Algebra I
9. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 15.12.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 9.1. (1+1+1+1) Bestimmen Sie, welche der folgenden Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$ sind:

(i) $3X^3 + 10X + 4$,

(ii) $X^4 + 8X^2 + 7$,

(iii) $X^4 + 3X^3 + X^2 + 5X + 6$,

(iv) $3X^6 - 2X^3 + 4X^2 - 8X + 6$,

Aufgabe 9.2. (1+1+1+1) Verwenden Sie das Eisenstein-Kriterium, um zu zeigen, dass die folgenden Polynome in den gegebenen Ringen irreduzibel sind.

(i) $f(X) = X^4 - 4X^3 + 17X - 17 \in \mathbb{Q}[X]$. [Hinweis. Betrachten Sie $f(X+1)$.]

(ii) $g(X) = 3X^4 - 6X + 4 \in \mathbb{Q}[X]$. [Hinweis. Betrachten Sie $Y^4 g(1/Y) \in \mathbb{Q}[Y]$.]

(iii) $h(X,Y) = XY^3 + XY - Y + X^2 - 1 \in \mathbb{Q}[X,Y]$. [Hinweis. $h(X,Y) \in R[Y]$ mit $R = \mathbb{Q}[X]$.]

(iv) $k(X,Y) = X^2 + Y^2 + Z^2 \in \mathbb{C}[X,Y,Z]$. [Hinweis. Faktorisieren Sie $X^2 + Y^2$ in $\mathbb{C}[X,Y]$.]

Aufgabe 9.3. (2+2)

(i) Sei R ein faktorieller Ring und nehmen Sie an, dass R ein eindeutiges irreduzibles Element p hat, bis zur Multiplikation mit einer Einheit. Zeigen Sie: R ist ein euklidischer Ring.

(ii) Sei R der Teilring von $\mathbb{Q}$, bestehend aus den Brüchen $r = a/b$ mit ungeradem b. Zeigen Sie: jedes nicht-null Element $r \in R$ eindeutig in der Form $r = u2^n$ mit u einer Einheit und $n \geq 0$ geschrieben werden kann. Daraus folgern, dass R faktoriell ist und 2 das eindeutige irreduzible Element bis zur Multiplikation mit einer Einheit ist.

Aufgabe 9.4. (4) Sei R ein faktorieller Ring und seien $a, b, c \in R$. Zeigen Sie: Wenn $a|bc$ und $\mathrm{ggT}(a,b)$ eine Einheit ist, dann gilt $a|c$.