Algebra I
4. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 10.11.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 4.1. (2+2) Sei G eine Gruppe und seien X und Y Mengen mit Gruppenoperationen $G \times X \to X$ und $G \times Y \to Y$.

(i) Sei $\mathrm{Abb}(X, Y)$ die Menge aller Abbildungen $f : X \to Y$. Zeigen Sie, dass

$$G \times \mathrm{Abb}(X, Y) \to \mathrm{Abb}(X, Y), \quad (g, f) \mapsto g * f, \quad (g * f)(x) = gf(g^{-1}x)$$

eine Aktion von G auf $\mathrm{Abb}(X, Y)$ definiert

(ii) Finden Sie die Bahnen im Fall: $G = S_3$, $X = \{1, 2, 3\}$ mit der natürlichen G-Aktion und $Y = \{0, 1\}$ mit der trivialen G-Aktion.

Aufgabe 4.2. (2+2) Sei G eine endliche Gruppe mit einer Aktion auf einer endlichen Menge X.

(i) Für $g \in G$ definieren wir $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X : gx = x\}$. Angenommen, $g, g', a \in G$ und $g' = aga^{-1}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\theta : \mathrm{Fix}(g) \to \mathrm{Fix}(g'), \quad x \mapsto ax$$

eine Bijektion ist.

(ii) Nun seien $g_1, \ldots, g_r$ Repräsentanten der Konjugationsklassen in G, so dass jedes Element von G in genau einer der Konjugationsklassen $CC(g_i)$ liegt. Zeigen Sie die folgende Version von Burnsides Lemma:

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{i=1}^{r} |CC(g_i)| \cdot |\mathrm{Fix}(g_i)|.$$

Mehr...

Aufgabe 4.3. (1+1+1+1) Sei G die Gruppe der Drehsymmetrien eines Tetraeders.

(i) Finden Sie Vertreter $g_1, g_2, \ldots, g_r$ der Konjugationsklassen in G.

(ii) Zeigen Sie, dass die Klassengleichung die Form $12 = 1 + 3 + 4 + 4$ hat.

(iii) Sei $n \geq 1$. Das Tetraeder kann gefärbt werden, indem jede Fläche mit einer von n Farben bemalt wird. Sei X die Menge aller solcher Färbungen, also

$$X = \mathrm{Abb}(F, \{1, \ldots, n\}),$$

wobei F die Menge der Flächen des Tetraeders ist. Für die Aktion von G auf X, finden Sie $|\operatorname{Fix}(g_i)|$ für $i = 1, \ldots, r$.

(iv) Finden Sie mithilfe des Burnside-Lemmas die Anzahl der Bahnen $|X/G|$.

Aufgabe 4.4. (2+2) Zeigen Sie:

(i) $Z(S_n) = \{e\}$ für $n \geq 3$.

(ii) A_n ist der einzige nicht-triviale echte Normalteiler von S_n für $n \geq 5$.

[Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass A_n einfach für $n \geq 5$ ist.]