AUSGEWÄHLTE KAPITEL DER ZAHLENTHEORIE
PROBEKLAUSUR

PROF. DR. WILLIAM CRAWLEY-BOEVEY, VINCENT KLINKSIEK UND DR. JULIA SAUTER

20.12.2021

Name	
Vorname	
Matrikelnummer	
Unterschrift	
Semester, in welchem die Studienleistung erbracht wurde:	

☐ Ich bin damit einverstanden, dass mein Ergebnis unter meiner Matrikelnummer auf der Homepage der Veranstaltung veröffentlicht wird.

In jeder Aufgabe können maximal 4 Punkte erreicht werden. Die Aufgaben sind nicht notwenigerweise gleich lang oder schwer.

A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ	Note

Aufgabe 1. $(2+2)$

(1) Definieren Sie, was es heißt, dass a teilt b (auch notiert als $a|b$). Achten Sie insbesondere darauf zu definieren aus welchen Zahlbereichen a und b kommen.

(2) Es seien a, b und c ganze Zahlen. Zeigen Sie, wenn $a|b$ und $a|c$, dann gilt auch $a|(mb+nc)$ für alle ganzen Zahlen n und m.

Aufgabe 2. $(2+2)$

(1) Definieren Sie, was es heißt, dass (a, b, c) ein primitives Pythagoräisches Tripel ist. Achten Sie insbesondere darauf zu definieren aus welchen Zahlbereichen a, b und c kommen.

(2) Es sei (a, b, c) ein primitives Pythagoräisches Tripel. Zeige 7 teilt nicht c.
Hinweis: Überlege dir welche Lösungen $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 7$ hat.

Aufgabe 3. $(2+2)$

(1) Beweisen Sie den im Folgenden aufgeschriebenen Satz aus der Vorlesung, genannt *Chinesischer Restsatz*.

Satz (15). *Sind m und n teilerfremde, positive natürliche Zahlen, so hat das System von Kongruenzen*

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod m \\ x \equiv b \pmod n \end{cases}$$

für beliebige ganze Zahlen a und b Lösungen, und diese sind gerade die Lösungen einer einzigen Kongruenz

$$x \equiv x_0 \pmod{mn}.$$

(2) Lösen Sie das folgende System von Kongruenzen

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 5 \\ x \equiv 1 \pmod 6 \\ x \equiv 3 \pmod 7. \end{cases}$$

Aufgabe 4. (4) Es sei $g(x) := x^2 + 3x + 14$. Finden Sie eine Lösung der Kongruenz

$$g(x) \equiv 2 \pmod{125}.$$

Aufgabe 5. $(2+2)$

(1) Finden Sie alle Lösungen der linearen diophantischen Gleichung

$$15x + 63y = 450$$

in den ganzen Zahlen.

(2) Finden Sie alle Lösungen der der obigen Gleichung in den natürlichen Zahlen.

Aufgabe 6. $(2+2)$

(1) Erklären Sie, was es bedeutet, dass $a \equiv b \pmod m$. Achten Sie insbesondere darauf zu definieren aus welchen Zahlbereichen a, b und m kommen.

(2) Finden Sie alle Restklassen modulo 49, welche die Kongruenz

$$x^3 + 3x + 6 \equiv 0 \pmod{49}$$

lösen.