Tel.: +49-521-105335
Fax: +49-521-105325
E-Mail: sieben@math.uni-bielefeld.de

Jahresbericht manuscript No.
(will be inserted by the editor)

Gauß und das Theorem von Fermat : $a^m \equiv a$

Ein genetischer Bauplan für die drei ersten drei Abschnitten der Disquisitiones Arithmeticae

Christian Siebeneicher

Für Omanita.

Received: date / Accepted: date

Es gibt allgemeine Wahrheiten, die unser Verstand bereit ist aufzunehmen, sobald er deren Richtigkeit in einigen besonderen Fällen erkannt hat.

Leonhard Euler.

Zusammenfassung Schon als Kind von acht Jahren hatte Carl Friedrich Gauß ein Rechenbuch, in das er „Liebes Büchlein" schrieb. Das Buch enthält eine Lesart von Fermats Satz für die Primzahl 7, und die ersten drei Abschnitte der Disquisitiones Arithmeticae wirken wie die lückenlose Ausarbeitung dieses Faktums. Eine erhellende Verbindung zwischen dem Rechenbuch und Gauß' Meisterwerk stiftet die letzte Seite der Leistenotizen.
Abstract Already as a child of eight years Carl Friedrich Gauss had an arithmetic book to which he wrote "Dear little Book". It contains a version of Fermat's Theorem for the prime 7 and the first three sections of the Disquisitiones Arithmeticae appear to be the perfect exploration of that fact. An eye–opening link is provided by the last page of the Leistenotizen.

Keywords Remer : Arithmetica theoretico practica · Gauss : Disquisitiones Arithmeticae

Mathematics Subject Classification (2010) MSC 11A07 11A41

1 Einleitung

1981 verkündete Walter Kaufmann Bühler in '*Gauss: A Biographical Study*' ([2] p. 161):

> It should not be expected that the discovery and publication of new documents would lead to important revelations about Gauss's scientific or private life. The last new document of this kind was the diary, which was discovered in 1898. The published sources provide ample material for a broad and thorough understanding of Gauss.

Auf einer Seite der sogenannten Leistenotizen wurde überraschend eine Nachricht von Gauß entdeckt, die zu *important revelations about Gauss's scientific* a n d *private life* führte:

> Au sujet du theorem de Fermat : $a^m \equiv a$.
> on pourra comparer encore
> l'appel au public par König et
> la reponse d'Euler Hist. de l'Ac. de Pr. A. 1750 p. 530
>
> $\boxed{\text{Gauß–B. 45}}$

Universität Bielefeld, Fakultät für Mathematik, D 33 607, Bielefeld. E–mail: sieben@math.uni-bielefeld.de.

Das Nötigste zu den Notizen sagte Felix Klein in seinen 1926 posthum veröffentlichten '*Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*': ≫ *... ein im übrigen belangloses mit weißen Blättern durchschossenes* Rechenbuch von Leiste*, das Gauß schon vor seiner Göttinger Zeit besessen hatte, und das ihm nun, parallellaufend neben dem Tagebuch, bis 1798 für Aufzeichnungen aller Art diente*≪ ([26], p. 30). Über den Inhalt der Notizen konnte man sich lange Zeit nur direkt im Lesesaal der Bibliothek informieren.

Daran hat sich etwas geändert. 2002 berichtet Helmut Rohlfimg in *Das Erbe des Genies* ([44], p. 14): Eine ≫*längst überfällige völlige Neubearbeitung des Nachlasses begann im Jahr 1953, als der schon mehrfach genannte Vermessungsingenieur und Leiter des Katasteramtes Hannover Theo Gerardy (1908–1986) im Auftrag der Niedersächsischen Vermessungs– und Katasterverwaltung an die Neuordnung der geodätischen Aufzeichnungen von Gauss heranging. Auf Wunsch der Bibliothek folgte kurz nach dem Jahr 1955 die systematische Verzeichnung auch des übrigen Materials und der Korrespondenz. Bis auf einige redaktionelle Arbeiten war die eigentliche Erschließung bis 1963 weitestgehend abgeschlossen. Das von Gerardy erstellte Nachlassverzeichnis stützt sich nach seiner eigenen Aussage in weiten Teilen auf Brendels Katalog; es ist bis heute in Benutzung und erlaubt einen zielgerichteten Zugriff auf alle Materialien*≪. In dem Verzeichnis findet sich unter `Handb 1, Leistes "Arithmetik und Algebra"` als letzte Eintragung: `hintere Vorsatzblätter Zitate aus Euler u.a.` Weltbewegendes bemerkte der Vermessungsingenieur Theo Gerardy an dieser Stelle der Notizen anscheinend nicht. Doch ein beim *Göttinger Digitalisierungs Zentrums* bestellter Scan der Notizen [31] ließ zum Vorschein kommen, dass Gerardy mit `u.a.` diejenige Version des kleinen Fermat'schen Satzes auf den Punkt brachte, mit der Gauß den dritten Abschnitt der *Disquisitiones Arithmeticae* beginnt:

> Ideal.
>
> Speculationes mathematicae si ad earum utilitatem respicimus ad duas classes reduci debere videntur: ad priorem referendae sunt eae quae cum ad vitam communem tum ad alias artes insigne aliquod commodum afferunt, quarum propterea pretium ex magnitudine huius commodi statui solet. Altera autem classis eas complectitur speculationes, quae etsi cum nullo insigni commodo sunt coniunctae, tamen ita sunt comparatae ut ad fines analyseos promovendos viresque ingenii nostri acuendas occasionem praebant. Cum enim plurimas investigationes, unde maxima utilitas expectari posset, ob solum analyseos defectum, deserere cogamur, non minus pretium, iis speculationibus statuendum videtur quae haud contemnenda analyseos incrementa pollicentur.
>
> Il y a des verités generales que notre esprit
> est prêt d'embrasser aussitôt qu'il en reconnoit la
> justesse dans quelques cas particuliers.
> Euler. Histoire de l'Ac. de Berlin
> 1748. p. 234.
>
> Au sujet du theorem de Fermat : $a^m \equiv a$.
> on pourra comparer encore
> l'appel au public par König et
> la reponse d'Euler Hist. de l'Ac. de Pr. A. 1750 p. 530
>
> $\boxed{\text{Gauß–B. 45}}$

Auf der Basis von durch die GAUSS–Gesellschaft zur Verfügung gestellten Fotokopien, hat Werner Fuchs in seinem in den Mitteilungen der Gauss–Gesellschaft e.V. Göttingen veröffentlichten Aufsatz über '*Die Leiste–Notizen des jungen GAUSS*' 1978 über diejenigen Seiten berichtet, die eine direkte Verbindung mit dem Text des Lehrbuchs haben ([16], p. 19ff). Von der Seite mit der Signatur $\boxed{\text{Gauß–B. 45}}$ der Gauß–Bibliothek ist nicht die Rede.

Daher war Karin Reich wohl die Erste, die in ihrem Aufsatz '*Gauß' geistige Väter: nicht nur „summus Newton", sondern auch „summus Euler"*' die Nachwelt über einen Teil von `Euler u.a.` unterrichtete ([39], p. 107/108). Aus Anlass der 150. Wiederkehr von Gauß'

Todestag hatten die Georg–August–Universität, die Stadt Göttingen und die Gauß–Gesellschaft e.V. das GAUSSJAHR 2005 ausgerufen, in dem im Alten Rathaus am Markt die Ausstellung stattfand, *„Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst — Carl Friedrich Gauß in Göttingen“*. Abgerundet wurde diese durch einen in den Göttinger Bibliotheksschriften 30 publizierten Katalog [39]. In Karin Reichs Aufsatz werden die Titelzeile *Ideal* und der erste Block mit dem lateinischen Text wiedergegeben, sowie eine von Eberhard Knobloch stammende Übersetzung aus dem Lateinischen.

Auf die Übersetzung von Eberhard Knobloch wies Maarten Bullynck hin, und ein Wink auf eine weitere Veröffentlichung von Karin Reich zu `Euler u.a.` kam per E–Mail von Bärbel Mund von der Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke der SUB–Göttingen*:

> Ich möchte bei der Gelegenheit auf eine aktuelle Veröffentlichung hinweisen, in der die beiden Euler-Zitate (“Ideal : Speculationes . . . ” bzw. “Il y a des verités . . . ”) wiedergegeben werden:
> Karin Reich: Ein neues Blatt in Eulers Lorbeerkranz, durch Carl Friedrich Gauß eingeflochten. In: Studien zur Wissenschafts– und zur Religionsgeschichte. Redaktion: Werner Lehfeldt. Berlin 2011 (Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Bd. 10, Sammelband 2) (S. 223–273; Zitat S. 230).

In diesem zweiten Beitrag zu den Leiste–Notizen wird auch Eulers französisches Zitat mitgeteilt. Dem schließt sich der Kommentar an: ≫*So machen bereits die Leiste–Notizen klar, welch überaus große Bedeutung Euler für den jungen Gauß hatte. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, dass Gauß, als er in Göttingen 1795 sein Studium begann, auch zahlreiche Werke Eulers in der dortigen Universitätsbibliothek auslieh und danach trachtete, für seine eigene Bibliothek möglichst viele der Werke Eulers erwerben zu können.*≪

Nun hat Felix Klein in seinem Werke–Beitrag zu Gauß’ Tagebuch aber auch die große Bedeutung der Leistenotizen betont ([27], p. 487). Daher machte es stutzig, dass er den Eintrag, ≫ *Au sujet du theorem de Fermat :* $a^m \equiv a$ ≪ nicht erwähnt. Das sehr sorgfältig komponierten Blatt erscheint nämlich — zusammen mit den Zitaten Eulers — wie eine Art Drehbuch für die ersten drei Abschnitte der *Disquisitiones Arithmeticae*.

Durch eine Angabe zur äußeren Form der Notizen kann dieser vermeintliche Lapsus Kleins aufgeklärt werden. In dem Aufsatz *Über Gauss’ Arbeiten zur Funktionentheorie* in Band X_2 der Werke führt Ludwig Schlesinger nämlich zu den Notizen aus ([47], p. 6):

> Neben seinem Namen hat GAUSS auf das Schutzblatt des Buches eingeschrieben:

Const. liber ipse	8
ligatura	4
	12

> Dadurch wird bestätigt, dass wirklich alle handschriftlichen Eintragungen, die das Buch enthält, von GAUSS herrühren.

Zusammen mit der Signatur $\boxed{\text{Gauß–B. 45}}$ der Gauß–Bibliothekt auf der letzten Seite der Notizen zeigt Ludwig Schlesingers Befund, dass die Dokumentation von Gauß’ Nachlass eine Unstimmigkeit enthält, und weil G. Waldo Dunningtons schon 1955 in *Gauss: Titan of Science* feststellte ([12] p. x), ≫*It is not likely that any new vital information will turn up*≪, bewog Gerardys Liste wohl Walter K. Bühler, sich dem Diktum Dunningtons anzuschließen.

2 Die Kongruenz $a^m \equiv a$

Die für ganze Zahlen m definierte Zuordnung $m \mapsto a^m$ liefert — unter geeigneten Voraussetzungen und wenn allein die resultierenden Reste betrachtet werden — den Leitgedanken, mit dem der dritte Abschnitt der Disquisitiones Arithmeticae beginnt ([17], p. 30):

> **Die Reste der Glieder einer mit der Einheit anfangenden geometrischen Reihe bilden eine periodische Reihe.**

In dem unmittelbar folgenden Artikel 45 wird dieser Leitsatz präzisiert und durch eine passende Voraussetzung für einen Beweis zugänglich gemacht ([17], p, 30):

> **Satz.** *In jeder geometrischen Progression* $1, a, a^2, a^3, \ldots$ *giebt es ausser dem ersten Gliede 1 noch ein anderes der Einheit nach dem zu a primen Modul p congruentes Glied* a^t*, dessen Exponent* $t < p$ *ist.*
>
> Da der Modul p zu a und somit auch zu jeder beliebigen Potenz von a prim ist, so ist kein Glied der Progression $\equiv 0 \pmod{p}$, sondern vielmehr ein jedes irgend einer der Zahlen $1, 2, 3, \ldots, p-1$ congruent. Da die Anzahl dieser Zahlen gleich $p-1$ ist, so können offenbar, wenn mehr als $p-1$ Glieder der Progression in Betracht gezogen werden, diese nicht sämtlich verschiedene kleinste Reste haben. Demnach befinden sich unter den Gliedern $1,\ a,\ a^2,\ a^3, \ldots, a^{p-1}$ mindestens zwei congruente. Es sei also $a^m \equiv a^n$ und $m > n$; dann wird, wenn man durch a^n dividiert, $a^{m-n} \equiv 1$ (Artikel 22), wo $m - n < p$ und > 0 ist.

Bemerkung Der Beweis dieses Satzes benutzt ein Verfahren, das unter dem Namen *Dirichlet'sches Schubfachprinzip*[1] in die Literatur eingangen ist.

