Eine Bijektion zwischen Untergruppen freier Gruppen und Systemen konnexer Permutationen
Summarium

Fakultät für Mathematik der Universität Bielefeld, 1992
Torsten Sillke

In der vorliegenden Arbeit wird eine Bijektion zwischen:

- den Untergruppen U vom Index n der in der von $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ erzeugten Gruppe $\mathcal{F}_k$ mit der Relation $x_0x_1 \dots x_{k-1} \in U$,
- und den Systemen von Permutationen $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1})$ auf $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $\langle\mu_1, \dots, \mu_{k-1}\rangle(\{1, \dots, i\}) \neq \{1, \dots, i\}$ für alle $i = 1, \dots, n-1$.

konstruiert. Zu diesem Zweck werden Untergruppen U vom Index n der oben beschriebenen Art durch Systeme $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}; e_0, e_1, \dots, e_{k-1})$ von Permutationen $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ einer festen endlichen Menge E der Kardinalität n und Elementen $e_0, e_1, \dots, e_{k-1} \in E$ repräsentiert, die den folgenden Bedingungen genügen:

$(\Xi 0)$	$\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1} \in E$;
$(\Xi 1)$	Es gilt $\tau_\epsilon e_{\epsilon+1} = e_\epsilon$ für alle $\epsilon \in \{0, 1, \dots, k-1\}$;
$(\Xi 2)$	Die von $\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}$ erzeugte Untergruppe operiert transitiv auf E.

Die Systeme von Permutationen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}$ von $\{1, 2, \dots, n\}$ mit $\langle\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{k-1}\rangle(\{1, \dots, n\}) \neq \{1, \dots, n\}$ für alle $i = 1, \dots, n$ werden dagegen durch k-Tupel von Bijektionen $w_0, w_1, \dots, w_{k-1} : E \xrightarrow{\sim} \{1, \dots, n\}$ repräsentiert, für die es keine nicht-triviale Teilmenge E' von E mit $w_\epsilon(E') = \{1, \dots, n\}$ für alle $\epsilon \in \{0, 1, \dots, k-1\}$gibt.

Hauptergebnis der Arbeit ist, daß es für festes E genau eine Bijektion zwischen der Menge aller oben beschriebener Systeme $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}; e_0, e_1, \dots, e_{k-1})$ auf der einen Seite und der Menge aller oben beschriebenen Systeme $(w_0, w_1, \dots, w_{k-1})$ auf der anderen Seite gibt, derart daß ein System $(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{k-1}; e_0, e_1, \dots, e_{k-1})$ einem System $(w_0, w_1, \dots, w_{k-1})$ genau dann entspricht, wenn die beiden Systeme für alle $\epsilon \in \{0, 1, \dots, k-1\}$den folgenden Bedingungen genügen:

(T0)	$w_\epsilon(e_\epsilon) = 1$;
(T1)	für alle $f \in E$ gilt $w_\epsilon(\tau_\epsilon f) \leq w_\epsilon(f) + 1$;
(T2)	$\{f \in E \mid w_\epsilon(\tau_\epsilon^i f) \leq w_\epsilon(f) \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}\} =$ $\{f \in E \mid w_{\epsilon+1}(\tau_\epsilon^i f) \geq w_{\epsilon+1}(f) \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}\}$;
(T3)	$f', f'' \in \{f \in E \mid w_\epsilon(\tau_\epsilon^i f) \leq w_\epsilon(f) \text{ für alle } i \in \mathbb{Z}\}$ und $w_\epsilon(f') < w_\epsilon(f'')$ impliziert $w_{\epsilon+1}(f') < w_{\epsilon+1}(f'')$.

Alle Indices sind als Indices modulo k aufzufassen.