Algebra I
2. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 27.10.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 2.1. (1+2+1) Sei $\theta : G \to H$ ein Homomorphismus und sei $U \leq G$.

(i) Zeigen Sie: $\theta(U) := \{\theta(u) : u \in U\}$ ist eine Untergruppe von H.
(ii) Zeigen Sie: Wenn $U \trianglelefteq G$ und θ surjektiv sind, dann gilt $\theta(U) \trianglelefteq H$.
(iii) Geben Sie ein Beispiel, um zu zeigen: Wenn $U \trianglelefteq G$ und θ nicht surjektiv sind, es ist möglich, dass $\theta(U) \ntrianglelefteq H$.

Aufgabe 2.2. (2+2) Sei G eine Gruppe.

(i) Der *Zentralisator* von $S \subseteq G$ in G ist

$$Z_G(S) = \{g \in G : gs = sg \text{ für alle } s \in S\}.$$

Zeigen Sie, dass $Z_G(S) \leq G$. Für $g \in G$ schreiben wir $Z_G(g)$ statt $Z_G(\{g\})$. Bestimmen Sie $Z_G(g)$ für alle $g \in D_4$.

(ii) Der *Normalisator* von $H \leq G$ in G ist

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}.$$

Zeigen Sie, dass $N_G(H)$ eine Untergruppe von G mit $H \trianglelefteq N_G(H)$ ist. Bestimmen Sie $N_{D_4}(\{e, \tau\})$.

Aufgabe 2.3. (2+2) Für Untergruppen U und V von einer Gruppe G, setzen wir

$$UV := \{uv : u \in U, v \in V\}.$$

(i) Zeigen Sie: UV ist eine Untergruppe von G genau dann, wenn $UV = VU$.

(ii) Finden Sie ein Beispiel einer Gruppe G und Untergruppen U und V, so dass UV keine Untergruppe von G ist.

Aufgabe 2.4. (1+1+1+1) Sei $T = \{z \in \mathbb{C}^\times : |z| = 1\}$ und $\mathbb{R}^{>0} = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Sie sind beide Untergruppen von $\mathbb{C}^\times$. Zeigen Sie Folgendes.

(i) $\mathbb{R}^{>0} \cong \mathbb{C}^\times/T$. [Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $z \mapsto |z|$.]
(ii) $\mathbb{C}^\times \cong \mathbb{R}^{>0} \times T$.
(iii) $T \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.
(iv) $\mathbb{R} \ncong T \times \mathbb{Z}$.