Universität Bielefeld WS 2021/2022
Lehrender: Prof. Dr. William Crawley-Boevey
Tutorien: Dr. Julia Sauter und Vincent Klinksiek
Abgabe: Montag 31.01.2022 12:00

AUSGEWÄHLTE KAPITEL: ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
BLATT 12

Aufgabe 1. **(**$1+1+1+1+1$**)** Untersuche, welche Zahlen der folgenden Liste sich als Summe zweier Quadrate schreiben lassen und stelle sie gegebenenfalls als Summe zweier Quadrate dar.

$$289, \quad 290, \quad 1521, \quad 16\cdot 13, \quad 17\cdot 18\cdot 19.$$

Aufgabe 2. **(**$1+1$**)**

(1) Überprüfe, ob 89 ein quadratischer Rest modulo 13 ist.
(2) Überprüfe, ob 20 ein quadratischer Rest modulo 17 ist.

Hinweis: Benutze das Euler-Kriterium, Satz 30

Aufgabe 3. **(**$1+1+1+1+1+1$**)**

$$\left(\frac{11}{17}\right), \quad \left(\frac{7}{47}\right), \quad \left(\frac{8}{17}\right), \quad \left(\frac{60}{233}\right), \quad \left(\frac{62}{263}\right), \quad \left(\frac{64}{293}\right).$$

Aufgabe 4. (3) Es sei $p \geq 5$ eine Primzahl. Rechne Folgendes mit dem quadratischen Reziprozitätsgesetz nach:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \text{falls } p \equiv 1 \pmod{12} \text{ oder } p \equiv -1 \pmod{12} \\ -1, & \text{falls } p \equiv 5 \pmod{12} \text{ oder } p \equiv -5 \pmod{12} \end{cases}$$

Folgere: Sei $p \geq 5$ eine Primzahl.
Dann ist 3 quadratischer Rest modulo p genau dann, wenn $p \equiv 1 \pmod{12}$ oder $p \equiv -1 \pmod{12}$ gilt.