gebräuchliche Mafs-, Münz- und Gewichtssystem aus. Regelmäfsig wird in den Aufgabensammlungen für eine konstante Wiederholung des früher Erlernten gesorgt. Allgemein fordert man einen genetischen, vom Leichten zum Schwereren aufsteigenden Lehrgang. Es werden daher die Schüler nur allmählich in kleineren oder gröfseren Abstufungen in das unendliche Zahlengebiet eingeführt. Man behandelt die Zahlen innerhalb der Reihen, 1—10, 1—100, 1—1000 und darüber, daneben finden sich noch Unterabteilungen 1—5, 1—20 u. s. w. In den Abschnit von 1—100 fällt die Übung des kleinen Einmaleins. Die Rechnungen mit mehrsortigen Zahlen werden, wenn sie auch früher schon aufgetreten sind, doch noch in einem eigenen Abschnitte durchgearbeitet.

Der Bruchlehre geht ein Kursus mit Vorübungen voraus, welcher die Entstehung, Darstellung und Arten der Brüche behandelt, die Vergleichung mehrerer Brüche hinsichtlich ihrer Gröfse, die Verwandlung ganzer und gemischter Zahlen in Brüche und umgekehrt, die Veränderungen, welche mit dem Werte eines Bruches vorgehen, wenn a. der Zähler, b. der Nenner multipliziert oder dividiert wird, und im Anschlusse daran das Erweitern, Kürzen und Gleichnamigmachen der Brüche.

Der heutige Rechenunterricht ist, wie die naturgesetzliche Entwicklung des Gegenstandes und des Kindes es fordert, naturalisierend. Deshalb werden die arithmetischen Funktionen durch irgendwelche gleichartige Sinnendinge veranschaulicht. Die Notwendigkeit der Veranschaulichung ist wenigstens für den Anfangsunterricht und für bestimmte Partien des Rechenstoffes, z. B. für die Bruchlehre, für die Decimalordnung allgemein zugestanden, selbst von denjenigen, welche in den Zahlwörtern lediglich leere Wortschälle erkennen. Die erste Operation ist immer das anschauliche Rechnen, diesem folgt das Rechnen in der Vorstellung, an welches sich das Schriftrechnen anschliefst.

Nicht gering ist aber noch die Zahl der

Divergenzpunkte.

Die Rechenmethodiker gehen über den Zweck des Rechenunterrichts insofern auseinander als sie neben der Rechenfertigkeit noch einen formalen Zweck, die Bildung des Verstandes, die Erziehung des Kindes zur Sittlichkeit stipulieren. So sagt z. B. Kentenich: Bei jeder Aufgabe wird verlangt Erkenntnis dessen, was die Aufgabe fordert, Betrachtung der zu Gebote stehenden Mittel und richtiger Gebrauch dieser Mittel. Daraus ergibt sich der Wert des Rechnens für die Geistesbildung und das Leben. Sachse bemerkt: Wenn man von mathematischen Begriffen vielfach eine geringe Meinung hat, so sei dagegen bemerkt, dafs sie sehr einfach und klar und daher einer gröfseren Schärfe fähig sind, als alle anderen Begriffe, dafs sie daher ein vorzügliches Mittel sein müssen, um Klarheit und Schärfe in der Begriffsbildung überhaupt zu erzielen. Auch sittliche Wirkung schreibt Sachse dem Rechenunterrichte zu und weist die diesbezüglichen Gebiete nach. Knilling dagegen behauptet: Alles Rechnen ist Zifferrechnen. Der Kopf ist nie leerer an deutlichen, bestimmten bildlichen Vorstellungen als dann, wenn er rechnet. Das Rechnen ist kein Gegenstand der Anschauung, es ist ein mechanischer Vorgang, der selbst von Maschinen (Schrittzähler) besorgt werden kann; es besteht im Zerlegen der Zahlen in ihre dekadischen Bestandteile und im Anwenden und Übertragen des Einmaleins auf dieselben. Die Zerlegung ist durch die Zahlbezeichnungen bereits gegeben, ein Denken also nicht erforderlich. Das Rechnen eignet sich deshalb nicht zu einem formalen Bildungsmittel. Noch drastischer spricht sich Körner (Geschichte der Pädagogik 1857) aus: Man überschätzt das Rechnen, wenn man ihm eine geistbildende, ethische Kraft zuschreibt; denn durch das Rechnen wird der Mensch nicht um einen einzigen höheren, sittlichen Gedanken reicher. Die Denkthätigkeit beim Rechnen ist unproduktiv, gemütlos; es ist daher sinnloses Geschwätz, wenn Grube dem Rechnen eine ethische Wirkung zuschreibt; man sollte es deshalb auch nur als

Mechanismus (so?) behandeln und ergiebigeren Stoff zur Bildung des inneren Menschen wählen. Nach dem Urteile Steuers liegen die Bedingungen für die sittliche Bildung nicht im Rechenstoffe, nicht in der Art und Weise seiner Bearbeitung, sondern in dem Willen und Geschick des Lehrers, in den Rechenstunden unbedingte Stille, strenge Aufmerksamkeit, Ordnung im Denken und in der schriftlichen Darstellung zu erzielen.

Selbst das materielle Ziel des Rechenunterrichts ist nicht genau bestimmt. v. Raumer, Fahle u. a. verlangen, jedes Kind soll im Rechnen so weit kommen, dafs es mit Leichtigkeit Aufgaben löst, wie sie das gewöhnliche bürgerliche Leben bringt. Allein die Forderungen des alltäglichen Lebens sind nach den einzelnen Berufsklassen sehr verschieden. Deshalb wird von einem Teile der Rechenmethodiker das Ziel im Stoffe umgrenzt. Sie sagen z. B.: Die Aufgabe des Rechenunterrichts ist gelöst, wenn der Schüler Fertigkeit und Sicherheit in den Grundrechnungsarten mit ganzen Zahlen und Brüchen erlangt hat und befähigt ist, die gewöhnlichen Regeldetriaufgaben aufzulösen. Aber auch diese Zielangabe ist noch unbestimmt.

Am weitesten gehen in der Stoffauswahl die Sachrechenmethodiker, wie Goltsch und Knilling; engere Grenzen ziehen diejenigen, welche weniger das zukünftige Bedürfnis des Kindes, als seine gegenwärtige Entwicklungsstufe mafsgebend sein lassen. Knilling verlangt z. B., dafs der Schüler einen Einblick in Handel und Verkehr und in das gewerbliche Leben erlange, dafs die Rechnungsstellung des Geschäftsmannes gelehrt, von den Steuern, Wertpapieren, dem Wechsel, der Grofsindustrie, dem Staatshaushalt gehandelt werde. Diesen bei 12—14 jährigen Kindern unerreichbaren Forderungen gegenüber nehmen die Angehörigen der Herbartschen Schule einen recht vernünftigen Standpunkt ein, indem sie nur jene Sachverhältnisse in Betracht ziehen, für welche sich Apperceptionshilfen im Gedankenkreise der Schüler vorfinden. Dr. Hartmann und Dr. Rein gehen auf das zurück, was das Kind interessiert: »Die Anwendung der Zahlen auf die Verhältnisse der Natur wird dem Kinde im Bereiche der 4 Grundoperationen immer nahe liegen, sobald es nur diese Verhältnisse richtig aufzufassen vermag. Die Verhältnisse des Menschenlebens hingegen wollen erlebt sein, nicht nur um genügend verstanden zu werden, sondern um überhaupt zu interessieren. So hat das Kind gewiſs Interesse und Verständnis für einfache Einkaufsrechnungen, welche sich auf die gewöhnlichsten Lebensbedürfnisse beziehen. Es wird sich aber nicht angezogen fühlen von zusammengesetzten kaufmännischen Rechnungen, Wechsel-, Termin- und anderen Aufgaben.« Im allgemeinen macht sich in der Neuzeit eine Strömung zu gunsten der Vereinfachung des Rechenstoffes bemerklich. Für die Beschränkung des Lehrpensums sprechen z. B. Büttner, Weitz, Steuer, Frohn, Schlott, Kentenich, Dr. Hartmann, und es soll dieselbe erreicht werden durch den Ausschluſs besonderer Rechenformen und Aufgaben, insbesondere derjenigen, welche im Leben nicht vorkommen (Berechnung der Geburtszeit aus dem Sterbedatum und der Lebensdauer, der Gröſse eines Kapitals aus den Zinsen), oder welche nicht Gemeingut aller Bevölkerungsklassen sind, z. B. der Mischungsrechnung mit Metallen. Unter sehr verschiedener Beurteilung stehen die sog. algebraischen Aufgaben, d. i. solche Aufgaben, bei welchen die anzuwendenden Rechnungsarten nicht offen vorliegen, sondern durch geschickte Schlüsse erst bloſsgelegt werden müssen. Diejenigen, welche dem Rechnen eine den Verstand übende Wirkung zugestehen, erkennen in diesen Aufgaben selbstverständlich ein willkommenes Mittel; ja, manche geben solche Knacknüsse, um Abwechslung in das ewige Kaufen und Verkaufen zu bringen, oder gewissermaſsen zur (zweifelhaften) Erholung gegen Schluſs der Stunde. Denjenigen, welchen das Rechnen lediglich eine Fertigkeit für das Leben ist, gelten auch die algebraischen Aufgaben nichts, eben weil sie im Alltagsleben nicht vorkommen.

Feste Richtpunkte über die Auswahl und Verteilung geben die staatlichen Schulverordnungen, welche in dem Getriebe der Tagesmeinungen für die unmittelbare Schulpraxis geradezu als eine Wohlthat erscheinen, selbst wenn sich ihre Bestimmungen durch bessere ersetzen lieſsen.

