Universität Bielefeld WS 2021/2022
Lehrender: Prof. Dr. William Crawley-Boevey
Tutorien: Dr. Julia Sauter und Vincent Klinksiek
Abgabe: Montag 22.11.2021 12:00

AUSGEWÄHLTE KAPITEL: ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE BLATT 6

Aufgabe 1. ($2+2$**)** Finde alle $x \in \mathbb{Z}$, die die folgenden simultanen Kongruenzen lösen.

(1) $x \equiv 2 \pmod 6,\ x \equiv 2 \pmod 5,\ x \equiv 5 \pmod 9$
(2) $x \equiv 7 \pmod 3,\ x \equiv 8 \pmod 4,\ x \equiv 9 \pmod 5,\ x \equiv 10 \pmod 7$

Aufgabe 2. ($2+2$**)** Zeige durch Reduktion der diophantischen Gleichung, dass es keine Lösungen in $\mathbb{Z}$ gibt. Dafür solltest jeweils geeignete Zahlen suchen modulo denen du rechnen kannst, damit die Gleichung eine einfache Form erhält.

(1) $x^3 - 7x^2y + 14x^2 - 35y - 2 = 0$.
(2) $x^5y^9z + 9xy^5z^{13} + 11x^{17}z^5 - 201x^5z^9 + 5 = 0$. Hierbei ist es hilfreich durch ausprobieren zu beweisen, dass $x^5 \cong x \pmod{10}$ für alle $x \in \{0, 1, \dots, 9\}$ gilt.

Aufgabe 3. ($2+2$**)** Löse die beiden Sachaufgaben:

(1) Eine Mutter zahlt ihren drei Kindern Paul, Sofie und Alex die gleiche Summe Taschengeld pro Monat.Paul kauft nur Sammelkarten, jede Packung kostet 12 Euro, er behält 9 Euro über. Sofie kauft Bücher zu je 18 Euro das Stück, sie behält 15 Euro übrig.Alex kauft Computerspiele zu je 30 Euro das Stück, er behält auch 15 Euro übrig.
Wieviel Taschengeld bekommt jedes Kind im Monat, wenn die Mutter jedem Kind weniger als 200 Euro bezahlt?
(2) Auf einer großen Konferenz wird versucht die Teilnehmer zum Essen auf gleichgroße Tische aufzuteilen. Wenn man die Teilnehmer auf 12-er Tische verteilt bleibt eine einzelne Personen übrig. Bei 13-er Tischen geht es auf. Später bildet ein Vortragender (der selber auch Teilnehmer ist) aus allen übrigen Teilnehmer für eine Gruppenarbeit 5-er Gruppen. Es geht genau auf und nur er selber bleibt übrig.
Wie viele Teilnehmer hat die Konferenz?

Aufgabe 4 auf Seite 2.

Aufgabe 4. **(**$0.5 \cdot 8$**)** Kreuze die richtigen Aussagen an. Wenn du unsicher bist, schreibe zwei nicht triviale Zahlenbeispiele für deine Hypothese auf und mache kein Kreuz, dann wird dieser Teil mit $0,25$ Punkten bewertet. Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n, m \in \mathbb{N}$.

	wahr	falsch
(1) Die simultane Kongruenz $x \equiv 1 \pmod 2, x \equiv 2 \pmod 3, x \equiv 3 \pmod 4$ ist lösbar.	☐	☐
(2) Die Gleichung $13x - 11y = 1$ hat unendlich viele Lösungen $x, y \in \mathbb{N}$.	☐	☐
(3) Die Gleichung $x^2 - 2 = 0$ hat modulo 7 eine Lösung, aber keine in $\mathbb{Z}$.	☐	☐
(4) a ist idempotent modulo m (das heißt $a^2 \equiv a \pmod m$) genau dann, wenn $m \mid a(a-1)$ gilt. Insbesondere ist 6 idempotent modulo $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$.	☐	☐
(5) Es gilt $[a]_5 = [a]_{15} \cup [a+5]_{15} \cup [a+10]_{15}$.	☐	☐
(6) Wenn $a \equiv 1 \pmod n, b \equiv 1 \pmod m$ gilt, dann ist $ab \equiv 1 \pmod{nm}$.	☐	☐
(7) Die Kongruenz $20x \equiv 11 \pmod{33}$ ist lösbar in $\mathbb{Z}$.	☐	☐
(8) Es gibt kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $5x^7 + 10x^2 + 1 = 0$.	☐	☐