Vertiefung Elementare Zahlentheorie

WS 2010/2011, Klausur 2, 29.3.2011

Aufgabe 1. Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus zur Berechnung von $d = \operatorname{ggT}(2947, 910)$ und einer linearen Darstellung $d = x \cdot 2947 + y \cdot 910$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems linearer Kongruenzen:

$x \equiv 2 \pmod 4, \quad x \equiv 3 \pmod 5, \quad x \equiv 4 \pmod 7.$

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie die Reste von 222^{333} bei Division durch 11 und von 200^{200} bei Division durch 7.

(b) Bestimmen Sie die Endziffer in der Dezimaldarstellung von 987^{6543}.

Aufgabe 4. Sei p eine Primzahl $\neq 2$. Beweisen Sie:

$1^2 \cdot 3^2 \cdots (p-4)^2 \cdot (p-2)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod p.$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die folgenden Werte der Eulerschen ϕ-Funktion:

(a) $\phi(120)$, (b) $\phi(625)$, (c) $\phi(2222)$, (d) $\phi(10000)$.

Aufgabe 6. (a) Erstellen Sie eine Index-Tabelle für die Primzahl 13 und die Primitivwurzel 2.

(b) Verwenden Sie die Index-Tabelle zur Bestimmung aller Lösungen der Kongruenz $x^9 \equiv 8 \pmod{13}$.

Aufgabe 7. Berechnen Sie die folgenden Legendre-Symbole:

(a) $(\frac{60}{233})$, (b) $(\frac{62}{263})$, (c) $(\frac{64}{293})$.

Aufgabe 8. Berechnen Sie alle primitiven pythagoreischen Tripel (x, y, z) mit

(a) $z = 37$, (b) $z = 39$, (c) $z = 41$.

Aufgabe 9. Stellen Sie die Zahlen

(a) 226, (b) $4453 = 61 \cdot 73$, (c) $101^5 \cdot 103^4 \cdot 107^3 \cdot 109^2$

als Summen von zwei Quadraten dar; sollte eine solche Darstellung nicht möglich sein, geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 10. Beweisen Sie direkt (d.h. ohne Verwendung des Drei-Quadrate-Satzes): Die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 = 8a + 7 \qquad (a \text{ ganz} \geq 0)$$

hat keine ganzzahlige Lösung (x, y, z).