Vier Musterbeispiele führen in die neue Struktur ein, deren charakteristische Eigenschaften in der Folge dann ausführlich diskutiert werden:

> **Beispiel.** So findet man in der Progression 2, 4, 8, ... als erstes Glied, welches nach dem Modul 13 der Einheit congruent ist, das Glied $2^{12} = 4096$. In derselben Progression ist nach dem Modul 23: $2^{11} = 2048 \equiv 1$. Ebenso ist die sechste Potenz der Zahl 5, d.i. 15625, nach dem Modul 7, dagegen die fünfte, 3125, nach dem Modul 11 der Einheit congruent. In einigen Fällen also wird schon eine Potenz mir kleinerem Exponenten als $p-1$ der Einheit congruent, in andern dagegen muss man bis zur $p-1$ ten Potenz aufsteigen.
>
> 46.
>
> Wird die Progression über das Glied hinaus, welches der Einheit congruent ist, fortgesetzt, so gehen dieselben Reste, welche man im Anfang hatte, wiederum hervor. Ist nämlich $a^t \equiv 1$, so wird $a^{t+1} \equiv a$, $a^{t+2} \equiv a^2$ u.s. w., bis man zu dem Gliede a^{2t} gelangt, dessen kleinster Rest wiederum $\equiv 1$ ist, und die Periode der Reste beginnt von Neuem. Man erhält daher eine t Reste umfassende Periode, welche, nachdem sie zu Ende ist, immer von Anfang an sich wiederholt; und es können in der ganzen Progression keine andern Reste vorkommen, als die, welche in dieser Periode enthalten sind. Allgemein ist $a^{mt} \equiv 1$ und $a^{mt+n} \equiv a^n$, was wir in unserer Bezeichnung so darstellen:
>
> Ist $r \equiv \rho \pmod{t}$, so ist auch $a^r \equiv a^\rho \pmod{p}$.
>
> 47.
>
> Aus diesem Satze ergiebt sich ein einfaches Verfahren, die Reste von Potenzen mir beliebig hohem Exponenten aufzufinden, sobald man weiss, welche Potenz der Einheit congruent ist. Sucht man z. B. den Rest, welcher bei der Division der Potenz 3^{1000} durch 13 übrig bleibt, so ist, wegen $3^3 \equiv 1 \pmod{13}$, $t = 3$. Da nun $1000 \equiv 1 \pmod{3}$ ist, so ist $3^{1000} \equiv 3 \pmod{13}$.
>
> 48.
>
> Ist a^t die niedrigste Potenz, welche der Einheit congruent ist (ausser $a^0 = 1$, auf welchen Fall wir hier keine Rücksicht nehmen), so werden jene t Glieder, welche die Periode der Reste bilden, sämtlich verschieden sein, wie man aus dem Beweise des Artikels 45 ohne Mühe erkennt. Dann kann aber der Satz des Artikels 46 umgekehrt werden, nämlich: Ist $a^m \equiv a^n \pmod{p}$), so ist $m \equiv n \pmod{t}$. Denn wenn m, n nach dem Modul t incongruent wären, so würden ihre kleinsten Reste verschieden sein. Nun ist aber $a^\mu \equiv a^m$, $a^\nu \equiv a^n$, daher $a^\mu \equiv a^\mu$, d. h. nicht alle Potenzen unterhalb a^t würden incongruent sein, was gegen die Voraussetzung ist.
>
> Wenn daher $a^k \equiv 1 \pmod{p}$ ist, so ist $k \equiv 0 \pmod{p}$, d. h. k ist durch t teilbar.

Diesen ersten Ergebnissen folgt ein Hinweis zu der besonderen Bedeutung der Primzahlen für die Grundlegung der höheren Arithmetik:

> Bisher haben wir von beliebigen Moduln, wofern sie nur zu a prim sind, gesprochen. Jetzt wollen wir die Moduln, welche absolute Primzahlen sind, gesondert betrachten und auf diesem Grunde nachher die allgemeinere Untersuchung aufbauen.

Mit den Primzahlen als Basis für die allgemeinere Untersuchung geht es dann in Artikel 49 weiter mit dem

[1] Das Schubfachprinzip wurde von Gauß also schon angewendet, bevor Dirichlet 1805 geboren wurde.

Satz. *Ist p eine Primzahl, welche in a nicht aufgeht, und ist a^t die niedrigste Potenz von a, welche nach dem Modul p der Einheit congruent ist, so ist der Exponent t entweder gleich $p-1$ oder ein aliquoter Teil dieser Zahl.*

Diesem folgt der begleitende Vorschlag: ≫*Man vergleiche die Beispiele im Artikel 45*≪, und als allererstes spektakuläres Ergebnis in den *Disquisitiones Arithmeticae* schließt sich in Artikel 50 dann der **Fermat'sche Satz** an:

Da also $\frac{p-1}{t}$ eine ganze Zahl ist, so folgt, wenn man beide Seiten der Congruenz $a^t \equiv 1$ zur Potenz $\frac{p-1}{t}$ erhebt, $a^{p-1} \equiv 1$, oder: Die Differenz $a^{p-1}-1$ ist stets durch p teilbar, wenn p eine in a nicht aufgehende Primzahl ist.

Bemerkungen:
1. In dem von Gauß für sein erstes bedeutendes Resultat geschaffenen Rahmen erweist sich Fermats Satz als eine direkte Folgerung des zu der Kongruenz $a^m \equiv a$ äquivalenten Phänomens periodischer Reste.
2. Auf die *zwei klassischen Formulierungen des Kleinen Fermat'schen Satzes* macht André Weil in seiner Geschichte der *Zahlentheorie* aufmerksam ([51] p. 57/58).
3. Der Eintrag '*au sujet du theorem de Fermat*' ging in eine Fußnote zu Fermats Satz ein:

In dem berüchtigten Streite zwischen M a u p e r t u i s und K ö n i g, der wegen des Prinzips der kleinsten Aktion entstanden war, aber bald zu andern Sachen überging, behauptet K ö n i g im Besitze eines Briefes von L e i b n i z zu sein, in dem ein mit dem E u l e r'schen vollkommen übereinstimmender Beweis enthalten sei. *Appel au public, p. 106*. Wenn wir auch die Glaubwürdigkeit dieses Zeugnisses nicht in Zweifel ziehen wollen, so hat doch sicher L e i b n i z seine Erfindung nie veröffentlicht. Vgl. *Hist. de l'Ac. de Berlin, Année 1750 p. 530.*

Ersichtlich spielt bei dem Weg von den sich periodisch wiederholenden Resten zu Fermats Satz neben den Primzahlen das R e c h n e n m i t R e s t e n eine wesentliche Rolle.

Dies erfordert an vorderster Stelle eine geeignete Erweiterung der elementaren Arithmetik zu einer neuartigen Ausformung, von der Gauß in der Vorrede zu den *Disquisitiones Arithmeticae* spricht ([17] p. V):

... Da aber das, was gewöhnlich unter dem Namen Arithmetik gelehrt wird, kaum über die Kunst zu zählen und zu rechnen (d. h. die Zahlen durch geeignete Zeichen etwa nach dem dekadischen Systeme darzustellen und die arithmetischen Operationen auszuführen) hinausgeht, mit Hinzufügung noch einiger Sachen, die entweder gar nicht zur Arithmetik gehören (wie die Lehre von den Logarithmen) oder doch wenigstens nicht den ganzen Zahlen eigentümlich sind, sondern für alle Zahlgrößen gelten, so scheint es sachgemäß zu sein, zwei Teile der Arithmetik zu unterscheiden und das Erwähnte zur elementaren Arithmetik zu rechnen, dagegen alle allgemeineren Untersuchungen über die eigentlichen Beziehungen der ganzen Zahlen der *höheren Arithmetik*, von der hier allein die Rede sein wird, zu überweisen.
Zur höheren Arithmetik gehört das, was E u c l i d in den „*Elementen*" Buch VII ff. mit der bei den Alten gewohnten Strenge und Eleganz gelehrt hat; doch beschränkt sich dies auf die ersten Anfänge dieser Wissenschaft ...

3 Der Auftakt zu den Disquisitiones Arithmeticae

In Durchführung dieser programmatischen Grundsätze beginnen die *allemeineren Untersuchungen über die eigentlichen Beziehungen der ganzen Zahlen* mit einer Definition, die — zusammen mit den Primzahlen — gleichermaßen Ausgangspunkt und Fundament für die *Höhere Arithmetikt* ist ([17] p. 1):

Von der Congruenz der Zahlen im Allgemeinen

Congruente Zahlen, Moduln, Reste und Nichreste

Wenn die Zahl a in der Differenz der Zahlen b,c aufgeht, so werden b und c nach a **congruent**, im andern Falle **incongruent** genannt. Die Zahl a nennen wir den **Modul**. Jede der beiden Zahlen b,c heißt im ersteren Falle **Rest**, im letzteren aber **Nichtrest** der anderen.

⋮

Die Congruenz der Zahlen werden wir im Folgenden durch das Zeichen $\equiv$ andeuten und den Modul da, wo es nötig sein wird, in Klammern hinzufügen: $-16 \equiv 9 \pmod 5$, $-7 \equiv 15 \pmod{11}$.**

** Dieses Zeichen habe ich wegen der grossen Analogie, die zwischen der Gleichheit und der Congruenz stattfindet, gewählt. Aus demselben Grunde hat LEGENDRE in seinem unten öfter zu erwähnenden Werke geradezu das Gleichheitszeichen für die Congruenz beibehalten; doch habe ich bedenken getragen, ihm darin zu folgen, um keine Zweideutigkeit entstehen zu lassen.

Daniel Shanks, der in Fortsetzung von Vorstellungen Felix Kleins zur *vorhistorischen Periode* im Lebenslauf von Gauß ([26], p. 30) in seinen *Solved and unsolved Problems in Number Theory* ein schlüssiges Bild des Entwicklungsganges '*Von den Dezimalbruchperioden zu den Disquisitiones Arithmeticae*' entwarf, sagt zu diesem Auftakt des Buches ([50] p. 52):

> In fact, these opening sentences are completely unmotivated, and hardly understandable, except in the historical light of the previous chapter. But in that light, the time was ripe — and even overripe — for such an investigation. We will review four aspects of the situation then existing …

Einige Seiten danach heißt es dann speziell zu den Kongruenzen ([50] p. 55):

> We could, it is true, have introduced them earlier—and saved a line here and there in the proofs. But History did not introduce them earlier. Nor would it be in keeping with our title, "Solved and Unsolved Problems," for us to do so. To have a solved problem, there must first be a problem, and then a solution. We could not expect the reader to appreciate the solution if he did not already appreciate the problem. Moreover, if we have gone on at some length before raising the curtain (and perhaps given undue attention to lighting and orchestration) it is because we thought it a matter of some importance to analyze those considerations which may have led Gauss to invent the residue classes. Knowing what we do of Gauss's great skill with numbers, and while we can not say for certain, the consideration most likely to have been the immediate cause of the invention would seem to be item (c) above.

und zu *item (c) above* ([50] p. 54):

> (c) Again, consider the arithmetic of page 26:
>
> $$167 \mid 2^{83} - 1,$$
>
> or the seemingly impossible operation,
>
> $$32070004059 \mid 2^{16035002279} - 1$$
>
> of Exercise 7 …

Nach der Definition des Kongruenzbegriffs und der Einführung des mit diesem gedanklich verbundenen Rechensymbols $\equiv$, das eine dem Gleichheitszeichen $=$ analoge Praxis auch beim Rechnen mit Resten ermöglicht, geht es dann im zweiten Abschnitt, **Von den Congruenzen ersten Grades**, um die Bereitstellung eines zweckmäßigen Werkzeugs für das Rechnen in der höheren Arithmetik. In diesem neuen Rechenbereich wird zwar nach den bekannten Regeln noch immer mit den Zahlen gerechnet, doch erlaubt die Definition der Kongruenz zweier Zahlen (zusammen mit dem assoziierten Rechenzeichen) eine entscheidende Ausweitung und spezifische Verfeinerung — und damit eine gezielte Steigerung des Leistungsvermögens — des bekannten Rechnens, das *gewöhnlich unter dem Namen Arithmetik gelehrt wird*.

4 Das charakteristische Werkzeug der höheren Arithmetik

Unter der Titelzeile, *Vorbereitende Sätze über Primzahlen, Factoren u.s.w.* geht es in ersten und beispielgebenden Anwendungen der neuen Rechentechnik in Artikel 13 zunächst um den folgenden ([17], p. 6)

> **Satz.** *Das Product aus zwei positiven Zahlen, welche kleiner als eine gegebene Primzahl sind, lässt sich nicht durch diese Primzahl teilen.*
> Es sei p eine Primzahl und a eine positive Zahl $< p$; dann wird behauptet, dass es keine positive Zahl $b < p$ von der Beschaffenheit giebt, dass $ab \equiv 0 \pmod{p}$ ist.
> **Beweis**. Angenommen es gäbe Zahlen $b, c, d, \ldots$, die sämtlich kleiner als p und von der Beschaffenheit sind, dass $ab \equiv 0, ac \equiv 0, ad \equiv 0, \ldots \pmod{p}$. Von allen diesen sei b die kleinste, so dass keine der Zahlen, die kleiner als b sind, jene Eigenschaft besitzt. Dann ist oftenbar $b > 1$. Denn wäre $b = 1$, so würde $ab = a < p$ (nach Voraussetzung), also nicht durch p teilbar sein. Mithin lässt sich p, da es eine Primzahl ist, nicht durch b teilen, sondern wird zwischen zwei aufeinanderfolgende Vielfache von b, etwa zwischen mb und $(m+1)b$, fallen. Ist $p - mb = b'$, so wird b' eine positive Zahl und kleiner als b sein. Da nun nach unserer Annahmae $ab \equiv 0 \pmod{p}$ ist, so hat man auch $mab \equiv 0$ (nach Artikel 7) und somit, wenn man dies von $ap \equiv 0$ subtrahiert: $a(p - mb) = ab' \equiv 0$, d. h. b müsste zur Reihe der Zahlen $b, c, d, \ldots$ gerechnet werden, obwohl es kleiner als die kleinste b dieser Zahlen ist. Dies widerspricht aber unserer Annahme.
>
> 14.
>
> *Wenn weder a noch b durch die Primzahl p sich teilen lässt, so ist auch das Product ab durch p nicht teilbar.*
> Die kleinsten positiven Reste der Zahlen a, b nach dem Modul p seien α, β, von denen (nach Voraussetzung) keiner gleich 0 ist. Wäre nun $ab \equiv 0 \pmod{p}$, so würde auch, da $ab \equiv \alpha\beta$ ist, $\alpha\beta \equiv 0$ sein, was mit dem vorhergehenden Satze nicht verträglich ist.

Dem folgt eine Bemerkung zum historischen Umfeld des Satzes von Artikel 14 sowie ein Hinweis auf die Bedeutung der neuen Methode für die höhere Arithmetik ([17], p. 7):

> Der Beweis dieses Satzes ist bereits von Euclid, Elem. VII, 32, gegeben worden. Wir haben ihn jedoch nicht weglassen wollen, einmal weil von den Neueren einige entweder nur nichtige Gründe für einen Beweis des Satzes ausgegeben oder ihn ganz und gar übergangen haben, sodann weil sich das Wesen der hier angewendeten Methode, deren wir uns später zur Aufsuchung viel versteckterer Wahrheiten bedienen werden, an einem einfacheren Beispiel leichter verstehen läßt.

