Algebra I
10. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 22.12.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 10.1. (4) Für $m \geq 0$ gibt es 2^m normierte Polynome vom Grad m im Polynomring $\mathbb{Z}_2[X]$. Listen Sie alle $14 = 2 + 4 + 8$ normierte Polynome vom Grad $1 \leq d \leq 3$ und ihre Produkt-Zerlegungen in irreduzible normierte Polynome auf.

Aufgabe 10.2. (1+1+1+1)

(i) Zeigen Sie: Das Polynom $f(X) = X^2 + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}_3[X]$.

(ii) Sei $I = \mathbb{Z}_3[X]f(X)$ und $L = \mathbb{Z}_3[X]/I$. Erklären Sie, warum $L = \{I + a + bX : a, b \in \mathbb{Z}_3\}$ und warum L ein Körper ist. (Es genügt, entsprechende Ergebnisse im Vorlesungsskriptum zu beschreiben.)

(iii) Finden Sie eine multiplikative Inverse für das Element $I + 1 + X$ in L.

(iv) Zeigen Sie: Die Gruppe $L^\times$ ist zyklisch der Ordnung 8.

Aufgabe 10.3. (2+2) Angenommen, $d \in \mathbb{Z}$ ist kein Quadrat. Sei $K = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

(i) Zeigen Sie direkt, dass K ein Teilkörper von $\mathbb{C}$ ist. Also ist $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

(ii) Angenommen $c \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: $\sqrt{c} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ genau dann, wenn c oder c/d ein Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 10.4. (1+1+2) Zeigen Sie:

(i) $\mathbb{Q}(i, e^{2\pi i/3}) = \mathbb{Q}(i, \sqrt{3})$.

(ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5}) = Q(\sqrt{2} + \sqrt{5})$.

(iii) $\mathbb{Q}(\sqrt[m]{2}, \sqrt[n]{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt[m]{2} \cdot \sqrt[n]{5})$, falls m und n teilerfremde naturliche Zahlen sind.