Der gröſste und jedenfalls bedeutsamste Unterschied, welcher alle Maſsnahmen für die ersten Rechenstufen normiert, geht von der Ansicht aus, worin das Wesen der Zahlvorstellungen oder Zahlbegriffe bestehe, wie ihre psychische Entwicklung erfolge. Von der Mehrzahl der Rechenmethodiker wird die Pestalozzische Theorie, daſs der Zahlbegriff das Ergebnis einer Abstraktion auf Grundlage der sinnlichen Anschauung sei, noch festgehalten und neuerdings in beachtenswerten Schriften und Aufsätzen verteidigt. (Beetz, Das Typenrechnen; Ruppert, Anwendung der Pestalozzischen Methode im mathematischen Unterricht, 11. Jahrbuch des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik. Teupzer, Das Rechnen im II. Schuljahre, ebenda, 21. Jahrgang.) Salberg behauptet, dafs innerhalb der ersten Dekade kein Zahlbegriff ohne Abstraktion entstehen und diese nicht ohne Veranschaulichung vor sich gehen könne. Langenberg geht noch weiter; denn die Anschaulichkeit besteht nach seiner Ansicht darin, dafs man sich bei jeder Zahl die Menge der Einheiten vorstellt, die sie enthält. Knilling, Tank, Hartmann u. a. dagegen behaupten, dafs Zahlanschauungen als klare, bestimmte und plötzliche Erfassung der Zahl in ihren Einheiten und möglichen Gruppierungen nicht existieren. Keine Zahl, sagt Knilling, wird aus der blofsen Wahrnehmung erkannt, kein einziges Rechenergebnis wird durch dieselbe ermittelt oder bewiesen. Dafs $7 + 5 = 12$ ist, vermag mir keine, auch nicht die sorgfältigste Anschauung der Mengen 7 und 5 zu sagen. Was wir von der Zahl wissen, wird lediglich durch das Zählen erschlossen. Das Zählen führt aber nicht zu Zahlanschauungen, sondern lediglich zu bestimmten Zahlnamen. Während die meisten Methodiker der Gegenwart die Existenz reiner Zahlen, der Zahlbegriffe ohne Beziehung auf irgendwelchen Gegenstand anerkennen, behaupten andere, dafs eine Vorstellung von Mengen beim gleichzeitigen Wegdenken aller Gegenstände etwas Unmögliches sei. »Reine Zahlen gibt es nicht; die sog. reinen Zahlen sind unvollkommen gelassene Zahlbezeichnungen« (Knilling). Einen ähnlichen Standpunkt nimmt Sachse ein: »Es gibt keine Zahlvorstellungen. Keine Lösung einer Aufgabe fordert von dem Rechner, dafs er sich die gegebenen Zahlen vorstelle.« Sachse wendet sich aber gegen Knilling, indem er die Existenz von Zahlbegriffen nachweist. Auch nach der Ansicht Hartmanns können klare und deutliche Vorstellungen in dem Sinne, wie es klare und deutliche Vorstellungen von Sinnendingen gibt, bei Zahlen überhaupt nicht vorkommen.

Aus dem Dualismus der Ansichten über die Entstehung der Zahlbegriffe leiten sich die gegensätzlichen Forderungen ab, welche an die Veranschaulichung als Prinzip gestellt werden, und davon sind auch die Mittel, die Weisen und die Dauer der

Veranschaulichung abhängig. Diejenigen Rechenmethodiker, welche die Existenz konkreter Zahlvorstellungen überhaupt nicht zugeben, kennen nur Zählmittel. »Nach Kant ist die Zahl die Synthesis des Vielen, d. h. sie wird durch Aufeinanderbeziehen und Zusammenfassen des Vielen, durch einen rein geistigen Akt gewonnen. Die Aussenwelt bietet das Material (das Viele) zu dieser Synthesis; dieses Viele ist aber weder die Zahl, noch trägt es die Zahl als Merkmal an sich. Eine gewisse geistige Thätigkeit mufs hinzutreten, damit die Zahl entstehen kann — das Zählen. Das Zählen aber ist ein Messen«. (Hartmann, Volkmann). Die Beschaffenheit der Zählmittel ist diesen Methodikern meist gleichgültig; es genügt, dafs sie nicht zerstreuen, dafs sie stets bereit und handlich sind. Ein einziges Zählmittel reicht aus. (Hartmann, Knilling, das Jenaer Seminar.) Jenen Rechenmethodikern jedoch, welche die Pestalozzische Theorie von der Zahlanschauung festhalten, welche sohin der Ansicht sind, dafs das Kind, wenn es z. B. rechnet: $3 + 4 = 7$, sich die Einheiten dieser Zahlen vorstelle, geht die Versinnlichung über alles, und sie machen davon einen vielseitigen und ausgedehnten Gebrauch. Die Methodiker dieser Richtung haben eine wahre Sturmflut von Anschauungsapparaten und Tabellen zu Tage gefördert, und immer noch schlägt sie ihre Wellen, so dafs man getrost sagen könnte: Herr halte ein mit deinem Segen! Aber auch innerhalb der Gruppe der Naturalisten gibt es im Punkte der Versinnlichung Meinungsdifferenzen. Die einen legen Gewicht darauf, dafs die aus mehreren Einheiten gebildete Kollektiveinheit ein Ganzes darstelle, welches aber die Zahl der Einheiten, die zu seiner Bildung notwendig waren, erkennen läfst, wie das der Fall ist bei Tillichs Rechenkörpern und dem Graserschen Fenster. Anderen ist dieser Umstand gleichgültig, soferne sie nicht, wie Dr. Dittes, gerade in der Vereinigung mehrerer, je eine Einheit repräsentierender Rechenkörper zu einem geschlossenen Ganzen einen Fehler erblicken. Auch die naturalisierenden Methodiker begnügen sich teilweise mit einem einzigen Hilfsmittel (die Jenenser), wenigstens für ein und dasselbe Schuljahr. Eine Sonderstellung nehmen einzelne Sachrechenmethodiker ein, die alle künstlichen Hilfsmittel, Striche, Punkte, Kugeln etc. verwerfen und das Rechnen prinzipiell nur an solchen Dingen lehren, welche im künftigen Leben thatsächlich berechnet werden (das Geld, die metrischen Mafse und Gewichte). Auf beiden Seiten gehen namentlich die Ansichten über den Wert und die Darstellung der sog. Zahlbilder, d. i. der fixen, in geometrischen Formen geordneten Punkte, Kreise etc. erheblich auseinander. Die einen halten diese Punktgruppierungen für höchst wertvolle Behelfe, welche den Kindern die bildliche Vorstellung aller Zahlen von 1 bis 10 ermöglichen, andere bestreiten ihren Wert. »Die Unterstützung, welche solche Zahlbilder geben, ist unbedeutend; denn das Zahlbild beherrscht nur ein kleines Gebiet. Mengen, die mehr als 10 bis 20 betragen, können durch keine Gruppierung mehr so dargestellt werden, dafs die Zahl ihrer Einheiten auf den ersten Blick erkenntlich ist. Kein Erwachsener stellt sich Mengen in Form von Zahlbildern vor. Das Zahlbild macht die Schüler unpraktisch, weil sie sich ohne dasselbe nicht mehr zu helfen wissen.« (Knilling.) Die Anordnung der Punkte variiert in allen möglichen Fällen, andererseits wird behauptet, dafs dieselbe stets gleich bleiben müsse, wenn das Zahlbild sich dauernd dem Gedächtnisse einprägen soll. Bei Ankündigung neuer Rechenapparate kann man vielfach die Beobachtung machen, dafs erst der Apparat konstruiert wurde, und dafs man hinterher die Forderungen aufstellte, welchen derselbe entsprechen soll — und in der That dann auch entspricht, wohl die beste Illustration zu der Prinzipienlosigkeit, die noch auf diesem Gebiete herrscht. Auch die Frage, wie lange die Anschauungsmittel gebraucht werden sollen, ist noch nicht geklärt. Die einen dehnen dieselbe nur auf die kleinen Zahlreihen 1—10, 10—20 oder höchstens bis 100 aus und nehmen noch bei der Einführung der Schüler in das vorgeschriebene Mafs- und Münzsystem und in die Bruchlehre Anschauungsmittel zu Hilfe; andere benützen Anschauungsmittel noch bei der Einführung der Kinder in die Tausender. Die Frage, ob die Rechensätze memoriert werden sollen oder nicht, hängt gleichfalls mit der Anschauung über die Entstehung der Zahlvorstellungen zusammen. Für die einen leistet die Zahlanschauung alles; man darf nur die Fälle der Addition, Subtraktion etc. recht oft veranschaulichen, dann prägt sich die Sache von selbst dem Gedächtnisse ein. Andere (wie Jänicke, Kentenich) befürworten das Memorieren der grundlegenden Rechensätze aus dem Eins und Eins, Einmaleins etc.; denn man kann den Namen einer Blume vergessen und doch eine deutliche Vorstellung von dieser Blume haben; wird aber der Name einer Zahl (ein elementarer Rechensatz) vergessen, so geht alles verloren, was das Denken von der Zahl besitzt. Der Zeitpunkt, in welchem die Ziffern zur Übung und Anwendung gelangen, wird ebenfalls von der Ansicht über die Entstehung der Zahlbegriffe bedingt. Die Naturalisten, welche zunächst auf die Bildung der Zahlvorstellungen hinarbeiten, haben nicht selten eine wahre Scheu vor der Ziffer — ganz nach Pestalozzischem Muster. Zunächst müssen die Zahlvorstellungen erweckt werden, und die Schüler im Kopfrechnen einige Übung erlangt haben, dann erst kann das Zifferrechnen, zu dem ohnehin erst bei gröfseren Zahlen ein Bedürfnis erwacht, erlernt werden. Als ob die Ziffer nicht auch ein Zeichen wäre wie der Zahlname, der doch sofort und mit der Entstehung des Zahlbegriffs auftritt, auftreten mufs. Weil sich diese Methodiker aber doch zu einer schriftlichen Beschäftigung im Rechnen genötigt sehen, namentlich da, wo Schüler verschiedener Altersklassen zugleich unterrichtet werden müssen, lassen sie statt der Ziffern Striche, Punkte etc. substituieren, z. B. $||+|=|||$; $||||-||=||$. Andere verwerfen diesen Modus als unpädagogisch und machen unbedenklich sofort von der Ziffer Gebrauch. Thatsächlich sieht das Kind im 2. Beispiel 7 Striche, 2 soll aber das Resultat sein. Weiterhin normiert die Auffassung vom Wesen der Zahlvorstellung die Rechnungsarten. Die »Zähler« legen natürlich auf das Zählen, als Urform alles Rechnens, das Hauptgewicht, die Naturalisten erachten die Zahlanschauung als das Wesentliche. Letztere leben der Überzeugung, dafs die Zahlvorstellung deutlicher werde, wenn sie in ihren einzelnen Bestandteilen erkannt, wenn die mögliche Gruppierung ihrer Einheiten aufgefafst, wenn der Inhalt einer bestimmten Zahl mit dem Inhalte anderer Zahlen verglichen wird. Die Zähler dagegen wollen die umständlichen, zeitraubenden und nutzlosen Operationen des Zahlenzerlegens und Zahlenvergleichens vom Rechenunterrichte ausgeschlossen wissen. Hentschel nimmt an, dafs die Grundlage des Zusammenzählens und Abziehens das Erkennen des Zahlinhalts zur Voraussetzung habe, und folgert: weil der Zahlinhalt durch das Zerlegen erkannt werden kann, ist die Zahlzerlegung die erste Übung nach dem Aufbau der Zahl. So auch Heuner. Knilling repliziert: Der Zahlinhalt kann auf einfachere Weise durch bloſses Zählen ermittelt werden, darum ist das Zahlenzerlegen unnütz — ein unvorsichtiger Schluſs, weil das Zahlenzerlegen zu einem andern Zwecke nützlich sein kann. Wir sehen daraus, daſs die Zahl der Spezies heute noch nicht fest bestimmt ist. Zwar sind das Medieren und Duplieren längst abgethan, und das neuere Ponderieren ist nicht lebensfähig geworden; aber am Grundstock der beiden vermehrenden und der zwei vermindernden Rechnungsarten streiten neue Eindringlinge um den Rang einer Spezies: neben dem vorgenannten Zahlenzerlegen, das Zahlenergänzen, das Vergleichen und Unterscheiden als Abkömmlinge der Subtraktion, das Messen, das Verteilen neben dem Teilen etc. Hartmann hat 4 Species, doch als besondere Form der Division das Messen; Knilling gebraucht 6 Zählarten: Addieren, Multiplizieren, Subtrahieren, Verteilen, Enthaltensein und Messen kontinuierlicher Gröſsen; Salberg vertritt 8 Species: Vergleichen, Unterscheiden, Abziehen, Zusammenzählen, Messen, Vervielfältigen, Teilen und Vereinigen. Die Neigung zur Spezialisierung ist also nicht bloſs das ureigene Gebiet der deskriptiven Naturwissenschaft. Die Folge der Species kommt nicht zu ihrem Rechte bei all jenen Rechenschriftstellern, welche den Lehrgang Grubes sich angeeignet haben. Diejenigen, welche es mit Hentschel und Grube zugleich halten und auf keiner Seite es verderben wollen, arbeiten ein bestimmtes Gebiet der natürlichen Zahlreihe erst nach dem Gesichtspunkte der Monographik, dann nach dem der Spezies durch (Heuner), da eine Generalrepetition doch notwendig sei. Dittmars lehrt die Rechnungsarten nach einander, übt aber das Zerlegen, Ergänzen und Vergleichen erst nach der Addition und Subtraktion. Auch Kentenich fügt das Zerlegen zwischen die Subtraktion und Multiplikation ein. Andere behandeln Addition und Subtraktion parallel, dann die Multiplikation und Division. Die Frage, welche von den beiden Grundformen der Division den Vortritt hat, wird in ganz konträrem Sinne beantwortet. Jänicke, Steuer u. a. behandeln das Enthaltensein vor dem Teilen, weil es anschaulicher und leichter ist. Menzel läſst das Dividieren erst im Sinne des Teilens auffassen, weil das Leben vom Rechner viel häufiger verlangt, daſs er eine Zahl in eine gewisse Anzahl kleiner Teile teile, als daſs er angeben soll, wie oft eine Zahl in einer andern enthalten ist. Die schriftliche