Als Korollar folgt dann in Artikel 16. der **Satz**: *Jede zusammengesetzte Zahl lässt sich nur auf eine einzige Weise in Primfactoren zerlegen.*
Bemerkungen:

1. Mit dem Blick auf Verallgemeinerungen dieses Satzes geht Peter Gustav Lejeune Dirichlet in seinen *Vorlesungen über Zahlentheorie*, die von Richard Dedekind 1863 posthum herausgegeben wurden, ganz bewusst einen anderen Weg: Am Ende des ersten Abschnitts, *Von der Theilbarkeit der Zahlen*, heißt es in §. 16 in einem Rückblick ([11], p. 31): ≫*... beobachten wir nun vor allen Dingen, dass das ganze Gebäude auf e i n e m Fundament ruht, nämlich auf dem Algorithmus welcher dazu dient, den größten gemeinschaftlichen Theiler zweier Zahlen aufzufinden*≪. Für die Grundlegung dieses Gebäudes wird in §. 1. zunächst gezeigt, dass ein *Product aus zwei oder drei Faktoren unabhängig von der Anordnung der Multiplication* ist, und in §. 2. heisst dann weiter: ≫*Es ist nun leicht zu zeigen, ohne ein neues Princip anzuwenden, dass ein ganz ähnlicher allgemeinerer Satz für jedes System S von beliebig vielen positiven ganzen Zahlen a, b, c, ... gilt.* Zum Beweis wird gesagt: *Um dies zu zeigen, wenden wir die vollständige Induction an, d.h. wir nehmen an, der Satz sei richtig, ...* ([11], p. 3). Gauß' Idee einer Grundlegung der *Höheren Arithmetik* mit den Primzahlen als Basis der Untersuchungen und einer spezifischen Methode, *deren wir uns später zur Aufsuchung viel versteckterer Wahrheiten bedienen werden*, wird damit zugunsten des vermeintlich grundlegenderen Prinzips der vollständigen Induktion aufgegeben.

2. Knapp hundert Jahre nach Dirichlet stellt Harold Davenport 1962 in *The Higher Arithmetic* zu dem Eindeutigkeitssatz von Gauß fest ([10], p. 19): ≫*The first clear statement and proof seem to have been given by Gauss in his famous* Disquisitiones Arithmeticae *of 1801.*≪ Mit dem Ziel einer Grundlegung der Zahlentheorie heißt es dann aber schon vorher im Abschnitt *The Laws of Arithmetic*: ≫*The laws of arithmetic, suppIemented by the principle or induction (which we shalI discuss in the next section), form the basis for the logical development of the theory of numbers. They allow us to prove generaI theorems about the naturaI numbers without* ...≪ ([10], p. 11/12). Auch in *The Higher Arithmetic* wird damit Gauß' *Höhere Arithmetik* mit ihrer Methode zur *Aufsuchung viel versteckterer Wahrheiten* einem übergeordneten logischen Prinzip geopfert.
3. Dass Gauß' Beweis von Euklids Lemma ein bemerkenswerter Fortschritt gegenüber Euklids 2000 Jahre älterem ist, betont 2003 Igor R. Shafarevitch in den *Discourses on Algebra* ([49] p. 10). Allerdings heisst es dann zu Euklids Lemma und seinem Beweis ([49] p. 11):

   > **Theorem 6.** If the product or two integers is divisible by a certain prime number, then at least one or those two numbers is divisible by that prime number.
   > We suppose that we want to prove the theorem for the prime number p. We will prove it for all prime numbers in order of increasing size (As we in essence have done, proving it in Lemma 2 for $p = 2$ and in Lemma 4 for $p = 3$). Therefore, when we reach the prime number p, we can consider that the lemma is already proved for smaller prime numbers $< p$.

   Und auf der Seite 13 geht es dann weiter mit der Bemerkung:

   > We note that more than once in this section we constructed a proof of some assertion about the natural number n by assuming that we can take the numbers one after another, We verify that the assertion holds for $n = 1$. Then we prove it for an arbitrary n, supposing that it is already proved for all smaller values.
   > Here we rely upon an assertion that should be considered one of the axioms of arithmetic: *If a certain property for natural numbers n is true for $n = 1$ (or $n = 2$) and if its truth for all natural numbers less than n implies that it is true for n, then it is true ror aII naturaI numbers.*
   > This property is called the *principle of mathematical induction.*

   Gauß' Beweisidee, bei der ja auf dem Fundament der Primzahlen für jede gegebene Primzahl p jeweils nur die e n d l i c h vielen Zahlen $< p$ ins Spiel kommen — und damit eine vollständige Induktion unnötig ist — kommt also auch hier nicht zum Zuge.
4. Gauß' anscheinend verschwundener Beweis wurde aber dennoch nicht vergessen: John H. Conway und Richard K. Guy haben 1996 im Kapitel *The Primacy of Primes* von *The Book of Numbers* die Primzahlen wieder ins Zentrum einer Arithmetik á la Gauß gerückt. Mit modernen Bezeichnungen und einer exemplarischen Rechnung wird zunächst die versteckte arithmetische Wahrheit zutage gefördert, dass modulo p jeder Rest $r \neq 0$ ein Inverses $1/r$ hat. Hieraus folgt dann Euklids Lemma und als eine direkte Anwendung des Lemmas auch die Eindeutigkeit einer Faktorisierung ([9], p. 130–133):

   > For if $n = a \times b \times c \times \ldots$ and p *doesn't* divide any of $a, b, c, \ldots$, then, modulo p, there are numbers $1/n, 1/b, 1/c, \ldots$, and so there is a number $1/n = 1/a \times 1/b \times 1/c \times \ldots$, which shows that n can't be divisible by p.
   > Euclid's principle is what stops a number from having two really different factorizations. This is because any prime in one factorization must divide some prime in the other, and so must actually be that prime. We can cancel this prime and repeat the argument. The two factorizations can only differ in the order in which the primes are arranged.
5. Felix Klein charakterisiert die *Disquisitiones Arithmeticae* in seinen *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik*, vergleicht sie mit Dirichlets *Vorlesungen über Zahlentheorie* und beansprucht dann die Deutungshoheit für Gauß' Meisterwerk ([26], p. 27):

   > Freilich, wer einen Einblick in die Geschichte der großen, hier niedergelegten Entdeckungen zu gewinnen wünscht, der wird sich durch das Studium der Disquisitiones Arithmeticae nicht befriedigt fühlen. Diese lückenlose, mit unerbittlicher Strenge durchgeführte Deduktion verrät nichts von den Entstehungsversuchen und überwundenen Schwierigkeiten. Die Darstellung knüpft an keinerlei allgemeine Gesichtspunkte an, beschäftigt sich auch nicht etwa mit der Fra-

ge, welche Bedeutung die aufgeworfenen Probleme haben, die so virtuos gelöst werden, und ist darum in ihrer Unzugänglichkeit äußerst schwierig zu lesen. Erst durch Dirichlets interpretierende Vorlesungen, die eine vorzügliche Einführung in Gauß' Problemstellung und Denkweise geben, ist dem Werk zu der ihm gebührenden Wirkung verholfen worden.

5 Eine Rechnung aus dem Rechenbuch des Kindes Carl Friedrich Gauß

Nun gibt es aber neben dem überraschenden Fund des Blattes der Leistenotizen noch eine zweite unerforschte Nachlass–Quelle, deren immense Bedeutung aber nicht nur G. Waldo Dunnington und Walter K. Bühler entgangen ist.

In der Sitzung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften vom 8. Februar 1918 legte Felix Klein nämlich den Aufsatz von Philipp Maennchen über '*Die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauss*' vor. In diesem wird in einer Fußnote auf die 1737 publizierte *Arithmetica theoretico practica* von Christian Stephan Remer hingeweisen — ein Buch, das Gauß bereits als 8jähriges Kind besaß ([32] p. 11). Anscheinend versprach das R e c h e n b u c h e i n e s K i n d e s aber keine '*important revelations about Gauss's scientific or private life*'.

Doch entsteht nicht eine sehr lebendige Vorstellung von der *Problemstellung und Denkweise* der höheren Arithmetik durch das folgende Beispiel aus der *Arithmetica theoretico practica* von Christian Stephan Remer ([41] p. 303–304)?

> … Nun aber steigen die [Reste] von einer Geometrischen Progression, die mit 10 aufsteigt, wie im vorhergehenden § bewiesen, in 7 geteilet, mit 3 auf.
> Der Rest also des ersten Gliedes ist 1,
> 3 mal 1 ist 3, der Rest des andern Gliedes,
> und 3 mal 3 ist 9; so ist in 7 mit einem Reste 2 theilbar, da 2 der Rest des dritten Gliedes.
> Ferner ist 2.3 = 6 dem Rest des vierdten Gliedes.
> Weiter ist 6.3 = 18 in 7 mit dem Reste 4 theilbar, das 4 = dem Rest des fünfften Gliedes.
> Noch ist 4.3 = 12 in 7 mit dem Reste 5 theilbar, und 5 also der Rest des sechsten Gliedes.
> Endlich ist 5.3 = 15 in 7 mit dem Reste 1 wieder theilbar, da 1 der Rest des siebenden Gliedes.
> Darum sind die Reste der ersten sechs Glieder solcher Progression folgende: 1, 3, 2, 6, 4, 5,
> und der 6 folgenden Glieder Reste sind abermal selbige Zahlen, u.s.w.

Zusammen mit der Kongruenz $a^m \equiv a$ in den Leistenotizen legt diese Rechnung aus Caput IV des anderen Abschnitts — *Von den Prim und zusammengesetzten Zahlen* — nahe, dass die beim Rechnen mit Resten zum Vorschein gekommene, versteckte arithmetische Wahrheit sich perodisch wiederholender Reste der *allgemeinere und natürlichere* Gesichtspunkt war, von dem Gauß bereits nach nur einer Woche Aufenthalts in Göttingen in seinem Brief vom 19. Oktober 1795 an den Hofrath Zimmermann berichtete ([21], p. 20):

> Ich habe die Bibliothek gesehen und verspreche mir davon einen nicht geringen Beitrag zu meiner glücklichen Existenz in Göttingen. Ich habe schon mehrere Bände von den *Commentt. Acad. Petrop.* im Hause und noch eine größere Zahl habe ich durchblättert. Ich kann nicht läugnen, dass es mir sehr unangenehm ist zu finden dass ich den größten Teil meiner schönen Entdeckungen in der unbestimmten Analytik nun zum zweiten male gemacht habe. Was mich tröstet ist dieses. Alle Entdeckungen Früherer die ich bis jetzt gefunden habe habe ich auch gemacht, und noch einige mehr. Ich habe einen allgemeinern und wie ich glaube natürlichern Gesichtspunkt getroffen; ich sehe noch ein unermeßliches Feld vor mir und Euler hat seine Entdeckungen in einem Zeitraume von vielen Jahren nach manchen vorangegangenen tentaminibus gemacht.

Vor seiner Abreise aus Braunschweig hatte er allerdings mit der Eintragung, *Explicitus October*. 11. 1795 die Arbeit an seiner *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche* abgeschlossen ([45] p. 497) und war — wie Dunnington berichtet ([12] p. 391) — noch am gleichen Tag aufgebrochen, um sein Studium in Göttingen zu beginnen.

Bemerkung Wie André Weil in seiner Geschichte der Zahlentheorie anmerkt, begann für Euler die geometrische Progression $1\ a\ a^2\ a^3\ \dots$ der Reste erst nach dessen Umzug von St. Persburg nach Berlin 1741 eine Rolle zu spielen — und zwar, als er nach seinem ersten Beweis für den Kleinen Fermat'schen Satz mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes begann, auf der Basis der mutiplikativen Eigenschaften der Zahlen modulo einer Primzahl nach einem neuen Beweis zu suchen ([51] p. 172 und p. 194–207). Dies geschah aber erst, nachdem die *Arithmetica theoretico–practica* mit Fermats Satz in der Gestalt sich modulo 7 periodisch wiederholender Reste schon 1737 in Braunschweig erschienen war.

6 Noch einmal die Rechnung aus dem Jahr 1737

Gut vierzig Seiten vor dieser erstaunlichen Rechnung ([41], 259–261) war in Caput II — *Von etlichen gemeinen Eigenschaften so von den Zahlen durch die 4. Rechnungs–Arten können ausgesprochen werden* — für sie schon ein Rahmen bereitgestellt worden. Zu Beginn von §. 82 erscheint dabei ein Rechentrick, der aus Divisionen Multiplikationen macht und so ein weiteres Beispiel einer beim Rechnen mit Resten geltenden, versteckten Wahrheit zutage treten lässt. Bemerkenswert ist auch das &c. am Ende von §. 82, kann doch schon jetzt jeder beim Weiterrechnen um nur einen Schritt das entdecken, was erst auf der Seite 304 kommt:

> B e s c h r e i b u n g e i n e r g e o m e t r i s c h e n P r o g r e s s i o n
>
> §. 80. Wen eine Zahl 2 mit eben derselben 2, oder : einer anderen 3 multipliciret, und das Product abermal mit derselben multipliciret wird, und so weiter, so entstehen daher Zahlen, die in einer *Geometrischen Progression* aufteigen : und die Zahl 2, oder: 3, damit sie aufsteigen, nennet man der Progression *Exponenten* : die Producte selbst aber : der Progression Glieder.
>
> §. 81. *Der Rest von einem jeden höhern Gliede einer* Geometrischen Progression*, wenn es sowohl als der* Exponente *in ein gewisses Maas untheilbar, ist allezeit so groß, als der Rest des* Products *ist, welches aus der* Multiplication *des Restes des nechst vorhergehenden kleinern Gliedes mit dem Reste des Exponenten multipliciret, entstehet.*
>
> z. E. 1 steiget mit 10 zu einer *Geometrischen Progression* auf durch 1.10.100.1000.10000.100000. etc. Diese Zahlen nebst dem *Exponenten* 10, sind in 7 untheilbar, darum soll der Rest von dem ersten *Producte* 10 gleich seyn, dem Reste von dem ersten Gliede 1 multipliciret mit dem Rest des *Exponenten* $10 : 7 = 3$. Der Rest des andern *Products* $100 : 7$ dem Reste von $10 : 7 = 3$ mit dem Reste des *Exponenten* $10 : 7 = 3$. Den da ein jedes Glied allezeit der *Faciendus*, und der *Exponente* der *Factor* von jedem Gliede der *Geometrischen Progression*, ist das Maas eines jeden Gliedes allezeit gleich dem Maas des Restes von dem *Producte* des vorhergehenden Gliedes und des Exponenten (vid. §. 79.)
>
> §. 82. *Wenn man den Rest von dem kleinesten Gliede und Exponenten einer Geometrischen Progression weiß, so kann man den Rest vom jeden Gliede wissen, ohne solches erst in dem* Numerum tertium *zu dividieren.*
>
> Denn weil die Glieder durch eben die Zahl ansteigen, so steigen auch die Reste durch eben die Zahl des Restes von dem ersten Gliede in dem Rest des Exponenten auf. Wenn also die Progression Geometrica folgende ist: 1. 10. 100. 1000. 10000. 100000.
>
> So ist der Rest des ersten Gliedes $= 1$,
>
> der Rest des andern Gliedes = dem Facto der Reste aus dem ersten Gliede, und dem Exponenten $10 = 3$.
>
> Der Rest des dritten Gliedes = dem Rest aus Facto des Restes des andern Gliedes 3 in den Rest des Exponenten $3 = 9 = 7 + 2 = 2$.
>
> Der Rest des 4ten Gliedes = dem Rest aus den Facto des Restes des dritten Gliedes 2 in den Rest des Exponenten $= 2.3 = 6$.
>
> Der Rest des 5ten Gliedes = dem Rest aus den Facto des Restes des 4ten Gliedes 6 in den Rest des Exponenten $3 = 3.6 = 7 + 7 + 4 = 4$.
>
> Der Rest des 6ten Gliedes = dem Rest des Facti aus dem Rest des 5ten Gliedes in den Rest des Exponenten $3 = 3.4 = 7 + 5 = 5$. &c.
>
> §. 83. *Wen der Rest des Exponenten 1 ist, so ist der Rest aller Glieder gleich dem Rest des ersten Gliedes.*

Der unzulässige Gebrauch einiger der Gleichheitszeichen in §. 82 ruft Daniel Shanks mit seiner Botschaft in Erinnerung ([50] p. 55): ≫*But History did n o t introduce them earlier. Nor would it be in keeping with our title, "Solved and Unsolved Problems," for us to do so. To have a solved problem, there must first be a p r o b l e m , and then a s o l u t i o n*≪.

