Algebra I
7. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 01.12.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 7.1. (1+1+2) Sei $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$ und sei $p(X) = X^4 + \bar{3}X^2 \in \mathbb{Z}_4[X]$.

(i) Zeigen Sie: $p(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}_4$.

(ii) Gibt es ein quadratisches Polynom $q(X) \in \mathbb{Z}_4[X]$, so dass $q(a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{Z}_4$?

(iii) Der Ring $\mathbb{Z}_4$ ist kein Körper. Wenn K ein Körper ist, was können Sie über die Polynome $f(X) \in K[X]$ mit $f(a) = 0$ für alle $a \in K$ sagen?

Aufgabe 7.2. (2+2) Beweisen Sie den zweiten Isomorphiesatz für Ringe: Sei $I \trianglelefteq R$.

(1) Wenn J ein Ideal von R mit $I \subseteq J$ ist, dann ist $J/I := \{I + a : a \in J\}$ ein Ideal von R/I, und jedes Ideal X von R/I hat diese Form, mit $J = \{a \in R : I + a \in X\}$.

(2) In diesem Fall, gibt es einen Isomorphismus

$$R/J \to (R/I)/(J/I), \quad J + a \mapsto (J/I) + (I + a).$$

Aufgabe 7.3. (1+1+1+1)

(i) Seien $I, J \trianglelefteq R$. Denken Sie daran, dass IJ das Ideal ist, das durch die Produkte xy mit $x \in I$ und $y \in J$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass $IJ \subseteq I \cap J$.

(ii) Seien $I, J, K \trianglelefteq R$. Nehmen Sie an, dass I und J teilerfremd sind, d.h. $I + J = R$. Nehmen Sie außerdem an, dass I und K teilerfremd sind. Zeigen Sie, dass I und JK teilerfremd sind.

(iii) Seien $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n \trianglelefteq R$ paarweise teilerfremde Ideale. Zeigen Sie, dass die Ideale $I_1 \cap I_2, I_3, \ldots, I_n$ paarweise teilerfremd sind.

(iv) Seien $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_n \trianglelefteq R$ paarweise teilerfremde Ideale. Zeigen Sie durch Induktion unter Verwendung des Chinesischen Restsatzes für Ringe, dass der Ringhomomorphismus

$$\theta : R \to (R/I_1) \times \cdots \times (R/I_n), \quad a \mapsto (I_1 + a, \ldots, I_n + a).$$

surjektiv ist und $\mathrm{Ker}(\theta) = I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$.

Mehr...

Aufgabe 7.4. (1+1+1+1) Sei $\theta : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Q}$ der Ringhomomorphismus gegeben durch

$$\theta(p(X)) = p(\tfrac{1}{2}) \in \mathbb{Q}.$$

(i) Angenommen, $p(X) \in \mathbb{Z}[X]$ und $p(\frac{1}{2}) = 0$. Somit gibt es ein Polynom $q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p(X) = (X - \frac{1}{2})q(X)$ in $\mathbb{Q}[X]$. Sei $f(X) = \frac{1}{2}q(X)$, also $p(X) = (2X - 1)f(X)$. Zeigen Sie: $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

(ii) Zeigen Sie: $\mathrm{Ker}(\theta) = \mathbb{Z}[X](2X - 1)$.

(iii) Per Definition ist $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ das Bild von θ. Zeigen Sie:

$$\mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] = \{\frac{a}{2^n} \in \mathbb{Q} : a \in \mathbb{Z}, n \geq 0\}.$$

(iv) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}[X]/\mathbb{Z}[X](2X - 1) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.