Bezeichnung der Division wechselt. Steuer setzt beim Enthaltensein und Teilen den Doppelpunkt und den Divisor hinter den Dividenden, also 200 : 5 = 200 durch 5. Kehr nimmt diese Bezeichnungsweise für das Teilen, das Enthaltensein bezeichnet er durch Striche und setzt den Divisor vor den Dividenden, z. B. 4 | 8 | = d. h. 4 in 8. Grube setzt stets den Divisor voran, was Harms als unrichtig erklärt.

Während das Ausmafs des Lehrstoffes meist durch äufsere Schulverhältnisse normiert wird und sich sehr verschieden gestaltet, je nachdem man es mit einer ein- und mehrklassigen Schule, mit einer Stadt- oder Landschule zu thun hat, richtet sich die Anordnung des Lehrstoffes, die Folge der Übungen, mehr nach pädagogischen Erwägungen. Wir finden hier sog. konzentrisch sich erweiternde Stufengänge, welche mit sämtlichen Partien des Rechenstoffes, mit den Brüchen, Decimalbrüchen, algebraischen Aufgaben schon auf der Unterstufe beginnen und den hier behandelten Lehrstoff successive ausbauen, so dafs der Schüler, wenn er auch vor der Durcharbeitung des ganzen Lehrstoffes aus der Schule entlassen würde, doch ein abgeschlossenes Ganzes kennen gelernt hätte. (Grube, Salberg, Heuner.) Andere vertreten aber den Grundsatz: Eins nach dem andern, alles zu seiner Zeit. Was auf der unteren Stufe viel Zeit und Mühe kostet, wird bei weiterer Entwicklung der Schüler auf einer späteren Stufe leicht und rasch erlernt. Je mehr man anfängt, desto mehr Erhaltungsaufgaben seien notwendig. Diese Methodiker schliefsen Bruch- und Verhältnisrechnungen etc. von den unteren Stufen aus (Scherer). Grube, Bräutigam, Göpfert, Schneyer, Ziller, Rein gehen im ersten Schuljahre nicht über 10 hinaus. Adam, Hentschel, Kehr, Steuer gehen bis zur Zahl 20, unter günstigen Schulverhältnissen auch Büttner, Heuer und Schlosser-Thieme. Nur Kaselitz geht bis 100. Die meisten Rechenbücher begrenzen den Lehrstoff für das 2. Jahr auf den ersten Hunderter, Göpfert und Kehr gehen auch im 3. Jahre nicht darüber hinaus; innerhalb 1000 bleiben für das 3. Jahr Rein, Bräutigam, Büttner, Heuer, über 1000 hinaus gehen Grube, Ziller, Hentschel und Kaselitz, letzterer dehnt schon im 2. Jahre den Lehrstoff bis zu 1000 aus. Knilling behandelt im 4. Schuljahre schon die gemeinen und Decimalbrüche, Gesellschafts-, Durchschnitts- und Mischungsrechnungen, im 5. Schuljahre Raum-, Verhältnis- und Prozentrechnungen, im 6. und 7. Schuljahre das bürgerliche und kleingewerbliche Rechnen, Handel und Verkehr, Grofsindustrie und Staatshaushalt. In der Gruppierung der Repräsentantenaufgaben für die Addition und Subtraktion mit zwei- und mehrstelligen Zahlen ist noch keine Einheit erzielt.

Recht vielgestaltige Ansichten machen sich geltend bezüglich der Bruchrechnung. Die meisten Rechenmethodiker kennen nur zweierlei Zahlen: Ganze und Brüche. Hartmann trennt die Decimalbrüche von den Brüchen als Decimalzahlen. Im allgemeinen versteht man unter einem Bruch einen oder mehrere gleiche Teile eines Ganzen, ein Quotientverhältnis. Salberg läfst den Zähler als Teilganzes, den Nenner als Namen auffassen, so dafs der Bruch als benannte Zahl erscheint. Nach dem Vorkursus der Bruchlehre folgen meist die 4 Species in der bekannten Ordnung. Kaselitz behandelt die Addition und Subtraktion der Brüche nach der Multiplikation und Division. Bei der Bruchrechnung geht (nach Knilling) die Konfusion so weit, dafs man das Zweidrittelmalnehmen einer Gröfse ein Multiplizieren heifst, während es offenbar nichts anderes als eine Art des Dividierens ist. Mit Einführung der Decimalbrüche hofften manche Rechenlehrer und Methodiker, dafs für die gemeinen Brüche das letzte Stündlein geschlagen habe (Mauritius), und selbst in Schulordnungen wird das Rechnen mit gemeinen Brüchen eingeschränkt auf Halbe, Viertel, Achtel, Drittel, Sechstel, Neuntel, Fünftel, Zehntel und Hundertstel. Andere halten die Beseitigung der gemeinen Brüche für unmöglich; wäre diese möglich, so müfste sie in Frankreich, wo das metrische System bereits seit 100 Jahren gilt, schon durchgeführt sein. Das Leben zerbricht, wie Bartholomäi bemerkt, die Ganzen nicht blofs nach Zehnteln, Hundertsteln und Tausendsteln. Die Bruchrechnung ist ein vorzügliches Denkobjekt, die allgemeine Arithmetik kann die Brüche, ohne sich selbst aufzugeben, nicht entbehren. Die Bruchlehre mufs die allgemeine Arithmetik in der Volkschule ersetzen. Professor Haberl in Wien sagt geradezu: Das Rechnen mit gemeinen Brüchen mufs nach wie vor mit gleicher Intensität betrieben werden. Im allgemeinen herrscht jedoch die Ansicht vor, dafs im Rechnen mit den alten Brüchen eine Beschränkung des Stoffes wenigstens hinsichtlich der schwierigeren Beispiele und eine Vereinfachung möglich sei, und gewifs sind manche rein theoretische Unterscheidungen, z. B. in Stamm- und Zweigbrüche, entbehrlich, und manches, z. B. das Verfahren im Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Nenners, ist einer kürzeren Behandlung fähig. Salberg, Adam, Böhme u. a. verlegen die Anfänge der Bruchlehre schon in die Elementarklasse. »Jeder Begriff ersten Ranges«, sagt Salberg, »d. h. ein solcher, der unmittelbar aus der Anschauung sich ergibt, ist für das Kind leicht fafslich. Die Elemente aller Disziplinen müssen in der Elementarklasse gelegt werden. Heuner und Adam weichen auf den unteren Stufen den Teilungsaufgaben, in welchen der Quotient ein Bruch ist, sorgfältig aus. Halbheiten aber taugen nichts; entweder alles oder nichts.« Böhme meint: Weil die gewöhnlichsten Brüche auch in den untergeordnetsten Lebensverhältnissen auftreten, so ist es nötig, sie bereits dem Pensum der Unterstufe einzufügen. (Böhme hätte schliefsen sollen: sie in der Volksschule zu behandeln.) Die Genesis des Decimalbruchs ist heute noch nicht festgestellt. Er erscheint als eine Fortsetzung des Zehnersystems unter der Einheit oder als ein Bastard aus der ganzen Zahl und dem gemeinen Bruche. Böhme, Salberg, Kentenich, Hentschel, Költzsch, Schütze, Steuer, Thieme-Schlosser, Schellen, Knilling, Kaselitz behandeln ihn als einen Fall des gemeinen Bruches. Von dieser verschiedenen Auffassung hängt auch die Stellung der Decimalbrüche im Lehrplane des Rechnens ab. Ist der Decimalbruch ein besonderer Fall des gemeinen Bruches, dann gehört er hinter die Bruchlehre oder er schiebt sich zwischen dieselbe ein (Menzel, Langenberg); ist er aber eine Fortsetzung des Zehnersystems unter der Einheit, dann schliefst er sich am besten an das Rechnen mit ganzen Zahlen an und hat der Bruchrechnung vorauszugehen. Diesen Standpunkt nehmen u. a. Pleibel und Kentenich ein. Letzterer begründet sein Verfahren also: Das Decimalbruchrechnen schliefst sich unmittelbar an das Rechnen mit ganzen Zahlen an; wer mit ganzen Zahlen rechnen kann, der kann es auch mit Decimalbrüchen. In einem guten Unterrichtsgange geht das Leichtere dem Schwierigeren voran; die Decimalbrüche sind leichter als die gemeinen Brüche. Das Notwendige und Wichtigere mufs vorausgehen.