Das Manko der sensationellen Rechnung aus dem Jahr 1737 kann offenbar allein schon durch eine die Möglichkeiten der elementaren Arithmetik entscheidend ausweitende Definition und ein neues Symbol beseitigt werden — und genau das geschieht zum Auftakt der Disquisitiones Arithmeticae.

Und hat Gauß nicht in einer Fußnote auf das Problem der Zweiteutigkeit hingewiesen, das entsteht, wenn in einer Rechnung mit Resten das Gleichheitszeichen verwendet wird und nicht ein von diesem verschiedenes Symbol? Und wurden nicht beim Rechnen mit Resten Beispiele viel versteckterer arithmetischer Wahrheiten sichtbar gemacht?

Eulers Motto auf dem Blatt der Notizen kann daher als Motor für ein singuläres Unternehmen in der Mathematik verstanden werden, und deshalb wurde eine deutsche Übersetzung dieser Arbeit vorangestellt.

Bisher interessierte sich anscheinend niemand für die Seite 261 des seit 1918 bekannten Rechenbuches eines Kindes — und so wurde hundert Jahre hindurch der Ursprung der *Disquisitiones Arithmeticae* mit einer anderen Nachlass–Quelle in Verbindung gebracht.

7 Die Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Dezimalbrüche

Im Auftrag der Göttinger Akademie der Wissenschaften hatte Ernst Schering die ersten Bände der Werke von Gauß herausgegeben und dabei auch die Tafel mit den Dezimalbruch–Perioden für den Abdruck in den Werken bearbeitet ([45] p. 411–434). In anschließenden Bemerkungen zu seiner Bearbeitung beschreibt Schering die Tafel von Gauß ([45] p. 497):

> Von der *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche* ist hier der erste Theil der Tabula III der Disqu. Arithm. ähnlich eingerichtet, er enthält für die Primzahlen und deren Potenzen p^π welche zwischen 3 und 463 liegen, die Mantissen (1), (2)…(0) der Decimalbrüche von $\frac{10.r}{p^\pi}$, $\frac{10.rr}{p^\pi}$, …, $\frac{10}{p^\pi}$, worin r die Einheit bedeutet, also $(1) = (2) = \ldots (0)$ wird, wenn r0 Primitivwurzel von p^π ist, sonst aber r die kleinste unter denjenigen Primitivwurzeln von p^n bezeichnet, für welche als Basis der Index von 10 den kleinsten Werth annimmt. Die von 1 verschiedenen Werthe von r hat man zur Erleichterung des Gebrauchs auf Seite 420 der Tafel beigefügt. Die Handschrift, in der auch noch nicht die Unterscheidungsziffern der verscbiedenen Perioden angegeben sind, entspricht äusserlich am meisten der Analysis residuorum und scheint in der Zeit dem hier als zweiten Theil der ganzen Tafel hingestellten Stücke voraufzugehen. Dieser zweite Theil enthält für die Primzahlen und deren Potenz p^π zwischen 467 und 997 die Mantissen der Decimalbrüche von $\frac{100}{p^\pi}$. Die Handschrift gibt die Theiler in abnehmender Reihenfolge und schliesst mit den Worten: *Explicitus October* 11. 1795. Im Drucke ist beim Theiler 191 Periode (1) die 71$^{\text{ste}}$ Ziffer hinzugefügt und beim Theiler 829 eine zwischen der 151 und 152$^{\text{sten}}$ Ziffer stehende Zahl fortgelassen.

Es folgt die Mitteilung ([45] p. 502): ≫*Die Handschriften der hier abgedruckten Abhandlungen und Tafeln bleiben mit dem übrigen Nachlasse vereinigt und werden auf der Göttinger Universitäts Bibliothek zur Einsicht zugänglich sein.*≪ Um mehr zu erfahren ist es nötig, den anscheinend für die Ewigkeit abgelegten Nachlass wieder aufzuschnüren.

In diesem sind 17 doppelseitige Manuskriptblätter mit Dezimalbruch–Perioden enthalten, von denen drei aus dem ersten Teil der Sammlung eine Titelzeile haben:

Periodorum quas servant fractiones communes per decimales expressae tabula (Nr. 11),
Fractionum communium per fractiones decimales expressarum periodi (N. 17) und
Verwandlung gemeiner Brüche in Decimalbrüche (Nr. 15).

Zeigt nicht schon die erste Titelzeile, dass diese Blätter der Berechnung der Dezimalbruchentwicklungen gewöhnlicher Brüche dienen sollten?

Scans von diesen Blättern — sowie von der Rückseite des mit den Worten *Explicitus October 11. 1795* schließenden und mit ⑨ markierten letzten Blattes der Sammlung — werden am Schluß der Arbeit gezeigt. Auf der Rückseite von Blatt ⑨ erscheinen schachbrettartige Muster, die einen Zeitpunkt in der Entstehungsgeschichte der *Disquisitiones Arithmeticae* markieren, von dem Gauß in der Vorrede zu seinem Buch spricht ([17], p. VI):

> Während ich nämlich damals mit einer andern Arbeit beschäftigt war, stiess ich zufällig auf eine ausgezeichnete arithmetische Wahrheit (wenn ich nicht irre, war es der Satz des Artikels 108), und da ich dieselbe nicht nur an und für sich für sehr schön hielt, sondern auch vermutete, dass sie mit anderen hervorragenderen Eigenschaften im Zusammenhang stehe, bemühte ich mich mit ganzer Kraft, die Prinzipien, auf denen sie beruhte, zu durchschauen and einen strengen Beweis dafür zu erhalten.

Für die *andere Arbeit* — wie es scheint war es die Anfertigung der Tafel mit den Dezimalbruch–Perioden — gab es für Gauß schon 1791 einen guten Grund. Gauß' erster Biograph, Wolfgang Sartorius von Waltershausen, hat ein Jahr nach Gauß' Tod nämlich berichtet ([43], p. 15):

> ... Damals wurde der Herzog Carl Wilhelm Ferdinand auf den genialen jungen Mann aufmerksam gemacht. Er verlangte ihn daher selbst kennen zu lernen und im Jahre 1791 wurde Gauss zum ersten Male bei Hofe vorgestellt.
> Während sich die Umgebung des Herzogs an den Rechenkünsten des bescheidenen, etwas schüchternen 14jährigen Knaben ergötzte,[3] verstand der edle Fürst mit feinem Takt, ohne Zweifel im Bewusstsein einen ganz ungewöhnlichen Geist vor sich zu haben, seine Liebe zu gewinnen und wusste die Mittel zu gewähren, die für die weitere Ausbildung eines so merkwürdigen Talentes erforderlich waren.
> Gauss verliess mehrfach beschenkt (von Feronçe erhielt er seine ersten logarithmischen Tafeln) die hohe Gesellschaft und bezog vom Herzog unterstützt im Februar 1792 das Collegium Carolinum.

In '*Decimal periods and their tables: A German research topic (1765–1801)*' erwähnt Maarten Bullynck 2009 in einer Fußnote Johann Carl Schulzes *Neue und erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlichen Tafeln* und berichtet: ≫... *though Schulze [1778, I, VI–VII] mentions in his introduction that he left out the period table because Hindenburg (see infra) promised him more extensive ones*≪ ([7] p. 150).

Ausführlicher heißt es bei Schulze selbst: ≫ ... *und drittens habe ich die Tafel, welche alle Brüche, deren Nenner unter 100 in Decimalteilen ausgedruckt, enthalten sollte, weil sie mir noch zur Zeit zu unreif schien, besonders da sich Herr Mag. Hindenburg gütigst gegen mich erboten, beträchtliche Zusätze zu liefern, völlig weggelassen* ... ≪ ([48] p. VI und VII).

Ab 1791 gab es daher die ambitionierte Rechenaufgabe, eine Tafel herzustellen, *welche alle Brüche, deren Nenner unter 100 in Decimalteilen ausgedruckt* enthält. Was spricht dagegen, dass diese erste Nachricht aus der modernen Welt des Rechnens den '*genialen jungen Mann*' veranlasste, sich auf der Stelle mit den Prinzipien der Berechnung der von Schulze gewünschten, monumentalen Tafel zu befassen?

Mit Remers *Arithmetica* besaß Gauß ja schon sechs Jahre bevor er 1791 Schulzes Tafeln in die Hand bekam ein Rechenbuch, das mit Fermats Satz in der Gestalt sich modulo 7 periodisch wiederholender Reste die Basis dafür enthält, eine solche Tafel ohne mühsame Divisionen ≫*möglichst schnell zu construieren*≪ ([17] p. 373). Die geometrische Progression 1 3 2 6 4 5 der Reste modulo 7 ([41] p. 303–304) kann nämlich zu einem Verfahren

[3] Könnte es nicht sein, dass Gauß 1791 die Umgebung des Herzogs mit Rechnungen ergötzte, wie eine in Artikel 47 der *Disquisitiones Arithmeticae* zu sehen ist?

ausgebaut werden, bei dem — mit dem kleinen Einmaleins im Kopf — die Ziffern der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{7}$ schrittweise, Ziffer für Ziffer notiert werden können:

Reste	1	3	2	6	4	5	1	3	2	6	…
	1	10	100	1 000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000	…		
Quotienten		1	4	2	8	5	7	1	4	2	…

Weil die Reste modulo 7 eine periodische geometrische Progression bilden, muss sich offensichtlich auch die Ziffernfolge 142857 in der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{1}{7}$ periodisch wiederholen. Und dass Entsprechendes auch — *mutatis mutandis* — für jede andere Primzahl gilt, leuchtet unmittelbar ein, denn: »*Es gibt allgemeine Wahrheiten, die unser Verstand bereit ist aufzunehmen, sobald er in einigen besonderen Fällen deren Richtigkeit erkannt hat* !« Allerdings gibt es hier ein wichtiges Phänomen, auf das Gauß in Artikel 45 hinweist: »*In einigen Fällen also wird schon eine Potenz mir kleinerem Exponenten als $p-1$ der Einheit congruent, in andern dagegen muss man bis zur $p-1$ ten Potenz aufsteigen.*«

Daniel Shanks gibt im Abschnitt *Primitive Roots with a Prime Modulus* seiner *Solved and unsolved Problems in Number Theory* die in diesem Kontext entscheidende Definition der Ordnung e eines Elements a modulo m und ergänzt diese in einem Beispiel mit einem Kommentar ([50], p. 72):

> EXAMPLE: If $a = 10$ and m is a prime $\neq 2$ or 5, then the order e is also the period of the periodic decimal $\frac{1}{m}$. Thus 10 is of order 3 modulo 37, as on page 55. (It is probable that this definition, and Definition 23, Theorem 35, and Theorem 36 which follow, all stem from Gauss's early studies in periodic decimals mentioned on page 53. See Exercise 8S on page 203 for a plausible reconstruction of Gauss's line of thought.)

Überraschend zeigt es sich, dass für jede gegebene Primzahl p stets ein Element höchstmöglicher Ordnung $p-1$ gefunden werden kann. Deshalb scheint auch hier wieder eine allgemeingültige Wahrheiten zu den Primzahlen vorzuliegen, die unser Verstand unmittelbar bereit ist aufzunehmen.

Auf der Basis der Tabelle mit den Perioden der Primzahlen und Primzahlpotenzen unterhalb 100 kann mit den Resultaten des sechsten Abschnitts der *Disquisitiones Arithmeticae* ([17] p. 364–373) nun auch an die Ausarbeitung einer für die Praxis bestimmten Tafel gedacht werden, wie Schulze sie in seine Sammlung aufnehmen wollte und wie Herr Mag. Hindenburg sie nicht ablieferte. Für die nötigen Rechnungen steht in Artikel 317 der Disquisitiones ein Muster bereit ([17], p. 371), so dass — wie es Carl Friedrich Hindenburg in seiner 1786 erschienenen '*Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehenden Zahlen …*' vorschlägt ([25], p. 112) — »*jedem gemeinen Rechner sogleich*« deren Anfertigung übertragen werden kann. Wäre ein solches gigantisches Projekt nicht ganz im Sinne des 1777 — im Geburtsjahr von Gauß — gestorbenen Johann Heinrich Lambert, der gleich am Beginn der Einleitung seiner *Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrischen Tafeln* sagt ([30] p. 1) :

> Diejenigen, so die Mathematick nicht bloß lernen, sondern sodenn wirklich Gebrauch davon machen, können aus eigener Erfahrung wissen, daß es Zahlen, Verhältnisse, Formeln und Rechnungen giebt, die eben daher, daß sie öfters vorkommen, ein für alle mal gemacht und aufgezeichnet zu werden verdienen, damit man der Mühe, sie immer wieder von neuen zu finden oder zu berechnen, überhoben seyn könne.

