Universität Bielefeld WS 2021/2022
Lehrender: Prof. Dr. William Crawley-Boevey
Tutorien: Dr. Julia Sauter und Vincent Klinksiek
Abgabe: Montag 24.01.2022 12:00

AUSGEWÄHLTE KAPITEL: ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
BLATT 11

Aufgabe 1. (4**)** Sei p eine Primzahl und $p \neq 2, 5$. Zeige, dass es eine positive natürliche Zahl n gibt mit

$$p \mid \underbrace{11\ldots1}_{n \text{ Mal}}.$$

Hinweis: Wie hängen $10^{p-1} - 1$ und Zahlen der Form $11\ldots1$ zusammen. Es ist außerdem sinnvoll zu begründen, dass $p \mid 10^{p-1} - 1$. Man kann die Fälle $p = 3$ und $p \neq 3$ betrachten.

Definition: Sei a eine natürliche Zahl. Eine zusammengesetzte natürliche Zahl n heißt Fermatsche Pseudoprimzahlen zur Basis a, wenn n und a teilerfremd sind und $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

Definition: Eine zusammengesetzte natürliche Zahl n heißt Carmichael Zahl, wenn n eine Pseudoprimzahl zur Basis a für jede natürliche Zahl a mit $\mathrm{ggT}(\mathrm{n}, \mathrm{a}) = 1$ ist.

Aufgabe 2. ($1 + 1 + 3$**)** Begründe die folgenden Punkte:

(1) Die Zahl 341 ist eine Pseudoprimzahl zur Basis 2.
(2) Die Zahl 91 ist eine Pseudoprimzahl zur Basis 3.
(3) Die Zahl $1729 = 7 \cdot 13 \cdot 19$ ist eine Carmichael Zahl.

Hinweis: Für (3) ist es hilfreich, dass $1728 = 6 \cdot 288 = 12 \cdot 144 = 18 \cdot 96$. Benutze außerdem den kleinen Satz von Fermat.

Aufgabe 3. (3**)** Finde alle quadratischen Reste modulo 23.

Aufgabe 4. (4**)** Sei p eine ungerade Primzahl. Zeige, dass kein quadratischer Rest modulo p eine Primitivwurzel modulo p ist.