Im allgemeinen schreibt man dem Kopfrechnen einen höheren Bildungswert zu als dem schriftlichen Rechnen. Nach Knilling ist eines so mechanisch wie das andere, denn alles Rechnen vollzieht sich in dem mehr oder weniger gedankenlosen Zerlegen der Zahlbezeichnungen, im Besinnen auf die Einmaleinsprodukte und ihre Anwendung auf gröfsere Zahlen. Scherer behauptet: es ist ein weit verbreiteter Irrtum, das Rechnen ohne Ziffern sei ein freies, geistbildendes. Dafs in vielen Schulen ein bestimmtes Normal- oder Generalverfahren beim Zifferrechnen verlangt wird, ist so, sollte aber nicht so sein. Daraus entspringt der Nachteil, dafs die geistbildenden Wirkungen des freien Rechnens auf das Rechnen ohne Ziffern eingeschränkt und dafs durch die Schule selten umsichtige geschickte Zifferrechner gebildet werden. Damit wendet sich Scherer gegen bestimmte Ansatzformen für die bürgerlichen Rechnungsarten. Am häufigsten wird der Zweisatz oder Schlufssatz empfohlen, und zwar der Zweisatz in Bruchform — ein Quotient, dessen Glieder Produkte bilden. Knilling befürwortet die Ansatzformeln, weil sie die Rechnung helfen entwirren und vorteilhafte Reduktionen ermöglichen; er gibt aber der Divisionsformel mit dem senkrechten Strich den Vorzug, denn hier werden die Ziffern nicht auseinander geschoben, sondern nur successive abwärts gerückt; hier können Nebenrechnungen im Ansatze ausgeführt werden, bei der Bruchform nicht, weshalb bei letzterer ein mehrmaliges Anschreiben der Ziffern notwendig, das Verfahren umständlicher wird. Es sei unstatthaft, eine Divisionsaufgabe in Bruchform anzuschreiben; die meisten Verhältnisrechnungen bestehen aus ganzen Zahlen und führen zu solchen. Was hat damit die Bruchform zu schaffen?

Bei Anordnung der Aufgaben für die Oberstufe mischt man noch immer Ansatzformen mit sachlichen Gesichtspunkten: wir finden hier Aufgaben der Regeldetri, Tausch-, Tara-, Zinsrechnungen, Aufgaben der umgekehrten Regeldetri, Gewinn- und Verlustrechnungen ohne und mit Prozenten, Aufgaben des Vielsatzes u. s. w. durcheinander. Offenbar konkurrieren hier die Fragen: Sind die Aufgaben nach den mafsgebenden Sachverhältnissen oder nach den zu ihrer Auflösung erforderlichen Schlüssen zu ordnen? Wenn beide Gesichtspunkte in Betracht kommen, welcher hat sich dem andern unterzuordnen? Scherer und Kallas normieren die Anordnung der Textaufgaben für die Oberstufe nach den Schlüssen, welche in Betracht kommen, ersterer hauptsächlich nach der Zahl der Schlüsse, so dafs die einfachere Aufgabe der zusammengesetzten vorausgeht, letzterer nach der Art und Weise, wie die anzuwendende Species auftritt, so dafs jene Aufgaben, in welchen die anzuwendende Spezies offen vorliegt, solchen Aufgaben vorausgehen, in welchen die Operation mit geringerer oder gröfserer Mühe erst aufgesucht und blofsgelegt werden mufs. Hiernach bilden die sog. algebraischen Aufgaben mit arithmetischen Lösungsweisen die letzte Stufe. Manche Rechenmethodiker ordnen die angewandten Aufgaben nach dem Gesichtspunkte der Spezies (Heuner), so dafs ein findiger Schüler nur die Überschrift der Übungsgruppe anzusehen braucht, um zu wissen, welche Spezies er anzuwenden habe. Die angewandten Aufgaben sind daher nur scheinbar solche, in Wirklichkeit nichts mehr als Rechnungen mit benannten Zahlen. »Aufgaben, welche nur Vervielfachen und Teilen verlangen (die Zweisatzrechnungen) und eine bestimmte Darstellungsart sind häufig so ausschliefslich berücksichtigt, dafs nicht die Selbständigkeit gefördert und die Gedankenlosigkeit unterdrückt, sondern umgekehrt die Selbständigkeit unterdrückt und die Gedankenlosigkeit gefördert wird.« (Scherer.) Auch Schellen befürwortet sowohl die Mannigfaltigkeit der Verfahrungsarten, als auch den Wechsel im stofflichen Inhalt und in der Art und Weise seiner Einkleidung. Dörpfeld, Ziller, Krusche, Hartmann, Goltsch und Theel, in beschränktem Mafse auch Salberg, verlangen, dafs der Stoff nicht etwa als eine zufällige oder willkürliche Einkleidung erscheine, sondern dafs der Zögling die Zeit- und Raumverhältnisse des Lebens, der Geschichte und Natur, die Beziehungen des einzelnen zum Verkehre, die auf quantitative Bestimmungen führen, auffassen lerne, dafs der Rechenunterricht mit dem Gesinnungsunterrichte in Verbindung trete. — Die Zahl der Unterrichtsfunktionen wechselt bei den einzelnen Pensen. Kaselitz hat zwei, die entwickelnde Unterweisung und die Übung; Menzel drei: Veranschaulichung, Einübung und Anwendung; Hartmann hält die bekannten Zillerschen Formalstufen ein: Ziel, Vorbesprechung, das Neue, Verknüpfung, Zusammenfassung, Anwendung; zugleich knüpft er die methodischen Einheiten des Anfangsunterrichts an bestimmte Sachgebiete, das Schulzimmer, Lebensalter des Kindes, den Schulanfang etc. Anderen genügen als Ausgangspunkte die Finger, die Rechenmaschine und Punkttabellen.

Dittes und Kehr behaupten, eine grofse Zahl ausgezeichneter Rechenmethodiker haben in den letzten Jahrzehnten den Rechenunterricht derart gefördert, dafs er wohl das bestbestellte Fach der Volksschule ist. Andere sagen: Das Rechnen ist der schwierigste Lehrgegenstand geworden, nirgends wurde so viel gekünstelt wie hier. Die Menge der Differenzpunkte und die neuerdings auftauchenden Verbesserungsbestrebungen zeigen denn auch an, dafs der »Ausbau der rationellen Rechenmethode« (Jänicke) zum mindesten nicht vollendet ist. Es ist sohin eine dankbare Aufgabe, für den empirisch entwickelten Rechenunterricht nach Prinzipien zu suchen und denselben dadurch fester zu begründen nnd praktisch erfolgreicher zu machen. Die Geschichte der Rechenkunst mufs sich der Lösung dieser Aufgabe förderlich erweisen.

Litteraturverzeichnis.