8 Anmerkungen zur Geschichte des Rechenbuches von Gauß

Wie die folgenden Verweise zeigen, ist Remers *Arithmetica* in der Literatur über Gauß nicht unbekannt: [3], p. 103, 107, 114, 273, [5], p. 9, 10, [6], p. 57, [7], p. 153, ([29], p. 32ff), [32] p. 11, [33] p. 12/13, [34] p. 17, [36], p. 224, [39], p. 35–51, [46], p. 30, [47], p. 10.

Ludwig Schlesinger teilte in Band X_2 der Werke mit ([47] p. 10), dass Remers *Arithmetica* sich mit der Eintragung: »*Johann Friedrich Carl Gauss, Braunschweig,* 16. *December Anno* 1785 *noch in der Gaussbibliothek befindet und ebenso wie das Exemplar von* HEMELINGS Arithmetischem kleinen Rechenbuch *Spuren starker Benutzung und zwischen dem Text einige von* GAUSS' *kindlicher Hand ausgeführte elementare Rechnungen zeigt*«

Philipp Maennchen ist zehn Jahre nach seinem Artikel in den *Nachrichten der Königlichen Gesellschaft* 1928 in seiner *Methodik des Mathematischen Unterrichts* noch einmal auf Remers *Arithmetica* zurück gekommen und sagt ([34], p. 17):

> … Die erste Frage, wie es kam, dass solche Ideen über das Zahlenrechnen bei G a u ß auftauchten, wird wohl jeder Kenner der zu Gauß' Jugendzeit üblichen Rechenbücher und Rechenmethoden dahin beantworten, dass es eben Eingebungen seines überragenden Genies waren, die keinerlei Voraussetzungen bedürfen. Denn ich habe ja schon auf S. 8 und 10 kurz auf jene Methoden und Bücher hingewiesen, in denen jeder Versuch einer verständlichen Begründung fehlte, und wo das Rechnenlernen nichts anderes war, als das mechanische Auswendiglernen von Ausführungsbestimmungen. Sieht man jedoch näher zu, so findet man gelegentlich unter diesem Wust von nichtssagenden Regeln und Künsteleien doch auch hie und da Spuren von individualisierendem Rechnen, vielleicht Rudimente einer älteren, untergegangenen Methode. Das ist mir vor Jahren beim Studium von S t e r n e r s Geschichte der Rechenkunst bereits dunkel ins Bewusstsein getreten; zur vollen Überzeugung wurde es mir dadurch, dass ich die Gelegenheit hatte, das Rechenbuch kennenzulernen, das Gauß im Alter von 8 Jahren als Geschenk erhielt. Dieses Buch, das sich noch heute im Gaußarchiv befindet, das Rechenbuch von R e m e r, hat zwar auch vielerlei Rezeptartiges, wie es der Sitte jener Zeit entsprach, aber es finden sich darin auch Kapitel, namentlich über die Multiplikation, in denen die Zahlen individualisiert werden. Sicherlich hat Gauß mit seinem angeborenen Zahlensinn die Bedeutung dieser Kapitel früh erfaßt; das beweist die Tatsache, daß er in echt kindlicher Weise auf die Innenseite des Deckels schrieb: „Liebes Büchlein". Man darf also vermuten, daß dieses Rechenbuch einen nicht unerheblichen Anteil an Gauß' Entwicklung zum individualisierenden Zahlenrechner gehabt hat.

Offenbar wurde Ludwig Schlesinger aber durch die *Spuren starker Benutzung* sowie die Tatsache, dass *zwischen dem Text einige von* GAUSS' *kindlicher Hand ausgeführte elementare Rechnungen* zu sehen sind, nicht dazu angeregt, Gauß' Rechnungen im Detail zu verfolgen; und genauso wenig bewegte offenbar die berührende Anrede „Liebes Büchlein" Philipp Maennchen dazu, auch den *Anderen Abschnitt* des Rechenbuches einmal genauer unter die Lupe zu nehmen. Hier werden ja die Zahlen, die als Reste bei der Division entstehen, in einer Weise individualisiert, wie es ein im Rechenunterricht einer Schule des zwanzigsten Jahrhunderts sozialisierter Rechner niemals erfahren wird. So entging den beiden Gießener Autoren von Band X_2 der Werke, dass der knapp 700seitige Schmöker mehr zum Rechnen enthält, als unsere Schulweisheit sich träumen lässt.

Nach Maennchen und Schlesinger hat Karin Reich sich anscheinend als Erste 1989 in *Mass, Zahl und Gewicht* ([36], p. 224/225) wieder mit dem ganz ungewöhnlichen Rechenbuch des Kindes Carl Friedrich Gauß befasst. Der Bekanntmachung von allgemeinen Daten zu dem Buch, einer kursorischen Inhaltsangabe mit den einschlägigen Fachworten dieser Zeit und einer 14–zeiligen Komprimierung des vierseitigen Inhaltsverzeichnisses schließt sich überraschend eine Beurteilung des Rechenbuches von Carl Friedrich Gauß an:

> Remers Rechenbuch mutet, entgegen den Ausführungen im Vorbericht, sehr theoretisierend und abstrahierend an. Es ist mit 684 Seiten Umfang und einem Register auch für ein Lehrbuch, das mit Lehrbüchern von anderen Rechenmeistern konkurriert, ungewöhnlich ausführlich und eigentlich ohne direkt erkennbaren Praxisbezug.

Gut fünfzehn Jahre später hat Karin Reich sich in dem Aufsatz, '*Der junge Gauß und seine Welt der Mathematikbücher*' im GAUSSJAHR 2005 noch einmal mit Remers *Arithmetica* befasst. Zu dem Inhalt des Buches heißt es ([39], p. 37/38): *Das Werk beinhaltet alles,* *was ein Anfänger wissen muss, vor allem die Grundlagen des kaufmännischen Rechnens sowie die arithmetischen Grundkenntnisse, auf denen dann aufgebaut werden konnte.*≪

Eine Seite davor findet sich der Kommentar ([39], p. 36): ≫*Auch ein Gauß konnte am Beginn und während seiner Schulzeit keine wissenschaftlichen Werke verstehen, sondern er musste, wie jeder Schüler auch, zunächst mit Hilfe relativ elementarer Werke sein Wissen erweitern, sich sichere Kenntnisse im Rechnen aneignen und einfache algebraische und geometrische Aufgaben lösen lernen. Solche elementaren Kenntnisse vermittelten insbesondere die Schriften von sogenannten Rechenmeistern …* ≪.

Maarten Bullynck hat in verschiedenen Arbeiten auf Remers *Arithmetica* hingewiesen und darauf, dass Gauß als Kind sein Rechenbuch „Liebes Büchlein" nannte. In *A History of Factor Tables with Notes on the Birth of Number Theory 1657–1817* wird darüber hinaus bekannt gemacht ([6], p. 57): ≫*Remer, who often quoted Poetius as one of his sources, dealt extensively with the topics of divisors, odd and even numbers, prime and composite numbers and factoring methods, including Eratostheness sieve procedure [Remer 1739, pp. 232321]. The book also contained a large section on "the properties of numbers in relation to each other", discussing properties of the greatest common divisor process* .≪

Die von Maennchen überlieferte Anrede „Liebes Büchlein" erzeugte aber einfach auch Sympathie und Neugier. Wurde nicht Waldo Dunnington schon als 12–jähriger durch seine Lehrerin — eine Enkelin von Gauß — für die Idee begeistert, eine Biographie zu schreiben ([12] p. xxvii)? Bei einer Reise nach Göttingen zur Gauß–Bibliothek im Herbst 2000, nun mit der Idee, Gauß' „Liebes Büchlein" einmal in die Hand zu nehmen, kam daher im Lesesaal der Gauß–Bibliothek die Nachricht wie ein Keulenschlag, die Martha Küssner in *Carl Friedrich Gauß und seine Welt der Bücher* bereits 1979 lapidar verkündet hatte ([28] p. 75):

> Die Gauss Bibliothek enthält noch „Das kleine Rechenbuch" von J. Hemeling des Schülers Gauss; dagegen fehlt das Buch von C.S. Remer, das Schlesinger mit der Namenseintragung noch gesehen hat.

Die auf der Hand liegende Frage, ob Gauß in seinem Rechenbuch bereits alle diejenigen Gleichheitszeichen auf der Seite 261, die eine Zweideutigkeit beim Rechnen entstehen lassen, durch einen dritten Strich ergänzte und damit das charakteristische Symbol $\equiv$ der höheren Arithmetik schon in dem Rechenbuch aus seiner Kindheit sichtbar machte, kann daher nicht mehr durch einen Blick in sein „Liebes Büchlein" geklärt werden.

Und leider wird sich daran wohl auch so lange nichts ändern, wie das Buch sich nicht an demjenigen Ort befindet, den Helmut Rohlfing, Direktor der Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke* der Niedersächsischen Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen, in dem Festvortrag mit dem Titel *Das Erbe des Genies* beschreibt, den er anlässlich des 40–jährigen Bestehens der Gauß–Gesellschaft e.V. am 25. Oktober 2002 hielt ([44] p. 22):

> Das bedeutendste Lebensdokument des jungen Gauß ist das Mathematische Tagebuch (Abb. 6), das in der Bibliothek nicht ohne Grund zu den wertvollsten Handschriften zählt und deshalb in einem besonders sicheren Safe verwahrt wird.

Das aus dem Erbe des Genies verschwundenen Rechenbuch, das ja zusammen mit der letzten Seite der Leistenotizen als Beweisstück für einen in der Menschheitsgeschichte einmaligen Vorgang verstanden werden kann und daher ein wesentlicher Bestandteil von Gauß' mathematischem Vermächtnis ist, wird in dem Festvortrag von 2002 nicht erwähnt.

Schon 2001 gab es zum Verbleib von Remers *Arithmetica* die folgende Mitteilung in einer E–Mail von Bärbel Mund von der Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke*:

> 13. Juli 2001: … inzwischen bin ich im zweiten Band des Akzessionskatalogs der Sternwarte (Cod. Ms. Sternwarte 36:2) fündig geworden. Die Eintragung lautet:
> 4368 Chr. Steph. Remer: Arithmetica theoretico-practica, Das ist: Anweisung zu der Arithmetique.

Braunschweig 1737. Nr. 435 [der Gauss-Bibliothek] (?)
Es ist natürlich sehr betrüblich, dass sich die Umstände dieses Verlustes nicht mehr klären lassen werden. Die Werke der Gauss–Bibliothek erhielten bei Übergabe an die Universitätsbibliothek eine neue Numerierung. Die Eintragungen im Akzessionskatalog der Sternwarte schließen im allgemeinen mit der Angabe der neuen Signatur ab. Das Fragezeichen beim Remerschen Titel ist wohl so zu interpretieren, dass das Buch bei Vergabe der neuen Signatur nicht mehr auffindbar war.

9 Weitere bislang unerschlossene Quellen

Das *Explicitus October. 11. 1795* schließt einen Zeitabschnitt ab, der vom Frühjahr 1795 an in eine neue Problematik einmündete, von der eine erste Spur auf der Rückseite von Blatt ⑨ zu sehen ist. In Verbindung mit dem Blatt der Leistenotizen kann daher Gauß' „Liebes Büchlein" als Zeugnis für die erste, 10jährige Phase in der Entstehungsgeschichte der Disquisitiones Arithmeticae verstanden werden.

Ein Ausschnitt aus der Vorderseite von Blatt ⑨ erscheint in der überlangen Fußnote 10 des Berichts über einen Workschop zum Rechnen, der 2007 in Prag stattfand. In dieser geht es unter anderem auch um die Funktion des Eindeutigkeitssatzes einer Primfaktorzerlegung beim Rechnen — denn dieser muss ja schon bewiesen sein, wenn Gauß' Divisionsmethode angewendet werden soll ([29], p. 34).

Bei der Ausarbeitung einer deutschen Version des Prager Workschops kam von Norbert Schappacher der Hinweis, dass Catherine Goldstein sich in ihrem Aufsatz, *On a Seventeenth Century Version of the "Fundamental Theorem of Arithmetic"* mit dem Thema *Eindeutigkeit* beschäftigt hatte. In diesem heißt es ([23], p. 184):

> ... Another question concerns the remainder of the story. In the eighteenth century, literal notations were trivialities and the uniqueness of factorization for integers seemed transparent. Authors — for instance Euler and also Legendre (whose first version, *Essai sur la Thorie des Nombres*, appeared in 1798) did not comment on it, not even allusively, but made constant use of it. It was clearly directly against this trend (and not against mere ignorance of the facts) that Gauss fought in his Disquisitiones, and the people he quoted were Euler, Lagrange, Legendre, not, of course, Prestet. Gauss rightly noticed that the existence of a decomposition is an evident consequence of "the elements," but its uniqueness had to be proved; Legendre, even in 1830, would do exactly the opposite, that is, justify the decomposition and use the uniqueness without comment, see [Legendre 1830, 5ff.]. It is not clear to me if the need that Gauss expressed for a proof came from more than a particularly lucid care for foundations.

Zum Beweis von Euklids Lemma sagte Gauß in der Bemerkung in Artikel 14 ja ([17], p. 7):

> Der Beweis dieses Satzes ist bereits von Euclid, Elem. VII, 32, gegeben worden. Wir haben ihn jedoch nicht weglassen wollen, einmal weil von den Neueren einige entweder nur nichtige Gründe für einen Beweis des Satzes ausgegeben oder ihn ganz und gar übergangen haben, ...

So legt der Hinweis auf die Neueren zuallererst einen Blick in Remers *Arithmetica* nahe. In Caput IV wird (ohne Nennung von Euklid) der folgende Satz ausgesprochen, und anschließend auch bewiesen ([41] §. 38, p. 294/295):

> Wenn von 2 Zahlen das Product durch eine Prim–Zahl aufgehen kann, so ist zum wenigsten einer der Factorum in solche Prim–Zahl theilbar.

Der dem heutigen Leser vielleicht obskur erscheinende Beweis Remers wird verständlich, wenn er vor dem Hintergrund der einige Seiten zuvor ausgesprochenen Frage gesehen wird: „*Wie die Prim– und theilbaren Zahlen finden?*" ([41] §. 24, p. 287ff):

> § 24. Wenn man demnach wissen will, welche Zahlen *Primi*, und welche *compositi* sind, so mache man sich eine *Tabelle*, oder *Tarif* nach folgender Regul.
> 1) Schreibet die Zahlen, wie sie in ihrer natürlichen Ordnung aufeinander folgen, so weit man

will.

