Universität Bielefeld WS 2021/2022
Lehrender: Prof. Dr. William Crawley-Boevey
Tutorien: Dr. Julia Sauter und Vincent Klinksiek
Abgabe: Montag 13.12.2021 12:00

AUSGEWÄHLTE KAPITEL: ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE BLATT 9

Aufgabe 1. ($0.5 \cdot 8$) Finde $x \in \{1, \ldots, m-1\}$ mit

$$x \equiv [5]^{100} \pmod{m}$$

für $m = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$.

Aufgabe 2. ($2 + 1 + 1$) Bearbeite die folgenden Punkte.

(1) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $[x]_8^{24} \in \{[0]_8, [1]_8\}$ und $[x]_9^{24} \in \{[0]_9, [1]_9\}$ und folgere $72 | x^{24}(x^{24} - 1)$.
(2) Zeige, dass für alle $x \in \mathbb{Z}$ gilt: $[x]_{72}^{24} \in \{[0]_{72}, [1]_{72}, [9]_{72}, [-8]_{72}\}$.
(3) Finde alle $x \in \mathbb{Z}$, die die folgende Kongruenz erfüllen $x^{24} + 8 \equiv 0 \pmod{72}$.

Aufgabe 3. ($1 + 1 + 1(+1)$) Bestimme die Lösungen der folgenden Gleichungen mithilfe von quadratischer Ergänzung. Kontroliere in einem der Beispiele durch nachrechnen, dass die mit der oberen Methode gefundenen Lösungen stimmen und es keine weiteren Möglichkeiten gibt. Wir geben mit X in jedem der Fälle die entsprechende Restklasse an.

(1) $X^2 + [11]_{13}X + [4]_{13} = [0]_{13}$
(2) $X^2 + [7]_{11}X = [10]_{11}$
(3) $X^2 + X + [4]_5 = [0]_5$

Aufgabe 4. (4) Sei p eine Primzahl und

$$f(x) := x^{p-2} + \cdots + x + 1.$$

Bestimme alle Restklassen modulo p, die Lösung der Gleichung $f(x) \equiv 0 \pmod{p}$ sind.
Hinweis: Benutze für die Begründung, dass $(x-1)f(x) = x^{p-1} - 1$.