Algebra I
6. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 24.11.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 6.1. (1+1+1+1) For each of the following rings R and subsets S, determine whether S is a subring or an ideal in R.

(i) $R = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $S = \{f \in R : f(n) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$.

(ii) $R = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $S = \{f \in R : f(n) = f(m) \text{ für alle } n, m \in \mathbb{Z}\}$.

(iii) $R = \mathbb{Z}[X]$, $S = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n : a_m \in \mathbb{Z}m \text{ für alle } m\}$.

(iv) $R = M_2(\mathbb{R})$, $S = \{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 6.2. (2+2) Sei $f : R \to S$ ein Ringhomomorphismus.

(i) Zeigen Sie, dass, wenn $I \trianglelefteq S$, dann $f^{-1}(I) \trianglelefteq R$.

(ii) Geben Sie ein Beispiel für einen Homomorphismus f und ein Ideal $J \trianglelefteq R$ an, so dass $f(J) \ntrianglelefteq S$.

Aufgabe 6.3. (1+1+2) Seien $R = \mathbb{Z}[X]$ und $I = \{p(X) \in R : p(0) \text{ ist gerade, d.h. } p(0) \in \mathbb{Z}2\}$.

(i) Zeigen Sie, dass I ein Ideal von R ist.

(ii) Zeigen Sie, dass $I = R2 + RX$.

(iii) Zeigen Sie, dass I kein Hauptideal von R ist.

[Hinweis. Wenn $p(X)$ und $q(X)$ Polynome ungleich Null in $\mathbb{Z}[X]$ sind, dann ist
$$\mathrm{Grad}(p(X)q(X)) = \mathrm{Grad}\, p(X) + \mathrm{Grad}\, q(X).$$
Dies gilt, denn wenn ihre Terme höchsten Grades aX^n und bX^m sind, dann hat ihr Produkt einen Term abX^{n+m} und $ab \neq 0$.]

Mehr...

Aufgabe 6.4. (1+1+2) Sei R ein kommutative Ring und sei

$$S = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n \in R[X] : a_1 = 0\},$$

die Menge der Polynome, deren linearer Term Null ist (also $S = R + R[X]X^2$).

(i) Zeigen Sie, dass S ein Teilring des Polynomrings $R[X]$ ist.

(ii) Sei $\theta : R[Y, Z] \to S$ der Homomorphismus, der die Inklusion $R \to S$ erweitert und mit $\theta(Y) = X^2$ und $\theta(Z) = X^3$. Zeigen Sie, dass θ surjektiv ist

(iii) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Ker}(\theta)$ das Hauptideal von $R[Y, Z]$ ist, gegeben durch $Y^3 - Z^2$.

[Hinweis. Jedes Element von $R[Y, Z]$ kann in der Form $p_0(Y) + p_1(Y)Z + \cdots + p_n(Y)Z^n$ mit $p_i(Y) \in R[Y]$ geschrieben werden. Verwenden Sie Induktion über n, um zu zeigen, dass es auch in der Form $p_0(Y) + p_1(Y)Z + q(Y, Z)$ geschrieben werden kann, wobei $q(Y, Z) \in R[Y, Z](Y^3 - Z^2)$.]