2) Ziehet von jeglicher Zahl die vorhergehenden, jede insonderheit ab, soviel ihr könt, und sehet, ob nicht eine, oder: mehr unter den vorhergehenden, die sie ganz ohne Rest aufhebe.

3) Streichet man die Zahl, auf welche man nach der Abzählung kommen, und die nach geschehener Abnahme einiger Zahlen nichts über lassen mit einem Strichlein durch.

4) Die durchgestrichenen Zahlen sind *Numeri compositi*, die offen bleiben, sind *Prim*–Zahlen; und stehet der Tarif bis 300. also:[4]

1. ~~2~~. 3. ~~4~~. 5. ~~6~~. 7. ~~8~~. ~~9~~. ~~10~~. 11. ~~12~~. 13. ~~14~~.
~~15~~. ~~16~~. 17. ~~18~~. 19. ~~20~~. ~~21~~. ~~22~~. 23. ~~24~~. ~~25~~. ~~26~~.
~~27~~. ~~28~~. 29. ~~30~~. 31. ~~32~~. ~~33~~. ~~34~~. ~~35~~. ~~36~~. 37. ~~38~~.

Man kann diesen Tarif, oder: Tabelle nach belieben, und wie es die Noth erfodert, *extendiren*; weil sie aber dazu dienet, dass die *Prim*–Zahlen von den zusammengesetzten abgesondert werden, so heisset sie: des *Eratosthenis cribrum*.

Wird anstelle jeder der mit einem Strichlein durchgestrichenen Zahlen die Faktorisierung dieser Zahl notiert, dann liegt ein Beweis des Lemmas wie in §. 38 nahe: Begonnen wird mit einem Produkt von zwei Faktoren, von denen einer eine Prinzahl ist und der andere ein Produkt von zweien. Die evidenten nächsten Schritte bleiben dem Leser überlassen.

Bei diesem für die höhere Arithmetik entscheidenden Werkzeug, bei dem ja die Primzahlen die entscheidende Rolle spielen, interessiert naturgemäß die Frage, ob in §. 38 Spuren von Gauß' *kindlicher Hand* zu sehen sind, und die gleiche Frage liegt natürlich auch beim Sieb des Erathosthenes in § 24 nahe — sagt doch Igor R. Shafarevitch 2003 zum planmäßigen Abzählen der Primzahlen [49] p. 132):

Many mathematician were fascinated by the secret of the distribution of prime numbers and tried to discover it based on tables. In particular Gauss was interested in this question almost in childhood. His interest in mathematics evidently began with a childhood interest in numbers and constructing tables. In general, great mathematicians were virtuosos of calculation and were able to perform enormous calculations, sometimes mentally. (Euler even struggled with insomnia in that way !) When Gauss was 14 years old, he constructed a table of prime numbers ...

In Lamberts *Zusätzen* heißt es in der Beschreibung der '*Tafel der Primzahlen von 1 biß 102000*' auf Seite 19: ≫*Man weiß zwar noch nicht eigentlich, was mit einer solchen Liste von Primzahlen anzustellen ist.*≪ In einem Brief an Encke ([19], Werke Band II, p. 444–447) sagt Gauß klar, was er mit der Liste anstellte, und in seinem eigenen Nachtrag zur Tafel V in Lamberts *Zusätzen*, wird *Anzahl der Primzahlen in jedem 1000* notiert ([30] p. [212]).[5]

In der von Maarten Bullynck im Nachlass entdeckten '*Beschreibung*' Carl Friedrich Hindenburgs kommt Euklids Lemma nicht vor. Stattdessen gibt es in dessen grundsätzlichen Überlegungen zur *Anwendung der Methode auf die theilbaren und untheilbaren Zahlen in Beziehung auf eine dadurch zu fertigende Factorentafel* einen Kommentar, der einen entscheidenden Punkt in der Entwicklung der höheren Arithmetik markiert ([25] p. 14/15):

... Unter den kleinsten Faktoren der ersten Million ist die Primzahl 997 die letzte. Alle diese Faktoren (denn die Zahlen 1, 2, 3, 5 können hier, da sie nicht weiter in Betrachtung kommen, nicht mitgerechnet werden) bleiben auch in der zweiten Million, in welcher sie (da man für sie den Vortheil ihrer Quadrate nicht, wie bey der ersten Million, nutzen kann) auch öfterer vorkommen, und über dieses noch in Gesellschaft von 55 neuen Factoren, bis mit der Primzahl 1409 auftreten. bey denen aber der Quadrate wieder benutzt werden kann. Auf ähnliche Weise wächst die Arbeit in ihrem Fortgange beständig, so, daß folgende Millionen, oder auch andere Theile des Ganzen, allemal ungleich beschwerlicher zu berechnen sind, als vorhergehende; und man übersieht zugleich mit der lebhaftesten Überzeugung, daß diese Schwürigkeit so wesentlich in der Natur dieser Zahlen

4 Nur drei Zeilen werden gezeigt, die 1 wurde überraschend nicht gestrichen, dafür aber die Primzahl 2.

5 Die Information, dass ein Scan von Lamberts *Zusätzen* über das Göttinger Digitalisierungszentrum erworben werden kann, verdanke ich Maarten Bullynck, genauso wie den Hinweis auf Hindenburgs *Beschreibung*.

> verwebt ist, daß für sie keine weitere Erleichterung von irgendeiner Methode zu erwarten ist; denn auch selbst wenn sie jemand erfände, zu jeder gegebenen Zahl, den kleinsten Factor auf der Stelle hinzuschreiben, würde doch nur die Schwürigkeit verhältnismäßig vermindern, aber nicht heben, da in späteren Millionen, der untheilbaren Zahlen immer weniger, der theilbaren Zahlen aber immer mehr werden.
> Und dennoch fehlt vielleicht diesem letztern, sehr scheinbaren Gedanken, zu seiner vollständigen Richtigkeit nichts weiter als — als die Wahrheit. Für viele, gewiß sehr viele Millionen vom Anfange herein, ist er unzweifelhaft gewiß; ob aber auch für sehr späte, für alle, und beständig? dawider scheint selbst eine nicht schwer anzustellende Induction zu streiten. Ich habe weder Zeit noch Lust, einen für meine Absicht völlig unbrauchbaren Satz, der mehr eine unzeitige Neugierde zu befriedigen, als einen reellen Nutzen zu befördern scheint, durch einen weitläuftigen strengen Beweis `a priori` zu unterstützen oder zu verwerfen; und ich bin gewiß, daß ich, so lange die Welt stehen wird, durch keine, auch auf noch so viele Millionen ausgedehnte Tafel, eben so wenig *a posteriori*, aus den Millionen, widerlegt werden kann.

Hindenburgs Ausführungen zur *unzeitigen Neugierde* in Bezug auf einen *völlig unbrauchbaren Satz* erweckten ihrerseits Neugier auf eine Reaktion von Gauß. Maarten Bullynck schickte per E–Mail eine Kopie dieser Seite; dort sind die unterstrichenen Worte Zeit und Lust zu sehen, und auf dem Rand daneben eine schlecht lesbare handschriftliche Notiz.

Die Frage an die Gauß–Bibliothek, was in der Randnotiz notiert wurde, beantwortete Bärbel Mund in einer E–Mail vom 18. August 2010: `die Eintragung lautet: "Hr. H. möchte wol so wenig zu dem einen als dem andern fähig gewesen sein."`

Weil Euklids Lemma — und natürlich dann auch die Rolle der Primzahlen bei dessen Beweis — in Hindenburgs *Beschreibung* nicht erwähnt wird, macht Gauß hier wohl auf zwei miteinander zusammenhängende arithmetische Sachverhalte aufmerksam, die für Remer und Hindenburg anscheind selbstverständlich waren:

1. Remers Vorstellung, dass des *Eratosthenis cribrum* nach belieben *extendiert* werden kann, ist zunächst einmal ja nur ein frommer Wunsch, und auch Hindenburgs Erklärung, ≫*ich bin gewiß, daß ich, so lange die Welt stehen wird, durch keine, auch auf noch so viele Millionen ausgedehnte Tafel, eben so wenig* a posteriori*, aus den Millionen, widerlegt werden kann,*≪ zeigt nur, dass es hier eine offene Frage gibt.
2. Des *Eratosthenis cribrum* liefert für jede gegebene Zahl eine Faktorisierung, und die Frage, ob die jeweils betrachtet Zahl nicht vielleicht weitere Faktorisierungen zulässt, erscheint im diesen Kontext sinnlos.

Gauß hat mit den Primzahlen als Basis seiner Untersuchungen die Arithmetik in einer Weise komplettiert, dass zur Faktorisierung der Zahlen keine Frage mehr offen bleibt und dabei die schon in der Vergangenheit entstandenen Tafeln in der höheren Arithmetik nun ihren natürlichen Platz finden.

Auch zum ersten Thema — ≫*und auf diesem Grunde nachher die allgemeinere Untersuchung auf[zu]bauen*≪ — gibt es eine Spur von Gauß. Auf dem linken Rand einer Seite von Liber IX seines in der Gauß–Bibliothek aufbewahrten Exemplars von Euklids *Elementen* erscheint nämlich ein ¶, das Prop. XX markiert: *Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgegebene Menge von Primzahlen A, B, C* ([14], p. 220). Wie Gauß in seiner Vorrede zu den *Disquisitiones Arithmeticae* andeutet, gehört dieser Satz schon zu den ersten Anfängen dieser Wissenschaft ([17], p. V), und so gab es wohl — anders als bei Euklids Lemma — keinen Grund, den 2000 Jahre alten Satz (und seinen Beweis) auch nur zu erwähnen.

Zeigt dies nicht Gauß' *particularly lucid care for foundations*? Und stellt sich daher ≫*the beginning of all beginnings*≪ — von dem Catherine Goldstein und Norbert Schappacher im Kapitel *A Book in Search of a Discipline* von 'The shaping of arithmetic' ein nicht spezifisches und im Unbestimmten bleibendes Bild zeichneten — nicht vielleicht ganz anders dar, als noch 2007 gedacht ([24], p. 5)? Auf der Web Seite des Springer Verlages heißt es zur Neuerscheinung von 2007: "*A book that traces the profound effect Gauss's masterpiece has had on mathematics over the past two centuries. . . . The shaping of arithmetic is a major accomplishment, one which will stand as an important reference work on the history of number theory for many years.* (Victor J. Katz, Mathematical Reviews, Issue 2008 h)"

10 Epilog

Die Nachricht von der zärtlichen Anrede „Liebes Büchlein“ auf der Innenseite des Buchdeckels elektrisierte und erweckte auf Anhieb den Wunsch, ein Exemplar vom Rechenbuch des genialen Kindes in die Hand zu bekommen. Die ungewöhnliche Rechenaufgabe auf der Seite 64 fiel schon beim ersten Blättern auf. Die Endeckung der außerordentlichen Wahrheit auf den Seiten 303/304 und das dann allmählich zutage tretende Band zwischen dem „Lieben Büchlein“ und der *Höheren Arithmetik* in den Disquisitiones Arithmeticae verblüfften, wobei der Zufallsfund in den Leistenotizen mit Eulers Motto von den *verités generales* als treibender Kraft bei der Entdeckung der *Höheren Arithmetik* ein wichtige Rolle spielte. Die charakteristischen Eigenschaften dieses von Gauß geschaffen Bereichs der Mathematik, in dem die Primzahlen das Fundament bilden, beschreibt der dann 70jährige in seinem Vorwort zu Gotthold Eisensteins *Mathematischen Abhandlungen* ([13] p. III):

> Die Höhere Arithmetik bietet einen unerschöpflichen Reichthum an interessanten Wahrheiten dar, und zwar an solchen, die nicht vereinzelt, sondern in innigem Zusammenhange stehen, und immer neue, ja unerwartete Verknüpfungen erkennen lassen, je weiter die Wissenschaft sich ausbildet.

11 Rudimente einer älteren, untergegangenen Methode

Seit 2005 gibt es mit der 1739 erschienenen *Demonstrativischen Rechenkunst* [42] eine über das Internet verfügbare zweite Auflage von Remers *Arithmetica*. Diese erlaubt es einerseits, die Angaben in dem vorliegenden Aufsatz nachzuvollziehen, ohne eine der wenigen Bibliotheken Deutschlands aufzusuchen, in denen Rara wie Remers *Arithmetica* nur im Sonderlesesaal zur Einsicht an Ort und Stelle vorgelegt werden. Das Rechenbuch könnte aber auch dazu anregen, nach Beispielen zum Rechnen zu suchen, die Gauß zur Anrede *Liebes Büchlein* bewegt haben könnten. Zur Einstimmung folgen drei Beispiele.

Addieren Auf der Basis der neuen Quelle wurde 2007 in Prag ein Workshop über das Rechnen veranstaltet [29] mit dem singulären Beispiel 33 in Caput II der *Exempla zur Addition* als Ausgangspunkt. Hier sind die Zahlen 12, 13, 14, ... , 34, 35, 36 sowie 47 und 64 zu addieren. Wie bei allen Beispielen in dem Rechenbuch wird zusammen mit der Aufgabenstellung auch gleich die Lösung 711 angegeben ([41] p. 64). Werden die beiden letzten Zahlen 47 und 64 weggelassen, dann bleiben aufeinanderfolgende Zahlen übrig — und diese zusammenzuzählen liefert eine etwas kniffligere Herausforderung für den erleuchteten Rechner, als das Beispiel $1+2+3+\cdots+98+99+100$, das üblicherweise mit Gauß assoziiert wird.

Numerieren Caput I enthält einen ≫*Sonderbaren Brauch der 9 Einer*≪ ([41] p. 48):

B	r	a	u	n	sch	w	e	i	g
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Offensichtlich hat jede der beiden Zeilen die gleiche Summe. Das Doppelte dieser Summe ergibt sich, wenn sämtliche in dem *Sonderbaren Brauch* erscheinenden Zahlen zusammengezählt werden: $1+11+11+11+11+11+11+11+11+1 = 2+8\cdot 11 = 2+88 = 90$. Die Summe selbst ist daher die Hälfte von 90, also 45.