1. **Adam**, R., Der Rechenlehrer, Neue Anleitung zum methodischen Unterricht im Rechnen. Berlin 1884.
2. — Der Rechenschüler. Berlin 1883.
3. **Alleker**, Die Volksschule. 3. Aufl. Freiburg 1881.
4. **Allgemeine Zeitung**, Beilagen.
5. **Ammonius**, Isagoge Arithmetices Collecta et edita per Joachimum Ammonium Nissensem. (Cum präfatione Philippi Melanchthoni.) Wittenberg bey Georg Rhaw.
6. **Anfangsgründe** der Arithmetik zum Gebrauch der Herzoglichen Hohen Carls-Schule. Stuttgart 1785.
7. **Anleitung**, Kurze, zur Rechenkunst für die Schulen im Königreich Bayern. 13. Aufl. München 1838.
8. **Arithmetica** oder Rechenbüchlein, der Schuljungend im Fürstenthum Sulzbach zum einfeltigsten jedoch deutlichsten dargestellt. Sulzbach, gedruckt bey Johann Jakob Lichtenthaler 1705.
9. **Arneth**, Geschichte der reinen Mathematik in ihrer Beziehung zur Geschichte der Entwicklung des menschlichen Geistes. Separatabdruck aus der Neuen Encyklopädie für Wissenschaften und Künste. Stuttgart 1852.
10. **Bacher**, Bartholomäus, Theoretisch-praktisches Hand- und Methodenbuch im KönigReiche Baiern. 2. Aufl. München 1814.
11. **Barth**, Anton, Priester der Gesellschaft Jesu, öffentlicher und ordentlicher Lehrer der Mathematik, Kurze Anleitung zur Rechenkunst. München, bei Joh. Nep. Fritz, 1772.
12. **Bartholomäi**, Fr., Arithmetik. Jena 1852.
13. **Bier**, L., Anleitung zum decimalen und gewerblichen Rechnen. Halle 1879.
14. **Blancke**, Übungsschule im bürgerlichen Rechnen. Hannover 1881.
15. **Bock**, Eduard, Der Volksschulunterricht. Breslau 1879.
16. **Böhm**, Geschichte der Pädagogik. Nürnberg 1880.
17. **Böhme**, A., Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Berlin 1877.
18. — Rechenbücher, Berlin.
19. — Aufgaben zum Kopfrechnen. Berlin 1875.
20. **Böhmer**, Fontes rerum germ.

21. **Böschensteyn**, Ain New geordnet Rechenbiechlin mit den zyffern den angenden schůlern zu nutz Inhalt die Siben species Algorithmi mit sampt der Regel· de Try/ vnd sechs Regeln d'prüch/ vñ der Regel Fusti mit vil andern gůten fragen den kündern zum anfang nutzbarlich durch Joann Böschensteyn von Esslingen priester neulych aufsgangen vnd geordnet. Getruckt in der Kayserlichen stat Augfburg durch Erhart öglin Anno 1514 Jar.
— Dasselbe vom Jahre 1518.
22. **Brockhaus**, Real-Encyklopädie (Konversations-Lexikon). Leipzig 1851.
23. **Büttner**, A., Anleitung zum Rechenunterrichte in der Volksschule. Leipzig 1888.
24. — und E. Kirchhoff, Rechenaufgaben für die Volksschule. Leipzig 1886.
25. **Cantor**, Dr. Moriz, Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker. Halle 1863.
26. **Clavii**, Christophori, Bambergensis e societate Jesu Epitome Arithmeticae Practicae. Romae ex Typographia Dominici Basae 1583.
27. **Clavis** Arithmetica. Bono juventutis Studiosae publicata. Rechenkunst-Schlüssel/ der lieben studierenden Jugend zu nutz eröffnet durch dero Kunstliebhaber. Gedruckt zu Augfburg bei Johann Schultes. In Verlegung Georg Sigmund Freysinger in Regenfburg. MDCLVIII.
28. **Clemm**, Heinrich Wilhelm, Professor und Prediger des Herzoglichen Collegii und Klosters Bebenhausen bei Tübingen, Erste Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften. Stuttgart 1759.
29. **Comenius**, Johann Amos, Didactica magna, übersetzt von Dr. Theodor Lion. Langensalza 1875.
30. **Conrat**, Johann von Vlm, Prediger zu Schaffhausen, Geodaisia, Von gewisser vñ bewährter Feldmessung. Strafsburg bei B. Jobin 1580.
31. **Conversationslexikon** für alle Stände, Von einer Gesellschaft deutscher Gelehrten. Leipzig, Brüggemann, 1834.
32. **Curtius**, compendium arithmeticae. Schulrechenbüchlein. Nürnberg 1610.
33. **Curtmann**, Dr. W. J. G., Lehrbuch des Unterrichts. Leipzig u. Heidelberg 1866.
34. **Dannberger**, Joh. Michael, Schuell- und Rechenmeister zu Neumarkt i. O., Manuskript 1741 und 1742.
35. **Diesterweg**, Dr. F. A. W., und P. Heuser, Methodisches Handbuch für den Gesamtunterricht im Rechnen. Elberfeld 1844. Hiezu das praktische Rechenbuch, neu von Langenberg. Gütersloh 1877.
36. — Wegweiser zur Bildung für deutsche Lehrer. Essen 1875.
37. **Dittes**, Dr. Fried., Methodik der Volksschule. Leipzig 1874.
38. **Dittmers**, Anleitung zum Unterricht im Rechnen. Harburg 1881.
39. **Dörpfeld**, Evangelisches Schulblatt, 20 Band.
40. **Dücker**, Die Zifferrechnung mit ihrer Anwendung auf das gesamte bürgerliche Rechnen. Hildesheim 1882.
41. **Egger**, Jakob, Methodisch-praktisches Rechenbuch. Bern 1878.
42. **Elend**, Balthasar, Einleitung zur Arithmetischen Wissenschaft zum Gebrauch der Schulen. 1724.
43 **Erzinger**, H., Rechnungsbeispiele aus dem Leben für das Leben. Schaffhausen 1873.
44. **Faulhaber**, Arithmetischer Tausendkünstler. 1762.
45. **Fernberg** und **Salberg**, Einführung in das Rechnen nach der neuen Reichswährung. München 1875.

46. — Übungen zur Einführung in das Rechnen nach der neuen Reichswährung. München 1875.

47. **Fink** und **Will**, Aufgabensammlung für das gewerbliche Rechnen. München 1887.

48. **Fischer**, Johann, Ein kurz Rechenbüchlein für anfahende Schüler gemacht. Gedruckt zu Alten Stettin in Johan Eichorns Druckerey (um 1580).

49. **Fischer**, O. v., Methodische Grammatik des Schulrechnens, neu von C. F. Hertter. Stuttgart 1884.

50. **Frisius**, Arithmeticae practicae Methodus facilis per Gemmam Frisium Medicum ac Mathematicum. Vitebergae MDXLII.

51. **Glareanus**. De VI. Arithmeticae practicae speciebus Henrici Glareani Epitome. Friburgi Brisgoiae MDXXXVIII.

52. **Göpfert**, E., Der Rechenunterricht in den ersten drei Schuljahren. Eisenach 1877.

53. **Goltsch**, Emil Theodor, Der verbundene Zahl-, Sach- und Meſsunterricht in der Volksschule. Berlin 1858.

54. **Graser**, Joh. Bapt., Die Elementarschule fürs Leben in ihrer Grundlage. Baireuth 1817.

55. **Gräfe**, Dr. H., Archiv für das praktische Schulwesen. Jena 1829.

56. **Grass**, Die Gruppenzahlbilder und ihre Herstellung durch die Münchener Rechenmaschine. München 1891.

57. **Grube**, A. W., Leitfaden für das Rechnen in der Elementarschule. 6. Aufl. Berlin 1881.

58. **Haas**. Der hurtige Rechner, Vorstellend verschiedene nützliche Ausrechnungen/ über allerhand Preifs, allerley Getrayds/ Getrencks/ Gewichts und Interesse. Zum bequemen Gebrauch zusammengetragen durch Joh. Tobiam Haasen/ Gemeiner löblichen Stadt Regenſburg Burger und Ungeldschreibern 1695. (Ein Faulenzer.)

59. **Härderer**, Friedrich, Elementarlehrer in Bamberg, Die Elementarschule des Denkrechnens. 2. Aufl. 1832.

60. **Haesters**, Albert und **Röhm**, Philipp, Rechenbuch für die deutsche Volksschule. Essen 1874.

61. **Harms** und **Kallius**, Rechenbuch. Oldenburg 1889.

62. **Harsdörffer**. Delitae Mathematicae et Physicae. Der mathematischen und phylosophischen Erquickstunden zweiter Teil, bestehend in 500 nützlichen und lustigen Kunstfragen . . . . zusammengetragen durch Georg Philipp Harsdörffern, eines Ehrlöblichen Stadtgerichts zu Nürnberg Beysitzern. Nürnberg bey Jeremia Dümlern. MDCLI.

63. **Hartmann**, Dr. Berthold, Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule. Hildburghausen 1888.

64. — und **Ruhsam**, Rechenschule. Hildburghausen 1882.

65. **Haupt**, Joh. Thomas, K. Preufs. Kirchen- und Schuleninspektor zu Templin, Neue und vollständige Auslegung des von dem Stifter und ersten Kaiser des Chinesischen Reichs Fohi hinterlassenen Buches Ye Kim genannt. Rostock und Wismar bei Berger und Boedner 1753.

66. **Hausch**, Zahlenrechnung. Leipzig und Stuttgart 1835.

67. **Heilbronner**, Joh. Christoph, Versuch einer mathematischen Historie. Frankfurt und Leipzig 1739.

68. **Helfenzrieder,** P. Joh., Universitätsprofessor, Priester der Gesellschaft Jesu, Selecta Elementorum Matheseos purae. Ingolstadt 1772.

69. **Henkenawer,** Zwei künstlich ausgerechnete Rechenbüchlein, 1618.

70. **Hentschel, (Költsch** und **Jänicke.)** Lehrbuch des Rechenunterrichts nebst Übungsbüchern. Leipzig 1886.

71. **Hergang,** Karl Gottlob, Pädagogische Real-Encyklopädie. Grimma und Leipzig 1851.

72. **Heuer,** Magnus, Lehrgang des Rechenunterrichts. Hannover 1875.

73. **Heuner,** Lehrgang des Rechenunterrichts. Ansbach 1873.

74. **Hoffmann** und **Klein,** Rechenbuch für Seminaristen und Lehrer. Düsseldorf 1882.

75. **Horstig,** Schaumburg-Lippescher Consistorialrath und Superintendent, Anweisung für die Lehrer an den Bürgerschulen, 1796.

76. **Hug,** J. C., Die Mathematik der Volksschule. Zürich 1855.

77. **Instruktion** für die Schwarzburg-Sondershäusischen Schullehrer in den untern Klassen und Landschulen, wie sie die Jugend gehörg unterrichten und bilden sollen. Leipzig 1800.

78. **Jänicke,** Eduard, Der Rechenunterricht in der deutschen Volksschule. I. Teil: Grundzüge der Geschichte und Methodik des Rechenunterrichts. Gotha 1879.

79. **Jakob,** Simon, Rechnung auf der Linie, New und wohlgeordnetes Rechenbuch, 1565.

80. **Kallas,** Methodik des elementaren Rechenunterrichts, prinzipiell-systematisch dargestellt, Mitau 1889.

81. **Kandler,** Arithmetika. Rechnung auff den Linien vnnd mit den Ziffern/ auff mancherlei/ fürnemlich aber schwartze Müntz/ so im Land zu Bayern und Schwaben gengig sampt trewer erklerung der welschen Practica vnd derselben Exempeln/ mit Fleifs verfertigt durch Johann Kandlern, Rechenmeister und Burger zu Regenfburg/ Auffs new vbersehen vnd mit sonderbarem Fleifs Getruckt zu Laugingen durch M. Jacob Winter 1605. (Wiederholt herausgegeben durch Alexius Bruckmüller/ Buchführer in Regenfburg.)

82. **Kaselitz,** Fritz, Wegweiser für den Rechenunterricht in deutschen Schulen. Berlin 1878.

83. — Wie mufs sich der Rechenunterricht gestalten damit . . . er sittliche Bildung wirkt? 1877.

84. — Anleitung zum Gebrauche der Hilfs- und Übungswandtafeln. Berlin 1868.

85. **Kaukol.** Filum Ariadne in Labyrintho Fractionum Arithmeticarum, Gründlich-ausführlich und gantz klahre Unterweisung/ Welchermassen die sonst kopffbrechende Brüche/ in der Rechenkunst/ leicht zu erlernen sind etc. von David Carolo Kaukol, der Churfürstl. Durchlaucht zu Cölln/ etc. Geistlichen Rath und Pfarrern zu Altenbuech. Regensburg, gedruckt bei Joh. Georg Hofmann. 1696.

86. **Kegel.** Neu vermehrte Arithmetica vulgaris et Practica italica. Das ist: Kurtz/ leicht und geschwinde nach Italiänischer Art / Und heutiger vornehmer Kauff- und Handels-Leuthe Gebrauch zu rechnen / Worinnen alle Kauff-, Amts- und Hausrechnungen nach deutlicher, leichter und Kaufmanns Manier nebst der klärsten Unterweisung vorgestellt . . . . zum Andernmahl ans

Liecht gegeben von Johann Michael Kegel/ J. U. Cult. und des Weitberühmten Gymnasii zu Frankfurt am Mayn h. t. Arithmetico. Verlegt und zu finden bei Joh. Val. Schüller am Niclaus-Thurn. Gedruckt bei Johannes Wust 1696.

87. **Kehr,** Dr. C., Die Praxis der Volksschule. Gotha 1880.
— Geschichte der Methodik des deutschen Volksschulunterrichts. Gotha 1882.

88. **Kehrbach,** Dr. Karl, Monumenta Germaniae pädagogica, insbes. Dr. Günther, Sigmund, Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter. Berlin 1887.

89 **Kehrein,** J., Handbuch der Erziehung und des Unterrichts, neu von Dr. A. Keller, Paderborn 1881.

90. **Kelsch,** Aufgaben der Rechenkunst 1730.

91. **Kentenich,** Anleitung zur Erteilung des Rechenunterrichts in der Volksschule mit Übungsbüchern (Rechenschule). Düsseldorf 1876—1881.

92. **Klimpert,** Richard, Kurzgefasste Geschichte der Arithmetik und Algebra. Hannover 1885.

93. **Knilling,** Rudolf, Zur Reform des Rechenunterrichts in Volksschulen. München 1884—1886.

94. **Knoche,** Über das Wesen und die Entstehung der Zahlvorstellungen und Zahlbegriffe. Arnsberg 1888.

95. — Rechenbuch. Arnsberg 1886.

96. **Köbel.** Ain New geordnet Rech-enbiechlin auf den linien mit Rechenpfennigen den Jungen angenden zu heysslichem gebrauch vnnd hendeln leychtlich zu lernen mit figuren vnd exempeln Volgt hernach klärlichen angezaygt. Von Jacob Köbel disser zeyt Statschreyber zu Oppenheym. (1514.) Getruckt in der Kayserlichen Stat Augfburg Anno dom. Tausend Fünffhundert vnd Zwaintzigisten jar.

97. **Königbauer,** Joachim, Geschichte der Pädagogik und Methodik. Regensburg und Amberg 1886.

98. — Methodisches Handbuch fur den Rechenunterricht in Volksschulen. München 1879.

99. **Krancke,** Ausfuhrliche Anleitung zu einem zweckmäfsigen Unterricht im Rechnen. 2. Auflage, Hannover 1860.
— Exempelbücher, neu von L. H. Jöhrens. Hannover 1888.

100. **Küchelbecker,** Der neue Schullehrer, oder praktische Anleitung zu einer vernünftigen Erziehungsmethode in Volksschulen. Leipzig 1803.

101. **Kutsch,** Rechenbuch für Volksschulen. Elbing 1874.

102. **Landgeistliche,** Der bayerische, in der Schule. Landshut, Attenkofer 1805.

103 **Landmesser,** Rechenpraktik, nebst Aufgabensammlung. Weinheim.

104. **Langenberg,** Eduard, Neue Anleitung zum methodischen Rechenunterricht. Gütersloh 1878.

105. **Launay,** L'Arithmetique Arpendage universel Toise des Bastimes etc., composé par Jean Abraham dit Launay, Prof. es arts d'Arithmetique etc. en Anjou et Rouen 1605.

106. **Lechner,** Joh. Bapt., Kantor bei Skt. Martin in Augsburg, Facillima Artis Arithmeticae Methodus. Das ist: Sehr leichter Unterricht und Lehrart der höchst notwendigen und nutzbaristen Rechenkunst . . . mit einer Zugab unterschiedlicher Uhrzahlen und leichtem Unterricht wie solche Zahlen

auszurechnen seyen. Zum zwölftenmal in Druck gegeben. Augsburg und Innsbrugg 1763.

107. **Lehrbüchlein** für die II. Klasse der Kinder in den Schulen zu Neumark (i. d. O.) 1789.

108. **Lehrplan** für die Volksschulen in Bayern nebst Instruktion für Lehrer und Lehrerinnen. München 1811.

109. **Lettau,** O., Algebraische Aufgaben. Langensalza 1872.

110. **Leutz,** Lehrbuch der Erziehung und des Unterrichts. Tauberbischofsheim 1885.

111. **Lieb,** Seyfferth, Tillmann, Rechenschule. Nürnberg 1886.

112. **Lindner,** Dr. G. A., Das Rechnen in Bildern. Wien 1874.

113. **Lindner,** Joh., Praktisches Rechenbuch zum Selbstunterrichte für Geschäftsleute, Landwirte etc. Straubing 1886.

114. **Löser,** J., Praktisches Rechenbuch für deutsche Schulen. Weinheim 1882.

115. **Lonicerus.** Arithmetices Brevis et utilis introductio, in eius artis studiorum tyronum gratiam per Adamum Lonicerum conscripta. Francfurt Chr. Egen. Anno MDLXX.

116. **Lossius.** Arithmetices Erotemata Puerilia. Luca Lossio Lunaeburgensi autore Datae Lüneburg 1557. Gedruckt Frankfurt 1569.

117. **Magenau,** M. Rudolf Friedr., Pfarrer in Niederstozingen, Kleine Handbibliothek für deutsche Landschulmeister. Stuttgart 1800.

118. **Matt,** Lehmann, Roth, Demolet, Hähn, Übungsaufgaben zum mündlichen und schriftlichen Rechnen. Ludwigshafen.

119. **Mauracher,** (Verleger), Rechenbuch, Worinnen das Fundament der Rechenkunst mit gründlicher Erklärung der Brüchen und vollständiger Absetzung der Regulis detrie. Augsburg 1746. (Autor: A. G. K.)

120. **Mauritius,** Decimales Rechnen und Bruchrechnen 1869.

121. **Meier,** Lehrplan für den Rechenunterricht. Frankenberg i. S. 1886.

122. **Menzel,** Lehrgang für den Elementar-Unterricht im Rechnen mit Rechenfibel und Rechenaufgaben. Bielefeld, Leipzig, Berlin 1881—1888.

123. **Mercklein,** Mathemathische Anfangsgründe, 1732.

124. **Metius,** Manuale Arithmeticae et Geometricae Practicae In het welcke Beneffens de Stockrekeninge of te Rhabdologia J. Nepperi, kortelijck en de duydelijck 'Z gene den Land-meters en de Ingenieurs, nopen-de het Land-meten en de Stercktenbouwen nootwendich is geleert wordt en de exemplaerlijck aengewesen. Door Adrianum Metium Med. D. et Mathes. Prof. ordinar binnen Francker. De tweede Editie etc. Tot Francker, Anno 1646. (1. Auflage 1633.)

125. **Mittenzwei,** L., Aufgabensammlung aus dem bürgerlichen Rechnen. Leipzig 1887.

126. **Moser,** Christ. Ferd., Pfarrer zu Wippingen und Lautern und M. Chr. Fried. Wittich, Pfarrer zu Hunderfingen, Der Landschullehrer. Ulm 1798.

127. **Mozanam,** la Geometrie practique à Paris MDCXCI.

128. **Müller J.,** Schullehrer in Ferndorf, Anleitung zur Erlernung der Rechenkunst. Herborn 1804.

129. **Nachrichten** vom deutschen Schulwesen in den älteren churpfalzbayerischen Staaten und im Königreiche Bayern, Monatsschrift. München 1802—1813.