Der in Braunschweig lebende Autor und Übersetzer Hubert Mania hat den *Sonderbaren Brauch der 9 Einer* entdeckt und damit die versteckte arithmetische Wahrheit offen gelegt, die Büttners legendärer Rechenstunde zugrunde liegt ([43], p. 12/13). Mit diesem sensationellen Fundstück aus Gauß’ Kinderbuch kann Mania gleich zum Beginn seiner mitreißenden Gauß–Biographie ein erstes Glanzlicht setzen ([35], p 7–38).

Subtrahieren In Caput III, *Von Subtrahiren in unbenahmten gantzen Zahlen*, gibt es die Anregung: ≫*Einige haben auch Lust dazu gehabt, von der lincken zur rechten die Subtraction zu verrichten*≪ ([41] p. 78). Mehr als 40 Jahre nach dem Erscheinen der Disquisitiones Arithmicae hat Gauß am 3. Oktober 1844 in einem Brief an den Astronomen Heinrich Christian Schumacher beschrieben, wie die Buchführung — ohne Nebenrechnung wie bei Remer — effektiv erledigt werden kann ([22] p. 38):

> . . . für mich ist immer das Subtrahiren etwas bequemer, als das Addiren (beim Rechnen, auch mitunter in andern Dingen). Obgleich der Unterschied sehr gering ist, so steht er doch als Factum bei mir seit 50 Jahren fest: aber erst heute, da Sie sagen, dass es bei Ihnen umgekehrt sei, habe ich darüber nachgedacht, was wohl bei mir der Grund davon sein möge: Ich glaube es ist folgender. Ich bin gewohnt, wenn zwei übereinanderstehende Zahlen addirt oder subtrahirt werden sollen, immer die Summe oder die Differenz sogleich von der Linken zur Rechten niederzuschreiben. Allen meinen Schülern, die sich Rechnungsfertigkeit erwerben wollten, habe ich immer gleich Anfangs empfohlen, sich daran zu gewöhnen (was in *sehr* kurzer Zeit geschieht) und alle ohne Ausnahme haben es mir nachher sehr Dank gewusst. Der Vortheil davon besteht darin, dass jeder, der kein Jude ist, viel geläufiger und calligraphischer von der Linken nach der Rechten schreibt als umgekehrt, und auf ein zierliches Ziffernschreiben, und dass sie immer recht ordentlich unter einander und neben einander stehen, kommt ja sehr viel an.
> Cela posé, beantwortet sich obige Frage nun so: Während man Summe oder Differenz von der Linken zur Rechten schreibt, muss man immer zugleich die folgenden Ziffern berücksichtigen, die beim Addiren nötig machen können, eine um 1 grössere, beim Subtrahiren eine um 1 kleinere Zahl zu schreiben. Diese Berücksichtigung wird nun zwar bald so mechanisch, dass man gar nicht daran denkt, immer aber bleibt sie beim Subtrahiren ein klein wenig einfacher als beim Addiren: z.B. wird Addirt
>
> 387. . .
> 218. . . so kann die Summe sein 605 oder 606,
>
> wird subtrahirt, so, kann die Differenz sein 169 oder 168; allein die Entscheidung hängt beim Subtrahiren nur von Gleichheit oder Ungleichheit der übereinanderstehenden folgenden Ziffern ab, beim Addiren aber, ob die Summe der übereinanderstehenden die 9 überschreitet, und das erstere ist einfacher, als das andere. Mit Worten ausgedrückt, würde die Ratio decidendi sein:
> Beim Subtrahiren: wenn (von der betreffenden Stelle nach der rechten fortschreitend, und die übereinanderstehenden Ziffern immer als ein Paar bildend, betrachtet) — das *erste ungleiche* Paar die
>
> grössere Ziffer | oben
unten | hat, tritt | keine
eine | Verminderung um eine Einheit ein.
>
> Beim Addiren: wenn [für] das erste Paar, welches eine von 9 verschiedene Summe gibt, diese Summe
>
> | größer
kleiner | ist als 9, tritt | eine
keine | Vergrösserung um eine Einheit ein . . .

Dividieren Wie zehn Stellen der Dezimalbruchentwichlung von $\frac{2}{31831}$ bestimmt werden können, muss im Zeitalter des Taschenrechners nicht erklärt werden. Mehr als zehn Stellen erhält man nicht auf Knopfdruck — doch macht die Anwendung der höheren Arithmetik auf die elementare dies unter Verwendung der Gleichung $\frac{2}{31831} = \frac{34}{139} - \frac{56}{229}$ möglich; diese Gleichung findet sich in den *Leistenotizen* ([31] bei Seite 79).

Philipp Maennchen wies im Abschnitt *Das Gausssche Divisions–Verfahren* seines Aufsatzes über *Gauss als Zahlenrechner* auf diese Gleichung hin ([33] p. 9/10). Überraschend fehlt in dem von Theo Gerardy erstellten Nachlassverzeichnis ([44], p. 14) ein Hinweis auf dieses schon in den Werken besprochene Fundstück. Stattdessen heißt es in seinem Verzeichnis, `S. 79 numerische Gleichungen (zu Leiste?)`. Unter Verwendung der schon genannten *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche mit Nennern aus dem ersten Tausend in Dezimalbrüche* kann die Dezimalbruchentwicklung von $\frac{2}{31831}$ ohne Division auf beliebig viele Stellen bestimmt werden. Eine ausführliche Gebrauchsanweisung gibt es in Artikel 316 des Sechsten Abschnitts der Disquisitiones Arithmeticae:

> Nach diesen Prinzipien haben wir für alle Nenner von der Form p^{μ} unterhalb 1000 eine Tafel der notwendigen Perioden aufgestellt, die wir ganz oder auch in noch weiterer Fortsetzung bei gegebener Gelegenheit veröffentlichen werden. Hier möge die bis zu 100 nur fortgeführte Tafel III als

Probe genügen, und wird eine Erklärung derselben kaum nötig sein. Für diejenigen Nenner, für welche 10 primitive Wurzel ist, stellt sie die Perioden der Brüche mit dem Zahler 1 dar (nämlich für 7, 17, 19, 23, 29, 47, 59, 61, 97), für die übrigen die f den Zählern $1, r, r^2, \ldots, r^{f-1}$ entsprechenden Perioden, welche durch die beigeschriebenen Zahlen $(0), (1), (2), \ldots$ unterschieden sind; für die Basis r ist immer dieselbe primitive Wurzel genommen wie in Tafel I. Hiernach kann also die Periode eines jeden Bruches, dessen Nenner in dieser Tafel enthalten ist, mittelst der Vorschriften des vorigen Artikels abgeleitet werden, nachdem der Index des Zählers nach der Tafel I berechnet ist. Übrigens lässt sich für so kleine Nenner die Aufgabe ebenso leicht ohne die Tafel I erledigen, wenn man durch gewöhnliche Division soviel Anfangsziffern der gesuchten Mantisse berechnet, als nach Artikel 313 erforderlich sind, um sie von allen andern desselben Nenners unterscheiden zu können (für die Tafel III nicht mehr als 2), und sämtliche demselben Nenner entsprechende Perioden durchmustert, bis man zu jenen Anfangsziffern gelangt, welche den Anfang der Periode unzweifelhaft anzeigen; es muss jedoch darauf hingewiesen werden, dass jene Ziffern auch getrennt sein können, so dass die erste (oder mehrere) das Ende irgend einer Periodede die andere (oder die anderen) den Anfang derselben Periode bilden.

Beispiel. Man sucht die Periode des Bruches $\frac{12}{19}$. Hier hat man für den Modul 19 nach Tafel I $\text{ind.}12 = 2\text{ind.}2 + \text{ind.}3 = 39 \equiv 3 \pmod{18}$ (Artikel 57). Somit muss man, da man für diesen Fall nur eine dem Zähler 1 entsprechende Periode hat, die drei ersten Ziffern derselben an das Ende setzen, woraus man die gesuchte Periode 631578947368421052 erhält. — Ebenso leicht hätte man den Artfang der Periode aus den beiden ersten Ziffern 63 gefunden.

Wenn man die Periode des Bruches $\frac{45}{53}$ haben will, so ist, für den Modul 53, $\text{ind.}45 + 2\text{ind.}3 + \text{ind.}5 = 49$; die Anzahl der Perioden ist hier $4 = f$ und $49 = 12f + 1$; daher sind in der mit (1) bezeichneten Periode die 12 ersten Ziffern hinter die übrigen zu setzen, und die gesuchte Periode ist 8490566037735. Die Anfangsziffern 84 sind in diesem Falle in der Tafel von einander getrennt.

Das Verfahren zur Subtraktion liefert in Kombination mit Gauß' Methode für die Division aus dem sechsten Abschnitt der *Disquisitiones Arithmicae* das notwendige Hilfsmittel dafür, eine Tafel wie die von Schulze gewünschte zu erstellen([17] p. 364–373).

Übungsaufgabe zum Subtrahieren: Man bestimme mit der Methode von Gauß 20 Stellen des Dezimalbruchs von $\frac{2}{31831}$.

Diese erste arithmetische Großtat von Gauß wurde allerdings nie recht gewürdigt. Vielleicht hat das ja auch mit Paul Bachmanns Aufsatz *Über* GAUSS' *zahlentheoretische Arbeiten* zu tun, auf den Norbert Schappacher 2006 in seinem Vorwort zu einem Nachdruck der *Disquisitiones Arithmeticae* ausdrücklich hinweist ([18], p. XVIII*). In dem Werke–Beitrag heißt es nach einer zehnzeiligen Zusammenfassung des sechsten Abschnitts, ≫... *was alles mehr praktisches als theoretisches Interesse erweckt*≪ ([1] p. 32). Blendet dieser Kommentar nicht den wesentlichen Teil der Entstehungsgeschichte der *Disquisitiones Arithmicae* aus, in dem Theorie und Praxis sich gegenseitig bedingten?

Danksagung Bärbel Mund von der Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke* der SUB–Göttingen danke ich für die immer freundliche und stets hilfreiche Beantwortung meiner zahlreichen Fragen und insbesondere auch für die Beschaffung des für diese Arbeit nötigen Materials aus dem Nachlass von Gauß.

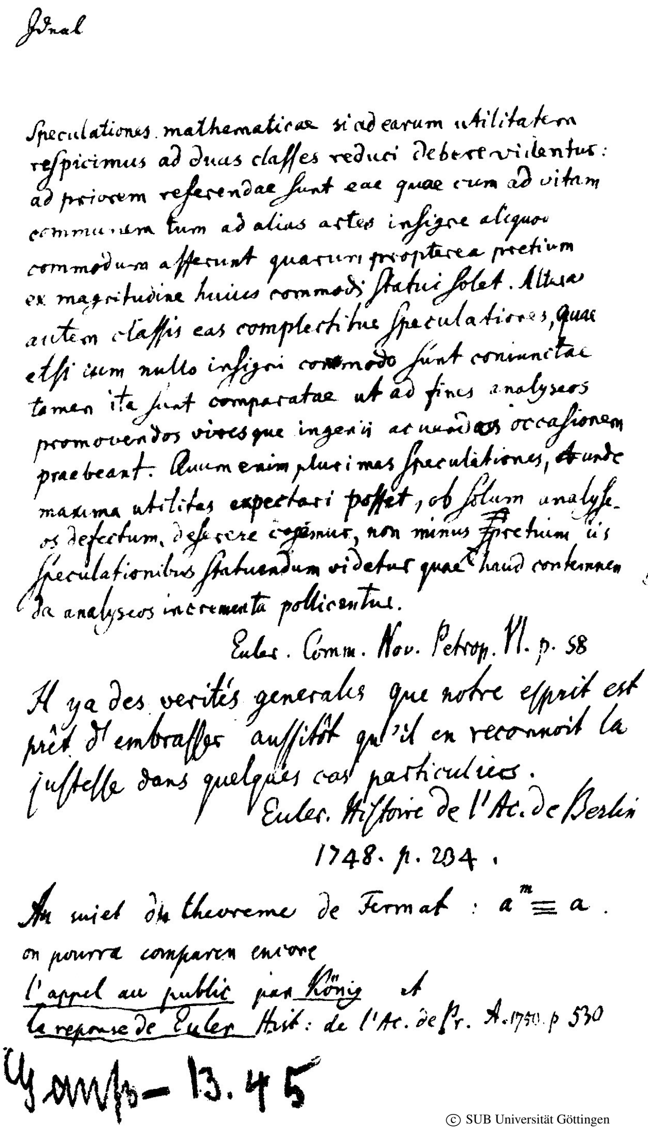
Bei Maarten Bullynck bedanke ich mich für den freundschaftlichen Gedankenaustausch seit 2007, der mit dem Thema „Gauß und die periodischen Dezimalbrüche" begann. Eine Anfang 2009 begonnene, gemeinsame Arbeit zum Rechenbuch von Gauß wurde schnell zu einem Einmann–Projekt, und so schlug Maarten im September 2009 vor, auf den Entwurf–Seiten für den im Entstehen begriffenen Aufsatz mit dem Titel, „*Liebes Büchlein — Das Rechenbuch von Carl Friedrich Gauß*", seinen Namen als Co–Autor wegzulassen. Weil das Rechnen bei Gauß, das ja der *Aufsuchung viel versteckterer Wahrheiten* dient, oft mit der *Rechnerei* gleichgesetzt wird, die zu einer allerersten Bestätigung einer solchen Wahrheit oft nötig ist, bekam diese Arbeit ihren jetzigen Titel.

Leonhard Siebeneicher verdanke ich die schwarz–weiß Bearbeitung des vom *Göttinger Digitalisierungs Zentrums* angefertigten Scans der letzten Seite der Notizen.

Der Abteilung *Handschriften und Seltene Drucke* der SUB–Göttingen danke ich schließlich für ihr Einverständnis damit, dass das *Göttinger Digitalisierungs Zentrums* in meinem Auftrag Scans der mich interessierenden Quellen anfertigen durfte und mir gestattete, diese zu erwerben. Ohne einen derartigen, modernen Zugang zu den Quellen wäre diese Arbeit sicherlich nicht zustande gekommen.