130. **Neudorffer.** Künst- und ordentliche Anweisung in die Arithmetic / als eine Mutter vieler Künsten Auff die jetzige newe kurtz und behende manier / mit aufserlesenen Exempeln und schönen Inventionibus ausgeziert / In XIII Büchlein verfasset; Welchen auch die sinnreiche vnd berühmbte Regel Helcataim oder Positionem mit 199 Exempeln beygefügt / Vnd mit einem sonderbaren Appendice vermehrt / Alles durch Antonium Newdorffern von Neudegg / Röm. Kays. Mayest. Diener etc., in Truck verfertigt. Editio III. Nürnberg. / Gedruckt vnd verlegt durch Simon Halbmayern / Im Jahr 1627.

131. **Noviomagus,** Die Finger-Numeration (Dactilonomia) von Beda dem Ehrwürdigen. Proximae Rationis numerariae enumeratio ex Beda Anglo saxone aus der Schrift De numero von Andreas Egger, Professor in Rostock. Wiederholt herausgegeben von Johann Nouiomago. Coloniae MDXXXIX.

132. **Ohler,** Lehrbuch der Erziehung und des Unterrichts. Mainz 1878.

133. **Overberg,** Anweisung zum zweckmässigen Schulunterricht für die Schullehrer im Fürstenthum Münster. Münster (1793). 8. Auflage 1844.

134. **Paricius,** Georg Heinrich, Burgern und Extra- ord. Schreib- u. Rechenmeister in Regensburg, Praxis Arithmetices, oder gründliche Anweisung, worinnen die im gemeinen Leben und Wesen anschicklich- und dienliche Rechenkunst . . . deutlich gezeigt wird etc. In Verlegung Joh. Zach. Seidels, Buchhandler allda, 1706.

135. — Compendium praxis Arithmetices, Worinnen die gemeinen und gebrochenen Spezies , . . die Decimalbruchrechnung etc. deutlich gezeigt . . . . Von Georg Heinrich Paritio, Arithmetico in der Kunstrechnungs übenden Societät dem Practicierenden. Regensburg in Verlegung des Authoris (Ulm 1707).

136. **Peurbach.** Elementa Arithmetices. Algorithmos De Numeris integris, fractis, Regulis communibus et de Proporcionibus. Autore Georgio Peurbachio. Omnia recens in lucem edita fide diligentia singulari. An. MDXXXVI. Cum präfacione Philip. Melanth.

137. **Pescheck,** M. Christian, des Zittauischen Gymnasii Mathematici und Collegae Arithmetischer Hauptschlüssel etc. Zittau, verlegts Johann Jacob Schöps, 1741.

138. **Pestalozzi,** Anschauungslehre der Zahlverhältnisse. Zürich und Tübingen 1804.

139. — A B C der Anschauungslehre der Mafsverhältnisse. Ebenda 1803.

140. — Wie Gertrud ihre Kinder lehrt. 3. Band der pädagogischen Klassiker von Dr. Lindner.

141. **Placidus,** Heinrich, Professor und Kapitular des fürstl. Stifts Skt. Emmeram in Regensburg, Bestimmung der Mafse und Gewichte des Fürstbistums Regensburg 1808.

142. **Pleibel,** Aug. Ludwig, Handbuch der Elementararithmetik. Stuttgart 1875.

143. **Pöhlmann,** D. J. P., Kurzer Unterricht der zusammengesetzten Rechnungsarten; 1808.

144. — Praktische Anweisung in der Rechenkunst, 3 Bände. Erlangen, Joh. Jac. Palm 1807.

145. **Prändel,** Joh. Georg, Professor der Mathematik und Physik an der kgl. Pagerie, Ehrenmitglied der k. b. Akademie der Wissenschaften in München, Die Rechenkunst, besonders die Reesische Regel, nebst der Decimalrechnung etc., zunächst für Bayern kurz und fafslich dargestellt, Amberg 1812.

146. **Quitzow**, Praktisches Rechenbuch in systematischer Folge. Güstrow 1872.

147. **Ramus**. Petri Rami Arithmeticae libri II. 1599.

148. **Ranke**, Dr. Professor, Korrespondenzblatt der deutschen Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte. München.

149. **Raumer**, v., Karl, Geschichte der Pädagogik. Stuttgart 1857.

150. **Reccard**, Rechenbuch, 1746.

151. **Rechenbüchlein** (ohne Titelblatt) Gedruckt zu Magdeburgk bei Wilhelm Rofs. MDLXXXVI.

152. **Rechenbüchlein**, Ein nützlich. Gedruckt zu Nürnberg 1526.

153. **Recher**. Die Selbstlehrende Rechenschule / In welcher Alle Regulen der Löblichen Rechne-Kunft / samt deren Fundamenten / oder Species sowohl nach gemeiner Art / als nach der Welschen Practic . . . sonder Beythun eines Lehrmeisters / leichtlich begriffen vnd erlehrnet werden mögen. Heraus gegeben von Joanne Baptista Recher / Derzeit Pfarrern der Freih. Läserischen Hoffmarch Steinbach. Augfburg / Lorenz Kroniger, 1692.

154. **Rein**, Dr. W., Theorie und Praxis des Volksschulunterrichts nach Herbartschen Grundsätzen. Dresden 1881.

155. **Resewitz** Friedr. Gabriel, Abt des Klosters Berge, Versuch über die Lehrart und den Inhalt des Schulunterrichts für Kinder in den kleinen Städten und auf dem Lande. Magdeburg 1800.

156. **Riemann**, Carl Friedrich, Prediger zu Neuküstrinchen bei Wrietzen, Neue Beschreibung der Reckanschen Schule, Ein praktisches Handbuch für Lehrer, welche nach Reckanscher Lehrart unterrichten können und wollen. Mit einer Vorrede von Sr. Hochwürden dem Domherrn Fried. Eberh. v. Rochow etc. Berlin und Stettin, Nicolai, 1792.

157. **Riese**. Risen, Adam, Rechenbuch / auff Linien und Ziphren in allerley Handthierung / Geschäfften vnnd Kauffmannschaft. Mit neuwen künstlichen Regeln vnd Exempeln gemehret / Innhalt fürgestellten Registers. Visier vnd Wechselruthen künstlich vnd gerecht zu machn / aus dem Grunde durch die Arithmethic vnd Geometrie von Erhart Helm / Mathematico zu Franckfurt beschrieben. Alles von neuwem jetzundt widerumb fleissig ersehen vnd Corrigiert. Frankfurt bei Chr. Egen Erben. 1581.

158. — Rechnung auf der Linien vnd Federn / auff allerley Handtierung. Gemacht durch Adam Risen. Auffs newe durchlesen vnd zurecht bracht MDLXXXIII. Mit Rieses Bildnis.

159. **Rist**, J. C. F., Pastor zu Niendorf in der Herrschaft Pinneberg, Anweisung für Schulmeister niederer Schulen zur pflichtmäfsigen Führung ihres Amtes Hamburg und Kiel 1787.

160. **Rochow** v., Friedrich Eberhard, auf Reckan, Handbuch in katechetischer Form für Lehrer, die aufklären wollen und dürfen, 2. Aufl. Halle, Waisenhaus, 1789.

161. **Rolfus** und **Pfister**, Real-Encyklopädie etc. Mainz 1874.

162. **Ruegg**, H. R., Professor, Das Rechnen in der Elementarschule, Bern, 1876.

163. **Ruldolf**. Künstliche rechnung mit der Ziffer vnd mit zalpfennigen sampt der wellischen Practica vnd allerley vortheil auff die Regel de Trie: Item vergleichung mancherley Gewicht / Elnmafs / Müntz Auff etliche Land vnd

Stett. Gemehrt mit 293 Exempeln von mancherley Kauffhendeln/ mit erklerung/ wie dieselben zu machen vnd in die Regel zu setzen sein. Auffs new wiederumb fleissig vbersehen/ vnd an vil orten gebessert. Alles durch Christoffen Rudolff zu Wien verfertigt. (Ausgabe v. J. 1574.)

164. **Sachse,** J. J., Der praktische, geistbildende und erziehliche Unterricht im Rechnen und in der Raumlehre, nebst Übungsbüchern. Osnabrüek 1886

165. **Salberg,** August, Die Sachrechen-Methode. München 1874.

166. — Rechenbüchlein für das 1. und 2. Schuljahr. Ebenda.

167. **Schäffle,** Reallehrer in Nürtingen, Beitrag zur Methodik des Rechnens. Stuttgart und Tübingen 1830.

168. **Schedel,** Wilhelmus, Ein lateinisches Manuskript (Kollegienheft) aus der Zeit von 1570—1580.

169. **Scheffelt,** Michael, Methodische neue Anweisung die edle und hochnützliche Rechenkunst in kurzer Zeit zu lernen. Ulm 1716.

170. **Schellen,** Dr. H., Methodisch geordnete Materialien für den Unterricht im theoretischen und praktischen Rechnen, Neu von Dr. H. Lemkes. Münster 1887.

171. **Schellenberg,** Joh. Philipp, Der fleissige Rechenschüler. Oder Leitfaden beim ersten Unterricht im Rechnen für Bürger- und Landschulen. Leipzig bei Gerhard Fleischer d. j. 1810.

172. **Scherer,** Andeutungen zur Erteilung des Rechenunterrichts in der Volksschule. Tauberbischofsheim. 2. Auflg. 1880.

173. — Rechenaufgaben für Volksschulen. Ebenda, 1880.

174. **Schey.** Arithmetica Oder die Kunst zu rechnen. Mit schönen Regeln auff allerley Kauffmanns- und anderer Künstlicher Rechnungen aufs rechtem Grund gantz klaar und verständlich beschrieben durch Wilhelmum Schey, Schul- und Rechenmeister zu Solothurn. Basel, Schröter, MDCII.

175. **Scheybl** Joh., Das sibend, acht vnd neunt Buch des hochberühmten Mathematici Euclidi Megarensis. Gewidmet dem Fürsten Herrn Ott Heinrichen Pfalzgrafen bey Rhein, 1555.

176. **Schmid,** K. A., Encyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens. Gotha 1862.

177. **Schmid,** v., Xav. Kajetan, Leitfaden zum Unterricht für Sonntagsschulen auf dem Lande. Erlangen 1830.

178. **Schmidt,** Wilh., Der Rechenunterricht in der Volksschule. Wittenberg 1876.

179. — Aufgaben zum mündlichen und schriftlichen Rechnen in der Volksschule. Wittenberg.

180. **Schön,** Dr. Joh., Professor der Mathematik, Kurzer und faſslicher Unterricht in der Rechenkunst, Geometrie, Mechanik etc. für Bürger- und Sonntagsschulen, zunächst für die Groſsherzogliche Zeichenschule in Würzburg 1812.

181. **Schramm,** Jos., Die Verbesserung der Schulen in moralisch-politischer, pädagogischer und polizeilicher Hinsicht. Oder Versuch eines umfassenden Werkes über die öffentlichen Anstalten zur Bildung der Jugend und Aufklärung des Volkes. Dortmund, Mallinckrodt, 1803.

182. **Schröter,** R., Beiträge zur Methodik des Rechenunterrichts. Wittenberg 1887.

183. **Schübler,** Überzeugende Gründe der Rechenkunst. Heilbronn a. N. 1795.

184. **Schütz,** Chr. Gottfr., Professor der Beredsamkeit und Dichtkunst zu Jena, Methodenbuch für angehende Lehrer etc. Halle 1783.

185. **Schuhmann**, Dr., J. Chr. Gottlob, Geschichte der Pädagogik im Umrifs. Hannover 1877.

186. **Schurmann**, Dan., Schullehrer in Remscheid, Praktisches Schulbuch der gemeinen Rechenkunst und Geometrie. 2. Aufl. 1804.

187. **Schwarz**, F. H. C., Pfarrer zu Münster, Pestalozzis Methode und ihre Anwendung in Volksschulen. Bremen 1803.

188. **Schwarzer**, C. G., Pastor zu Grünberg, Grundrifs einer Anweisung zum Katechesieren. Glogau 1804.

189. **Schwenter**, Beschreibung des nützlichen, geometrischen Tischleins, 1618. (Dem Bürgermeister und Rat von Regensburg gewidmet.)

190. **Sobolewski**, Rechenstudien. Glogau 1862.

191. **Spamer**, Konversationslexikon.

192. **Specht**, Franz Anton, Geschichte des Unterrichtswesens in Deutschland, Stuttgart 1885.

193. **Spengler**, Joseph, Priester der Gesellschaft Jesu, Anfangsgründe der Rechenkunst und Algebra. 2. Aufl. Augsburg, Rieger & Söhne, 1773.

194. **Stehele-Wechs**, Anwendung der Rechenkunst auf die Landwirtschaft, Augsburg 1879.

195. **Steinmetz**. Arithmetica Praecepta in Questiones Redacta cum exemplis utilibus, ut facilius discentibus proponi et ab iisdem intelligi possint. In Acad. Lipsica a M. Mauricio Steinmetz Gersbachio. Johannes Rhamba excudebat. Anno D. MDLXVIII.

196. **Stephani**, Dr. Heinrich, k. bayer. Kreis-Schul- und Kirchenrat, Ausführliche Anweisung zum Rechenunterrichte in Volkschulen nach der bildenden Methode, Nürnberg 1817.

197. **Stifel**, Joh. Michael, Rechenbuch von der welschen und deutschen Praktik, Nürnberg 1546.

198. — Ein sehr wunderbarliche wortrechnung Sampt einer mercklichen erklärung etlicher Zalen Danielis und der geheimen Offenbarung Sanct Johannis, Anno 1553.

199. — Die schenen Exempeln der Cofs Rudolffs gebessert und sehr gemehret, Nürnberg 1553.

200. **Stigler**, Georg, Mathemat. Professor an der Churbayerischen Kadetten-Akademie, Anleitung zu den mathematischen Wissenschaften. München 1757,

201 **Sterner**, M., Methodik der Volksschule. Straubing 1886.

202. **Steuer**, Methodik des Rechenunterrichts. (Strehlen 1883.) Breslau 1886.

203. — Rechenbuch a) für Stadtschulen, b) für Landschulen. Breslau 1888.

204. **Steuer-Wulle**, Aufgaben für das schriftliche Rechnen. Breslau 1888.

205. **Sturm**, J. Chr., Professor an der Universität Altdorf, Des unvergleichlichen Archimedes Kunstbücher, aus dem Griechischen ins Hochdeutsche übersetzt, Nürnberg 1670.

206. **Sturm**, J. Christ., Pfarrer zu Deiningen in der Grafschaft Öttingen. Des unvergleichlichen Archimedes Sandrechnung oder tiefsinnige Erfindung einer mit verwunderlicher Leichtigkeit aussprechlichen Zahl, welche er unfehlbar beweiset gröfser zu sein als die Anzahl aller Sandkörnlein, mit welchen die Höhle der ganzen Welt, bifs an den äufsersten Fix- oder Haftsternen-

Himmel könnte ausgefüllt werden. Aus dem Griechischen ins Hochdeutsche übersetzt. Nürnberg 1667.

207. **Suevus.** Arithmetica historica. Die löbliche Rechenkunst durch alle Species vnd fürnehmbste Regeln / mit schönen gedenckwirdigen Exempeln / deren in heiliger Schrift vnd gutten Geschichtbüchern gedacht wird .... zusammengetragen Durch Sigmundum Sueuum Freystadiensem, Diener des göttlichen Wortes der Kirchen Christi zu Breſslaw / Probst zum hl. Geiste vnd Pfarrer zu S. Bernardin in der Newstadt. Gedruckt zu Breſslaw / durch Georgium Bawman Im Jhare MDXCIIJ.

208. **Tacitus,** Cornelius, Germania. Deutsche Hand- und Hausbibliothek. Stuttgart, Spemann.

209. **Tanck,** W., Rechenbuch. Sammlung methodisch geordneter Übungsaufgaben. Meldorf 1886.

210. **Ternen,** Gabriel, Der wohlinformierte Dorfschulmeister und Kinderlehrer. 2. Aufl. 1748.

211. **Thieme,** O. und **Schlosser,** A., Rechenübungen für Volksschulen. Dresden 1889.

212. **Tillich,** Dr. Ernst, Professor und Mitvorsteher der Erziehungs- und Lehranstalt zu Dessau, Allgemeines Lehrbuch der Arithmetik oder Anleitung zur Rechenkunst für Jedermann. Leipzig 1806.

213. **Türk,** v., Briefe über Pestalozzi, 1806.

214. **Unger,** Dr. E. S., Leitfaden für den Unterricht im Kopfrechnen. Neu von Krusche, Leipzig 1881.

215. **Urstisius.** Elementa Arithmeticae Logicis Legibus Deducta, In usum Academiae Basil. Opera et studia Christiani Urstisii, Mathematicarum professoris. Basilae per Sebastianum Henric Petri. MDLXXIX.

216. **Villaume,** Methodisches Handbuch, 1790.

217. **Vöhringer,** Rechenschule, Stuttgart.

218. **Vuolphius,** Rudimenta Arithmetices authore Joanne Vuolphio Hersbrugiense MDXXVII. Norimbergae e schola Sebaldina.

219. **Walther,** Joh. Ludw., Lexicon Diplomaticum. Göttingen 1745.

220. **Wagentrutz.** Principia Arithmeticae Oder für die Kinder Eine zu der Rechenkunst sehr nothwendige Unterweisung von Jacobo Wagentrutz, Artium Liberalium et Philosophiae Magistro, Scholae huius Arithmeticae Bambergensis praeceptore. Bamberg, G. Christoph Lochner, 1737.

221. **Waitz,** Theodor, Allgemeine Pädagogik, neu von Dr. Otto Willmann Braunschweig 1875.

222. **Weigl,** F. B., Lehrbuch der Rechenkunst. Vierte von Dr. Wandner umgearbeitete Ausgabe. Sulzbach 1836.

223. **Weitz,** E., Kurze Anleitung zum Rechenunterrichte in der Volksschule. Breslau 1885.

224. **Wendler.** Arithmetica practica; Das ist Kunst- oder Wissenschaft recht ordentlich und künstlich nach der Zahl/ Maſs und Gewicht zu tractiren und zu rechnen / Durch die Regulam detrie / und Practicam / nach jetziger Zeit gangbaren Müntzen etc., schönen nützlichen Reguln, vorfallenden Fragen und üblichen Rechnungen / auf das allerkürziste und leichteste zu solvirn und aufzulösen. Gestellt durch Georgen Wendler/

verordneten Schreib und Rechenmeister in Regenſburg. Gedruckt bei Christoph Fischern/ 1667.

225. **Windorf,** M., Diakonus in Saalfeld, Anleitung zum praktischen Rechnen zum Gebrauch der Jugend. Saalfeld und Leipzig 1810.

226. **Wolff,** Christian, Freyherr v., S. K. Majestät in Preuſsen Geheimen Rathe und Cantzler der Universität Halle, Prof. honorarii zu S. Petersburg, der k. Akademie der Wissenschaften zu Paris etc., Auszug aus den Anfangsgründen aller Mathematischen Wissenschaften zu bequemerem Gebrauche der Anfänger Franckfurt und Leipzig MDCCLIX.

227. **Wolff,** des Reichsfreiherrn v., Vernünftige Gedanken zur nützlichen Erlernung der mathematischen Wissenschaften, insonderheit wie der Verstand zu seinen Verrichtungen vollkommen zu machen. Aus dem Lateinischen übersetzt von Adolph v. Steinwehr. Halle 1747.

228. **Zeller,** Christ. Heinrich, Lehren und Erfahrungen für christliche und Armen-Schullehrer. Basel 1827.

229. **Ziller,** Dr. Tuiskon und Prof. **Vogt,** Jahrbuch des Vereins für wissenschaftliche Pädagogik. Langensalza-Leipzig.

230. **Ziller,** Dr. Tuiskon, Vorlesungen über allgemeine Pädagogik. Leipzig 1876.

231. **Zinkernagel,** Handbuch der Archivare. Nördlingen 1800.