Kopien von Originalmanuskripten

1. Eine Kopie der letzten Seite der Leistenotizen:



Journal

Speculationes mathematicae si ad earum utilitatem respicimus ad duas classes reduci debere videntur: ad priorem referendae sunt eae quae cum ad vitam communem tum ad alias artes insigne aliquod commodum afferunt quarum propterea pretium ex magnitudine huius commodi statui solet. Altera autem classis eas complectitur speculationes, quae etsi cum nullo insigni commodo sunt coniunctae tamen ita sunt comparatae ut ad fines analyseos promovendos viresque ingenii acuendas occasionem praebeant. Quum enim plurimas speculationes, unde maxima utilitas expectari posset, ob solum analyseos defectum, deserere cogamur, non minus pretium iis speculationibus statuendum videtur quae haud contemnenda analyseos incrementa pollicentur. 58

Euler. Comm. Nov. Petrop. VI. p. 58

Il y a des verités generales que notre esprit est prêt d'embrasser aussitôt qu'il en reconnoit la justesse dans quelques cas particuliers.

Euler. Histoire de l'Ac. de Berlin 1748. p. 234.

Au sujet du theoreme de Fermat : $a^m \equiv a$.

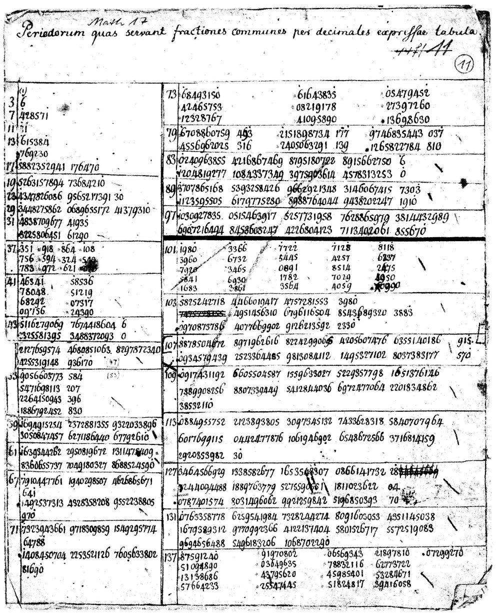
on pourra comparer encore

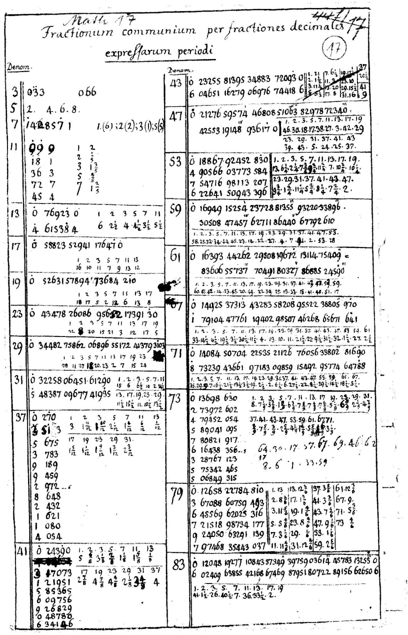
l'appel au public par König et

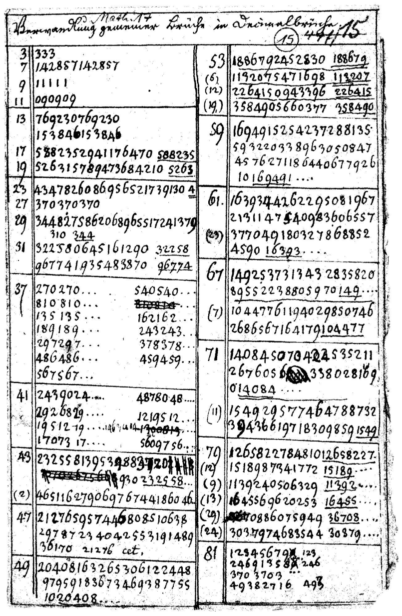
la reponse de Euler Hist: de l'Ac. de Pr. A. 1750. p 530

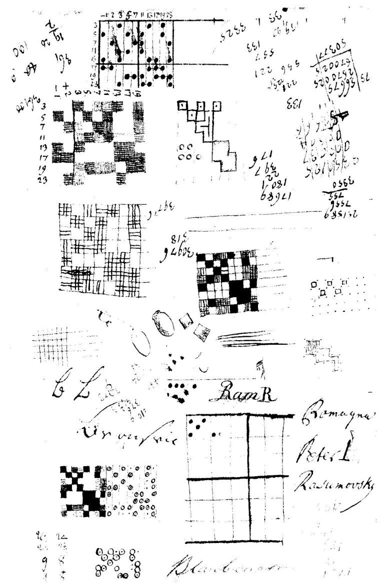
Gauss Mss – 13.45

2. Vier Kopien aus `Math 17 Dezimalbruchtafeln`:









Internetquellen und weitere Informationen

Die *Arithmetica theoretico–practica* von Christian Stephan Remer:
http://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Remer.djvu
Der Scan des Rechenbuches gehört, wie eine Reihe anderer in der Arbeit erwähnter Quellen, seit 2005 zu meiner digitalen Bibliothek zum Rechnen:
http://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Rechnen.html
Diese Arbeit entstand bei der Ausarbeitung der Fußnote 10 des Workshops zum Rechnen:
http://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/workshop.pdf
Ein Vorläufer zu dem Prager Workshop war ein Vortrag zum Wintermeeting der Canadian Mathematical Society im Dezember 2000 in Vancouver: Auf der Basis von Leonhard Eulers *Einleitung zur Rechenkunst* [15] entstand damals *Euler's Art of Reckoning*:
http://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Vortrag.pdf
Göttinger Bibliotheksschriften 30: http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gbs/gbs_30.pdf

Literatur

1. Bachmann, P.: Über Gauss' zahlentheoretische Arbeiten. In: Gauß, Carl Friedrich: Werke, Band X_2, Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922–1933
2. Bühler, W. K.: Gauss: A Biographical Study, Berlin, Springer, 1981.
3. Bullynck M.: Vom Zeitalter der Formalen Wissenschaften. Anleitung zur Verarbeitung von Erkenntnissen anno 1800, vermittelst einer parallelen Geschichte. Thesis, Universiteit Ghent. Ghent, Belgium, 2006. Defended 22.3.2006, available at www.kuttaka.org/ZfW.pdf.
4. Bullynck, M., A note on article 36 in Gauss's Disquisitiones. A ramificated story in the margin of the re–writing of section II. Bull. of the Belg. Math. Society — Simon Stevin 13 (5), 945–947, 2007.
5. Bullynck M.: Aspects of 18th Century Mathematical Socialisation: The Case of C.F. Gauss, Materials on the Genesis of the Disqsuisitiones Arithmeticae, Part I, preprint, http://www.sarton.ugent.be/publications/preprints.
6. Bullynck M.: A History of Factor Tables with Notes on the Birth of Number Theory 1657–1817. Verfügbar über: www.kuttaka.org/FactorTables.pdf.
7. Bullynck M.: Decimal periods and their tables: A German research topic (1765–1801), Historia Mathematica, Volume 36, p. 151–154, 2009
8. Bullynck M.: Modular Arithmetic before C.F. Gauss, Systematizations and discussions on remainder problems in 18th-century Germany. In: Historia Mathematica, 38, p. 48–72, 2009.
9. Conway, J. H. C, Guy, R. K.: The Book of Numbers, Copernicus, New York, NY, 1996.
10. Davenport, H.: The Higher Arithmetic, Sixth edition, Cambridge University Press, 1992.
11. Dirichlet, P. G.: Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von R. Dedekind, F. Vieweg et fils, Braunschweig, 1863.
12. Dunnington, G. Waldo: Carl Friedrich Gauss, Titan of Science. New York: Hafner, 1955. Reprint, The Mathematical Association of America, Washington DC, 2004.
13. Eisenstein, G.: Mathematische Abhandlungen besonders aus dem Gebiete der höhern Arithmetik und der elliptischen Functionen; mit einer Vorrede von Gauss. Berlin, Reimer, 1847.
14. Euklid: Elementorvm Evclidis libri XV ad Graeci contextvs fidem recensiti et ad vsvm tironvm accomodati, Leipzig, 1768. Gauß' Exemplar, Signatur: Gauss-Bibl 189.
15. Euler, L.: Einleitung zur Rechen–Kunst zum Gebrauch des Gymnasii bey der Kayserlichen Academie der Wissenschafften in St. Petersburg, 2 Bände, 1738/1740.
16. Fuchs, W.: Die Leiste–Notizen des jungen Gauß, Gauss–Gesellschaft e.V. Göttingen — Mitteilungen Nr. 15 (1978).
17. Gauß, C. F.: Untersuchungen über höhere Arithmetik, deutsch herausgegeben von H. Maser, Berlin, 1889, reprinted, AMS Chelsea Publ., New York, 1981.
18. Gauß, C. F.: Disquisitiones Arithmeticae. Mit einer Einleitung von N. Schappacher. Olms, Hildesheim Zürich, New York, 2006.
19. Gauß, C. F.: Werke, Band II, Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1863.
20. Gauß, C. F.: Werke, Band X_2, Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922–1933.
21. Gauß, C. F., Zimmermann, E. A. W.: Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Eberhard August Wilhelm von Zimmermann. Hrsg. Poser, H., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1987.
22. GAUSS an SCHUMACHER (1844), *Addieren und Subtrahieren von links nach rechts*, Praxis des numerischen Rechnens, Werke XII, Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1929.
23. GOLDSTEIN , C. (1992), *On a Seventeenth Century Version of the "Fundamental Theorem of Arithmetic"*, Historia Mathematica 19.

24. Goldstein, C. et al. (eds.), The Shaping of Arithmetic after C. F. Gauss's Disquisitiones Arithmeticae, Springer, Berlin Heidelberg, 2007.
25. Hindenburg, C. F.: Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehenden Zahlen, durch Abzählen oder Abmessen bequem und sicher zu finden, nebst Anwendung der Methode auf verschiedene Zahlen, besonders auf eine danach zu fertigende Factorentafel, mit eingestreuten, die Zahlenberechnung überhaupt betreffenden Anmerkungen, Leipzig, 1776.
26. Klein F.: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert, Julius Springer, Berlin, 1926. Reprint, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1979.
27. Klein F.: Abdruck des Tagebuchs (Notizenjournals) mit Erläuterungen. In: Gauß, Carl Friedrich: Werke, Band X_1, Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1917.
28. Küssner, M.: Carl Friedrich Gauß und seine Welt der Bücher. Musterschmidt, Göttingen, 1979.
29. Kuřina, F., Siebeneicher, C.: Algebra and Geometry in Elementary and Secondary School. In Barbin, E. et al. (eds.): History and Epistem. in Math. Ed., Proc. 5th Europ. Summer Univ., p. 30–38, Prague 2007.
30. Lambert, J. H.: Zusätze zu den Logarithmischen und Trigonometrische Tabellen, Haude und Spener, Berlin, 1770.
31. Leiste, C.: Die Arithmetik und Algebra zum Gebrauch bey dem Unterrichte. Exemplar der Gaus-Bibliothek aus dem Nachlass von Gauß, Signatur Cod. Ms. Handbuch 1. Wolfenbüttel, 1790.
32. Maennchen P.: Die Wechselwirkung zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauss. In: Nachr. d. K. Ges., Heft VII., Leipzig, 1918.
33. Maennchen, P.: Gauss als Zahlenrechner. In: Gauß, Carl Friedrich: Werke, Band X_2, Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922–1933.
34. Maennchen, P.: Methodik des mathematischen Unterrichts. Diesterweg, Frankfurt a.M. 1928.
35. Mania H.: Gauß — eine Biographie, Rowohlt, Reinbeck, 2008.
36. Reich K.: Lehrbücher, Elementarmathematik. In: Folkerts M. et al. Maß, Zahl und Gewicht: Mathematik als Schlüssel zu Weltverständnis und Weltbeherrschung. Acta Humanoria, Weinheim, 1989.
37. Reich K.: Der junge Gauss und seine Welt der Mathematikbücher. In: Mittler E. (Hrsg.): „Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst", Carl Friedrich Gauß in Göttingen. Göttinger Bibliotheksschriften 30, 2005.
38. Reich K.: Logarithmentafeln Gauß' „tägliches Arbeitsgeräth". In: Mittler E. (Hrsg.): „Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst", Carl Friedrich Gauß in Göttingen. Göttinger Bibliotheksschriften 30, 2005.
39. Reich, K.: Gauß' geistige Väter: nicht nur „summus Newton", sondern auch „summus Euler". In: Mittler E. (Hrsg.): „Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst". Bibliotheksschriften 30, 2005.
40. Reich K.: Ein neues Blatt in Eulers Lorbeerkranz, durch Carl Friedrich Gauß eingeflochten. In: Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Neue Folge, 10. Band, 2011.
41. Remer, C. S.: Arithmetica theoretico–practica: das ist: Anweisung zu der Arithmetique, für diejenigen, so in derselben den rechten Grund legen wollen . . . , Schröder, Braunschweig, 1737.
42. Remer, C. S. Demonstrativische Anweisung zur Rechen–Kunst, für diejenigen, so in derselben den rechten Grund legen wollen . . . , Zweyte Auflage, Schröder, Braunschweig, 1739.
43. Sartorius von Waltershausen, W.: Gauss zum Gedächtniss, Hirzel, Leipzig, 1856.
44. Rohlfing, H. Das Erbe des Genies: Der Nachlass Carl Friedrich Gauß an der Niedersächsischen Staats– und Universitätsbibliothek Göttingen. In: Gauss-Gesellschaft e.V., Mitteilungen Nr. 40, Göttingen, 2003.
45. SCHERING, E. (1863), *Tafel zur Verwandlung gemeiner Brüche mit Nennern aus dem ersten Tausend in Dezimalbrüche,* Gauss' Werke, Band II, Göttingen.
46. Schlesinger, L. Der junge Gauß. In: Nachrichten der Gießener Hochschulgesellschaft, Band 5, Heft 3, Gießen, 1927.
47. Schlesinger, L. Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie, Gauß, Carl Friedrich: Werke, Band X_2, Hrsg. Gesellschaft der Wissenschaften, Göttingen, 1922–1933.
48. Schulze, J. C.: Neue und Erweiterte Sammlung logarithmischer, trigonometrischer und anderer Tafeln, August Mylius, Berlin, 1778.
49. Shafarevitch, I. R.: Discourses on Algebra, Springer, Berlin, Heidelberg, 2003.
50. Shanks, D.: Solved and unsolved Problems in Number Theory, 2. ed. Chelsea, New York, NY, 1978.
51. Weil, A.: Zahlentheorie — ein Gang durch die Geschichte von Hammurapi bis Legendre, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 1992,